早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

The Hilbert modular functions for $\sqrt{5}$ via the period mapping for a family of K3 surfaces
K3 曲面族の周期写像を経由した $\sqrt{5}$ のヒルベルト・モジュラー関数

申 請 者

Atsuhira	NAGANO
永野	中行

数学応用数理専攻　代数解析学研究

2013 年 2 月
（受理申請する部科主任会開催年月を記入）

古典的な楕円関数論においては、ガウス、シュヴァルツ、ヤコビらにより、楕円曲線の周期積分（則ち楕円積分)、ガウスの超幾何微分方程式、そして楕円モジュラー関数が密接に結びついた理論が展開されている。則ち、楕円曲線の周期積分の比が、ガウスの超幾何微分方程式のシュヴァルツ写像を与え、周期写像の逆対応がレベル２の主合同部分群についてのモジュラー関数を定める（ガウス・シュヴァルツ理論)。このとき、モジュラー関数がヤコビのテータ関数で表示されていることが重要である。このような枠組みを与えることは、古典理論において画期的なことであり、モジュラー方程式や算術幾何平均の理論など、様々な話題への連関や発展がここから生まれた。

この研究では、Ｋ３曲面のモジュライの理論を応用し、この古典理論の明快な拡張を目指す。このような意味での拡張は、志賀によるピカール・モジュラー関数の研究や、松本・佐々木・吉田による（３，６）型超幾何方程式の研究などにおいて試みられてきた。本研究では、これらとは別の拡張例を与える。

Ｋ３曲面は標準バンドルが自明で単連結なコンパクト複素曲面である。正則２形式は定数倍を除いて一意である。また、トレリの定理も成立しているので、そのモジュライの考察は周期写像の考察に他ならない。このような事情があることから、Ｋ３曲面は楕円曲線の２次元への拡張とみることができる。

さて、ヒルベルト・モジュラー関数は２変数のモジュラー関数である。ヒルベルト・モジュラー関数は多くの研究者によって具体的に考察されてきた。特にその判別式の値が低い場合は、グンドラッハ、ヒルツェブルッフ、ミュラー、小林・櫛引・成木らにより、そのモジュラー形式のなす環の代数構造について詳細な研究が既になされている。

しかしながら、ヒルベルト・モジュラー関数を代数多様体の周期写像を用いて明示的・具体的に表示する研究は今までのところおこなわれてこなかった。もしこのような研究が存在すれば、それは上述の古典的楕円モジュラー関数論の自然な拡張を与え、多変数の特殊関数、数論、線型微分方程式における今後の発展に資するところが少なくないと期待される。

今回の研究では、この古典理論の拡張を、判別式が５の場合において完全に得ることを試みた。判別式５は、非自明なヒルベルト・モジュラー群の最小の判別式である。また、正二十面体群（これは単純群である）の不変式との関係や、ボーチャーズ積との関係も知られており、判別式５のときに詳細な研究を遂行することは、今後のヒルベルト・モジュラー関数論の発展を期待する上でもとりわけ意義あることであると考えられる。

今回の研究では、まず、具体的な定義方程式が与えられた、２つのパラメータを持つあるＫ３曲面族の周期写像を明示的に構成する。この周期写像は、パラメータ空間と上半空間の直積の間の多価の解析写像を与えるとみなせる。この周期写像の逆対応が、判別式５のヒルベルト・モジュラー関数体の生成元の組を与え

ることを示す。周期積分は独立変数が２、解空間の次元が４の線形偏微分方程式の解を与える。この微分方程式を詳細に考察することによって、周期写像の逆として認識されたヒルベルト・モジュラー関数が、上半空間の直積の上で定義されたテータ関数により明示的に表示される。これは、上記の古典理論の拡張を与える。以上がこの学位論文のあらすじである。

論文は次のような構成をもつ。

第０章“Ｐｒｅｌｉｍｉｎａｒｉｅｓ”において、古典理論の復習と、本論で用いる事実を、ほとんどは証明抜きで復習をする。特に、Ｋ３曲面における格子の理論とトレリの定理、楕円曲面における特異点解消とモーデル・ヴェイユ格子の理論が、以下の本論において技術的に非常に重要である。

第１章“Ｐｅｒｉｏｄｓ　ｆｏｒ　ｔｈｅ　ｆａｍｉｌｉｅｓ　ｏｆ　Ｋ３ ｓｕｒｆａｃｅｓ　ｗｉｔｈ　２　ｐａｒａｍｅｔｅｒｓ　ｄｅｒｉｖｅｄ ｆｒｏｍ　ｒｅｆｌｅｘｉｖｅ　ｐｏｌｙｔｏｐｅｓ”では、具体的な定義方程式で表示された、２つのパラメータを持つＫ３曲面の周期を研究した。バチレフにより、高々終結的特異点をもつ反射的多面体の反標準因子としてカラビ・ヤウ多様体を構成する方法が知られている。２次元のカラビ・ヤウ多様体はＫ３曲面に他ならない。３次元５頂点の高々終結的特異点をもつ反射的多面体から、具体的な定義方程式で表示された２つのパラメータを持つＫ３曲面が得られる。この論文では、これらの４つの反射的多面体から得られるＫ３曲面の周期写像を研究した。それぞれのＫ３曲面族に適切な楕円ファイバーを導入し、トレリの定理の単射性と、楕円曲面のモーデル・ヴェイユ格子の理論を各々の場合に適切に用いることによって、各々の曲面族のピカール数が１８であることを示し、ネロン・ゼヴェリ格子、超越格子をすべて決定した（ここで得られたネロン・ゼヴェリ格子と超越格子は、小池の結果と併せることによって、カラビ・ヤウ多様体におけるミラー対称性予想の具体的実例を与えていることにも注意する）。ネロン・ゼヴェリ格子と超越格子の構造は、周期写像を具体的に考察するために必要不可欠なものである。周期写像は、曲面族の２つのパラメータ空間のザリスキー開集合上で定義されて、これらの超越格子から決定されるⅣ型のエルミート対象領域への多価の解析写像を与える。また、トレリの定理を詳細に適用することにより、周期写像の射影モノドロミー群を決定した。これらのモノドロミー群は、超越格子で定まる直交群の部分群である。

第２章“Ｐｅｒｉｏｄ　Ｄｉｆｆｅｒｅｎｔｉａｌ　Ｅｑｕａｔｉｏｎｓ”において、第１章で考察した周期積分を解に持つような微分方程式をパラメータ空間上の微分方程式として与えた。これらは、古典的な場合のガウス超幾何微分方程式の拡張である。また、ホッジ構造の変形理論におけるガウス・マニン接続が定める線型微分方程式を明示的に書き下したことにもほかならない。この微分方程式は次のような方法で決定される。まず、周期積分をパラメータの巾級数とし

て展開した。一方、反射的多面体より得られる曲面族という観点から、ＧＫＺ超超幾何微分方程式の一般論を適用して、周期積分を解に持つ微分方程式を得ることができる。周期積分の巾級数展開を利用しながら、ＧＫＺ方程式系の４階の規約な部分方程式系を取り出すことで、周期微分方程式を決定した。一方で、佐々木・吉田、及び佐藤により、ヒルベルト・モジュラー曲面の一意化微分方程式の正則共型構造の研究が既に実行されている。彼らの結果と詳細に比較することにより、我々の曲面族のうちの一つが、判別式５の対称ヒルベルト・モジュラー曲面と密接に関係することがわかる。則ち、曲面族のパラメータと正二十面体不変式との間の双有理変換を見出し、周期微分方程式のうちの一つが判別式５の対称ヒルベルト・モジュラー曲面の一意化微分方程式を与えることを示した。これは対応するＫ３曲面族の周期写像の逆対応が、判別式５のヒルベルト・モジュラー関数を与えることを示唆している。以下このＫ３曲面に注目する。

第３章“Ａ ｔｈｅｔａ ｅｘｐｒｅｓｓｉｏｎｓ ｏｆ ｔｈｅ Ｈｉｌｂｅｒｔ ｍｏｄｕｌａｒ ｆｕｎｃｔｉｏｎｓ ｆｏｒ √５ ｖｉａ ｔｈｅ ｐｅｒｉｏｄ ｍａｐｐｉｎｇ ｆｏｒ ａ ｆａｍｉｌｙ ｏｆ Ｋ３ ｓｕｒｆａｃｅｓ”では、この周期積分の逆対応を詳細に考察し、モジュラー関数をテータ関数によって明示的に表示した。これは、本論文の主結果である。まず、現在注目しているＫ３曲面族に適切な双有理変換を施し、パラメータ空間のコンパクト化が丁度ヒルツェブルッフによる判別式５の対称ヒルベルト・モジュラー曲面に一致するようにする。すると、周期写像はただ一点のカスプを除いて、重み（１，３，５）の射影空間に拡張される。この周期写像の定義域の拡張は、ヒルツェブルッフによるヒルベルト・モジュラー曲面についての結果との自然な対応を与えるだけでなく、今後の考察においても技術的に重要である。次に、パラメータ空間のある因子の上に周期写像を制限すると、その逆対応が上半平面の対角集合上の楕円ｊモジュラー関数で表示されることを示す。この証明の際には、周期微分方程式を当該の因子の上に制限した時のシュヴァルツ写像を詳細に考察することが必要になる。最後に、我々の周期写像の逆対応を、ミュラーによる２変数テータ関数の比としてとして、明示的に書き下す。この表示は、周期写像の逆の対角集合上の表示、正二十面体関係式、ヒルツェブルッフによるヒルベルト・モジュラー曲面の幾何、ミュラーによるモジュラー形式のカスプにおける振る舞いとそれらの関係式らを総合的に比較・検討することによって得られる。この表示は古典的なヤコビによるモジュラー関数のテータ表示の対応物と呼んでよいものである。

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

氏 名　　永野　中行　　印

（2013　年　２月　現在）

種 類 別	題名、	発表・発行掲載誌名、	発表・発行年月、	連名者（申請者含む）
○論文[1]	Period differential equations for the families of K3 surfaces with 2 parameters derived from the reflexive polytopes	Kyushu J. Math. 66 (1), pp. 193-244	2012 年 4 月	Atsuhira Nagano
○論文[2]	A theta expression of the Hilbert modular functions for $¥sqrt{5}$ via the period of K3 surfaces	Kyoto J. Math.	掲載決定	Atsuhira Nagano

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、	発表・発行掲載誌名、	発表・発行年月、	連名者（申請者含む）
講演[1]	Fano polytope から定まるK3曲面族の周期微分方程式について	第３回 玉原特殊多様体研究会	2009年７月	永野中行
講演[2]	Period differential equations for families of K3 surfaces derived from reflexive polytopes	RIMS研究集会 『超局所解析とその周辺』	2009年10月	Atsuhira Nagano
講演[3]	Reflexive polytope から生じる K3 曲面族の周期微分方程式	超幾何方程式研究会2010	2010年１月	永野中行
講演[4]	あるK3曲面族の周期と Q(√5) の Hilbert モジュラー orbifold の unifomizing differential equation について	第４回 玉原特殊多様体研究会	2010年９月	永野中行
講演[5]	K3 曲面族の周期と Hilbert modular orbifoldのUDE	超幾何方程式研究会2011	2011年１月	永野中行
講演[6]	K3 モジュラー関数として見た Q（√5）の Hilbert モジュラー関数	第５回 玉原特殊多様体研究会	2011年９月	永野中行
講演[7]	K3 曲面を通して見た √5 の Hilbert モジュラー関数について	早稲田数論セミナー	2011年12月	永野中行

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、	発表・発行掲載誌名、	発表・発行年月、	連名者（申請者含む）
講演[8]	K3 曲面を 通して見た √5 の Hilbert モジュラー関数 について	超幾何方程式研究会 2012	2012 年 1 月	永野中行
講演[9]	K3 曲面を 通して見た √5 の Hilbert モジュラー関数 について	ゼータ若手研究会	2012 年 2 月	永野中行
講演[10]	K3 曲面族の 周期微分方程式と √5 のヒルベルト・ モジュラー 関数について	日本数学会 （函数論）	2012 年 3 月	永野中行
講演[11]	K3 曲面族の 周期と√5 の ヒルベルト・ モジュラー関数 について	日大特異点セミナー	2012 年 5 月	永野中行
講演[12]	クンマー曲面 上の部屋と ヒルベルト・ モジュラー関数	第６回 玉原特殊多様体研究会	2012 年 9 月	永野中行
講演[13]	楕円積分の ２変数への 拡張例(判別式 5 のヒルベルト モジュラーと クンマー曲面 の部屋)	超幾何方程式研究会 2013	2013 年 1 月	永野中行
講演[14]	Hilbert modular functions via the period mapping for K3 surfaces	RIMS Conference “Automorphic Representation and Related Topics”	2013 年 1 月	永野中行
講演[15]	Hilbert modular functions via K3 surfaces I; II	Elliptic genera, modular forms, and applications in geometry	2013 年 2 月	永野中行