早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

Studies on verified computation for solutions to systems of linear and semilinear elliptic partial differential equations

楕円型連立線形-半線形偏微分方程式の解の精度保証付き数値計算に関する研究

申　請　者

Kouta	SEKINE
関根	晃太

数学応用数理専攻　数値解析研究

2014 年 2 月

本論文は，空間次元を2次元とした定常 FitzHugh-Nagumo 方程式を例として含む，楕円型連立線形-半線形偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法についてまとめたものである．本論文において精度保証付き数値計算とは，微分方程式の解の存在と一意存在範囲を丸め誤差の厳密評価を含めて特定する数値計算法を指している．

半線形楕円型偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法は中尾らによって関数解析を利用することで考案されている．このような偏微分方程式に代表される無限次元問題はコンピュータで直接演算することができず，近似方程式に書き直すことで数値計算ができる．中尾の方法は不動点定式化の際に，問題を有限次元部分と無限次元部分に分け，不動点定理を利用することで目的の誤差評価を得ている．また，半線形楕円型偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法として，Plum の方法も知られている．Plum の方法は Newton-Kantorovich like theorem を利用している．この定理には問題から得られる線形化作用素の逆作用素のノルム評価が必要となる．Plum はこのノルム評価を固有値問題に書き変え，ホモトピー法により正確な固有値を数値計算を利用して求めている．

本論文では，楕円型連立線形-半線形偏微分方程式の Dirichlet 境界条件下における解の精度保証付き数値計算法について考えている．対象とする楕円型連立偏微分方程式は半線形楕円型偏微分方程式と線形楕円型偏微分方程式によって構成されている．この楕円型連立偏微分方程式は，線形楕円型偏微分方程式の解を既知関数とし，半線形楕円型偏微分方程式に代入することにより，線形楕円型偏微分方程式の解作用素を持つ一変数の半線形楕円型偏微分方程式に変形できる．渡部はこの問題に対し，有界な凸多角形領域における精度保証付き数値計算法を考案している．渡部は解作用素を持つ一変数の半線形楕円型偏微分方程式と，線形楕円型偏微分方程式に対しそれぞれ中尾の方法を利用した精度保証付き数値計算法を提案している．

本論文で提案している精度保証付き数値計算法は，解作用素を持つ一変数の半線形楕円型偏微分方程式に対し Newton-Kantorovich like theorem を利用する．加えて，線形楕円型偏微分方程式に対する精度保証付き数値計算法には，問題から与えられる線形作用素の逆作用素のノルム評価，解作用素を含む半線形楕円型偏微分方程式の解の精度保証結果，残差のノルムの計算の3つを利用する．これにより渡部とは別のアプローチであり，楕円型連立線形-半線形偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法の選択の幅が増える．加えて，非凸領域も含む任意の有界多角形領域を対象とし，渡部の方法では扱えなかった領域の精度保証付き数値計算法を考案している．

解作用素を持つ一変数の半線形楕円型偏微分方程式に対し Newton-Kantorovich like theorem を利用するにあたり，新たに2つの定数の評価が必要となる：

一点目は問題から得られる線形化作用素の逆作用素のノルム評価である．本論文では対象とする問題に解作用素を含むため，Plum により考案された固有値問題にホモトピー法を利用する解法で線形化作用素の逆作用素のノルム評価を導出することができない．そこで，劉-大石によって考案された Laplace 作用素の固有値を評価する方法を拡張することにより，解作用素を含む問題でも固有値を利用した線形化作用素の逆作用素のノルム評価を可能にしている．

二点目は残差のノルム評価である．このノルム評価は有界な非凸多角形領域上に対応するために重要である．非凸領域上における解作用素を含まない半線形楕円型偏微分方程式の残差のノルム評価に対しては，高安-劉-大石による Raviart-Thomas の混合有限要素法を利用する手法がある．しかし，本論文では問題に解作用素を含むため，この評価方法を直接利用することができない．本論文では有限次元の解作用素を定義し，Raviart-Thomas の混合有限要素法を利用できる部分と，無限次元と有限次元の解作用素の差の部分に分けている．これにより，非凸多角形領域上でも残差のノルム評価を可能にしている．

さらに目的とする楕円型連立線形-半線形偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法には，線形楕円型偏微分方程式に対する解の評価も必要である．一般的な線形楕円型偏微分方程式の解は，問題から与えられる線形化逆作用素のノルム評価と残差のノルム評価によって与えられる．しかし，本論文の問題には解作用素を含む半線形楕円型境界値問題の真の解が含まれている．そのため，直接残差を評価することはできない．本論文では，解作用素を含む半線形楕円型境界値問題の精度保証付き数値計算結果を利用することで，不動点定理を利用せずに線形楕円型境界値問題に対する解を評価する方法を提案している．

また，Newton-Kantorovich like theorem の十分条件は 2 つの 1 次元非線形不等式によって書き表される．この十分条件の検証は精度保証付き数値計算の結果と関係するために，重要である．特に十分条件を満たす半径の最小値と最大値を得ることで，解が存在しない範囲を特定することもできる．本論文では与えられた区間内にある非線形方程式のすべての解を求める精度保証付き数値計算法である Moore-Jones のアルゴリズムを利用した十分条件の検証方法を提案している．ここで，Moore-Jones のアルゴリズムは Krawczyk 作用素による解の一意存在性の検証と区間演算による解の非存在性を利用している．本論文で提案されているアルゴリズムは次の三点の特徴がある．一点目は，与えられる区間内でほぼ最小値と最大値を求めることができる．これにより，解が存在しない範囲を特定することも可能である．二点目は，初期設定が初期区間の入力のみでシステマチックな手法である．これにより経験がなくても利用ができる．三点目は Newton-Kantorovich like theorem の十分条件を満たす解が存在しないことも保証する(精度保証が失敗であることも保証する)ことである．

本論文は 5 章と付録から構成される．第 1 章では，本研究が行われた背景と渡部による方法と Newton-Kantorovich like theorem について記述し，続いて本論文の目的と構成を述べている．

第 2 章では楕円型連立線形-半線形偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法について述べている．はじめに，関数空間などの定義や精度保証付き数値計算で利用する定理について記述している．続いて，解作用素を持つ一変数の半線形楕円型偏微分方程式の精度保証法のフレームワークを記述している．さらに，線形楕円型偏微分方程式の解作用素の定義及びその性質について記述している．解作用素の性質を利用し，線形化作用素の逆作用素のノルム評価，残差ノルムの評価を記述している．最後に，線形楕円型偏微分方程式に対する解の評価について記述している．第 3 章では Newton-Kantorovich like theorem の十分条件を検証するアルゴリズムについて記述している．はじめに，使用する記号の定義を記述している．続いて Moore-Jones のアルゴリズムを利用した十分条件を検証するアルゴリズムについて記述している．第 4 章では数値計算結果を記述している．はじめに，Moore-Jones のアルゴリズムを利用した十分条件を検証するアルゴリズムのテストとして，楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算結果を示している．続いて，楕円型連立線形-半線形偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算結果を示している．第 5 章では本論文の総括と今後の展望について述べられている．

また，付録として Sobolev 不等式を満たす定数の評価方法，中尾-橋本-渡部によって考案された線形化作用素の逆作用素のノルム評価方法，Newton-Kantorovich の定理を利用する精度保証付き数値計算法，Krawczyk 作用素と Moore-Jones のアルゴリズムについても記述している．

以上を要するに，申請者は任意多角形領域上における楕円型連立線形-半線形偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法を発展させ，難問であるとされてきた非凸多角形領域上での境界値問題も含めて楕円型連立偏微分方程式の解に対する構成的存在証明法を確立した．よって，本論文は博士（工学）の学位論文として価値あるものと認める．

2014 年 1 月

審査員

主査　早稲田大学教授　工学博士（早稲田大学）　大石　進一

早稲田大学教授　理学博士（京都大学）　田端　正久

早稲田大学教授　博士（工学）早稲田大学　柏木　雅英