

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

# 博士論文概要

## 論文題目

Studies on verified computation for  
solutions to systems of linear and  
semilinear elliptic partial differential  
equations

楕円型連立線形-半線形偏微分方程式の解の  
精度保証付き数値計算に関する研究

申請者

Kouta	SEKINE
関根	晃太

数学応用数理専攻 数値解析研究

2013年12月

理工学分野では，様々な現象に対し偏微分方程式によるモデル化を行い，方程式を解くことでその現象の理解や発展に繋げている．一般的にはモデル化された偏微分方程式を解析的に解くことは難しく，現代ではコンピュータを利用した数値計算により近似的に解を求める．しかし，数値計算を利用して得られた結果には様々な誤差が含まれる．この誤差が含まれる問題に対し，数値計算のすべての誤差を把握して数学的に正しい結果を数値計算によって得る精度保証付き数値計算が考えられている．精度保証付き数値計算の基本的な考え方は須永照雄氏により考案された区間演算である．この区間演算は，ある浮動小数点演算に対し真の解を包み込むような上端と下端を浮動小数点数によって表す手法である．区間演算を利用することで，数値計算に含まれる丸め誤差を考慮した演算ができる．

半線形楕円型偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法は中尾充宏氏によって関数解析を利用することで考案された．このような偏微分方程式に代表される無限次元問題はコンピュータで直接演算することができず，近似方程式に書き直すことで数値計算ができる．特に，中尾氏の方法は不動点方程式に対し，有限次元と無限次元の問題に分け，不動点定理を利用することで，目的の誤差評価を得ている．また，半線形楕円型偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法として，Plum 氏の方法も知られている．Plum 氏の方法は **Newton-Kantorovich like theorem** を利用している．この定理には問題から得られる線形化作用素の逆作用素のノルム評価が必要となる．Plum 氏はこのノルム評価を固有値問題に書き換え，ホモトピー法により正確な固有値を数値計算を利用し求めている．これらにより，精度保証付き数値計算は無限次元の問題にまで適応範囲を広げている．

本論文では，定常 **FitzHugh-Nagumo** モデルを含む連立楕円型偏微分方程式の **Dirichlet** 境界条件下における解の精度保証付き数値計算法について考える．ここで，対象とする連立楕円型偏微分方程式は半線形楕円型偏微分方程式と線形楕円型偏微分方程式によって構成される．この連立楕円型偏微分方程式は，線形楕円型偏微分方程式の解を既知関数とし，半線形楕円型偏微分方程式に代入することにより，線形楕円型偏微分方程式の解作用素を持つ一変数の半線形楕円型偏微分方程式に変形できる．渡部善隆氏はこの問題に対し，有界な凸多角形領域における精度保証付き数値計算法を考案している．渡部氏は解作用素を持つ一変数の半線形楕円型偏微分方程式と，線形楕円型偏微分方程式に対しそれぞれ中尾氏の方法を利用した精度保証付き数値計算法を提案している．

本論文で提案する精度保証付き数値計算法は，解作用素を持つ一変数の半線形楕円型偏微分方程式に対し **Newton-Kantorovich like theorem** を利用する．さらに線形楕円型偏微分方程式に対する精度保証付き数値計算法には，問題から与えられる線形作用素の逆作用素のノルム評価，解作用素を含む半線形楕円型偏微分方程式の解の精度保証結果，残差の計算の 3 つを利用する．これにより渡部氏と

は別のアプローチであり，定常 **FitzHugh-Nagumo** モデルを含む連立楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算法の選択の幅が増える．加えて，非凸領域も含む任意の有界多角形領域を対象とし，渡部氏の方法では扱えなかった領域の精度保証付き数値計算法を考案する．

解作用素を持つ一変数の半線形楕円型偏微分方程式に対し **Newton-Kantorovich like theorem** を利用するにあたり，新たに2つの定数の評価が必要となる：

一点目は問題から得られる線形化作用素の逆作用素のノルム評価である．本論文では対象とする問題に解作用素を含むため，**Plum** 氏により考案された固有値問題にホモトピー法を利用する解法で線形化作用素の逆作用素のノルム評価を評価することができない．そこで，劉氏-大石氏によって考案された **Laplace** 作用素の固有値を評価する方法を拡張することにより，解作用素を含む問題の場合でも固有値を利用した線形化作用素の逆作用素のノルム評価を可能にした．特に劉氏-大石氏の手法を拡張するために，内積を定義できるように非線形項に定数を加えて解決をした．

二点目は残差のノルム評価である．このノルム評価は有界な非凸多角形領域下に対応するために重要である．非凸領域における解作用素を含まない半線形楕円型偏微分方程式の残差のノルム評価に対しては，高安氏-劉氏-大石氏により **Raviart-Thomas** の混合有限要素法を利用する手法がある．しかし，本論文では問題に解作用素を含むため，この評価方法を直接利用することができない．そこで，有限次元の解作用素を定義し，**Raviart-Thomas** の混合有限要素法を利用できる部分と，無限次元と有限次元の解作用素の差の部分に分けた．これにより，非凸多角形領域領域下でも対応できる残差のノルム評価を可能にした．

さらに目的とする定常 **FitzHugh-Nagumo** モデルを含む連立楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算には，線形楕円型偏微分方程式に対する解の評価も必要である．一般的な線形楕円型偏微分方程式の解は，問題から与えられる線形化逆作用素のノルム評価と残差のノルム評価によって与えられる．しかし，本論文の問題には解作用素を含む半線形楕円型境界値問題の真の解が含まれている．そのため，直接残差を評価することはできない．そこで，解作用素を含む半線形楕円型境界値問題の精度保証付き数値計算結果を利用することで，不動点定理を利用せずに線形楕円型境界値問題に対する解の評価する方法を提案した．

また，**Newton-Kantorovich like theorem** の十分条件は2つの1次元非線形不等式によって書き表される．この十分条件の検証は精度保証付き数値計算の結果と関係するために，重要である．特に十分条件を満たす半径の最小値と最大値を得ることで，解が存在しない範囲を特定することもできる．そこで，本論文では与えられた区間内にある非線形方程式のすべての解を求める精度保証付き数値計算法である **Moore-Jones** のアルゴリズムを利用した十分条件の検証方法を提案

する．ここで，**Moore-Jones** のアルゴリズムは **Krawczyk** 作用素による解の一意存在性の検証と区間演算による解の非存在性を利用している．提案するアルゴリズムは次の三点の特徴がある．一点目は，与えられる区間内でほぼ最小値と最大値を求めることができる．これにより，解が存在しない範囲を特定することも可能である．二点目は，初期設定が初期区間の入力のみでシステムチックな手法である．これにより経験がなくても利用できる．三点目は **Newton-Kantorovich like theorem** の十分条件を満たす解が存在しないことも保証する(精度保証が失敗であることも保証する)ことである．

本論文は 4 章と付録から構成される．第 1 章では，本研究が行われた背景と渡部氏による方法と **Newton-Kantorovich like theorem** について記述し，続いて本論文の目的と構成を述べている．

第 2 章では定常 **FitzHugh-Nagumo** モデルを含む半線形連立楕円型偏微分方程式系の精度保証付き数値計算法について述べている．はじめに，関数空間などの定義や精度保証付き数値計算で利用する定理について記述している．続いて，解作用素を持つ一変数の半線形楕円型偏微分方程式の精度保証法のフレームワークを記述している．さらに，線形楕円型偏微分方程式の解作用素の定義及びその性質について記述している．解作用素の性質を利用し，線形化作用素の逆作用素のノルム評価，残差ノルムの評価を記述している．最後に，線形楕円型偏微分方程式に対する解の評価について記述している．

第 3 章では **Newton-Kantorovich like theorem** の十分条件を検証するアルゴリズムについて記述している．はじめに，使用する記号の定義を記述している．続いて **Moore-Jones** のアルゴリズムを利用した十分条件を検証するアルゴリズムについて記述している．

第 4 章では数値計算結果を記述している．はじめに，**Moore-Jones** のアルゴリズムを利用した十分条件を検証するアルゴリズムをテストとして，楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算結果を示している．続いて，定常 **FitzHugh-Nagumo** モデルを含む連立楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算結果を示している．具体的には，非線形項を変えた場合や非凸領域における精度保証付き数値計算結果を示している．

また，付録として劉氏・大石氏によって考案された **Laplace** 作用素の固有値を評価する方法と，それを利用した **Sobolev** 不等式を満たす定数の評価方法を記述している．続いて，中尾氏・橋本氏・渡部氏によって考案された線形化作用素の逆作用素のノルム評価方法について記述している．さらに，数値計算結果で比較する **Newton-Kantorovich** の定理を利用する精度保証付き数値計算法についても記述している．最後に，**Krawczyk** 作用素と **Moore-Jones** のアルゴリズムについても記述している．

## 早稲田大学 博士（工学） 学位申請 研究業績書

氏名 関根 晃太 印

(2014年1月 現在)

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者（申請者含む）
①論文 (査読有)	<p>[1]. <u>Kouta Sekine</u>, Akitoshi Takayasu and Shin'ichi Oishi: "An algorithm of identifying parameters satisfying a sufficient condition of Plum's Newton-Kantorovich like existence theorem for nonlinear operator", NOLTA, IEICE, vol.5, No1, pp.64-79, Jan. 2014.</p> <p>[2]. Atsushi Minamihata, <u>Kouta Sekine</u>, Takeshi Ogita and Shin'ichi Oishi: "Fast verified solutions of sparse linear systems with H-matrices", Reliable Computing, (accepted)</p>
②講演 (査読有)	<p>[1]. <u>Kouta Sekine</u>, Akitoshi Takayasu and Shin'ichi Oishi: "A verified computation of steady-state solutions to Reaction-Diffusion equations ", Japan Society for Simulation Technology (JSST2013), Meiji university, (2013/9/13)</p> <p>[2]. Kazuaki Tanaka, Makoto Mizuguchi and <u>Kouta Sekine</u>, Akitoshi Takayasu, Shin'ichi Oishi: "Estimation of an embedding constant on Lipschitz domains using extension operators", Japan Society for Simulation Technology (JSST2013), Meiji university, (2013/9/13)</p> <p>[3]. <u>Kouta Sekine</u>, Akitoshi Takayasu and Shin'ichi Oishi: "A numerical verification method for solutions to systems of elliptic partial differential equations", 15th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerics (SCAN'2012), Novosibirsk, Russia (2012/9/24).</p>
③講演 (査読無)	<p>[1]. 関根晃太, 高安亮紀, 大石進一, "反応拡散方程式の定常解に対する精度保証付き数値計算 ", 2013年日本応用数理学会年会, アクロス福岡, (2013/9/9)</p> <p>[2]. 田中一成, 水口信, 関根晃太, 大石進一, "拡張作用素を用いた Lipschitz 領域における埋め込み定数の評価法", 2013年日本応用数理学会年会, アクロス福岡, (2013/9/10)</p> <p>[3]. 南畑淳史, 関根晃太, 荻田武史, 大石進一, "連立一次方程式における成分毎の評価に関する一考察", 2013年度数値線形代数研究集会, (2013/8/21)</p> <p>[3]. 南畑淳史, 関根晃太, 荻田武史, 大石進一, "H行列における連立一次方程式の高速精度保証", 数値解析シンポジウム 2013, (2013/6/12)</p> <p>[4]. 南畑淳史, 関根晃太, 荻田武史, 大石進一, "区間連立一次方程式に対する精度保証付き事後誤差評価法", 2013年研究部会連合発表会, 東洋大学 白山キャンパス, (2013)</p> <p>[5]. 関根晃太, 大石進一, 山崎憲, "数値積分法からみた波面合成法の離散化について", 日本大学生産工学部第45回学術講演会, (2012,12,1)</p>

## 早稲田大学 博士（工学） 学位申請 研究業績書

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者（申請者含む）
	<p>[6]. 南畑淳史, 関根晃太, 荻田武史, 大石進一, "区間連立一次方程式に関する誤差評価", 環瀬戸内ワークショップ, 土庄町総合会館「フレトピアホール」, (2012)</p> <p>[7]. 中村祐太郎, 関根晃太, 森倉悠介, 大石進一, "成分毎評価を用いた近似逆行列の精度保証法", 2012年日本応用数理学会年会, (2012)</p> <p>[8]. 関根晃太, 高安亮紀, 大石進一, "ある連立2階楕円型偏微分方程式系の解に対する計算機援用証明", 2012年日本応用数理学会年会, (2012)</p> <p>[9]. 小林郷平, 山崎憲, 関根晃太, "アクティブノイズコントロールの実験と波面合成法によるシミュレーションの検討", 2012年春季日本音響学会研究発表会講演論文集, (2012)</p> <p>[8]. 関根晃太, 大石進一, "3次元音響散乱問題における Lippmann-Schwinger 方程式の非自明解の存在と一意性の計算機援用証明", 日本応用数理学会 2012年度研究部会連合発表会, (2012)</p> <p>[9]. 小林郷平, 山崎憲, 関根晃太, "騒音制御への一つの試み", 第44回日本大学生産工学部学術講演会電気電子部会, (2011)</p> <p>[10]. 関根晃太, 大石進一, "3次元音響散乱問題における Lippmann-Schwinger 方程式の精度保証付き数値計算", 2011年度数値解析研究集会, (2011)</p> <p>[11]. 小林郷平, 山崎憲, 関根晃太, "アクティブノイズコントロールへの一つの試み", 2011年秋季日本音響学会研究発表会講演論文集, (2011)</p> <p>[12]. 関根晃太, 山崎憲, "TLM法を用いた波面合成法の応用—反射壁がある場合—", 2011年春季日本音響学会研究発表会講演論文集, (2011)</p> <p>[13]. 関根晃太, 山崎憲, "TLM法を用いた波面合成法の応用", 第43回日本大学生産工学部学術講演会電気電子部会, (2010)</p> <p>[14]. 関根晃太, 小林郷平, 山崎憲, "3次元 TLM法を用いた波面合成法の解析", 2010年秋季日本音響学会研究発表会講演論文集, (2010)</p> <p>[15]. 関根晃太, 山崎憲, "波面合成法におけるスピーカの離散化による影響に関する検討", 2010年春季日本音響学会研究発表会講演論文集, (2010)</p> <p>[16]. 関根晃太, 山崎憲, "TLM法を用いた波面合成法の検討", 第42回日本大学生産工学部学術講演会電気電子部会, (2009)</p>

## 早稲田大学 博士（工学） 学位申請 研究業績書

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者（申請者含む）
	<p>[17]. 関根晃太, 田中洸平, 山崎憲, "音楽 CD に超音波領域を加えた場合の人間に与える生理の影響~非侵襲測定を用いた場合~", 2009 年秋季日本音響学会研究発表会講演論文集, (2009)</p>