早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Free boundary problems of the incompressible Navier-Stokes equations in some unbounded domains

申 請 者

Hirokazu	SAITO
齋藤	平和

数学応用数理専攻 偏微分方程式研究

2015 年 12 月

本博士論文では，非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の自由境界値問題を考察し，適切性や解の長時間挙動に関する研究を行った．自由境界値問題を数学的に解析する際には，適当な変数変換を用いて固定領域上の問題に変換する．本論文では，変換後の固定領域が次の 3 つの非有界領域に帰着される場合を扱った：

(i) 層領域，　(ii) 半空間，　(iii) 全空間.

第 1 章では，非有界領域における非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の自由境界値問題の研究に関する歴史を述べた後に，本論文を通して用いられる関数空間や補題，命題等の紹介を行った．

第 2 章では，タイプ (i) の自由境界値問題の線形化問題および線形化問題に Laplace 変換を作用させることで得られるレゾルベント問題を考察した．本章の主要な部分はレゾルベント問題の解析である：

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{u} - \operatorname{Div}\mathbf{S}(\mathbf{u},\theta) = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = f_d & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u},\theta)\mathbf{e}_N = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma_\delta, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } \Gamma_0. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$\lambda \in \Sigma_{\varepsilon,\gamma_0} = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\arg\lambda| \leq \pi - \varepsilon,\ |\lambda| \geq \gamma_0\}$ $(0 < \varepsilon < \pi/2,\ \gamma_0 > 0)$ であり，$\mathbf{u} = (u_1(x),\dots,u_N(x))^T$[1)] は流体の速度場，$\theta = \theta(x)$ は圧力場を表す未知関数である．右辺に現れる $\mathbf{f} = (f_1(x),\dots,f_N(x))^T$, $f_d = f_d(x)$, $\mathbf{g} = (g_1(x),\dots,g_N(x))^T$ は与えられた関数であり，$\mathbf{e}_N = (0,\dots,0,1)^T$ は単位ベクトル，

$$\Omega = \{(x', x_N) \mid x' \in \mathbf{R}^{N-1},\ 0 < x_N < \delta\} \quad (\delta > 0),$$
$$\Gamma_a = \{(x', x_N) \mid x' \in \mathbf{R}^{N-1},\ x_N = a\}, \quad a \in \{0, \delta\}.$$

一方，$\mathbf{S}(\mathbf{u},\theta) = -\theta\mathbf{I} + \mu\mathbf{D}(\mathbf{u})$ は応力テンソルと呼ばれる $N \times N$ 行列，$\mu > 0$ は流体の粘性係数，$\mathbf{I}$ は単位行列，$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T$ である．

Abe (2004), Abels (2005, 2006), Shibata (2013) により (1) のレゾルベント評価は得られているが，本研究ではレゾルベント評価よりも強い概念である解作用素の族の $\mathcal{R}$-有界性を証明した．通常の放物型理論では，任意の $0 < \varepsilon < \pi/2$ に対して $\gamma_0 > 0$ を十分大きく選ぶことにより $\Sigma_{\varepsilon,\gamma_0}$ 上定義された解作用素の族の $\mathcal{R}$-有界性が示されるが，本研究結果は $0 < \varepsilon < \pi/2$, $\gamma_0 > 0$ ともに任意に選ぶことができるという点で新しい．さらに，Shibata-Shimizu (2012) に従い，$\mathcal{R}$-有界性の応用としてタイプ (i) の線形化問題に対する最大 L_p-L_q 正則性定理を証明した．

第 3 章では，タイプ (ii) の自由境界値問題に対する次の線形化問題を考察した：

$$\begin{cases} \partial_t\mathbf{u} - \operatorname{Div}\mathbf{S}(\mathbf{u},\theta) = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \text{in } \mathbf{R}^N_+,\ t > 0, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u},\theta)\mathbf{n} + (c_g - c_\sigma\Delta')h\mathbf{n} = 0 & \text{on } \mathbf{R}^N_0,\ t > 0, \\ \partial_t h - \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 & \text{on } \mathbf{R}^N_0,\ t > 0, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{f} \ \text{ in } \mathbf{R}^N_+, \quad h|_{t=0} = g & \text{on } \mathbf{R}^{N-1}. \end{cases} \tag{2}$$

[1)] T は転置，$N \geq 2$ は次元を表す．

ここで，$c_g > 0$ は重力加速度，$c_\sigma > 0$ は表面張力係数，$\mathbf{n} = (0, \ldots, 0, -1)^T$ は $\mathbf{R}_0^N$ の単位外法線ベクトル，$\Delta' = \sum_{j=1}^{N-1} \partial_j^2$ $(\partial_j = \partial/\partial x_j)$．Shibata-Shimizu (2012) では (2) に付随するレゾルベント問題を考察しているが，レゾルベントパラメータ λ が $\Sigma_{\varepsilon,\gamma_0}$ $(\gamma_0 \gg 1)$ に含まれる場合の解析しかされていない．本研究では，λ が原点近傍にある場合の解析を行い (2) の解作用素の L_q-L_r 減衰評価を示した．

レゾルベント問題の解表示は Shibata-Shimizu (2012) で得られており，その解表示に現れる Lopatinskij 行列式の根の漸近展開を調べることで λ が原点近傍にある場合の情報を得る：

$$
\begin{aligned}
&|\xi'| \to 0 \text{ のとき} \quad \lambda_\pm = \pm i c_g^{1/2} |\xi'|^{1/2} - 2|\xi'|^2 + O(|\xi'|^{5/2}),\\
&|\xi'| \to \infty \text{ のとき} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{c_\sigma}{2}|\xi'| - \dfrac{3}{16}c_\sigma^2 + O(|\xi'|^{-1}),\\ \lambda_2 = -(1-a^2)|\xi'|^2 + \dfrac{a c_\sigma}{2(1-a-a^3)}|\xi'| + O(1). \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ここで，$a \in \mathbf{R}$ は $0 < a < 1/2$ を満たす $x^4 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$ の根，$\xi' \in \mathbf{R}^{N-1}$ は Fourier 空間での変数である．レゾルベント問題の解に逆 Laplace 変換を作用させることで (2) の解を得る．さらに，Cauchy の積分定理を用いて逆 Laplace 変換の積分路を複素左半平面に移し，(3) と留数定理を組み合わせることで，(2) の解の高周波部分 $(|\xi'| \gg 1)$ は指数減衰し，低周波部分 $(|\xi'| \ll 1)$ は多項式減衰することが示される．以上により，(2) の解作用素の L_q-L_r 減衰評価を得る．

Theorem 1. $1 < r \le 2 \le q < \infty$ とする．このとき，作用素 $S(t), \Pi(t), T(t)$ $(t > 0)$ が存在して，

$$
\mathbf{F} = (\mathbf{f}, g) \in X, \ \ X = (J_q(\mathbf{R}_+^N) \cap L_r(\mathbf{R}_+^N)^N) \times (W_q^{2-1/q}(\mathbf{R}^{N-1}) \cap L_r(\mathbf{R}^{N-1})),
$$

に対して $(\mathbf{u}, \theta, h) = (S(t)\mathbf{F}, \Pi(t)\mathbf{F}, T(t)\mathbf{F})$ は (2) の一意解であり，

$$
\begin{aligned}
\|S(t)\mathbf{F}\|_{L_q} &\le C t^{-\frac{N-1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \|\mathbf{F}\|_X \quad ((q,r) \ne (2,2), \ \ t \ge 1),\\
\|\nabla S(t)\mathbf{F}\|_{L_q} &\le C t^{-\frac{N-1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)-\min\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right), \frac{1}{8}\left(2-\frac{1}{q}\right)\right\}-\frac{1}{8}} \|\mathbf{F}\|_X \quad (t \ge 1).
\end{aligned}
$$

Remark 2. $\Pi(t)$ および $T(t)$ についても類似の減衰評価が得られる．

第 4 章では，タイプ (ii) の自由境界値問題を考察した：

$$
\begin{cases}
\rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = \operatorname{Div} \mathbf{S}(\mathbf{v}, \pi) - \rho c_g \mathbf{e}_3 & \text{in } \Omega(t),\ t > 0,\\
\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{in } \Omega(t),\ t > 0,\\
\mathbf{S}(\mathbf{v}, \pi)\mathbf{n}_\Gamma = c_\sigma \kappa_\Gamma \mathbf{n}_\Gamma & \text{on } \Gamma(t),\ t > 0,\\
\partial_t h + \mathbf{v}' \cdot \nabla' h - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 & \text{on } \Gamma(t),\ t > 0,\\
\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad \text{in } \Omega_0, \qquad h|_{t=0} = h_0 & \text{on } \mathbf{R}^2.
\end{cases}
\tag{4}
$$

ここで，$\mathbf{v}' \cdot \nabla' h = \sum_{j=1}^2 v_j \partial_j h$ とし，$\Gamma(t) = \{(x', x_3) \mid x' \in \mathbf{R}^2, \ \ x_3 = h(x', t)\}$,

$$
\begin{aligned}
\Omega(t) &= \{(x', x_3) \mid x' \in \mathbf{R}^2, \ \ x_3 < h(x', t)\},\\
\Omega_0 &= \{(x', x_3) \mid x' \in \mathbf{R}^2, \ \ x_3 < h_0(x')\}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

さらに，$\rho > 0$ は Ω_0 を占める流体の密度であり，κ_Γ および $\mathbf{n}_\Gamma$ はそれぞれ $\Gamma(t)$ の平均曲率，単位外法線ベクトルである．

Prüss-Simonett (2010, 2011) は Newton 流体に対する非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の二相問題を考察しており，彼らの設定では $\Omega(t)$ および Ω_0 は (5) に変わり次で与えられる：$\Omega(t) = \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$, $\Omega_0 = \Omega_{10} \cup \Omega_{20}$,

$$\Omega_i(t) = \{(x', x_N) \mid x' \in \mathbf{R}^{N-1},\ (-1)^i(x_N - h(x', t)) > 0\} \quad (i = 1, 2),$$
$$\Omega_{i0} = \{(x', x_N) \mid x' \in \mathbf{R}^{N-1},\ (-1)^i(x_N - h_0(x')) > 0\} \quad (i = 1, 2).$$

ここで，Ω_{10} にはある Newton 流体 fluid_1, Ω_{20} には別の Newton 流体 fluid_2 が満たされている．彼らは半沢変換を用いて二相問題を固定領域 $\dot{\mathbf{R}}^N = \mathbf{R}^N_+ \cup \mathbf{R}^N_-$ 上の非線形問題に変換し，$\dot{\mathbf{R}}^N$ 上の線形化問題に対する時空間 L_p 空間での最適正則性定理と不動点定理を援用することで，十分小さな初期値に対して二相問題の時間局所的適切性を証明した．特に彼らの設定において，Ω_{20} には流体が存在しないと仮定すれば (4) に帰着される．

本研究では，時間 L_p 空間 L_q 空間を用いることで十分小さな初期値に対して (4) の時間大域的適切性および解の長時間挙動を明らかにした．より詳しく言えば，半沢変換を用いて (4) を固定領域 $\mathbf{R}^3_-$ 上の非線形問題に変換し，指数 p, q に対する適当な仮定の下，Theorem 1，$\mathbf{R}^3_-$ 上の線形化問題に対する最大 L_p-L_q 正則性定理，不動点定理を組み合わせることで次の定理を得た．

Theorem 3. 指数 p, q は次の仮定を満たすとする：$2 < p < \infty$, $3 < q < 16/5$, $2/p + 3/q < 1$．さらに，初期値 $(\mathbf{v}_0, h_0)$ は次の関数空間に属する：

$$\mathbf{v}_0 \in B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\mathbf{R}^3_-) \cap B^{2(1-1/p)}_{q/2,p}(\mathbf{R}^3_-),$$
$$h_0 \in B^{3-1/p-1/q}_{q,p}(\mathbf{R}^2) \cap B^{3-1/p-1/2}_{2,p}(\mathbf{R}^2) \cap L_{q/2}(\mathbf{R}^2).$$

このとき，初期値が十分小さくかつ *compatibility conditions* を満たせば，(4) の時間大域的強解が一意に存在し，さらに *Theorem* 1 と同様の長時間挙動を示す．

第 5 章では，一般化 Newton 流体と呼ばれる非 Newton 流体のクラスに対して，タイプ (iii) の自由境界値問題を考察した．流体の性質が異なることを除けば，問題設定は上記の Prüss-Simonett (2010, 2011) と同様であり，半沢変換により $\dot{\mathbf{R}}^N$ 上の非線形問題に変換される．一方，fluid_1, fluid_2 が一般化ニュートン流体なので，Newton 流体の応力テンソル $\mathbf{S}(\mathbf{v}, \pi)$ が次の応力テンソル $\mathbf{T}$ に置き換わる：

$$\mathbf{T} = \chi_{\Omega_1(t)}\mathbf{T}_1(\mathbf{v}, \pi) + \chi_{\Omega_2(t)}\mathbf{T}_2(\mathbf{v}, \pi),\ \ \mathbf{T}_i(\mathbf{v}, \pi) = -\pi\mathbf{I} + \mu_i(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)\mathbf{D}(\mathbf{v}).$$

ここで，$\mu_1, \mu_2 : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ は viscosity functions と呼ばれ，特に μ_1, μ_2 が定数の場合は Newton 流体の応力テンソルに一致する．Abels (2007) は同様の問題に対して弱形式を用いたアプローチをしており，解の存在定理が示されている．一方，本研究では μ_1, μ_2 に対する次の仮定の下：

$$\mu_i \in C^3([0, \infty)),\ \ \mu_i(0) > 0 \quad (i = 1, 2),$$

時空間 L_p 空間で compatibility conditions を満たす十分小さな初期値 $(\mathbf{v}_0, h_0) \in W^{2-2/p}_p(\Omega_0)^N \times W^{3-2/p}_p(\mathbf{R}^{N-1})$ に対して時間局所的強解の一意存在定理を得た．

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

氏 名　齋藤　平和　　　　　印

（2015 年 2 月 現在）

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
論文	H. Saito, On the R-boundedness of solution operator families of the generalized Stokes resolvent problem in an in finite layer, Mathematical Methods in the Applied Sciences（掲載決定）
報告集	H. Saito, Infinite layer における Neumann-Dirichlet 型境界値ストークス問題に対する最大正則性原理, 第 34 回発展方程式若手セミナー報告集, 2012 年 12 月, pp. 255-260 〇H. Saito, Y. Shibata, 表面張力を伴うストークス方程式の解析, 第 35 回発展方程式若手セミナー報告集, 2013 年 12 月, pp. 129-136 〇H. Saito, Y. Shibata, On some decay properties of solutions for the Stokes equations with surface tension and gravity in the half space, 数理解析研究所講究録 1883, 2014 年 4 月, pp. 66-74 M. Hieber, 〇H. Saito, 一般化ニュートン流体の非圧縮性二相流の数学解析, 第 36 回発展方程式若手セミナー報告集（掲載決定）
国際会議 口頭発表	〇H. Saito, On the Lp-Lq maximal regularity of the Neumann-Dirichlet problem for the Stokes equations in an infinite layer, The 5th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 早稲田大学, 2012 年 6 月 〇H. Saito, On the Lp-Lq maximal regularity of the Neumann-Dirichlet problem for the Stokes equations in an infinite layer, Conference on Complex Fluids, Darmstadtium（ドイツ）, 2012 年 7 月 L. von Below, 〇H. Saito, On the maximal Lp-Lq regularity for the Stokes problem with the Neumann-Robin boundary condition in an infinite layer, The 7th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 早稲田大学, 2012 年 11 月 〇H. Saito, Y. Shibata, On some decay properties of solutions for the Stokes problem with surface tension, The 8th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 早稲田大学, 2013 年 6 月 〇H. Saito, Y. Shibata, On some decay property for Stokes equations with surface tension in half space, RIMS Workshop on Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 7 月 〇H. Saito, Y. Shibata, On a free boundary problem for the Navier-Stokes equations, The 6th Nagoya Workshop on Differential Equations, 名古屋大学, 2014 年 3 月

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
	○H. Saito, Y. Shibata, On the global wellposedness of a free boundary problem for the Navier-Stokes equations in unbounded domains, Compflows 2014, The Mathematical Research and Conference Center in Bedlewo（ポーランド), 2014 年 3 月
	○H. Saito, Y. Shibata, On the global wellposedness of a free boundary problem for the Navier-Stokes equations in unbounded domains, Maxwell-Stefan meets Navier-Stokes, Martin Luther University of Halle-Wittenberg（ドイツ), 2014 年 3 月
	○H. Saito, Y. Shibata, On decay properties of solutions to the Stokes equations with surface tension and gravity in the half space, RIMS Workshop on Mathematical Analysis of Incompressible Flow, 京都大学数理解析研究所, 2014 年 11 月
国際会議ポスター発表	L. von Below, M. Hieber, ○H. Saito, Y. Shibata, Analysis of the Stokes problem related to free boundary problem, Evaluation IRTG 1529, Darmstadtium（ドイツ), 2013 年 1 月
	L. von Below, ○H. Saito, On the maximal Lp-Lq regularity of the Stokes problem with the Neumann-Robin boundary condition in an infinite layer, International Conference on the Mathematical Fluid Dynamics, ホテル日航奈良（奈良), 2013 年 3 月
国内学会口頭発表	○H. Saito, On the Lp-Lq maximal regularity of the Neumann-Dirichlet problem for the Stokes equations in an infinite layer, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 九州大学, 2012 年 9 月
	○H. Saito, Y. Shibata, On the Stokes equations with surface tension in the half space, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 愛媛大学, 2013 年 9 月
	○H. Saito, Y. Shibata, Global well-posedness of a free boundary problem for the Navier-Stokes equations in the Lp-Lq framework, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 広島大学, 2014 年 9 月
	○H. Saito, Y.Shibata, 表面張力と重力を伴うストークス方程式の解の減衰について, 若手による流体力学の基礎方程式の研究集会, 名古屋大学, 2015 年 1 月
国内学会ポスター発表	○H. Saito, 自由表面を伴う非圧縮性流れの数学解析, 数学・数理科学専攻若手研究者のための異分野・ 異業種研究交流会, 東京大学, 2014 年 10 月
セミナー等の発表	○H. Saito, On the Lp-Lq maximal regularity of the Neumann-Dirichlet problem for the Stokes equations in an infinite layer, Weekly Seminars in IRTG 1529, Technical University Darmstadt（ドイツ), 2012 年 6 月

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
	○H. Saito, Infinite layer における Neumann-Dirichlet 型境界値ストークス問題に対する最大正則性原理, 第 34 回発展方程式若手セミナー, タナベ湘南研修センター（神奈川), 2012 年 9 月 ○H. Saito, Y. Shibata, 表面張力を伴うストークス方程式の解析, 第 35 回発展方程式若手セミナー, ヒルズサンピア山形（山形), 2013 年 8 月 ○H. Saito, Y. Shibata, How to treat small λ: some linearized problem arising from a free boundary problem of the Navier-Stokes equations, Weekly Seminars in IRTG 1529, Technical University Darmstadt（ドイツ), 2013 年 10 月 M. Hieber, ○H. Saito, Strong solutions to a two-phase free boundary problem for a class of non-Newtonian fluids, Weekly Seminars in IRTG 1529, Technical University Darmstadt（ドイツ), 2014 年 7 月 M. Hieber, ○H. Saito, 一般化ニュートン流体の非圧縮性二相流の数学解析, 第 36 回発展方程式若手セミナー, 休暇村南阿蘇（熊本), 2014 年 8 月 H. Saito, Free boundary problems of the incompressible Navier-Stokes equations in some unbounded domains, 第 40 回流体数学セミナー, 早稲田大学, 2015 年 1 月