

カーボン・フォレストのための 森林計画

赤尾 健一

はじめに

森林は、陸上における最大の炭素貯蔵庫であり、大気中の二酸化炭素を吸収する働きを持っている。このため地球温暖化対策の一つとして、炭素固定林=カーボン・フォレストを大規模に造成することが提案されている。実際のところ、大気中の二酸化炭素は地球公共財(global public bads)なので、森林の炭素固定機能を考慮することは、地球上のいかなる森林経営においても重要である。

本論文では、森林の炭素固定機能を考慮した森林計画を考察する。ここでは、無限計画期間問題として森林計画問題を設定する。木材生産量と炭素固定量を変数とする厳密に凹の期間厚生関数を想定し、森林計画の評価がこの関数の値を割引なしに加算したものに基づいて行われるモデルを用いる。

論文の課題は、このようなモデルにおいて最大計画が存在することを示すこと、そしてその特質を明らかにすることである。

最大計画の存在証明は、McKenzie(1986)の中に示されている手続きにしたがった。それは価値損失アプローチと呼ばれるものであり、より一般的にいえばLiapouov関数を導出し利用する方法である。価値損失アプローチでは、支持価格と呼ばれるベクトルが重要な役割を果たす。本論文の設定では、支持価格の存在を証明することも可能である。しか

しここでは、Mitra and Wan(1986)が開発した技法を応用して、支持価格を具体的に導出した。それによって多くの有用な情報が得られるためである。

本論文は、Mitra and Wan(1986)の応用問題と位置づけられる。彼らは、木材生産のみを考慮した森林計画問題を考察しており、次のような結果を得ている。

1本の木について無限回植伐を繰り返すことを考える。それによって得られる年平均木材量が最大となる伐期齢（伐採される木の林齢）がもし一意ならば、任意の森林資源から始まる最大森林計画が存在する。さらに最大定常森林計画は、その伐期齢を最高林齢とする法正林を持続することであり、任意の森林資源から始まる最大森林計画はこの法正林に収束する。なお、ここで法正林とは森林科学の用語であり、各林齢の木が占める面積が等しい森林を指す。

この結果のうち、収束に関する部分は本論文では必ずしも成立しない。この点が森林の炭素固定機能を考慮した場合に生じる新しい結果である。

なお、炭素固定機能以外の面でも、本論文の想定は彼らの想定と異なっている点はいくつかある。例えば彼らのモデルでは、木は有限のある林齢以下で必ず伐採されると想定されている。しかし、ここではそのような想定代わりに、ある林齢が存在して、それ以上の林齢の木は経済的に同一と見なされるという想定を採用している。また、彼らのモデルでは伐採された土地は直ちに植林される。これは森林科学の用語でいえば、無立木地の存在を許さないという想定である。一方、ここでは植林時点の決定は計画者に委ねられている。おそらく、これらの想定の変更はモデルの適用範囲を広げるであろう。しかし、以下で示される考察の過程が明らかにするように、これらの変更は上に示した彼らの結果を何ら修正するものではない。

本論文のモデルでは最大森林計画の収束は必ずしも成立しない。しかし、最大森林計画の特質について、いくつかの点が明らかにできる。本論文で明らかにされるのは、次の2点である。第1に各期間の木材生産量と炭素固定量という集計レベルの値に関しては最大森林計画は特定の水準に収束する。第2に有限期間のうちに無立木地と特定の林齢以上の木が占める面積はゼロとなる。

後者の結果は、木は永遠の炭素貯蔵庫ではなく、いずれは伐採されることを意味している。つまり最大森林計画において、森林は二酸化炭素の吸収装置としてフルに利用される（無立木地ゼロ）が、最終的な炭素の固定は伐採された木、すなわち木材の利用を通じて行われる。この結果は、直観的には受け入れがたいかもしれない。せっかく炭素を固定した木を伐採すれば、その木材を利用することによって多かれ少なかれ二酸化炭素が再放出されてしまうからである。しかし、化石燃料及び土壌として蓄積された炭素の多くが、木の枯死と倒木、つまり自然起源の伐採によって形成されたものであることを思い起こせば、この結果が必ずしも不自然なものではないことが理解されるだろう。

さて、本論文は以下のように構成されている。続く第1節では、ここで用いられるモデルを示す。第2節では、定常森林のクラスで期間厚生を最大にする森林資源が一意であることを示す。第3節では支持価格を導出する。以上の準備の下で、第4節で最大森林計画の存在を証明する。第5節は最大森林計画の特質を論じる。最後の節では、いくつかのモデルの拡張方向について、既存研究の結果を交えながら議論する。

1. 設定

森林として利用可能な土地の面積を1に基準化する。 $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$ で林齢*i*の木々からなる面積1の森林を伐採して得られる木材の量を示す。

一方, $G_1, G_2, \dots, G_i, \dots$ は, 林齢 i の木々からなる面積 1 の森林に蓄積された炭素の量を示す。ここで第 1 の仮定をおく。

(仮定 1) ある自然数 N が存在して, $M \geq N$ を満たす任意の自然数 M に対して, $F_N = F_M, G_N = G_M$ が成立する。

つまりある林齢 N が存在して, N 林齢以上では森林は木材としての経済的な成長も物理的な成長=炭素固定も行わない。したがって, N 林齢以上の木は N 林齢の木と同一のものと見なされる。このような木から構成される森林は, 森林生態学で極相林と呼ばれるものに相当する。

$N+1$ 次ベクトル $x \equiv (x_0, x_1, \dots, x_N)$ は森林資源を表す。 x_i は i 林齢の木々によって占められる面積である。 x_0 は植林したての林地面積を表し, x_N は N 林齢以上の木々が占めている林地面積である。すべての要素が 1 の $N+1$ 次元ベクトルを v で表す。すると実現可能な森林面積の集合は, $X \equiv \{x \in R^{N+1} : x \geq 0, vx \leq 1\}$ で表される。ここで X がコンパクト凸集合であることに注意する。

時点を $t=0, 1, 2, \dots$ で表し, $t-1$ 時点から t 時点の間を t 期と呼ぶ。時点は各期で木々が一つ年をとるように設定されている。 $N+1$ 次正方形行列 A と $N \times (N+1)$ 次行列 B を次のように定義する。

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & \vdots \\ & I_N & & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad B \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad I_N$$

ここで I_N は N 次単位行列である。 t 期期首の森林資源を $x \in X$ で表せば, 期末にはそれは Ax となる。期首と期末の森林資源のペア (x, y) は, もし $x \in X, y \in X, B(Ax - y) \geq 0$ ならば, 実現可能である。実現可能なペアを要素とする森林遷移集合を D で表す。すなわち,

$$D \equiv \{(x, y) \in R^{N+1} \times R^{N+1} : x \in X, y \in X, B(Ax - y) \geq 0\}$$

D もまたコンパクト凸集合である。森林資源の軌跡 $x_0, x_1, \dots, x_t, \dots$ は、任意の $t=1, 2, \dots$ に対して $(x_{t-1}, x_t) \in D$ ならば実現可能である。実現可能な軌跡を森林計画と呼び、 $\langle x_t \rangle$ で表す。なお、ここでは $\nu y < \nu x \leq 1$ なる (x, y) が実現可能である。このことは、伐採跡地を放置しておくか直ちに植林するかを選択が計画者に委ねられていることを意味している。

次に、木材生産に関わる N 次元ベクトル F を $F \equiv (F_1, F_2, \dots, F_N)$ で定義し、炭素固定量に関わる N 次元ベクトル G を $G \equiv (G_1, G_2, \dots, G_N)$ で定義する。さらに $g_0 \equiv G_1$, $g_1 \equiv G_2 - G_1$, ..., $g_{N-1} \equiv G_N - G_{N-1}$, $g_N \equiv G_{N+1} - G_N = 0$ として、 $N+1$ 次元ベクトル g を $g \equiv (g_0, g_1, \dots, g_N)$ と定義する。

以上の記号を用いて、期首と期末の森林資源のペア (x, y) から得られる木材生産量と炭素固定量がそれぞれ、

$$FB(Ax - y), \quad gx - \beta GB(Ax - y)$$

で表される。ここで β は、産出された木材から大気中へ再放出される炭素の割合を表すパラメータである。なお、本論文において、植林費用はゼロかまたは木材伐採時点で支払われているかのどちらかを暗黙のうちに想定している。後者の場合、植林費用を木材の単位で表して、 F はこれを木材生産量から差し引いた純木材生産量を表すものと解釈される。この場合、 F の要素の中には負の値をとるものが存在する可能性がある。

F , g , β について次の仮定をおく。

(仮定 2) $F_i > 0$ なる林齢 i が存在する,

(仮定 3) $g \geq 0$,

(仮定 4) $0 \leq \beta \leq 1$ 。

仮定 3 の g の非負性は森林が成長する限り炭素の固定が行われるという森林科学上の事実を反映している。仮定 4 の β の水準は、その社会の木材利用の特質を反映する。伐採された木材が直ちに燃料として利用

されるならば、 β は1となる。一方、伐採された木材が例えば法隆寺のような建造物のために利用されるならばその値はゼロとなる。

次に F , G , β に関連する林齢の集合 I を次のように定める。もし $i \in I$ ならば、 $(F_i/i, (1-\beta)G_i/i) \leq (F_j/j, (1-\beta)G_j/j)$, かつ、 $(F_i/i, (1-\beta)G_i/i) \neq (F_j/j, (1-\beta)G_j/j)$ を満たす林齢 $j (\neq i)$ は存在しない。 I が非空であることは、林齢の集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ が有限可算個であることから確認できる。 I に関して次の仮定をおく。

(仮定5) もし I が2つ以上の要素から構成されるならば、任意の $i, j \in I, i \neq j$ に関して $(F_i/i, G_i/i) \neq (F_j/j, G_j/j)$

(仮定6) もし I が3つ以上の要素を持つならば、任意の互いに異なる $i, j, k \in I$ に対して、

$$\begin{vmatrix} F_i / i, F_j / j, F_k / k \\ G_i / i, G_j / j, G_k / k \\ 1, 1, 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

仮定5は、もし $i, j \in I$ ならば $(F_i/i - F_j/j)(G_i/i - G_j/j) < 0$ を意味している。ここでの2つの仮定は最大森林計画の存在を保証するためにおかれた技術的な仮定である。したがって、森林科学の立場から F と G に関するこれらの仮定が適切か否かを検討する必要があることを指摘しておく。

最後に森林計画を評価する評価指標を考える。計画期間が T 期間の森林計画は、期間毎に分離可能な期間厚生 w_t の和 $\sum_{t=1}^T w_t$ の大きさによって評価されると仮定する。ここで添字 t は t 期 ($t-1$ 時点から t 時点までの期間) を表している。この評価指標を社会厚生と呼ぶことにする。また、仮定として期間厚生 w_t は木材生産量と炭素固定量を変数とする期間厚生関数によって表され、期間厚生関数は各期を通じて同一とする。

すなわち,

(仮定 7) $W \equiv \{(l, c) \in R^2 : l = FB(Ax - y), c = gx - \beta GB(Ax - y), (x, y) \in D\}$ を定義域とする各期で同一の期間厚生関数 $w : W \rightarrow R$ が存在し, 森林計画の評価は各期の期間厚生の和 (社会厚生) によって行われる。

さらに期間厚生関数 w に関して次の仮定をおく。

(仮定 8) w は全微分可能で厳密に凹の単調増加関数

単調増加性は木材の生産量が多ければ多いほど, また炭素の固定量が多ければ多いほど期間厚生が高まることを意味している。したがって期間厚生の和である社会厚生の水準が高ければ高いほど, 社会にとっては望ましい森林計画となる。全微分可能性と厳密な凹性は最大森林計画の存在を保証するためにおかれた技術的な仮定である。

ところで, 木材生産量と炭素固定量は森林資源のペア $(x, y) \in D$ の関数なので, 期間厚生 w_t は t 期の森林資源 x_{t-1}, x_t を変数とする関数 $u : D \rightarrow R$ を用いて,

$$w_t = u(x_{t-1}, x_t) : D \rightarrow R$$

と表すことができる。ここでは $u : D \rightarrow R$ を期間効用関数と呼ぶことにする。仮定 8 により期間効用関数 u は凹関数である。

本論文では, 無限計画期間問題を考察する。無限計画期間の森林計画に関する評価指標として, ここでは最大計画の概念を用いる。それは期間効用関数 u を用いると次のように定義される。

[定義：最大計画]

$x_0 = x$ から始まるある森林計画 $\langle x_t \rangle$ に対して、 x から始まる他のいかなる森林計画 $\langle x'_t \rangle$ も、

$$\sum_{t=1}^T u(x'_{t-1}, x'_t) - u(x_{t-1}, x_t) > \epsilon \quad \text{for all } T > T(\epsilon)$$

を満たす $\epsilon > 0$ と $T(\epsilon)$ を持たないとき、 $\langle x_t \rangle$ を最大計画 (maximal program) と呼ぶ。

最大計画の意味は、十分な期間をとれば、その期間以降、最大計画よりも社会厚生が大きくなるような森林計画は存在しない、ということである。最大計画の概念は Brock (1970) によって提案された。彼自身はそれを弱最大計画 (weakly maximal program) とも呼んでいるが、ここでは McKenzie (1986) の用法にしたがっている。

2 最大定常期間効用

以下では $(x, x) \in D$ を満たす森林資源を定常森林と呼ぶことにする。定常森林に関する次の問題を考える。

$$\text{(問題 1)} \quad \underset{x}{\text{maximize}} \quad u(x, x) \quad \text{subject to} \quad (x, x) \in D$$

ここで $u(x, x) = w[FB(Ax - x), gx - \beta GB(Ax - x)]$ であり、 $g_N = 0$ に注意すると

$$GB(Ax - x) = \sum_{i=1}^{N-1} G_i(x_{i-1} - x_i) + G_N x_N = \sum_{i=0}^N g_i x_i = gx$$

と変形できる。したがって、 $h = B(Ax - x)$ (伐採ベクトル) とすると

$$u(x, x) = w[Fh, (1 - \beta)Gh]$$

である。

$h_i = x_{i-1} - x_i (i=1, 2, \dots, N-1)$, $h_N = x_{N-1}$ だから、 $0 \leq (1, 2, \dots, N)h \leq v x \leq 1$ 。つまり、 h の集合は $h^0 = 0$ 及び

$$h^i = (0, \dots, 0, 1/i, 0, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

↑
第 i 成分

を頂点とする N 次元単体である。線形写像 $F, (1-\beta)G$ によって、この単体は W の部分集合

$$W' \equiv \{(l, c) : l = FB(Ax - x), c = (1-\beta)GB(Ax - x), (x, x) \in D\}$$

に写される。以下では、 W' を生産可能集合と呼ぶことにする。

単体はコンパクト凸なので生産可能集合もまたコンパクト凸である。したがって（問題 1）には解が存在する。さらに、線形写像の像なので生産可能集合の境界には角点が存在する。その角点は単体のある頂点の像である。なぜなら、もし頂点以外の点が角点に写されるならば、角点は生産可能集合上のある 2 点の凸結合によってつくられる点となり、角点の定義に反する。

さて、 W' の部分集合 W'_j を次のように定義する。もし $(l, c) \in W'_j$ ならば、生産可能集合 W' の要素 (l', c') で、 $(l', c') \geq (l, c)$ かつ $(l', c') \neq (l, c)$ を満たすものは存在しない。期間厚生関数 w の単調増加性により、（問題 1）の解の W' への像は、必ず W'_j に属している。一方、仮定 2 により $(0, 0) (\in W')$ は W'_j には属さない。このことは $x=0$ が（問題 1）の解ではないことを意味する。以下では W'_j を生産フロンティアと呼ぶことにし、生産フロンティア上の角点に注目する。

単体の頂点 $h^i (i \neq 0)$ は生産可能集合 W' の点 $(F_i/i, (1-\beta)G_i/i)$ に写される。もし $(F_i/i, G_i/i) \geq (F_j/j, G_j/j)$ かつ $(F_i/i, G_i/i) \neq (F_j/j, G_j/j)$ ならば、 h_j の W' への像は生産フロンティア上にはない。したがって、 $(F_i/i, (1-\beta)G_i/i)$ が生産フロンティア上の角点ならば、 $i \in I$ である。反対にもし、 $i \in I$ ならば $(F_i/i, (1-\beta)G_i/i)$ は生産フロンティア上の角点である。このことは、 I がただ一つの林齢から構成されている場合と 2 つの林齢から構成されている場合は自明であ

る。3つ以上の場合、 $F_i/i > F_k/k > F_j/j$ を満たす任意の $i, j, k \in I$ に対して、もし

$$\begin{pmatrix} F_i / i, F_j / j, F_k / k \\ G_i / i, G_j / j, G_k / k \\ 1, 1, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 - \lambda \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

を満たす λ が存在すれば、 $(F_k/k, (1-\beta)G_k/k)$ は $(F_i/i, (1-\beta)G_i/i)$ と $(F_j/j, (1-\beta)G_j/j)$ の凸結合として表される(つまり $(F_k/k, (1-\beta)G_k/k)$ は角点ではない)。しかし、仮定6によりこの等式を満たす λ は存在しない。以上から、林齢の集合 I に属する全ての林齢によって生産フロンティア上の角点が構成されることがわかる。

さらに生産フロンティア上の角点を形成する定常森林 $(x, x) \in D$ は一意である。このことは次のように示される。ある角点に対応する単体の頂点を h^i とすると、仮定5から i は一意であり、

$$h^i = (0, \dots, 0, 1/i, 0, \dots, 0)$$

↑
第 i 成分

対応する森林資源 x^i は、

$$x_0 = x_1 = \dots = x_{i-1} \geq 1/i,$$

$$x_{i-1} - 1/i = x_i = x_{i+1} = \dots = x_{N-1}$$

を満たす。したがって、 $\sum_{j=0}^{N-1} x_j \geq i \times (1/i) = 1$ 。一方、 $v x \leq 1$ だから、 h^i に対応する x^i は、

$$x^i = (1/i, \dots, 1/i, 0, \dots, 0)$$

↑
第 i 成分

以外にはない。

生産フロンティア上の角点以外の点は、隣り合った角点の一意の凸結合で表される。したがって、その点に対応する定常森林は一意の二つの

定常森林の一意的凸結合によって表される。したがって、やはり一意である。

以上から、生産フロンティアに対応する定常森林の一意性が示された。このことから次の補題が成立する。

[補題 1]

仮定 1～8 の下で、(問題 1) の解が存在する。解を x^* とすると $x^* \neq 0$ かつ x^* は一意である。

以下では(問題 1) の解 x^* を最大定常森林と呼ぶ。また $u^* \equiv u(x^*, x^*)$ とする。さらに (x^*, x^*) によって実現される木材生産量と炭素固定量を (l^*, c^*) で表す。

3 支持価格の存在と導出

ある $N+1$ 次ベクトル p が存在して、

$$u(x, y) + p(y - x) \leq u^*, \text{ any } (x, y) \in D$$

を満たすならば、 p は (x^*, x^*) の支持価格と呼ばれる。本論文の想定では、伐採された森林は必ずしも直ちに植林する必要はないので、expandable stock $x(x < y$ かつ $(x, y) \in D)$ が存在する。これと D のコンパクト凸性及び期間効用関数 u の凹性から、このような支持価格の存在を証明することができる (McKenzie, 1986, Lemma 6.1を参照)。しかし、ここでは発見的な方法で p を見つけることにする。それによってより多くの情報が得られるためである。

さて、上での定義から $u^* = w(l^*, c^*)$ である。 (l^*, c^*) における w の偏微分係数を w_1^*, w_2^* とすれば、生産可能集合 W' の凸性により、 W' に属する任意の (l, c) に対して、

$$w_1^* l^* + w_2^* c^* \geq w_1^* l + w_2^* c$$

である。したがって、単体の頂点 h^i の像 $(F_i/i, (1-\beta)G_i/i)$ に対しても

$$w_1 * l^* + w_2 * c^* \geq w_1 * F_i / i + w_2 * (1 - \beta) G_i / i, \quad i=1,2,\dots,N \quad (1)$$

である。等号は前節での考察により、高々 2 つの林齢で成立するだけである。このような等号の成立する林齢を l, l' で表すことにする。さらに実数 α を

$$\alpha = w_1 * F_l / l + w_2 * (1 - \beta) G_l / l$$

と定義する。簡単な計算により、任意の $x \in X$ に対して、

$$w_1 * l^* + w_2 * c^* \geq \alpha (0,1,\dots,N) (Ax - x) \quad (2)$$

なる関係があることが分かる。ここで等号は $v_x = 1$ かつ $x_N = 0$ のみ成立する。

また、(1) より、

$$\alpha (0,1,\dots,N) \geq w_1 * FB + w_2 * (1 - \beta) GB$$

が成立する。 D に属する任意の (x, y) に対して、 $Ax - y \geq 0$ だから、

$$[w_1 * FB + w_2 * (1 - \beta) GB] (Ax - y) \leq \alpha (0,1,\dots,N) (Ax - y) \quad (3)$$

である。等号は $i \neq l$ かつ $i \neq l'$ なる全ての林齢 i に対して $x_{i-1} - y_i = 0$ のときのみ成立する。

さて、 D に属する任意の (x, y) に対して、 $u(x, y) - u^*$ を考察する。

(x, y) の w への像を (l, c) で表し、 $u(x, y) = w(l, c)$ とする。一方、 $u^* = w(l^*, c^*)$ である。 w が全微分可能で厳密な凹関数あることと、

(2), (3) の結果を利用すると、

$$\begin{aligned} u(x, y) - u^* &= w(l, c) - w(l^*, c^*) \\ &\leq w_1 * (l - l^*) + w_2 * (c - c^*) \quad (\text{等号は } (l, c) = (l^*, c^*) \text{ でのみ成立する}) \\ &= (w_1 * FB (Ax - y) + w_2 * (gx - \beta GB (Ax - y))) - (w_1 * l^* + w_2 * c^*) \\ &= (w_1 * FB + w_2 * (1 - \beta) GB) (Ax - y) - (w_1 * l^* + w_2 * c^*) \\ &\quad + w_2 * (gx - GB (Ax - y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (w_1 * FB + w_2 * (1 - \beta) GB) (Ax - y) - (w_1 * l^* + w_2 * c^*) \\
 &\quad + w_2 * (GB (Ax - x) - GB (Ax - y)) \\
 &\leq \alpha (0, 1, \dots, N) (Ax - y) - \alpha (0, 1, \dots, N) (Ax - x) + w_2 * GB (y - x) \\
 &= [\alpha (0, 1, \dots, N) - w_2 * GB] (x - y)
 \end{aligned}$$

である。したがって

$$p = [\alpha (0, 1, \dots, N) - w_2 * GB]$$

と定義すると、次の補題が得られる。

[補題 2]

仮定 1 ~ 8 の下で、(問題 1) から得られる最大値を u^* 、対応する木材産出量と炭素固定量をそれぞれ l^* 、 c^* 、(1) で等号を成立させる林齢を i 、 i' とする。このときある $N + 1$ 次元ベクトル p が存在して、

$$u(x, y) + p(y - x) \leq u^*, \text{ any } (x, y) \in D \quad (4)$$

である。等号が成立するのは、次の条件が全て満たされるときに限られる。すなわち、 $FB(Ax - y) = l^*$ 、 $gx - \beta GB(Ax - y) = c^*$ 、 $x_N = 0$ 、 $\nu x = 1$ 、 $i \neq i'$ かつ $i \neq i'$ なる全ての林齢 i に対して $x_{i-1} - y_i = 0$ 。

4 最大森林計画の存在

上で得られた結果を利用して、最大森林計画を考察する。はじめに最大森林計画を次のように再定義しておく。

$x_0 = x$ から始まる森林計画 $\langle x_t \rangle$ が最大森林計画であるとは、 $x_0 = x$ から始まる任意の森林計画 $\langle x'_t \rangle$ に対して、

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \left[\sum_{t=1}^T u(x'_{t-1}, x'_t) - u(x_{t-1}, x_t) \right] \leq 0 \quad (5)$$

が成立することである。

$\langle x_t \rangle$ が最大森林計画である一方で、ある $\langle x'_t \rangle$ と $\varepsilon > 0$ が存在して、

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \left[\sum_{t=1}^T u(x'_{t-1}, x'_t) - u(x_{t-1}, x_t) \right] = \varepsilon$$
が成立するとすれば、正数 $\varepsilon' (< \varepsilon)$ と十分大きな自然数 $T(\varepsilon')$ が存在して、 $\sum_{t=1}^T u(x'_{t-1}, x'_t) - u(x_{t-1}, x_t) > \varepsilon'$ 、 $T > T(\varepsilon')$ が成立することになる。しかしこれは $\langle x_t \rangle$ が最大森林計画であることに矛盾する。他方、(5) が成立すると、森林計画 $\langle x'_t \rangle$ による期間厚生之和が $\langle x_t \rangle$ による期間厚生之和よりも大きくなる (overtake する) 期間は高々有限である。つまり $\langle x_t \rangle$ は最大森林計画である。

次の準備として、価値損失関数と呼ばれる関数 $\delta(x, y)$ を定義する。すなわち、 δ は D を定義域とし

$$\delta(x, y) \equiv u^* - u(x, y) + p(x - y) \quad (6)$$

である。[補題 2] により、 δ は任意の $(x, y) \in D$ に対して $\delta \geq 0$ である。

次に、森林資源 $x \in X$ に対して、価値損失 $L(x)$ を

$$L(x) \equiv \min \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \delta(x_{t-1}, x_t) \right], x_0 = x, (x_{t-1}, x_t) \in D \text{ for any } t \quad (7)$$

と定義する。 δ の非負性により $L(x)$ は非負である。また、任意の初期森林資源から有限期間のうちに最大定常森林 x^* を実現することが可能なので、任意の $x \in X$ に対して $L(x) < \infty$ である。さらに右辺で最小値記号 \min が使われているのは次の理由による。

(7) の右辺の \min を \inf に置き換えた値を $L'(x)$ とし、 $x_0 = x$ から始まる森林計画の点列 $\langle x_t^s \rangle, s \geq 1$ を考える。 $L^s(x) \equiv \sum_{t=1}^{\infty} \delta(x_{t-1}, x_t)$ と $L^s(x)$ を定義し、 $s \rightarrow \infty$ で $L^s(x) \rightarrow L'(x)$ となるように森林計画の点列を選ぶ。 D はコンパクトなので点列 $\langle x, x_1^s \rangle$ には集積点 (x, x_1^*) が存在する。同様の議論は $\langle x_1^*, x_2^s \rangle, \dots, \langle x_{t-1}^*, x_t^s \rangle, \dots$ にも適用できるから、 $x_0^* = x$ から始まり、 $\langle x_t^* \rangle$ に収束する $\langle \langle x_t^s \rangle, s \geq 1 \rangle$ の部分列が存在する。

在する。 D のコンパクト性から任意の t に対して $(x_{t-1}^*, x_t^*) \in D$ である。ここで $\sum_{i=1}^{\infty} \delta(x_{t-1}^*, x_t^*) = L^*(x)$ とすれば、 $L^*(x) \geq L'(x)$ である。そこで $L^*(x) > L'(x)$ を仮定する。このとき十分に大きな s について、ある $\varepsilon > 0$ が存在して (i) $L^*(x) - L^s(x) > \varepsilon$ 。一方、十分に大きな T を考えれば、(ii) $L^*(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \delta(x_{t-1}^*, x_t^*) < \varepsilon/4$ とできる。さらに十分に大きな S に対して、(iii) $s > S$ で $\sum_{i=1}^{\infty} \delta(x_{t-1}^s, x_t^s) - \sum_{i=1}^{\infty} \delta(x_{t-1}^*, x_t^*) < \varepsilon/4$ とできる。(ii) と (iii) を組み合わせれば、 T と S の下で $L^*(x) - \sum_{i=1}^{\infty} \delta(x_{t-1}^s, x_t^s) < \varepsilon/2$, $s > S$ とすることができる。 $\delta \geq 0$ なので、この結果は $L^*(x) - L^s(x) < \varepsilon/2$, $s > S$ を意味するが、それは (i) と矛盾する。したがって、 $L^*(x) = L'(x)$ である。このように x から始まり、 δ の無限級数を最小にする森林計画が存在する。以上の結果を補題としてまとめておく。

[補題 3]

仮定 1 ~ 8 の下で、(7) で定義された価値損失 $L(x)$ は、任意の $x \in X$ に対して非負かつ上に有界である。さらに任意の $x \in X$ に対して、 $L(x)$ の値を実現する、すなわち x から始まる森林計画の中で価値損失関数 δ の無限級数を最小化する計画が存在する。

最後の準備として、 $x_0 = x$ から始まる森林計画 $\langle x_t \rangle$ と最大定常森林を維持する計画 $\langle x^* \rangle$ に関する次の式を考察する。

$$(1/T) \sum_{t=1}^T [u(x_{t-1}, x_t) - u^*], \quad T \rightarrow \infty \tag{8}$$

ここで $u^* = u(x^*, x^*)$ である。(6) を用いると、

$$\sum_{t=1}^T [u(x_{t-1}, x_t) - u^*] = [p x - p x_T - \sum_{t=1}^T \delta(x_{t-1}, x_t)] \tag{9}$$

$x_T \in X$ (コンパクト) かつ $\delta \geq 0$ なので、 $T \rightarrow \infty$ で $\delta(x_{t-1}, x_t) \rightarrow 0$ ならば、(9) は有界である。一方、 δ が 0 に収束しなければ (9) は $T \rightarrow \infty$

で $-\infty$ に発散する。

ここでは δ が0に収束するケースについて考察を進める。 $x_0=x$ から始まり δ が収束する森林計画の集合を $K(x)$ で表す。任意の $x \in X$ について有限の期間のうちに最大定常森林を実現することが可能だから、任意の $x \in X$ について $K(x) \neq \phi$ である。なお、 $\langle x_t \rangle \in K(x)$ ならば $\langle x_t \rangle$ はgood programと呼ばれる。

さて $\langle x_t \rangle \in K(x)$ とすると、(9)は有界なので $T \rightarrow \infty$ で $(1/T) \sum_{t=1}^{\infty} [u(x_{t-1}, x_t) - u^*] \rightarrow 0$ となる。一方、 u は凹なのでJensenの不等式により、任意の $T \geq 1$ で

$$(1/T) \sum_{t=1}^T [u(x_{t-1}, x_t) - u^*] \leq u(\sum_{t=1}^T x_{t-1}/T, \sum_{t=1}^T x_t/T) - u^*$$
が成立する。

そこで点列 $\langle (\sum_{t=1}^T x_{t-1}/T, \sum_{t=1}^T x_t/T), T \geq 1 \rangle$ を考える。この点列は必ずしも収束するとは限らないが、 D のコンパクト凸性により、すべて D に属している。したがって集積点が存在し、収束する部分列を考えることができる。さらに、 $\sum_{t=1}^T x_{t-1}/T - \sum_{t=1}^T x_t/T = (x_0 - x_T)/T$ は $T \rightarrow \infty$ で0に収束するから、任意の収束する部分列に対して、その集積点を $(\bar{x}, \bar{x}) \in D$ と表すことができる。ここで $u(\bar{x}, \bar{x}) - u^* \leq 0$ である。

以上の結果をまとめると、任意の収束する部分列に関して、 $T \rightarrow \infty$ で
$$0 = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \sum_{t=1}^T [u(x_{t-1}, x_t) - u^*] \leq u(\bar{x}, \bar{x}) - u^* \leq 0$$
が得られる。したがって $u(\bar{x}, \bar{x}) = u^*$ である。さらに[補題1]より $\bar{x} = x^*$ でなければならない。任意の収束する部分列が全て同一の集積点を持つから、もとの点列 $\langle (\sum_{t=1}^T x_{t-1}/T, \sum_{t=1}^T x_t/T) \rangle$ は (x^*, x^*) に収束する。もし収束しなければ、 $(\bar{x}, \bar{x}) \neq (x^*, x^*)$ なる点に収束する部分列が存在するはずだが、それは上の結果と矛盾する。この結果を補題としてまとめておく。

[補題 4]

仮定 1 ~ 8 の下で, $x_0 = x \in X$ から始まる森林計画 $\langle x_t \rangle$ で, $\lim_{T \rightarrow \infty} \delta(x_{t-1}, x_t) = 0$ を満たすものが存在し, そのような森林計画では $T \rightarrow \infty$ で

$$\left(\sum_{t=1}^T x_{t-1} / T, \sum_{t=1}^T x_t / T \right) \rightarrow (x^*, x^*)$$

である。

これで最大森林計画の存在を証明するための準備が整った。以下では, 次の命題を証明する。

[命題]

仮定 1 ~ 8 の下で, 任意の初期森林資源 $x \in X$ と x から始まる任意の森林計画 $\langle x'_t \rangle$ に対して, 同じ初期森林資源から始まる森林計画 $\langle x_t \rangle$ が存在して,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \left[\sum_{t=1}^T u(x'_{t-1}, x'_t) - u(x_{t-1}, x_t) \right] \leq 0 \quad (5)$$

を満たす。つまり, 最大森林計画 $\langle x_t \rangle$ が存在する。

(証明)

$\langle x_t \rangle$ は価値損失 $L(x)$ の値を実現する森林計画とする。[補題 3] よりそのような森林計画が存在することが保証されている。次に $\langle x'_t \rangle$ を x から始まる任意の森林計画とし, (5) の不等式の左辺に次の変形を行う。

$$\begin{aligned} & \liminf_{T \rightarrow \infty} \left[\sum_{t=1}^T u(x'_{t-1}, x'_t) - u(x_{t-1}, x_t) \right] \\ &= \liminf_{T \rightarrow \infty} \left[\sum_{t=1}^T \{u(x'_{t-1}, x'_t) - u^*\} - \{u(x_{t-1}, x_t) - u^*\} \right] \\ &= \liminf_{T \rightarrow \infty} \left[(p x_T - p x'_T) \right] + L(x) - \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \delta(x'_{t-1}, x'_t) \end{aligned} \quad (10)$$

もし $\delta(x'_{t-1}, x'_t)$ が 0 に収束しなければ, (10) の値は $-\infty$ となる。したがって (5) の不等式は明らかに成立する。そこで $\delta(x'_{t-1}, x'_t)$ が 0 に収束するような森林計画 $\langle x'_t \rangle \in K(x)$ について考察を進める。いま

(5)の不等式が成立しないと仮定する。このとき、正数 $\gamma > 0$ が存在して、

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} [(px_T - px'_T)] + L(x) - \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \delta(x'_{t-1}, x'_t) = \gamma > 0$$

である。価値損失の定義により、 $L(x) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \delta(x'_{t-1}, x'_t)$ なので、このことは、 $\liminf_{T \rightarrow \infty} (px_T - px'_T) \geq \gamma > 0$ を意味する。一方、下極限の性質から

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} (px_T - px'_T) \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} [(px_T - px'_T) / T]$$

であり、[補題 4] よりこの不等式の右辺は収束して

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} [(px_T - px'_T) / T] = px^* - px^* = 0$$

である。つまり、 $0 < \liminf_{T \rightarrow \infty} (px_T - px'_T) \leq 0$ となり矛盾が生じる。したがって、価値損失 $L(x)$ の値を実現する x から始まる森林計画 $\langle x_t \rangle$ は、同じ初期森林資源から始まる任意の森林計画に対して (5) を満たす。つまり、 $\langle x_t \rangle$ は最大森林計画である。

5 最大森林計画の特質

以上により、最大森林計画の存在が示されたので、ここではその特質を検討する。

はじめに、最大定常森林を維持する計画 $\langle x^* \rangle$ は最大森林計画である。なぜならそれは δ の無限級数の値を 0 とする。 δ の非負性により $\langle x^* \rangle$ は x^* から始まる森林計画の中で、 δ の無限級数を最小化している。

次に $x \neq x^*$ から始まる最大森林計画 $\langle x_t \rangle$ について。それが最大森林計画であるための必要条件は、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(x_{t-1}, x_t) = 0$ である。したがって、最大森林計画は十分に長い期間の後には、必ず $\delta(x, y) = 0$ を満たす D の部分集合 (von Neumann facet。以下、 Φ で表す) に接近する。ただし Φ は 1 点とは限らないので、最大森林計画が特定の森林資源に収束するとはいえない。その一方で、森林資源ではなく産出水準に注目するな

らば、 Φ 上の点は全て特定の木材生産量と炭素固定量 (l^* と c^*) を実現する。したがって、産出水準 (集計レベル) においては、最大森林計画は特定の水準に収束するといえる。なお、もし Φ が1つの点ならば、より強い評価基準である最適性に基づいて、 X の任意の森林資源から始まる最適計画の存在と最適定常計画 $\langle x^* \rangle$ への収束を示すことができる (この場合には、 δ は uniform value loss の性質を持ち、McKenzie, 1986 の Theorem 6.1 と 8.2 が適用できる)。これは不等式 (I) で等号を成立させる林齢がただ一つのケースである。その特殊な例は、炭素の再放出を示すパラメータ β が1に等しいケース、つまり、森林から生産される木材が全て燃料用に利用される社会の森林計画である。この場合、 F_i/i を最大にする林齢で面積 $1/i$ だけ伐採し続ける計画が最適定常計画となる。これは Mitra and Wan (1986) で得られた結果と同一のものである。

さて、最大森林計画の別の必要条件は、

$$\left(\sum_{t=1}^T x_{t-1} / T, \sum_{t=1}^T x_t / T \right) \rightarrow (x^*, x^*) \quad (T \rightarrow \infty)$$

である。ここで x^* を維持するために伐採される木の林齢を l, l' とし、そのうち大きい方を l とすると、 $i \geq l$ で $x_i^* = 0$ である。このことは、最大森林計画において l 以上の林齢の木がしめる面積は十分に長い期間の後にはゼロとなることを示している。この結果は、永遠に伐採されない木は存在しないことを意味する。さらに、 $(\sum_{t=1}^T \nu x_{t-1} / T, \sum_{t=1}^T \nu x_t / T) \rightarrow (\nu x^*, \nu x^*) = (1, 1) \quad (T \rightarrow \infty)$ なので、最大森林計画では伐採された後植林されない土地、つまり無立木地は有限期間のうちに0となる。つまり最大森林計画では、森林のために利用可能な土地はある期間以降はすべて森林として利用される。

おわりに

本論文では、炭素固定機能を考慮した森林計画を考察した。最後に関連する研究結果やここで用いたモデルの問題点を述べることで、今後の研究方向を記しておきたい。

はじめに、本論文では線形の期間厚生関数のモデルは取り上げなかった。ただし、それは Mitra and Wan(1986)及び Mitra *et al.*(1991)で開発された方法の単純な応用であることを指摘しておく。

次に、割引のあるケースもここでは取り上げなかった。関連する研究として、Mitra and Wan(1985), Wan(1989, 1994), Mitra *et al.*(1991)がある。木材生産のみが考慮された Mitra and Wan と Wan の論文では、最適森林計画に周期解が生じる数値例が示されている。一方、Mitra *et al.*(1991)は、本論文のモデルに対応させていえば、森林の炭素固定機能のみが考慮されたモデルを考察している。そこでは neighborhood turnpike property すら、特定の条件の下でしか成立しないことが証明されている。本論文のような想定で割引かれるケースを考察することは、今後の課題である。

最後に本論文のモデルの改良すべき点を述べる。本論文では、伐採された木は木材としてその期間のうちに消費されることが想定されている。しかし、木材は貯蔵することができるので、この想定は改良される必要がある。

例えば期首と期末の(立木の占める面積に換算された)林齢別木材量を N 次元ベクトル l, l' で表し、期首と期末の森林資源を x, y として、当該期間の木材消費量が $F[l-l'+B(Ax-y)]$ 、炭素固定量が $gx-\beta G[l-l'+B(Ax-y)]$ で表されるモデルを考えることができる。対応する期間効用関数は、 $u(l, x, l', y)$ と書ける。対応する(問題 1)の解は、

$l=l'$ が不定となるが、森林資源については上での結果と同様に x^* である。集計レベルの木材生産量と炭素固定量も同様でそれぞれ l^* , c^* である。対応する支持価格は $(w_1^*F - \beta w_2^*G, p)$ で表され、価値損失関数 $\delta(l, x, l', y) (\geq 0)$ も定義できる。

問題は、この改訂モデルに最大計画が存在するかどうかである。もし存在すれば、それは $\delta \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) を満たす good program の中から選ばれる。このことは、改訂モデルにおいても各期の木材生産量と炭素固定量は l^* , c^* に収束することを意味する。さらに $\delta \rightarrow 0$ は $x_{tN} \rightarrow 0$ を意味するから、その最大計画においても、永遠に残される木は存在しない。このように、最大計画が存在すれば、産出水準と森林資源に関するその性質は、本論文のモデルのそれと同じものとなることが予想される。一方、新たな変数 l については次のように予想される。おそらく、最大計画における木材量の軌跡 $\langle l_t \rangle$ の各成分は、十分な長期間の後には貯蔵可能な上限かまたはゼロに収束するであろう。このような予想の検討は、次の機会に行うことにしたい。

[引用文献]

- Brock, W.A. (1970) On existence of weakly maximal programmes in a multi-sector economy. *Review of Economic Studies* 37, 275-280.
- McKenzie, L.W. (1986) Optimal economic growth, turnpike theorems and comparative dynamics. in K.J. Arrow and M.D. Intriligator (eds), *Handbook of Mathematical Economics*. vol. III, North-Holland, 1281-1355.
- Mitra, T., D. Roy and R. Ray (1991) The economics of orchards: an exercise in point-input, flow-output capital theory. *Journal of Economic Theory* 53, 12-50.
- Mitra, T. and H. Wan (1985) Some theoretical results on the economics of forestry. *Review of Economic Studies* 52, 263-282.
- Mitra, T. and H. Wan (1986) On the Faustmann solution to the forest

- management problem. *Journal of Economic Theory* **40**, 229-249.
- Wan, H., Jr. (1989) Optimal evolution of tree-age distribution for a tree farm. in C.Castillio-Chaves, S.A.Levin and C.A.Shoemaker (eds) *Mathematical Approaches to Problems in Resource Management and Epidemiology. Lecture Notes in Biomathematics* **81**. SpringerVerlag, 82-99.
- Wan, H., Jr. (1994) Revisiting the Mitra-Wan tree farm. *International Economic Review* **35**, 193-198.