早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

# 博士論文審査報告書

## 論　文　題　目

## The Hilbert modular functions for $\sqrt{5}$ via the period mapping for a family of K3 surfaces

## K3 曲面族の周期写像を経由した $\sqrt{5}$ のヒルベルト・モジュラー関数


申　請　者

| | |
|---|---|
| Atsuhira | NAGANO |
| 永野 | 中行 |

数学応用数理専攻　代数解析学研究


2013 年　4 月

**概論**　本研究は楕円モジュラー関数論の高次元への一般化に関するものである．その背景となる古典論と本研究も含めた近時の研究の動向を概観し，本研究の位置づけを行う．

（古典理論について）19 世紀，Gauss, Jacobi, Schwarz らにより，楕円曲線の周期積分 (つまり楕円積分) と Gauss の超幾何微分方程式，モジュラー関数とが密接に結びついた楕円モジュラー関数論が創始された．すなわち，周期積分はモジュライ変数について Gauss の超幾何微分方程式（Picard-Fuchs 方程式）をみたし，その解の商をとることで上半平面への Schwarz 写像が定義される．この写像の逆対応が楕円モジュラー関数 $j(\tau)$ に他ならない．このとき，楕円モジュラー関数は Jacobi のテータ零値で明示的に表示される．

（本研究の目的）上述の古典理論の高次元への自然な拡張，つまり，代数多様体の族のモジュライ，多変数の超幾何型微分方程式，多変数のモジュラー関数の密接な関係を追求することは，それ自体の重要性もさることながら，これらの分野の今後の発展においても重要であると考えられる．

本研究においては，代数多様体の族としてある $K3$ 曲面族を考察している．そして，$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の Hilbert モジュラー関数がこの $K3$ 曲面族の周期写像の逆対応として得られることを示し，そのテータ表示を明示的に与えることが，本研究の目的とするところである．

(判別式 5 の **Hilbert** モジュラー関数についてのこれまでの研究) 総実代数体 $K$ の整数環を $\mathcal{O}_K$ とする．$K$ が有理数体 $\mathbb{Q}$ 上 $n$ 次の拡大体であるとき，Hilbert モジュラー群 $SL(2,\mathcal{O}_K)$ は上半平面の $n$ 重の直積に作用する．Hilbert モジュラー群のこの作用で不変な上半平面の直積上の有理型関数を Hilbert モジュラー関数という．Hilbert モジュラー関数論では，上述の $K$ が実 2 次体でその判別式が低い場合，多くの研究者によってモジュラー形式のなす環の代数構造について詳細な研究が行われてきた．特に，判別式が最小の 5 である場合，すなわち，$K$ が $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の場合，さまざまな注目すべき性質があることが知られている．例えば，Hirzebruch によって対称 Hilbert モジュラー曲面の研究が行われ，特に Klein の正二十面体不変式論との深いつながりがあることが明らかにされている．また，Müller によってモジュラー形式のなす環の生成元が上半平面の直積 $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ で定義されたテータ零値によって表示されることが示されている．しかし，Hilbert モジュラー関数を具体的な定義方程式をもつ代数多様体の周期写像を用いて明示的に表示する研究はこれまで行われてこなかった．適切なモジュライをもつ代数多様体の定義方程式を具体的に得ることが決して自明なことではないからである．Hodge 構造の変形理論と Torelli の定理などの一般論を用いれば，このような代数多様体の存在は抽象的に捉えることはできるであろうが，その具体的な表示を求めることは非自明なことであり，多くの困難をともなうことは容易に想像される．

(本論文の概要) 本研究では，具体的なアファイン方程式で定義された 2 つのパラメータ $(X,Y)$ を持つ $K3$ 曲面族 $\mathcal{F}=\{S(X,Y)\}$

$$S(X,Y): z^2 = x^3 - 4y^2(4y-5)x^2 + 20Xy^3x + Yy^4 \tag{3.2.1}$$

の研究が行われている．$K3$ 曲面のモジュライの理論を用いてこの $K3$ 曲面族の周期写像を詳細に研究している．周期写像はパラメータ空間から上半平面の直積への多価解析写像 $(X,Y)\mapsto(z_1,z_2)$ を与えるのだが，$K3$ 曲面の定義方程式を用いながら，周期積分のみたす線型微分方程式を明示的に書き下すことが試みられている．この微分方程式は周期写像の多価性を統制するものであり，この微分方程式の研究を通し，周期写像の逆対応 $(z_1,z_2)\mapsto(X,Y)$ が，$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

についての Hilbert モジュラー関数の組が与えら，さらにモジュラー関数の組 $(X, Y)$ のテータ表示も与えられている．

（本研究の位置づけ）これまで述べたことより，本研究は，Hilbert モジュラー関数を古典的モジュラー関数論の自然な拡張という観点でとらえることに成功した初めての研究であると云えよう．

本論文の構成　本論文の内容について説明する．論文は 4 つの章よりなる．

**(第 0 章の内容)** まず，第 0 章においては古典理論の復習と本論文で用いる $K3$ 曲面論および楕円曲面における事実が証明抜きでまとめられている．特に，$K3$ 曲面における Torelli の定理と楕円曲面における Mordell-Weil 格子の理論が本研究においては原理的 · 技術的に重要である．

**(第 1 章の内容)** 第 1 章からが本研究の内容である．本研究の出発点は Batyrev の方法で反射的多面体から構成された 4 種類の $K3$ 曲面族に対する考察である．これらの曲面族は，すべて 2 つの複素パラメータを持つ具体的な定義方程式で与えられる．この章ではこれら対して適切な楕円ファイバーを導入し，$K3$ 曲面における Torelli の定理と楕円曲面における Mordell-Weil 格子の理論を用いた非常に詳細な議論を通して，各々の $K3$ 曲面族の Néron-Severi 格子と超越格子を決定している (Theorem 1.4.1)．これらの格子は周期写像を具体的に取り扱う上で重要であり，これらによって各々の $K3$ 曲面族の周期領域が 2 次元の $IV$ 型の Hermite 対称領域として実現されることになる．また，各々の周期写像の射影モノドロミー群もすべて決定されている (Theorem 1.5.2 および Theorem 1.5.3)．

**(第 2 章の内容)** 第 2 章では，$K3$ 曲面の定義方程式を直接用いて周期写像のみたす微分方程式を考察している．このことは Hodge 構造の変形理論における Gauss-Manin 接続が定める微分方程式を具体的に書き下すことを意味している．本研究における周期写像のみたす微分方程式は，$K3$ 曲面の 2 つのパラメータを独立変数とし，解空間の次元が 4 のホロノミックな線型微分方程式である (Theorem 2.1.1)．これらの微分方程式は反射的多面体から自然に得られる GKZ 超幾何微分方程式系の部分系として取り出される．申請者はこの部分系を周期積分の巾級数展開を経由して計算している．さらに，これらの微分方程式のうちの一つが $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の対称 Hilbert モジュラー曲面の一意化微分方程式を与えるていることを示している (Theorem 2.2.3)．この事実により，本研究の $K3$ 曲面の周期写像と $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の Hilbert モジュラー関数との関係が示される．

**(第 3 章の内容)** 第 3 章はこの学位論文の主要部であり，古典理論の拡張を実現している部分である．この章では，第 2 章で $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の Hilbert モジュラー関数とのつながりが示唆された $K3$ 曲面族 $\mathcal{F} = \{S(X, Y)\}$ (3.2.1) を深く考察している．この曲面族は，Batyrev の方法で得られた $K3$ 曲面族において，パラメータ空間及び座標空間に適切な双有理変換を施すことによって得られる（Proposition 3.2.1）．この新しいパラメータ $(X, Y)$ は正二十面体不変式と関係し，Hirzebruch によって研究された対称 Hilbert モジュラー曲面のアファイン座標を与えている．また，このパラメータ空間は非常に簡明に重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1:3:5)$ にコンパクト化される (Theorem 3.2.2)．$\mathcal{F} = \{S(X, Y)\}$ の周期写像は

$$\Phi : (X, Y) \mapsto \Big( \int_{\Gamma_1} \omega : \int_{\Gamma_2} \omega : \int_{\Gamma_3} \omega : \int_{\Gamma_4} \omega \Big) \in \mathcal{D}_+$$

の形をとる．ここで，$\omega$ は $S(X, Y)$ の正則 2-形式、$\Gamma_1, \cdots, \Gamma_4$ は $S(X, Y)$ の適切な 2-サイクル

であり，$\mathcal{D}_+$ は $\mathcal{F}$ の超越格子が定める $IV$ 型 Hermite 対称領域の連結成分の一つである．$\mathcal{D}_+$ は上半平面の直積 $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ と双正則であり，結局つぎの多価解析的写像が得られる．

$$(X,Y)\mapsto(z_1(X,Y),z_2(X,Y))=\left(-\frac{\int_{\Gamma_3}\omega+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\int_{\Gamma_4}\omega}{\int_{\Gamma_2}\omega},-\frac{\int_{\Gamma_3}\omega+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\int_{\Gamma_4}\omega}{\int_{\Gamma_2}\omega}\right)\in\mathbb{H}\times\mathbb{H}.$$

第 2 章で得た微分方程式はこの写像の多価性を統制している．そして，つぎの本論文における主定理が示される．

**定理 1 (Theorem 3.2.3)** $K3$ 曲面族 $\mathcal{F}$ の周期写像の逆対応 $(z_1,z_2)\mapsto(X(z_1,z_2),Y(z_1,z_2))$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の Hilbert モジュラー関数の組を定める．更に、$X,Y$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の Hilbert モジュラー関数のなす体を生成する．

さらに詳細に微分方程式及び Hilbert モジュラー曲面を考察することにより，最終的に，つぎの定理を得ている．

**定理 2 (Theorem 3.4.1)** $K3$ 曲面族 $\mathcal{F}$ の周期写像の逆対応 $(z_1,z_2)\mapsto(X(z_1,z_2),Y(z_1,z_2))$ はつぎのテータ表示をもつ：

$$X(z_1,z_2)=2^5\cdot5^2\cdot\frac{s_6(z_1,z_2)}{g_2^3(z_1,z_2)},\qquad Y(z_1,z_2)=2^{10}\cdot5^5\cdot\frac{s_{10}(z_1,z_2)}{g_2^5(z_1,z_2)}.$$

ここに，$g_2,s_6,s_{10}$ は Müller によるモジュラー形式であり，$\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ 上で定義されたテータ零値によって表示される．

申請者は，複素代数幾何学の深い結果を援用して $K3$ 曲面族の幾何学を考察することで，その周期写像が $\sqrt{5}$ に対する Hilbert モジュラー関数と関係することを見抜き，それを古典的モジュラー関数論の自然な拡張と言う観点でとらえることに初めて成功した．その緻密な論理構成と膨大かつ複雑な証明・計算を実行した力量には驚くべきものがあり，今回の成果がモジュラー関数論と複素代数幾何学，ホロノミックな線型微分方程式の研究に大きな影響を与えることは疑う余地がない．

よって，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認められる．

2013 年 3 月

審査員

| | | | |
|---|---|---|---|
| （主査） | 早稲田大学教授 | 理学博士（京都大学） | 上野　喜三雄 |
| | 千葉大学名誉教授 | 理学博士（名古屋大学） | 志賀　弘典 |
| | 早稲田大学教授 | 理学博士（東京大学） | 橋本　喜一朗 |
| | 早稲田大学准教授 | 博士（数理科学）(東京大学） | 永井　保成 |