早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

Free boundary problems of the incompressible Navier-Stokes equations in some unbounded domains

申　請　者

Hirokazu	SAITO
齋藤	平和

数学応用数理専攻　偏微分方程式研究

2015 年 2 月

海の波の運動や水中の気泡の運動等，流体と気体 (流体同士等の場合もある) の界面が時々刻々と変形する現象は，Navier-Stokes-Fourier 方程式の自由境界値問題として定式化される．本論文では，非有界領域において非圧縮性粘性流体に対する Navier-Stokes 方程式の自由境界値問題を考察し，適切性や解の長時間挙動に関する研究がなされている．

数学的に自由境界値問題を解析する際には，適当な変数変換を用いて固定領域上の非線形問題に書き換える．本論文では，半沢変換を用いることで次の 3 つの固定領域に帰着される場合を扱う：(i) 層領域，(ii) 半空間，(iii) 全空間.

本論文は全 5 章で構成されている．以下，第 1 章から順に各章の研究概要およびその評価を述べる．

第 1 章では，本研究に関連する研究史が紹介された後に，本論文を通して用いられる関数空間や補題，命題等が導入されている．

第 2 章では，タイプ (i) の自由境界値問題の線形化問題およびそれに付随するレゾルベント問題を考察している．本章の主要な部分はレゾルベント問題の解析である：

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{u} - \mathrm{Div}\,\mathbf{S}(\mathbf{u},\theta) = \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = f_d & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u},\theta)\mathbf{e}_N = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma_\delta, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } \Gamma_0. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$\lambda \in \Sigma_{\varepsilon,\gamma_0} = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\arg\lambda| \le \pi-\varepsilon,\ |\lambda| \ge \gamma_0\}$ $(0 < \varepsilon < \pi/2,\ \gamma_0 > 0)$ であり，$\mathbf{u} = (u_1(x), \ldots, u_N(x))^T$ $(N \ge 2)$ は流体の速度場，$\theta = \theta(x)$ は圧力場を表す未知関数である．右辺に現れる $\mathbf{f} = (f_1(x), \ldots, f_N(x))^T$，$f_d = f_d(x)$，$\mathbf{g} = (g_1(x), \ldots, g_N(x))^T$ は与えられた関数であり，$\mathbf{e}_N = (0, \ldots, 0, 1)^T$．領域 Ω および境界 Γ_0, Γ_δ は次で与えられる：$\Omega = \{(x', x_N) \mid x' \in \mathbf{R}^{N-1},\ 0 < x_N < \delta\}$ $(\delta > 0)$, $\Gamma_a = \{(x', x_N) \mid x' \in \mathbf{R}^{N-1},\ x_N = a\}$ $(a = 0, \delta)$.

一方，$\mathbf{S}(\mathbf{u},\theta) = -\theta\mathbf{I} + \mu\mathbf{D}(\mathbf{u})$ は応力テンソルと呼ばれる $N \times N$ 行列，$\mu > 0$ は流体の粘性係数，$\mathbf{I}$ は単位行列，$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T$ である．

本章の主結果は，(1) の解 $(\mathbf{u},\theta)$ への解作用素 $\mathcal{S}(\lambda), \mathcal{T}(\lambda)$ が存在し，$\{\lambda\mathcal{S}(\lambda) \mid \lambda \in \Sigma_{\varepsilon,\gamma_0}\}$ 等の作用素の族が適当なクラスにおいて $\mathcal{R}$-有界になることである．$\mathcal{R}$-有界の定義より，$\mathcal{R}$-有界ならば一様有界なので，本結果は Abe (2004), Abels (2005, 2006), Shibata (2013) で得られている (1) のレゾルベント評価を拡張している．また，通常の放物型理論では，任意の $0 < \varepsilon < \pi/2$ に対して $\gamma_0 > 0$ を十分大きく選ぶことにより $\{\lambda\mathcal{S}(\lambda) \mid \lambda \in \Sigma_{\varepsilon,\gamma_0}\}$ 等の $\mathcal{R}$-有界性が示されるが，本結果では $0 < \varepsilon < \pi/2$, $\gamma_0 > 0$ ともに任意に選ぶことができるという点が新しい．

第 3 章では，タイプ (ii) の自由境界値問題に対する次の線形化問題が考察されている：

$$\begin{cases} \partial_t\mathbf{u} - \mathrm{Div}\,\mathbf{S}(\mathbf{u},\theta) = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 & \text{in } \mathbf{R}^N_+,\ t > 0, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u},\theta)\mathbf{n} + (c_g - c_\sigma\Delta')h\mathbf{n} = 0 & \text{on } \mathbf{R}^N_0,\ t > 0, \\ \partial_t h - \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 & \text{on } \mathbf{R}^N_0,\ t > 0, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{f} \ \text{ in } \mathbf{R}^N_+, \quad h|_{t=0} = g & \text{on } \mathbf{R}^{N-1}. \end{cases} \tag{2}$$

ここで，$c_g > 0$ は重力加速度，$c_\sigma > 0$ は表面張力係数，$\mathbf{n} = (0, \ldots, 0, -1)^T$ は $\mathbf{R}^N_0 = \{x_N = 0\}$ の単位外法線ベクトル，$\Delta' = \sum_{j=1}^{N-1} \partial_j^2$ $(\partial_j = \partial/\partial x_j)$.

本章では，Shibata-Shimizu (2012) で得られている (2) に付随するレゾルベント問題の解表示において，レゾルベントパラメータ λ が原点近傍にある場合の詳細な解析を行い，(2) の解作用素の L_q-L_r 減衰評価を示している．具体的には，

$$X = (J_q(\mathbf{R}^N_+) \cap L_r(\mathbf{R}^N_+)^N) \times (W_q^{2-1/q}(\mathbf{R}^{N-1}) \cap L_r(\mathbf{R}^{N-1}))$$

としたときに，次の定理が示されている：

定理 1. $1 < r \leq 2 \leq q < \infty$ とする．このとき，作用素 $S(t), \Pi(t), T(t)$ $(t > 0)$ が存在して，$\mathbf{F} = (\mathbf{f}, g) \in X$ に対して $(\mathbf{u}, \theta, h) = (S(t)\mathbf{F}, \Pi(t)\mathbf{F}, T(t)\mathbf{F})$ は (2) の一意解である．さらに，次の評価が成立する：

$$\|S(t)\mathbf{F}\|_{L_q(\mathbf{R}^N_+)} \leq Ct^{-\frac{N-1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\|\mathbf{F}\|_X \quad ((q,r) \neq (2,2),\ \ t \geq 1),$$

$$\|\nabla S(t)\mathbf{F}\|_{L_q(\mathbf{R}^N_+)} \leq Ct^{-\frac{N-1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)-\min\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right),\frac{1}{8}\left(2-\frac{1}{q}\right)\right\}-\frac{1}{8}}\|\mathbf{F}\|_X \quad (t \geq 1).$$

定理 1 の証明は次の通りである．初めに，レゾルベント問題の解表示に現れる Lopatinskij 行列式の根 $\lambda_\pm(\xi')$ の漸近展開を調べる：

$$\lambda_\pm(\xi') = \pm i c_g^{1/2}|\xi'|^{1/2} - 2|\xi'|^2 + O(|\xi'|^{5/2}), \quad |\xi'| \to 0. \tag{3}$$

ただし，$\xi' \in \mathbf{R}^{N-1}$ は Fourier 空間における変数である．次に，積分路 Γ を複素平面の原点から十分に離れた場所に取り，解析半群の理論とレゾルベント問題の解表示を用いることで (2) の解 $\mathbf{u}(t)$ の表現を得る．さらに，Cauchy の積分定理を用いて Γ を左半平面に移し，$\mathbf{u}(t)$ を $\Gamma^\pm_{\mathrm{Res}}$, $\widetilde{\Gamma}$ 上の積分に分ける ($\Gamma^\pm_{\mathrm{Res}}$ は $\lambda_\pm(\xi')$ を囲む閉曲線，$\widetilde{\Gamma}$ はその他の部分)．このとき，留数定理, (3) および $N-1$ 次元の熱核の L_q-L_r 減衰評価を組み合わせて，$\Gamma^\pm_{\mathrm{Res}}$ 部分から L_q-L_r 減衰評価を得る．最後に，$\widetilde{\Gamma}$ 上の積分が $\Gamma^\pm_{\mathrm{Res}}$ 部分より速く減衰することを示す.

(2) に関連する研究は多くあるが，解の減衰オーダーは本研究により初めて明らかになった．また，研究手法も非常に独創的であり今後の応用が期待される.

第 4 章では，タイプ (ii) の自由境界値問題が考察されている：

$$\begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = \mathrm{Div}\, \mathbf{S}(\mathbf{v}, \pi) - \rho c_g \mathbf{e}_3 & \text{in } \Omega(t),\ t > 0, \\ \mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 & \text{in } \Omega(t),\ t > 0, \\ \mathbf{S}(\mathbf{v}, \pi)\mathbf{n}_\Gamma = c_\sigma \kappa_\Gamma \mathbf{n}_\Gamma & \text{on } \Gamma(t),\ t > 0, \\ \partial_t h + \mathbf{v}' \cdot \nabla' h - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 & \text{on } \Gamma(t),\ t > 0, \\ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad \text{in } \Omega_0, \qquad h|_{t=0} = h_0 & \text{on } \mathbf{R}^2. \end{cases} \tag{4}$$

ここで，$\mathbf{v}' \cdot \nabla' h = \sum_{j=1}^2 v_j \partial_j h$ とし, $\Gamma(t) = \{(x', x_3) \mid x' \in \mathbf{R}^2,\ \ x_3 = h(x', t)\}$, $\Omega(t) = \{(x', x_3) \mid x' \in \mathbf{R}^2,\ \ x_3 < h(x', t)\}$. さらに，$\rho > 0$ は $\Omega_0 = \{(x', x_3) \mid x' \in \mathbf{R}^2,\ \ x_3 < h_0(x')\}$ を占める流体の密度であり，κ_Γ および $\mathbf{n}_\Gamma$ はそれぞれ $\Gamma(t)$ の平均曲率，単位外法線ベクトルである．本章では，(4) の時間大域的適切性および解の長時間挙動が示されている：

定理 2. 指数 p, q は次の仮定を満たすとする：$2 < p < \infty$, $3 < q < 16/5$, $2/p + 3/q < 1$. さらに，初期値 $(\mathbf{v}_0, h_0)$ は次の関数空間に属する：

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_0 \in B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\Omega_0)^3 \cap B^{2(1-1/p)}_{q/2,p}(\Omega_0)^3, \\ &h_0 \in B^{3-1/p-1/q}_{q,p}(\mathbf{R}^2) \cap B^{3-1/p-1/2}_{2,p}(\mathbf{R}^2) \cap L_{q/2}(\mathbf{R}^2). \end{aligned}$$

このとき，初期値が十分小さくかつ適合条件 *(compatibility conditions)* を満たせば，(4) の時間大域的強解が一意に存在し，定理 1 と同様の長時間挙動を示す.

定理 2 の証明は次の通りである．初めに，半沢変換を用いて固定領域 $\mathbf{R}^3_- = \{x_3 < 0\}$ 上の問題に変換する．次に，最大 L_p-L_q 正則性定理と定理 1 で得られた L_q-L_r 減衰評価を組み合わせることで，定理 2 の指数 p, q に対する仮定の下，$\mathbf{R}^3_-$ 上の線形化問題の解に対する適当な評価を導く．さらに，構築した線形理論と Banach の不動点定理を組み合わせることで，時間 L_p 空間 L_q 枠において固定領域 $\mathbf{R}^3_-$ 上の非線形問題に対する時間大域的強解を構成する．最後に，得られた解に半沢変換の逆変換を作用させることで定理 2 を得る.

証明のポイントは，多項式減衰をコントロールするために指数 p, q を定理 2 の仮定を満たすように選ぶことである．このような議論は，時空間 L_p 枠では不可能であり，本結果は時間 L_p 空間 L_q 枠が本質的な役割を果たす初めての例である.

第 5 章では，一般化 Newton 流体と呼ばれる非 Newton 流体のクラスに対して，2 相自由境界値問題が考察されている．問題設定は Prüss-Simonett (2010, 2011) と同様であり，半沢変換により $\dot{\mathbf{R}}^N = \mathbf{R}^N_+ \cup \mathbf{R}^N_-$ 上の非線形問題に変換される (タイプ (iii) に対応する)．ただし，Newton 流体の応力テンソル $\mathbf{S}(\mathbf{v}, \pi)$ は $\mathbf{T}$ に置き換わる：$\mathbf{T} = \chi_{\Omega_1(t)}\mathbf{T}_1(\mathbf{v}, \pi) + \chi_{\Omega_2(t)}\mathbf{T}_2(\mathbf{v}, \pi)$, $\mathbf{T}_i(\mathbf{v}, \pi) = -\pi\mathbf{I} + \mu_i(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)\mathbf{D}(\mathbf{v})$ $(i = 1, 2)$．ここで，$\mu_1, \mu_2 : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ は与えられた関数である.

本章では，μ_1, μ_2 に対する次の仮定の下：$\mu_i \in C^3([0, \infty))$, $\mu_i(0) > 0$ $(i = 1, 2)$, 適合条件を満たす十分小さな初期値 $(\mathbf{v}_0, h_0) \in W^{2-2/p}_p(\Omega_0)^N \times W^{3-2/p}_p(\mathbf{R}^{N-1})$ に対して $J = (0, T)$ $(T > 0)$ 上の強解の一意存在が示されている.

以上述べたように，申請者は非有界領域における非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の自由境界値問題に対して，非常に独創的な研究を行い多くの価値ある結果を得ている．また，本論文の中で確立された研究手法は関連分野の今後の発展に大きく貢献するものと期待される．よって，本論文は博士（理学）の学位論文として十分に価値のあるものと認める.

2015 年 1 月

審査員

(主査)	早稲田大学教授	理学博士 (筑波大学)	柴田良弘
	早稲田大学教授	理学博士 (北海道大学)	小薗英雄
	早稲田大学教授	理学博士 (京都大学)	小澤徹
	Prof. of TU Darmstadt	Ph.D. (Eberhard Karls Universität Tübingen)	Matthias Hieber