

博士論文

非一様 Bose-Einstein 凝縮系の
場の量子論とゼロモードの量子揺らぎ

Quantum Field Theory for Inhomogeneous Bose-Einstein
Condensate System and Quantum Fluctuation of Zero Mode

2016年2月

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科
電子物理システム学専攻 凝縮系の理論物理研究

高橋 淳一

Junichi TAKAHASHI

目次

第 1 章	序論	5
1.1	背景	5
1.2	本論文の構成	6
第 2 章	基礎理論	9
2.1	一様系の場の量子論	9
2.1.1	真空の定義と準粒子描像	9
2.1.2	真空の非同値性	10
2.1.3	on-shell 繰り込みと weak relation	12
2.1.4	真空の縮退と自発的対称性の破れ	13
2.1.5	連続変換対称性の自発的対称性の破れと秩序変数	14
2.1.6	南部-Goldstone の定理とゼロモード	15
2.2	2 体接触型相互作用で記述される一様ボソン場	16
2.2.1	非摂動ハミルトニアンの定義	18
2.2.2	Bogoliubov 変換	18
2.3	2 体接触型相互作用で記述される非一様ボソン場	21
2.3.1	非摂動ハミルトニアンの定義	21
	内積の定義と固有関数の分類	23
	固有値がゼロでない実数の場合	23
	固有値がゼロの場合	24
	ゼロ固有値に属する広義固有関数	25
	完全性	26
2.3.2	非摂動ハミルトニアンの対角化と真空の定義	27
2.3.3	凝縮体の線形安定性解析	28
	固有値がゼロでない実数であるとき	30
	固有値がゼロであるとき	30
	固有値に虚部が含まれるとき	30
2.3.4	2 つの不安定性の特徴	31

	Landau 不安定性の特徴	32
	動的不安定性の特徴	32
2.3.5	ゼロモードの具体形	32
	例 1 : 大域的位相変換に対するゼロモード	32
	例 2 : 並進変換に対するゼロモード	33
	一様系におけるゼロモード	33
	ソリトン解に対するゼロモード	34
第 3 章	ゼロモードの量子揺らぎとゼロモード間の相互作用	37
3.1	Lewenstein-You の方法におけるゼロモードの真空	37
3.2	Interacting Zero Mode Formulation	38
3.3	一様系におけるゼロモードの量子揺らぎ	40
3.3.1	数値計算結果	41
3.4	トラップ系に対するゼロモードの量子揺らぎ	42
3.5	ソリトン解による非一様系の場合	44
第 4 章	ゼロモードに由来する動的不安定モードの解析	51
4.1	設定	51
4.2	励起モードに対する Bogoliubov 方程式の摂動論	53
4.3	ゼロモードに対する Bogoliubov 方程式の摂動論	54
4.4	1次元ソリトン系に対する永年方程式の解	56
4.4.1	具体例 1 : Oscillating type potential	58
4.4.2	具体例 2 : ガウス関数型摂動ポテンシャル	59
第 5 章	まとめ	63
付 録 A	南部-Goldstone の定理の証明	65
A.1	証明の準備	65
A.1.1	変換の生成子	65
A.1.2	スペクトル表示	66
A.2	南部-Goldstone 交換関係を用いた証明	68
A.3	Ward-高橋恒等式を用いた証明	69
A.3.1	Ward-高橋恒等式	69
A.3.2	縮退した真空に対する Ward-高橋恒等式	70
A.3.3	南部-Goldstone の定理の証明	71

第1章 序論

1.1 背景

場の量子論は量子多体系を記述する基礎理論であり、現在では素粒子、原子核、宇宙論、量子光学、物性と物理学の幅広い分野で用いられている。場の量子論の特徴の1つとして真空が無数に存在し、それらがユニタリ非同値であることが挙げられる [1]。この真空の自由度のため、場の量子論では1つのハミルトニアンから多彩な物理的状況が導かれる。これが、場の量子論と量子力学が一線を画す点である。

多彩な真空の中にはハミルトニアンの対称性を破る真空が存在する。そうした真空中で記述されるとき、その系は「対称性が自発的に破れている」[2]と称される。物性物理では例えば、超伝導体や超流動体、結晶、強磁性体などがそれぞれ大域的位相変換対称性、並進対称性、スピン回転対称性が自発的に破れた状況にあることが知られている。つまり、超伝導や超流動は位相の方向がそろった真空、結晶は離散並進対称性しかもたない真空、強磁性体はスピンの方向がそろった真空で記述されている。このように対称性が自発的に破れている場合、その対称性の破れに関係した波を伴うことが多い。例えば、超伝導体や超流動体には位相の振動モードである Bogoliubov モード、結晶においては格子振動、強磁性体にはスピン波が現れることが知られている。さらに、破れた対称性が連続対称性である場合、励起エネルギーがゼロの素励起が現れる（南部-Goldstone の定理 [2, 3]）ことが知られている。この素励起は南部-Goldstone モードと呼ばれるゼロモードであり、真空が破ったハミルトニアンの連続対称性を回復するために現れる。しかし、このモードは励起エネルギーがゼロであるため、様々な物理量の計算で赤外発散を引き起こすということが一因で、ほとんどの理論ではゼロモードを単純に無視する Bogoliubov 近似 [4] が用いられる。この近似は、ゼロモード ($\mathbf{k} = 0$ 成分) が運動量積分の1点のみの寄与となるという理由で、一様系を解析するとき正当であるとされる。しかし、平面波展開が有効でなく、ゼロモードの影響が和の1点となる非一様系においては、明らかにこの近似の正当性はなくなる。本研究では Bogoliubov 近似を超えてゼロモー

ドを場の量子論として正しく取り扱い、そのゼロモードが与える物理的影響を調べることを主眼とする。

本研究では対象とする系として冷却原子系を用いる。冷却原子系とは低温に冷却した原子気体を真空中に磁気・光学トラップを用いて捕捉した系である。さらに1995年には蒸発冷却と呼ばれる手法を用いて原子気体を μK オーダーまで冷却することにより原子気体の Bose-Einstein 凝縮 (BEC) が実現された [5, 6, 7]。この系は ^4He の超流動 [8] や半導体中のエキシトン [9] の Bose-Einstein 凝縮体とは異なり、相互作用が弱いため摂動論による定式化が有効である。そのため、非一様系の場の量子論の研究に適した系であると言える。さらに、冷却原子系の重要な性質として、Feshbach 共鳴 [10, 11] の技術を用いることで相互作用の大きさを変えることや、磁気・光学的に捕捉されるという特性上、トラップを光学格子型や箱型とすることや、トラップの締めつけを調整することにより1次元や2次元の系を実現することが可能である。このように冷却原子系は理論の検証を様々な実験パラメータで行うことが出来る。また、この冷却原子系は量子渦 [12, 13, 14, 15]、超流動-絶縁体転移 [16]、Bloch 振動 [17]、BEC-BCS クロスオーバー [18]、スピン自由度を持った BEC [19]、人工ゲージ場の実現 [20]、スピン軌道相互作用を持つ凝縮体 [21]、量子ウォーク [22] など が実現されている極めて特異で有用な系である。

冷却原子系における BEC は場の量子論の枠組みでは大域的位相変換対称性の自発的破れとして説明される。実験においても凝縮体の干渉 [23, 24, 25] が確認されている。これは凝縮体の位相が確定していることを裏付けるものである。また、ダークソリトン [26, 27]、ブライツソリトン [28, 29] などが実験で実現しており、並進対称性を自発的に破る系の実現も期待される。本研究ではこの点に着目し、位相変換対称性や並進対称性の破れに付随するゼロモードが凝縮体に与える影響を調べる。

ここで、本論文で扱う非一様系というのは捕捉ポテンシャル (トラップ) などの外部ポテンシャルにより並進対称性が陽に破れた系や、トラップはないがソリトンの存在により並進対称性が自発的に破れた系を指すことに注意しておく。

1.2 本論文の構成

2章の前半では一様系の場の量子論の一般論を議論し、後半では冷却原子系の場の量子論での取り扱いについての基本的な議論を行う。場の量子論での真空は互いに非同値という性質があり、異なる真空は異なる相に対応する。そのため、真空を

選ぶことによって一つのハミルトニアンから様々な状況の現象を記述することができる。これを実現する一つの機構が自発的対称性の破れである。ここでは、ボソン凝縮の例を通して自発的対称性の破れ、および、対称性が破れた結果として現れるゼロモードについて議論する。その後、冷却原子系のモデルハミルトニアンを導入し、自発的対称性の破れ機構を用いてこの系の BEC を議論する。

3章では、ゼロモードが与える量子揺らぎについて議論を行う。ゼロモードの量子揺らぎは通常 Bogoliubov 近似などの処方において無視される。これはゼロモードの持つ特異性が原因である。Lewenstein と You は、ゼロモードを取り入れたハミルトニアンの対角化を行っている。しかし、彼らが行った場の 2 次のハミルトニアンの対角化においてゼロモードは自由粒子型のハミルトニアンとなるため、ゼロモードの真空を一意的に定義することが出来ないという問題がある。そのため、ゼロモードの量子揺らぎを計算することは出来ない。我々はゼロモードに関しては場の高次の項まで非摂動ハミルトニアンに取り込むことを提案し、それによってこの困難を回避することが出来ることを示した。この手法では、ゼロモードの真空が一意的決めることができるため、ゼロモードの量子揺らぎが計算可能となる。この手法ではゼロモードの真空が非線形の相互作用項が含まれたハミルトニアンで規定されるため、我々はこれを Interacting Zero Mode Formulation (IZMF) と呼ぶことにする。本論文では IZMF を一様系、トラップにより並進対称性が陽に破れた系、ソリトンの存在により並進対称性が自発的に破れた系にそれぞれ適応し、ゼロモードの量子揺らぎについて解析を行った。位相変換対称性の破れに対応するゼロモードの演算子は凝縮体の位相演算子、ソリトンがあることによる並進対称性の破れに対応するゼロモードの演算子はソリトン中心の位置演算子に対応する。そのため、これらの量子揺らぎを評価したことは凝縮体の位相揺らぎやソリトンの位置揺らぎを評価したことに対応する。特に、並進対称性が自発的に破れた系のようにゼロモードが複数ある系を扱う際、ゼロモード同士の相互作用が量子揺らぎに現れることが示されるため、その結果をここで示す。

4章では、凝縮体の揺らぎを解析することにより、ゼロモードが系の安定性に対して重要な役割を担う場合があることを示す。本論文では、系に対称性を明示的に破る微小ポテンシャルが存在する系の解析を行い、この系の振動モードと微小ポテンシャルがない場合のゼロモードの関係を調べる。この議論のために、まずゼロモードに対する摂動論を定式化する。励起モードに対しては通常の摂動論で解析することができる [40]。しかし、ゼロモードに対してはより注意深い取り扱いが必要であ

る。この理由は赤外発散に由来する特異性をゼロモードが持つため、通常の摂動論を用いることができないことにある。ゼロモードに対する摂動論を定式化した後は、並進対称性を陽に破る摂動ポテンシャルが加わったソリトンのある BEC 系の解析を行う。この解析により、この系にはソリトンのゼロモード由来の「実モード対」もしくは「純虚数モード対」が現れることを示す。

5章では、まとめと今後の展望を示す。

第2章 基礎理論

2.1 一様系の場の量子論

ここでは、場の量子論において重要な「真空の非同値性」、「準粒子描像」、「自発的対称性の破れ」といった概念を、後の議論のためにまとめておく。

2.1.1 真空の定義と準粒子描像

場の量子論における真空は相互作用描像で定義される。そのため、Heisenberg 描像から相互作用描像に移る必要がある。ハミルトニアンを非摂動ハミルトニアンと相互作用ハミルトニアンに分ける：

$$\hat{H}_H = \hat{H}_{0,H} + \hat{H}_{int,H}. \quad (2.1.1)$$

ただし、 $_H$ は Heisenberg 描像を表す添え字である。また、本論文において添え字を書かない場合、その演算子や状態は相互作用描像に属するものとする。この非摂動ハミルトニアンを用いて相互作用描像を定義する：

$$\hat{A}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{A}_H \hat{U}^\dagger(t, t_0), \quad (2.1.2)$$

$$\hat{U}(t, t_0) = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds \hat{H}_{int}(s) \right]. \quad (2.1.3)$$

ここで、 t_0 は相互作用描像と Heisenberg 描像が一致する時刻、 T は時間順序積である。真空は、次のように対角的に書かれた相互作用描像の非摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}, \quad (2.1.4)$$

の消滅演算子で消去される状態

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0, \quad (2.1.5)$$

を真空と定義する。このように非摂動ハミルトニアンを選ぶ（相互作用描像を選ぶ）という行為が、真空を選ぶということである。Fock空間が \hat{a} に関する真空上に作られている時、 \hat{a}^\dagger により生成される粒子のことを準粒子と呼ぶ。そのため、このように非摂動ハミルトニアンを選んだ相互作用描像を準粒子描像と呼ぶこともある。今後は、この準粒子のことを単に a 粒子と呼ぶことにする。

ここで、非摂動ハミルトニアンの選択（相互作用描像の選択）には自由度があることに注意しよう。つまり、非摂動ハミルトニアンは任意のカウンター項 $\delta\hat{H}_H$ を用いて

$$\hat{H}_H = \hat{H}_{0,H} + \hat{H}_{int,H} \quad (2.1.6)$$

$$= (\hat{H}_{0,H} + \delta\hat{H}_H) + (\hat{H}_{int,H} - \delta\hat{H}_H) \quad (2.1.7)$$

$$\equiv \hat{H}'_{0,H} + \hat{H}'_{int,H} \quad (2.1.8)$$

とすることが出来る。したがって、非摂動ハミルトニアンから定義される真空も一意的ではなく、様々なものがある。

2.1.2 真空の非同値性

前節では場の量子論における真空が無限にあることを見た。この節では、その真空同士が互いにユニタリ非同値になることがあることを見る。

ここでは、場の量子論における真空の非同値性をボソン凝縮の例を通して理解しよう。量子数 \mathbf{k} でラベルされる生成消滅演算子の組 $\{\hat{a}_{\mathbf{k}}\}$ を考える。この演算子によって消去される状態 $|0\rangle\rangle$ を a 粒子の真空と呼ぶ。

コヒーレント状態へのBogoliubov変換（ボソン変位）

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} \rightarrow \hat{\alpha}_{\mathbf{k}}(\theta) = \hat{a}_{\mathbf{k}} + \theta_{\mathbf{k}} \quad (2.1.9)$$

を考えよう。この新たな演算子 $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}(\theta)$ で消去される状態を $|0(\theta)\rangle\rangle$ と書き、 α 粒子の真空と呼ぶ。 α 粒子の真空と a 粒子の真空を結ぶ変換は

$$|0(\theta)\rangle\rangle = \hat{U}_c(\theta)|0\rangle\rangle \quad (2.1.10)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int d\mathbf{k}|\theta_{\mathbf{k}}|^2\right) \exp\left(-\int d\mathbf{k}\theta_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\right)|0\rangle\rangle \quad (2.1.11)$$

である。

この α 粒子の真空 $|0(\theta)\rangle$ と、粒子 a の粒子数 $m_{\mathbf{k}}$ 状態

$$|m_{\mathbf{k}}\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{m_{\mathbf{k}}!}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger)^{m_{\mathbf{k}}} |0\rangle\rangle \quad (2.1.12)$$

との内積は

$$\langle\langle m_{\mathbf{k}} | 0(\theta)\rangle\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \int d\mathbf{k} |\theta_{\mathbf{k}}|^2\right) \langle\langle m_{\mathbf{k}} | \exp\left(-\int d\mathbf{k} \theta_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\right) | 0\rangle\rangle \quad (2.1.13)$$

である。

ここで、真空 $|0(\theta)\rangle$ は空間並進に関して不変である場合を考える。この場合、 $\theta_{\mathbf{k}} = \theta \delta(\mathbf{k})$ と書けるので

$$\int d\mathbf{k} |\theta_{\mathbf{k}}|^2 = |\theta|^2 \delta(0) \int d\mathbf{k} \delta(\mathbf{k}) = \infty \quad (2.1.14)$$

となる。すなわち、

$$\langle\langle m_{\mathbf{k}} | 0(\theta)\rangle\rangle = 0 \quad (2.1.15)$$

が結論される¹。この結果より α 粒子の真空 $|0(\theta)\rangle$ の中に含まれる a 粒子は有限個ではなく、無限個の a 粒子が存在することが分かる。有限個の a 粒子の状態ベクトルと $|0(\theta)\rangle$ が直交するという事実は a 粒子の Fock 空間 $\mathcal{H} = \{\sum_m |m_{\mathbf{k}}\rangle\rangle\}$ 上で $|0(\theta)\rangle$ は表現できないということを意味している。このことを、 a 粒子の真空 $|0\rangle\rangle$ と α 粒子の真空 $|0(\theta)\rangle$ はユニタリ非同値であると呼ぶ。さらに、 α 粒子の真空 $|0(\theta)\rangle$ もパラメータ θ が異なるもの同士も全く同様の議論によりユニタリ非同値であることが言える。すなわち、ユニタリ非同値な真空は無数に存在する。これは、系を記述するラグランジアンやハミルトニアンが同じであっても、無数の非同値な真空それぞれに対して異なる解が存在することを意味している。例えば、常伝導と超伝導という全く異なった物性を持つ系を1つの電子系ハミルトニアンからその解として導くことができる。先に述べた通り、この非同値な真空の存在が量子力学にない場の量子論特有の特徴である。これは逆に言えば、適切な真空上で議論を行わなければ全く異なる結果が現れる可能性があることを意味する。

なお、ここで見たボソン変位の例において、真空の非同値性の原因は無限個の粒子の凝縮である。この粒子の凝縮は後に説明する自発的対称性の破れの一例であることを注意しておく。

¹厳密には粒子状態について平面波ではなく波束を用いて議論する必要がある [1]。

2.1.3 on-shell 繰り込みと weak relation

ここまで、非摂動ハミルトニアンを選び方が無限に存在することの帰結として、真空も無限に存在し、さらに真空同士は非同値であることを見た。ユニタリ非同値な真空はそれぞれが異なる解を導くため、対象とする物理系に属する真空上の粒子描像を選ばなければ、物理的に正しい結果を得ることは出来ない。適切な真空（もしくは準粒子描像）を選ぶ操作をエネルギー（質量）の繰り込みと呼ぶ。ここでは、繰り込みの1つの方法として、on-shell 繰り込みを説明する。これは、自己エネルギー $\Sigma(k)|_{\omega_k=\varepsilon_k/\hbar} = 0$ となるように繰り込むという方法である。

運動量表示の Dyson 方程式は

$$\Delta(k) = \Delta_0(k) + \Delta_0(k)\Sigma(k)\Delta(k), \quad (2.1.16)$$

である。ここで、 $\Delta(k)$ は1粒子全 Green 関数、 $\Delta_0(k)$ は1粒子自由 Green 関数である。また、 $k = (\omega, \mathbf{k})$ とした。これを解くと

$$\Delta^{-1}(k) = \Delta_0^{-1}(k) - \Sigma(k), \quad (2.1.17)$$

となる。自己エネルギー $\Sigma(k)$ は全 Green 関数の極を自由 Green 関数の極から一般には移動させるものである。Green 関数の極は粒子のエネルギーを表す。すなわち、Dyson 方程式は全 Green 関数のエネルギーは自己エネルギーの衣をまとった自由粒子となることを意味している。on-shell 繰り込み条件とは、全 Green 関数の極と自由 Green 関数の極を一致させるように準粒子描像を取るべしという条件である。

on-shell 繰り込み条件が成り立つとは、全ハミルトニアンと準粒子ハミルトニアンとが Fock 空間上で一致するということである：

$$\langle a | \hat{H}_H | b \rangle = \langle a | \hat{H}_0 | b \rangle. \quad (2.1.18)$$

これを

$$\hat{H}_H \stackrel{\text{w}}{=} \hat{H}_0, \quad (2.1.19)$$

と表す。記号 $\stackrel{\text{w}}{=}$ は適切な Fock 空間内でのみ等式が成り立つという意味である²。この式は、系の全エネルギーは準粒子エネルギーの和で書けるということを意味する。

²式 (2.1.19) は、「理論の元となる Heisenberg 描像の演算子」(左辺)の「対象とする系が属する Fock 空間上の準粒子描像の演算子」(右辺)における表現とみることが出来る。このような演算子の表現のことをダイナミカルマップと呼ぶ [1]。

繰り込みの有名な成功例としては、量子電磁力学（Quantum electrodynamics, QED）がある。QEDでは、準粒子が観測粒子となるように繰り込みを行っている。その結果、実験と精密に一致する正しい理論が出来上がった。紫外発散の回避をするために繰り込みを行うというのがよく言われる方便であるが、これは本質を外した言い方である。この発散はFock空間として物理的でない裸の粒子のものを取ったことから結果として現れたものである。問題の根源は正しいFock空間を選んでいなかったことにあり、紫外発散の有無は関係がない。そのため、紫外発散が起きない物性においても繰り込みを行う必要がある。電子の例でいえば、真空中の電子の質量と物質中の電子の質量は異なる。さらに言えば、常伝導相と超伝導相では粒子のあり方そのものが異なる。このように粒子描像は系によって様々であるため、物性においても正しい粒子描像を定義する繰り込みは必要な手順である³。

なお、ここまでの議論は摂動論に依らない、非摂動的な議論であることに注意しよう。すなわち、準粒子描像及び繰り込み概念は非摂動的な概念である。

2.1.4 真空の縮退と自発的対称性の破れ

場の量子論における真空の中には、ラグランジアンやハミルトニアン（Heisenberg描像）が持つ変換対称性を、相互作用描像で定義される真空が受け継がないものがあり得る。この現象は自発的対称性の破れとして知られている。自発的対称性の破れの背景には真空の縮退がある。縮退した真空から1つの真空を選ぶ際に、対称性が自発的に破れるのである。この節ではこの自発的対称性の破れ概念を数学的にまとめる。

ここでは、ハミルトニアンが \hat{G}_H を生成子とする変換 $\exp(-i\eta\hat{G}_H)$ に対して不変、すなわち

$$\hat{H}_H = e^{i\eta\hat{G}_H} \hat{H}_H e^{-i\eta\hat{G}_H}, \quad (2.1.20)$$

である状況を考える。このハミルトニアンの真空期待値を考えよう。

- 真空が縮退していない場合

縮退のない真空を $|0\rangle\rangle$ と書く。この真空で、式(2.1.20)の期待値を取る：

$$\langle\langle 0|\hat{H}_H|0\rangle\rangle = \langle\langle 0|e^{i\eta\hat{G}_H} \hat{H}_H e^{-i\eta\hat{G}_H}|0\rangle\rangle. \quad (2.1.21)$$

³実際の物性理論では繰り込まれたパラメータを観測粒子のパラメータとするため、この作業が陽に見えないこともある。

エネルギーは縮退していないことから、この等式が成立するためには

$$e^{-i\eta\hat{G}_H}|0\rangle\rangle = e^{-i\eta g_0}|0\rangle\rangle \quad (2.1.22)$$

である必要がある。これは、縮退していない真空は変換 $\exp(-i\eta\hat{G}_H)$ に対して位相因子を除き不変であることを意味する。

- 真空が縮退している場合

縮退がある真空を $|0(\theta)\rangle$ と書く。この真空で、式 (2.1.20) の期待値を取る：

$$\begin{aligned} \langle 0(\theta)|\hat{H}_H|0(\theta)\rangle &= \langle 0(\theta)|e^{i\eta\hat{G}_H}\hat{H}_He^{-i\eta\hat{G}_H}|0(\theta)\rangle \\ &\equiv \langle 0(\theta+\eta)|\hat{H}_H|0(\theta+\eta)\rangle. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

ただし、

$$e^{-i\eta\hat{G}_H}|0(\theta)\rangle \equiv |0(\theta+\eta)\rangle \quad (2.1.24)$$

とした。ここで、真空 $|0(\theta)\rangle$ は他に同じエネルギーを与える真空を持つため、一般に

$$e^{-i\eta\hat{G}_H}|0(\theta)\rangle \not\propto |0(\theta)\rangle \quad (2.1.25)$$

である。これはハミルトニアンが持つ G 不変性を真空が受け継いでいないことを意味する。これが対称性が自発的に破れた状況である。この場合、変換 $\exp(-i\eta\hat{G}_H)$ は真空 $|0(\theta)\rangle$ の間を行き来する非ユニタリ変換となる。

2.1.5 連続変換対称性の自発的対称性の破れと秩序変数

破れた対称性が連続変換である場合は特に重要である。そのため、ここからはハミルトニアンが η をパラメータとする連続変換に対して不変である状況を考える。このとき、変換 $\exp(-i\eta\hat{G}_H)$ で結ばれる真空はパラメータの自由度だけ存在するため、真空は連続無限個縮退していることになる。この節では今後のため、真空が無限に縮退しているかどうかを区別する変数の導入を行う。

まず、 G 変換不変でない場の演算子 $\hat{A}_H(\mathbf{x}, t)$ の生成子 \hat{G}_H による無限小変換

$$e^{i\varepsilon\hat{G}_H}\hat{A}_He^{-i\varepsilon\hat{G}_H} \simeq \hat{A}_H + i\varepsilon [\hat{A}_H, \hat{G}_H] \quad (2.1.26)$$

を考える。この際の場の変化量を

$$\delta\hat{A}_H = i \left[\hat{A}_H, \hat{G}_H \right] \quad (2.1.27)$$

と書く。この量は、南部-Goldstoneの交換関係と呼ばれる。次に、 δA の真空期待値を縮退のない真空と縮退のある真空それぞれで計算してみよう。

- 真空が縮退していない場合

式(2.1.22)より、縮退のない真空 $|0\rangle\rangle$ は $\hat{G}_H|0\rangle\rangle = g_0|0\rangle\rangle$ を満たす。これより、 $|0\rangle\rangle$ を用いた δA の真空期待値は

$$\langle\langle 0|\delta\hat{A}_H|0\rangle\rangle = i\langle\langle 0| \left[\hat{A}_H, \hat{G}_H \right] |0\rangle\rangle = 0, \quad (2.1.28)$$

となる。

- 真空が縮退している場合

対して、縮退した真空 $|0\rangle$ を用いた δA の真空期待値は一般に

$$\langle 0|\delta\hat{A}_H|0\rangle = i\langle 0| \left[\hat{A}_H, \hat{G}_H \right] |0\rangle \neq 0, \quad (2.1.29)$$

となる。

この議論から、縮退のない真空に属する物理系において $\langle\delta\hat{A}_H\rangle = 0$ であり、縮退のある真空に属する物理系において $\langle\delta\hat{A}_H\rangle \neq 0$ であることがわかる。すなわち、 $\langle\delta\hat{A}_H\rangle$ は対称性が自発的に破れた相と破れていない相を区別する秩序変数⁴として用いることが出来ることを意味する。なお、前者の相はWigner相と呼ばれ、後者の相は南部-Goldstone相と呼ばれることもある。

2.1.6 南部-Goldstoneの定理とゼロモード

連続変換対称性が自発的に破れて真空が無限に縮退するとき、励起エネルギーがゼロのモードであるゼロモード（特にこの場合は南部-Goldstoneモード）が出現する[2, 3]。この定理を示すためには零でない真空期待値 $\langle 0(\theta)|\delta\hat{A}_H|0(\theta)\rangle \neq 0$ が存在するためには $\mathbf{k} = 0$ で $\omega = 0$ となるモードの存在が必要であることを示せばよい。

⁴例えば、強磁性・常磁性相を区別する量として秩序変数は $\langle s_z \rangle$ 、常伝導-超伝導相を区別する秩序変数は $\langle \hat{\phi}_\uparrow \hat{\phi}_\downarrow \rangle$ である。

具体的な手順としては、式 (2.1.29) の右辺を Fourier 変換すればよい。この証明の詳細は付録に示すが、これを計算すると確かに必ず $\mathbf{k} = 0$ で $\omega = 0$ に極が現れることを示すことが出来る。これより、長波長でエネルギー 0 の素励起が存在することが示される。

2.2 2体接触型相互作用で記述される一様ボソン場

具体例として、2体の接触型相互作用をするスピン0のボソン場を記述するハミルトニアンを考えよう：

$$\hat{H}_H = \int d\mathbf{x} \left[\hat{\psi}_H^\dagger \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu \right) \hat{\psi}_H + \frac{g}{2} \hat{\psi}_H^\dagger \hat{\psi}_H^\dagger \hat{\psi}_H \hat{\psi}_H \right]. \quad (2.2.1)$$

場の演算子は同時刻交換関係

$$[\hat{\psi}_H(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_H(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad (2.2.2)$$

$$[\hat{\psi}_H(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_H^\dagger(\mathbf{x}', t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.2.3)$$

を満たす。 m は原子の質量、 μ は化学ポテンシャルを表す。後に議論する冷却原子系のように、十分希薄かつ低エネルギー現象では、このような2体の接触型相互作用が有効な記述となる。相互作用 g は $g > 0$ のとき斥力で、 $g < 0$ のとき引力である。

このハミルトニアンは粒子数を生成子とする変換に対して不変である：

$$e^{i\theta \hat{N}_H} \hat{H}_H e^{-i\theta \hat{N}_H} = \hat{H}_H, \quad (2.2.4)$$

$$\hat{N}_H = \int d\mathbf{x} \hat{\psi}_H^\dagger \hat{\psi}_H. \quad (2.2.5)$$

この変換は場に時空に依らない位相変換

$$e^{i\theta \hat{N}_H} \hat{\psi}_H e^{-i\theta \hat{N}_H} = e^{-i\theta} \hat{\psi}_H, \quad (2.2.6)$$

をもたらすため、場の大域的位相変換と呼ばれる。すなわち、このハミルトニアンは大域的位相変換対称性を持つ。

量子場 $\hat{\psi}_H$ に対する南部-Goldstone 交換関係

$$\delta \hat{\psi}_H = i \left[\hat{\psi}_H, \hat{N}_H \right] = i \hat{\psi}_H \quad (2.2.7)$$

の真空期待値を

$$\xi(\mathbf{x}) = \langle \hat{\psi}_{\text{H}}(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (2.2.8)$$

と置く。これがこの系の秩序変数である。ここで、簡単のために秩序変数は時間に依存しないとした。また、このときの真空はこの時点では well-defined ではないことに注意しておく。真空の議論は後に行う。

ここで、新たな量子場

$$\hat{\varphi}_{\text{H}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\psi}_{\text{H}}(\mathbf{x}, t) - \xi(\mathbf{x}) \quad (2.2.9)$$

を導入しよう。この量子場の真空期待値は定義より

$$\langle \hat{\varphi}_{\text{H}} \rangle = 0, \quad (2.2.10)$$

を満たす。量子場 $\hat{\psi}_{\text{H}}$ と $\hat{\varphi}_{\text{H}}$ の間は2章で示したコヒーレント変換で結ばれている。量子場 $\hat{\psi}_{\text{H}}$ は全粒子数と

$$N = \int d\mathbf{x} \langle \hat{\psi}_{\text{H}}^\dagger \hat{\psi}_{\text{H}} \rangle = \int d\mathbf{x} \left[|\xi|^2 + \langle \hat{\varphi}_{\text{H}}^\dagger \hat{\varphi}_{\text{H}} \rangle \right], \quad (2.2.11)$$

という関係にある。秩序変数 ξ と量子場 $\hat{\varphi}_{\text{H}}$ はそれぞれ凝縮体の密度、非凝縮気体の場の演算子と解釈することができる。

ハミルトニアンを ξ と $\hat{\varphi}_{\text{H}}$ を用いて表し、 $\hat{\varphi}_{\text{H}}$ の次数ごとに整理すると

$$\hat{H}_{\text{H}} = E_{\text{GP}} + \hat{H}_{\text{H},1} + \hat{H}_{\text{H},2} + \hat{H}_{\text{H},3} + \hat{H}_{\text{H},4}, \quad (2.2.12)$$

となる。ただし、

$$E_{\text{GP}} = \int d\mathbf{x} \xi^*(\mathbf{x}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) - \mu + \frac{g}{2} |\xi(\mathbf{x})|^2 \right] \xi(\mathbf{x}), \quad (2.2.13)$$

$$\hat{H}_{\text{H},1} = \int d\mathbf{x} \left[\hat{\varphi}_{\text{H}}^\dagger \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \mu + g |\xi|^2 \right) \xi + \hat{\varphi}_{\text{H}} \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \mu + g |\xi|^2 \right) \xi^* \right], \quad (2.2.14)$$

$$\hat{H}_{\text{H},2} = \int d\mathbf{x} \left[\hat{\varphi}_{\text{H}}^\dagger \mathcal{L} \hat{\varphi}_{\text{H}} + \frac{1}{2} \hat{\varphi}_{\text{H}} \mathcal{M}^* \hat{\varphi}_{\text{H}} + \frac{1}{2} \hat{\varphi}_{\text{H}}^\dagger \mathcal{M} \hat{\varphi}_{\text{H}} \right], \quad (2.2.15)$$

$$\hat{H}_{\text{H},3} = g \int d\mathbf{x} \left[\xi^* \hat{\varphi}_{\text{H}}^\dagger \hat{\varphi}_{\text{H}} \hat{\varphi}_{\text{H}} + \xi \hat{\varphi}_{\text{H}}^\dagger \hat{\varphi}_{\text{H}}^\dagger \hat{\varphi}_{\text{H}} \right], \quad (2.2.16)$$

$$\hat{H}_{\text{H},4} = \frac{g}{2} \int d\mathbf{x} \hat{\varphi}_{\text{H}}^\dagger \hat{\varphi}_{\text{H}}^\dagger \hat{\varphi}_{\text{H}} \hat{\varphi}_{\text{H}}, \quad (2.2.17)$$

である。ここで、

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + 2g |\xi|^2, \quad \mathcal{M} = g \xi^2 \quad (2.2.18)$$

とした。

2.2.1 非摂動ハミルトニアン の定義

秩序変数を定義する際に用いる真空を決定するために、非摂動ハミルトニアンを決めよう。ここでは、絶対零度に近く、ほとんどの粒子が凝縮に参加している状況を考える。すなわち、凝縮原子数 N_0 と非凝縮原子数の関係が $N_0 \gg \int d\mathbf{x} \langle \hat{\varphi}^\dagger \varphi \rangle$ である状況を考える。このとき、非凝縮粒子場の寄与は小さいと考えられるため、非摂動ハミルトニアンは $\hat{\varphi}_H$ の2次までとする： $\hat{H}_{1,H} + \hat{H}_{2,H}$ 。Heisenberg 描像から、相互作用描像に移る。相互作用描像における非凝縮気体の場 $\hat{\varphi}$ に対する運動方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\varphi} = \left[\hat{\varphi}, \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \right], \quad (2.2.19)$$

となる。上記の方程式の真空期待値をとると、秩序変数 ξ は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + g|\xi(\mathbf{x})|^2 \right) \xi(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.2.20)$$

を満たしている必要がある。これは Gross-Pitaevskii 方程式 (GP 方程式) [32, 33] と呼ばれる方程式である。

今回は一様解を想定し、秩序変数は定数とする。このとき、GP 方程式と $N_0 = \int d\mathbf{x} |\xi|^2$ より、

$$\xi = \sqrt{\frac{N_0}{V}} e^{i\theta} \equiv \sqrt{n_0} e^{i\theta}, \quad (2.2.21)$$

$$\mu = gn_0, \quad (2.2.22)$$

となる。ただし、 V は系の体積、 θ は凝縮体の位相、 n_0 は凝縮原子数密度である。

2.2.2 Bogoliubov 変換

非摂動ハミルトニアンを対角化するために運動量空間に移る:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.2.23)$$

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.2.24)$$

それぞれの振幅の関係は

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = \sqrt{n_0} e^{i\theta} (2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}) - \hat{\alpha}_{\mathbf{k}}, \quad (2.2.25)$$

である。

非摂動ハミルトニアン \hat{H}_2 は

$$\hat{H}_2 = \int d\mathbf{k} \left[(\varepsilon_k + gn_0) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{gn_0}{2} \left(e^{2i\theta} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger + e^{-2i\theta} \hat{a}_k \hat{a}_{-\mathbf{k}} \right) \right], \quad (2.2.26)$$

$$= \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \begin{pmatrix} \hat{a}_k^\dagger & \hat{a}_{-\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_k & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^* & \mathcal{L}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (2.2.27)$$

となる。ただし、

$$\mathcal{L}_k = \varepsilon_k + gn_0, \quad \mathcal{M} = gn_0 e^{2i\theta}, \quad (2.2.28)$$

また、 $\varepsilon_k = \hbar^2 |\mathbf{k}|^2 / 2m$ とした。

非摂動ハミルトニアンを対角化する生成消滅演算子を

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_k \\ \hat{\beta}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & -v_k \\ -v_k^* & u_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix} \equiv P_k \begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (2.2.29)$$

と導入する。この変換を Bogoliubov 変換 [34] と呼ぶ。Bogoliubov 変換後の演算子もボソンの生成消滅演算子である。すなわち、ボソンの交換関係を満たすために、 P_k の要素は

$$|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1, \quad (2.2.30)$$

という関係を満たさなければならない。この制限により、行列 P_k はユニタリ行列にはなりえないことに注意しよう。そのため、非摂動ハミルトニアンの対角化は

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_k & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^* & \mathcal{L}_k \end{pmatrix}, \quad (2.2.31)$$

の固有値問題を解くだけでは達成できない⁵。

しかし、 $P_k^{-1} = \sigma_3 P_k^\dagger \sigma_3$ という性質があることに気づけば

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_k^\dagger & \hat{\beta}_{-\mathbf{k}} \end{pmatrix} (P_k^{-1})^\dagger \begin{pmatrix} \mathcal{L}_k & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^* & \mathcal{L}_k \end{pmatrix} P_k^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_k \\ \hat{\beta}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_k^\dagger & -\hat{\beta}_{-\mathbf{k}} \end{pmatrix} P_k \begin{pmatrix} \mathcal{L}_k & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L}_k \end{pmatrix} P_k^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_k \\ \hat{\beta}_{-\mathbf{k}}^\dagger \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

⁵フェルミオン系であれば係数の満たすべき条件は $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ となり、行列 P_k もユニタリ行列となる。そのため、非摂動ハミルトニアンの対角化はエルミート行列 (2.2.31) の固有値問題を解くだけで達成できる。

行列

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_k & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L}_k \end{pmatrix}, \quad (2.2.33)$$

の固有値問題を解けばよいことが分かる。すなわち、

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_k & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix}, \quad (2.2.34)$$

を解けばよく、この固有値は

$$\lambda_k = \pm \sqrt{\varepsilon_k(\varepsilon_k + 2gn_0)} \equiv \pm E_k. \quad (2.2.35)$$

となる。この固有値は長波長 $\mathbf{k} = 0$ で $\lambda_{\mathbf{k}=0} = 0$ である。この模型において破れている連続対称性は位相変換対称性であるため、このエネルギー 0 の励起は位相変換対称性の自発的破れの反映として現れる南部-Goldstone モードである。固有ベクトルは

$$u_k = e^{i\theta} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{L}_k}{E_k} + 1 \right)}, \quad v_k = e^{-i\theta} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{L}_k}{E_k} - 1 \right)} \quad (2.2.36)$$

と求まる。ここで、変換行列の要素の分母には E_k が含まれていることに注意しよう。 $E_{\mathbf{k}=0} = 0$ であるため、この行列は $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ で定義されない。そのため、この方法で対角化できるのは $\mathbf{k} = 0$ を除いた部分だけである。そのことを考慮すると、非摂動ハミルトニアンは

$$\hat{H}_2 = \int_{\mathbf{k} \neq 0} d\mathbf{k} E_k \hat{\beta}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{\beta}_{\mathbf{k}} + \frac{gn_0}{2} \left(e^{-i\theta} \hat{\alpha}_0 + e^{i\theta} \hat{\alpha}_0^\dagger \right)^2, \quad (2.2.37)$$

である。調和振動子型である前者の項は β -粒子の励起エネルギーが $E_{\mathbf{k}}$ であると解釈することが出来る。この励起スペクトルは Bogoliubov スペクトルとして呼ばれており冷却原子系でも音波測定 [35] や Bragg 散乱 [36] を通じて観測されている。それに対して、調和振動子型でない後者の項は $(\hat{\alpha}_0^\dagger, \hat{\alpha}_0)$ に対する真空を導入することが出来ないことを意味している。すなわち、南部-Goldstone モードに関しては粒子描像を定義することが出来ない⁶。この難しさを回避するため、 $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}=0}$ を c 数と考えて

⁶本論文ではこの点を考慮して南部-Goldstone 粒子という用語は使用しない。今後は単に南部-Goldstone モード、もしくはゼロモードという用語を使用する。モードと準粒子はしばし同等の意味で使われるが、本論文では区別して用いることにする。今後は一貫して、モードは Bogoliubov 方程式の固有関数 (u v) という意味で用い、その中でもハミルトニアンを調和振動子型とするモードのことを励起モードもしくは準粒子と呼ぶ。

しまい、 $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}=0}$ を単純に無視することが多い。この近似は Bogoliubov 近似 [34] と呼ばれる。

2.3 2体接触型相互作用で記述される非一様ボソン場

前章までは一様系の一様解にのみ焦点を絞って議論を行った。その状況では波数 \mathbf{k} が良い量子数であるため、平面波展開が可能であった。対して、有限サイズ系などの非一様系では波数 \mathbf{k} が良い量子数でないため、平面波展開が有効でない。そのため、これらの状況では平面波展開を用いずに議論を行う必要がある。この章では、非一様系の理論を冷却原子系に対して展開する。

2体の接触型相互作用をするスピン0のボソン場を記述するハミルトニアンは前章と同じ

$$\hat{H}_H = \int d\mathbf{x} \left[\hat{\psi}_H^\dagger (h_0 - \mu) \hat{\psi}_H + \frac{g}{2} \hat{\psi}_H^\dagger \hat{\psi}_H^\dagger \hat{\psi}_H \hat{\psi}_H \right], \quad (2.3.1)$$

と表される。ここで、

$$h_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ex}(\mathbf{x}), \quad (2.3.2)$$

とした。冷却原子系は原子が外部ポテンシャルにトラップされているため、外部ポテンシャル V_{ex} を加えた。本論文が対象とする冷却中性原子気体はこのハミルトニアンで記述できるものとする。

2.3.1 非摂動ハミルトニアンの定義

前章と同じく、 $N_0 \gg \int d\mathbf{x} \langle \hat{\varphi}^\dagger \varphi \rangle$ とし、非摂動ハミルトニアンは $\hat{\varphi}_H$ の2次までとする： $\hat{H}_{1,H} + \hat{H}_{2,H}$. Heisenberg 描像から、相互作用描像に移る。相互作用描像における非凝縮気体の場 $\hat{\varphi}$ に対する運動方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\varphi} = \left[\hat{\varphi}, \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \right], \quad (2.3.3)$$

となる。上記の方程式が各時刻で無矛盾に成立するためには、秩序変数 ξ が

$$(h_0 - \mu + g|\xi(\mathbf{x})|^2)\xi(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.3.4)$$

を満たしている必要がある。

非摂動ハミルトニアンを対角化する

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \hat{H}_2, \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}^\dagger & \hat{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^* & \mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{\varphi}^\dagger \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \hat{\Phi}^\dagger \sigma_3 T \hat{\Phi},\end{aligned}\tag{2.3.5}$$

ここで、

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{\varphi}^\dagger \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix},\tag{2.3.6}$$

とした。また、 σ_i は Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\tag{2.3.7}$$

である。行列 T に対する固有値方程式

$$T \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},\tag{2.3.8}$$

を考えよう。非摂動ハミルトニアンはこの固有関数系を用いることで対角化することが出来る⁷。この方程式は Bogoliubov 方程式と呼ばれる [38, 39]。あるいはフェルミオン系とのアナロジーから Bogoliubov-de Gennes 方程式という。

ここで、Bogoliubov 方程式は非エルミート行列の固有方程式であるという点に注意しよう。そのため、この方程式の固有値 E_n は実であるという保証はなくなる。実際、虚部を含む状況もあり得るが、ここでは固有値には虚部を含まないと仮定する⁸。また、固有関数も右固有関数と左固有関数を独立に考えなくてはならないため少し扱いが煩雑となる。しかしこれは、Bogoliubov 行列の対称性を考慮し内積の計量を変更することで見通しよく記述することが可能である。

⁷フェルミオンとは異なりボソンの場合、エルミート行列である $\sigma_3 T$ の固有値問題でなく、非エルミート行列 T の固有値問題を考えることで対角化が出来る。

⁸固有値に虚部が含まれる場合は対角化出来ない。

内積の定義と固有関数の分類

行列 T には

$$\sigma_1 T \sigma_1 = -T^*, \quad (2.3.9)$$

$$\sigma_3 T \sigma_3 = T^\dagger, \quad (2.3.10)$$

という対称性が存在する。

行列 T は非エルミートであるので固有関数には通常の意味での直交関係はない。そこで T の対称性を考慮し新たに不定計量の内積

$$(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \equiv \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{s}^\dagger(\mathbf{x}) \sigma_3 \mathbf{t}(\mathbf{x}), \quad (2.3.11)$$

を導入する。この内積下で T は擬エルミート性

$$(\mathbf{s}, T\mathbf{t}) = (T\mathbf{s}, \mathbf{t}), \quad (2.3.12)$$

を示す。

ノルムもこの内積を用いて

$$\|\mathbf{s}\|^2 = (\mathbf{s}, \mathbf{s}) = \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{s}^\dagger(\mathbf{x}) \sigma_3 \mathbf{s}(\mathbf{x}), \quad (2.3.13)$$

と定義する。定義に用いられている計量が不定計量 σ_3 であるため、2乗ノルム $\|\mathbf{s}\|^2$ が正である保証はない。実際、後で見るように負ノルムを持つ固有関数やゼロでない固有関数に対してゼロノルムとなる固有関数が存在する。今後は、ノルムの2乗の符号が正である固有関数、符号が負である固有関数、ゼロである固有関数をそれぞれ正ノルム、負ノルム、ゼロノルムと呼び固有関数を分類する。今後、正ノルムに属する固有関数は \mathbf{y}_ℓ 、負ノルムに属する固有関数は \mathbf{z}_ℓ と書く。

固有値がゼロでない実数の場合

ここでは固有値 E_ℓ がゼロでない実数の場合について議論を行う。 $\mathbf{y}_\ell(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}_{\ell'}(\mathbf{x})$ を固有値 E_ℓ , $E_{\ell'}$ に属する固有関数とする。このとき

$$(\mathbf{y}_\ell, T\mathbf{y}_{\ell'}) = E_{\ell'}(\mathbf{y}_\ell, \mathbf{y}_{\ell'}) = (T\mathbf{y}_\ell, \mathbf{y}_{\ell'}) = E_\ell(\mathbf{y}_\ell, \mathbf{y}_{\ell'}), \quad (2.3.14)$$

より

$$(E_\ell - E_{\ell'}) (\mathbf{y}_\ell, \mathbf{y}_{\ell'}) = 0, \quad (2.3.15)$$

となり、 $E_\ell \neq E_{\ell'}$ の場合 $\mathbf{y}_\ell(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{\ell'}(\mathbf{x})$ は不定計量の内積の下で直交する。また $E_\ell = E_{\ell'}$ の場合は Gram-Schmidt の直交化法を用いることで、縮退した固有関数 $\mathbf{y}_\ell(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{\ell'}(\mathbf{x})$ を直交するようにできる。

さらに対称性 (2.3.9) より、固有値 E_ℓ に属する固有関数 $\mathbf{y}_\ell(\mathbf{x})$ が存在するならば逆符号の固有値 $-E_\ell$ を持つ固有関数

$$Tz_\ell(\mathbf{x}) = -E_\ell z_\ell(\mathbf{x}), \quad z_\ell(\mathbf{x}) \equiv \sigma_1 \mathbf{y}_\ell^*(\mathbf{x}), \quad (2.3.16)$$

が存在する。この $z_\ell(\mathbf{x})$ のノルムの2乗は

$$\|z_\ell\|^2 = -\|\mathbf{y}_\ell\|^2, \quad (2.3.17)$$

となり、 $\mathbf{y}_\ell(\mathbf{x})$ と逆の符号をもつ。したがって、正ノルムと負ノルムの固有関数は必ず対で表れる。

\mathbf{y}_ℓ, z_ℓ をそれぞれ規格化すると正規直交関係

$$(\mathbf{y}_\ell, \mathbf{y}_{\ell'}) = \delta_{\ell, \ell'}, \quad (z_\ell, z_{\ell'}) = -\delta_{\ell, \ell'}, \quad (\mathbf{y}_\ell, z_{\ell'}) = 0, \quad (2.3.18)$$

を得る。

固有値がゼロの場合

Bogoliubov 方程式にはゼロ固有値に属する固有関数

$$T\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.3.19)$$

が存在する。 i はこの固有関数を区別する添え字である。この固有関数は (2.3.19) と Bogoliubov 行列の対称性 (2.3.9) より

$$\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_i(\mathbf{x}) \\ -f_i^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (2.3.20)$$

と出来ることが分かる。

ここでは、ゼロ固有値に属する固有関数として少なくとも

$$\begin{pmatrix} \xi(\mathbf{x}) \\ -\xi^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (2.3.21)$$

が存在することだけ指摘しておく。これは一様系において唯一現れるゼロ固有値解である。すなわち、前章で現れた南部-Goldstone モードに対応する。

(2.3.20) より固有関数 $\mathbf{y}_{0,i}$ はゼロノルム

$$\|\mathbf{y}_{0,i}\|^2 = 0, \quad (2.3.22)$$

に属する。また、実固有値に属する固有関数と直交する：

$$(\mathbf{y}_{0,i}, \mathbf{y}_\ell) = 0, \quad (\mathbf{y}_{0,i}, \mathbf{z}_\ell) = 0. \quad (2.3.23)$$

対して、自身以外のゼロ固有値に属する固有関数とは一般に直交しない [37]。しかし、本論文ではゼロ固有値が1つ、あるいは複数であっても固有関数間に直交性が成り立つものしか扱わない。そのため、これ以降は直交関係

$$(\mathbf{y}_{0,i}, \mathbf{y}_{0,j}) = 0, \quad (2.3.24)$$

が成立すると仮定する。

ゼロ固有値に属する広義固有関数

ゼロ固有値に属する固有関数が直交関係 (2.3.24) を満たす場合、Bogoliubov 方程式の解 $\{\mathbf{y}_n(\mathbf{x}), \mathbf{z}_n(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x})\}$ のみで完全系を張ることは出来ない。そのため、Boboliubov 方程式の固有関数系を用いて完全系を作るには、 $\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x})$ とは直交せず $\mathbf{y}_n(\mathbf{x}), \mathbf{z}_n(\mathbf{x})$ とは直交する関数を導入する必要がある。 T^2 に対する広義固有関数 $\mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})$:

$$T\mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x}) = I_i\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}), \quad (2.3.25)$$

はこれらの性質を持つ。この関数は Bogoliubov 行列 T とゼロ固有値解 $\mathbf{y}_{0,i}$ の対称性より関数 $h_i(\mathbf{x})$ を用いて

$$\mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} h_i(\mathbf{x}) \\ h_i^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (2.3.26)$$

と表される。ただし、 I_i は実数であり、これは $\mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})$ と $\mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x})$ の内積を 1 にするための因子である。ここで導入した広義固有関数を含めれば Bogoliubov 方程式の固有関数系は完全となる⁹。これ以降 Bogoliubov 方程式の固有関数系に $\mathbf{y}_{-1,i}$ を加えたものを Bogoliubov 完全系と呼ぶこととする。

前に示したゼロモード (2.3.21) に対応する広義固有関数と規格化因子はこのゼロモードが満たす Bogoliubov 方程式の両辺を N で微分することで

$$h(\mathbf{x}) = \frac{\partial \xi}{\partial N}(\mathbf{x}), \quad I = \frac{\partial \mu}{\partial N}, \quad (2.3.28)$$

と求まる [43]。

完全性

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell} \{ \mathbf{y}_{\ell}(\mathbf{x}) \mathbf{y}_{\ell}^{\dagger}(\mathbf{x}') - \mathbf{z}_{\ell}(\mathbf{x}) \mathbf{z}_{\ell}^{\dagger}(\mathbf{x}') \} + \sum_{i=\text{z.m.}} \{ \mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}) \mathbf{y}_{-1,i}^{\dagger}(\mathbf{x}') + \mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x}) \mathbf{y}_{0,i}^{\dagger}(\mathbf{x}') \} \\ & = \sigma_3 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

で仮定する。この完全性を用いると任意の 2 重項 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ を

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell} \{ a_{\ell} \mathbf{y}_{\ell}(\mathbf{x}) + a_{\ell}^* \mathbf{z}_{\ell}(\mathbf{x}) \} + \sum_{j=\text{z.m.}} \{ -i Q_j \mathbf{y}_{0,j}(\mathbf{x}) + P_j \mathbf{y}_{-1,j}(\mathbf{x}) \} \quad (2.3.30)$$

と展開することができる。ただし、その展開係数は直交性より

$$a_{\ell} = (\mathbf{y}_{\ell}, \mathbf{s}), \quad a_{\ell}^* = -(\mathbf{z}_{\ell}, \mathbf{s}), \quad (2.3.31)$$

$$Q_j = i(\mathbf{y}_{-1,j}, \mathbf{s}), \quad P_j = (\mathbf{y}_{0,j}, \mathbf{s}), \quad (2.3.32)$$

$$(2.3.33)$$

⁹ゼロ固有値に属する固有関数が複数ある場合は $\mathbf{y}_{0,i}$, $\mathbf{y}_{-1,j}$ や $\mathbf{y}_{-1,i}$, $\mathbf{y}_{-1,j}$ の間に適切な直交化を施し

$$(\mathbf{y}_{-1,i}, \mathbf{y}_{0,j}) = \delta_{ij}, \quad (\mathbf{y}_{-1,i}, \mathbf{y}_{-1,j}) = 0, \quad (2.3.27)$$

とする必要がある。

2.3.2 非摂動ハミルトニアンに対角化と真空の定義

非摂動ハミルトニアンに対角化する。ここで、虚部を持つ固有値が存在する場合、ハミルトニアンは対角化できないことが知られている [42]。そのため、ここでは固有値に虚部がない場合のみ考える。

$\hat{\Phi}$ を Bogoliubov 完全系で展開する:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=\text{ex.}} \{\hat{a}_\ell \mathbf{y}_\ell(\mathbf{x}) + \hat{a}_\ell^\dagger \mathbf{z}_\ell(\mathbf{x})\} + \sum_{j=\text{z.m.}} \left[-i\hat{Q}_j \mathbf{y}_{0,j}(\mathbf{x}) + \hat{P}_j \mathbf{y}_{-1,j}(\mathbf{x}) \right]. \quad (2.3.34)$$

係数はそれぞれ

$$\hat{a}_\ell = (\mathbf{y}_\ell, \hat{\Phi}), \quad \hat{a}_\ell^\dagger = -(\mathbf{z}_\ell, \hat{\Phi}), \quad (2.3.35)$$

$$\hat{Q}_i = i(\mathbf{y}_{-1,i}, \hat{\Phi}), \quad \hat{P}_i = (\mathbf{y}_{0,i}, \hat{\Phi}), \quad (2.3.36)$$

である。ここで、 \hat{Q}_i, \hat{P}_i はエルミートであり、 $\hat{Q}_i, \hat{P}_i, \hat{a}_\ell, \hat{a}_\ell^\dagger$ の間の交換関係は以下のようになる

$$[\hat{Q}_i, \hat{P}_j] = i\delta_{ij}, \quad [\hat{a}_\ell, \hat{a}_{\ell'}^\dagger] = \delta_{\ell\ell'}, \quad \text{others} = 0. \quad (2.3.37)$$

式 (2.3.34) を非摂動ハミルトニアンに代入すると

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=\text{z.m.}} \frac{\hat{P}_i^2}{2I_i^{-1}} + \sum_{\ell=\text{ex.}} E_\ell \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell, \quad (2.3.38)$$

となる。第2項は調和振動子型のハミルトニアンとなっているため、 $\{\hat{a}_\ell\}$ は消滅演算子と解釈できる。したがって、これらで消去される状態

$$\hat{a}_\ell |0\rangle_\ell = 0 \quad (2.3.39)$$

の直積状態

$$\prod_{\ell=\text{ex.}} |0\rangle_\ell = |0\rangle_{\text{ex.}} \quad (2.3.40)$$

が真空となる。これより、Bogoliubov 方程式の実固有値 E_ℓ は準粒子の励起エネルギーであると解釈することが出来ることがわかる¹⁰。ここで、励起エネルギーが負

¹⁰固有値 E_ℓ を持つ固有関数 \mathbf{y}_ℓ と $-E_\ell$ を持つ固有関数 \mathbf{z}_ℓ は励起エネルギーに同様の寄与を与える。そのため励起エネルギーと解釈されるのは E_ℓ のみ。

になる場合があることに注意しておく¹¹。このときの励起は負の励起エネルギーとなるため、もしもそのような励起が存在すればエネルギーに下限がなくなり、系は不安定となる。この機構を起源とする系の不安定性は Landau (熱力学的) 不安定性と呼ばれるものである。実際、Bogoliubov 解析においてこのような固有関数が現れる状況があることが知られている [46]。これは散逸を伴う不安定性が存在することを意味している。なお、このノルムと固有値が異符号となるものは anomalous な固有関数 [47] と呼ばれる。

それに対してゼロ固有値部分である第1項目は調和振動子型でないため、真空の消滅演算子を用いた定義は正当化されない¹²。そのため、この真空を決定する原理がなくなる。ゼロ固有値部分の部分の真空を無理に導入することも可能であるが、後で説明するようにこれは様々な問題を引き起こす。この問題の解決は後回しにして、ここでは形式的に真空 $|0\rangle_i$ を定義することにする。これは、 ${}_i\langle 0|\hat{Q}_i|0\rangle_i = {}_i\langle 0|\hat{P}_i|0\rangle_i = 0$ を満たすものである。これらの直積状態をこの系の真空

$$|0\rangle = \prod_{i=z.m.} |0\rangle_i \otimes |0\rangle_{ex}, \quad (2.3.41)$$

と書いておく。これが、今まで詳細を無視していた秩序変数の導入時に用いた真空の定義である。その秩序変数は Bogoliubov 方程式の中に含まれる。すなわち、真空を定義するのに用いられる。つまり、秩序変数の定義には真空が必要であり、真空の定義には秩序変数が必要となる。この構造より、場の量子論の真空は自己無撞着に決められるものであることが見て取れる。

ここで、非摂動ハミルトニアン¹³のゼロ固有値部分は調和振動子型でないということより、固有値を系の励起モードと解釈することは出来ないことに注意しておく。

2.3.3 凝縮体の線形安定性解析

ここでは凝縮体の線形安定性解析を行い、この安定性解析の方程式が先ほど導出した Bogoliubov 方程式と一致することを見る。

まず、凝縮体の時間発展方程式を求める。前章で行った相互作用描像での導出も可能であるがやや煩雑となるため、ここでは平均場近似を使った導出を行う。場の

¹¹ノルムの符号とその固有値の符号が異符号である固有値・固有関数 ($\|\mathbf{y}_\ell\| > 0$ かつ $\omega_\ell < 0$) が存在するということ。

¹²ただし、励起エネルギーがゼロと解釈し、ゼロ (エネルギー) モードと呼ばれることがある。

演算子のダイナミクスは Heisenberg 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}_H(\mathbf{x}, t) = \left(h_0 - \mu + g \hat{\psi}_H^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}_H(\mathbf{x}, t) \right) \hat{\psi}_H(\mathbf{x}, t), \quad (2.3.42)$$

に従う。ここで、この式の真空期待値を取り、場の3次の相関を $\langle \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\psi} \rangle \simeq |\psi|^2 \psi$ と近似すると

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = (h_0 - \mu + g |\psi(\mathbf{x}, t)|^2) \psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.3.43)$$

となる。この方程式を時間依存 Gross-Pitaevskii (TDGP) 方程式という。途中で施した近似は、十分低温でほとんどの粒子が凝縮に参加している領域において正しいものである。

凝縮体が定常である場合を考える。凝縮体の波動関数を $\psi(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x})$ と書くと、

$$(h_0 - \mu + g |\xi(\mathbf{x})|^2) \xi(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.3.44)$$

を導くことができる。この方程式は前に導いた GP 方程式である。

次に、凝縮体が定常解から微小に変位した状況を考える。すなわち、TDGP 方程式において $\psi(\mathbf{x}, t)$ を定常状態から $\psi(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x}) + \delta\psi(\mathbf{x}, t)$ と微小変位させる。このとき、微小変位 $\delta\psi(\mathbf{x}, t)$ に対して線形化した方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\psi(\mathbf{x}, t) = (h_0 - \mu + 2g |\xi(\mathbf{x})|^2) \delta\psi(\mathbf{x}, t) + g \xi^2(\mathbf{x}) \delta\psi^*(\mathbf{x}, t), \quad (2.3.45)$$

となる。この方程式を $\delta\psi = (\delta\psi, \delta\psi^*)^t$ を用いて2重項表記すると

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta\psi(\mathbf{x}, t) = T \delta\psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.3.46)$$

となる。ここで、

$$\delta\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{x}) \\ v_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} e^{-i\omega_n t}, \quad (2.3.47)$$

と変数分離すると、

$$T \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \hbar\omega_n \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad (2.3.48)$$

を得る。この方程式はハミルトニアン¹³の対角化に用いた Bogoliubov 方程式と全く同じ方程式¹³である。この方程式の固有値 ω_n と固有関数 (u_n, v_n) は凝縮体の n 番目の振動周波数と振動モードである。

¹³ 2×2 の行列となるのは $\delta\psi$ の変位が $\delta\psi$ と $\delta\psi^*$ の両方に依存するためである。これは GP 方程式の非線形項の存在により導かれる。非線形項は、凝縮を起すボソン系特有の項であるため、このエルミート性は多体ボソン系の性質であると言える。

固有値がゼロでない実数であるとき

固有値は凝縮体の振動周波数 ω_ℓ であり、固有関数は振動モードを表す。ここで、先ほどと異なり固有関数は規格化されている必要がないため

$$\int d^3x (|u_\ell|^2 - |v_\ell|^2) = N_\ell, \quad (2.3.49)$$

となる。

固有値がゼロであるとき

固有値がゼロとなる振動モードをゼロ振動モードと呼ぶ。

GP 方程式を不変とする微小変換 $\xi \rightarrow \xi + i\delta\xi$ を考える。このような変換が存在する場合、 $\delta\xi$ の1次の項が満たす方程式は

$$T \begin{pmatrix} \delta\xi(\mathbf{x}) \\ -\delta\xi^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.3.50)$$

となる。すなわち、GP 方程式を不変とする微小変換が存在すればゼロ振動モードを求めることができる。この変換は凝縮体のエネルギー E_{GP} を変化させない。そのため、このようにして求められるゼロ振動モードは凝縮体のゼロエネルギーモード、すなわち、南部-Goldstone モードである。

ただし、ここで示したのは (2.3.50) を満たす変換は凝縮体のエネルギーを変えないということだけであり、その逆を示してはいない。すなわち、ゼロ振動モードは対称性の破れ由来の南部-Goldstone モード以外にも存在する余地があることだけ注意しておく。

固有値に虚部が含まれるとき

固有値に虚部が含まれる場合、微小変位 $\delta\psi(\mathbf{x}, t)$ は時間と共に指数関数的に増大する。すなわち、Bogoliubov 方程式の固有値に虚部が1つでも存在する場合、その凝縮体は変位に対して不安定であることが分かる。この機構を起源とする系の不安定性は動的不安定性と呼ばれるものである。

虚部を持つ固有値に属する固有関数の性質について調べる [46]。虚部を持つ固有値を $\hbar\omega_\mu$ 、固有関数を $\mathbf{Y}_\mu(\mathbf{x})$ とおく。この固有関数は

$$(\hbar\omega_\mu^* - \hbar\omega_{\mu'}) (\mathbf{Y}_\mu, \mathbf{Y}_{\mu'}) = 0, \quad (2.3.51)$$

という関係を満たす。そのため、 $\mathbf{Y}_\mu(\mathbf{x})$ は $\hbar\omega_{\mu'} \neq \hbar\omega_\mu^*$ に属する固有関数に対し直交

$$(\mathbf{Y}_\mu, \mathbf{Y}_{\mu'}) = 0, \quad (2.3.52)$$

し、 $\hbar\omega_{\mu'} = \hbar\omega_\mu^*$ に属する固有関数 ($\mathbf{Y}_{*\mu}(\mathbf{x})$ と書く) に対して一般に非直交である¹⁴。なお、 $\hbar\omega_\mu \neq \hbar\omega_\mu^*$ であるため、この固有関数 $\mathbf{Y}_\mu(\mathbf{x})$ はゼロノルムに属する。今後は

$$(\mathbf{Y}_\mu, \mathbf{Y}_{*\mu}) = 1, \quad (2.3.55)$$

と規格化されているものとする。また、実固有値に属する固有関数との間に直交関係

$$(\mathbf{y}_\ell, \mathbf{Y}_\mu) = 0, \quad (\mathbf{z}_\ell, \mathbf{Y}_\mu) = 0, \quad (2.3.56)$$

が成り立つことも示すことが出来る。

さて、ここで実固有値の場合と同様の議論で $-\hbar\omega_\mu^*$ に属する固有関数

$$T\mathbf{Z}_\mu = -\hbar\omega_\mu^*\mathbf{Z}_\mu, \quad \mathbf{Z}_\mu \equiv \sigma_1\mathbf{Y}_\mu^*, \quad (2.3.57)$$

が存在することを示すことが出来る。ただし、固有値が純虚数である場合は $\hbar\omega_\mu = -\hbar\omega_\mu^*$ であるため \mathbf{Z}_μ は独立した関数でなくなることに注意しておく。

つまり、固有値が一般の複素数 ($\text{Re}[\hbar\omega_\mu] \neq 0$ かつ $\text{Im}[\hbar\omega_\mu] \neq 0$) のとき独立である固有値・固有関数は4つ組 $\{\hbar\omega_\mu, -\hbar\omega_\mu^*, \hbar\omega_\mu^*, -\hbar\omega_\mu\}$ 、 $\{\mathbf{Y}_\mu, \mathbf{Z}_\mu, \mathbf{Y}_{*\mu}, \mathbf{Z}_{*\mu}\}$ で現れ、固有値が純虚数のとき独立である固有値・固有関数は2つ組 $\{\hbar\omega_\mu, \hbar\omega_\mu^*\}$ 、 $\{\mathbf{Y}_\mu, \mathbf{Y}_{*\mu}\}$ で現れることが分かる。

2.3.4 2つの不安定性の特徴

ここでは Landau 不安定性と動的不安定性の特徴を列記しておく。

¹⁴固有関数 $\mathbf{Y}_{*\mu}(\mathbf{x})$ の存在は次のように示すことが出来る： $\hbar\omega_\mu$ が Bogoliubov 方程式の固有値である場合

$$\text{Det}|T - \hbar\omega_\mu| = 0, \quad (2.3.53)$$

となる。この式の複素共役をとると

$$0 = \text{Det}|T - \hbar\omega_\mu|^* = \text{Det}|T^\dagger - \hbar\omega_\mu^*| = \text{Det}|\sigma_3 T \sigma_3 - \hbar\omega_\mu^*| = \text{Det}|T - \hbar\omega_\mu^*|, \quad (2.3.54)$$

となる。したがって、 $\hbar\omega_\mu$ が Bogoliubov 方程式の固有値である場合、 $\hbar\omega_\mu^*$ も Bogoliubov 方程式の固有値であることが言える。

Landau 不安定性の特徴

Landau 不安定性による凝縮体の崩壊はエネルギーの散逸を伴う熱力学的な過程である。3体衝突以上の高次散乱過程を無視できる場合、冷却原子系におけるエネルギーの散逸の原因は熱励起した非凝縮相と凝縮相の間の散乱にある。ゼロ温度に近い系において、非凝縮相の割合は少なくなり、エネルギーの散逸は起こりにくくなる。そのため、系の粒子がほとんど全て凝縮していると考えられるゼロ温度の理論においてこのような不安定性は現れない。

動的不安定性の特徴

動的不安定性を起源とした凝縮体の崩壊はエネルギーの散逸を必要としない（エネルギーの保存した）量子論特有の崩壊過程である。そのため、この動的不安定性を起源とする崩壊はゼロ温度においても起き得る。動的不安定性が起こる必要条件として anomalous モードと normal モードの縮退が必要であることを指摘しておく [40]。

2.3.5 ゼロモードの具体形

ここではいくつかの具体的な状況を想定し、Bogoliubov 方程式のゼロモード解を導出する。

例 1：大域的位相変換に対するゼロモード

GP 方程式は大域的位相変換に対し不変である。そこで、ここでは大域的位相変換対称性に対するゼロモードを考える。

η を微小な定数とすると、大域的位相変換の微小変換は

$$\xi(\mathbf{x}) \rightarrow \xi(\mathbf{x}) + i\eta\xi(\mathbf{x}), \quad (2.3.58)$$

である。すなわち、(2.3.50) より大域的位相変換対称性に対するゼロモードは

$$\begin{pmatrix} \xi(\mathbf{x}) \\ -\xi^*(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (2.3.59)$$

である。BEC が存在する場合、系は大域的位相変換対称性が自発的に破れている。そのため、少なくとも位相のゼロモードが存在する [44, 45]。

例 2 : 並進変換に対するゼロモード

一様系 ($V_{ex} = 0$) の GP 方程式は並進変換に対し不変である。そこで、ここでは並進対称性に対するゼロモードを考える。ここでは簡単のため一方向への並進のみ考える。

d を微小な定数とすると、 x 方向への並進の微小変換は

$$\xi \rightarrow \xi + d \frac{\partial}{\partial x} \xi, \quad (2.3.60)$$

である。すなわち、(2.3.50) より並進変換対称性に対するゼロモードは

$$\begin{pmatrix} i \frac{\partial \xi}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ -i \frac{\partial \xi^*}{\partial x}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (2.3.61)$$

である。

今後はゼロモードを複数持つ場合の議論を行うため、各対称性に対応するゼロモードを見分けるためにゼロモードにはそれぞれの対称性に関するラベルを貼っておく。例えば、大域的位相変換対称性に対するゼロモードには $\mathbf{y}_{0,\theta}$ 、 x 方向の並進対称性に対するゼロモードは $\mathbf{y}_{0,x}$ と書く事にする。

一様系におけるゼロモード

凝縮状況でも空間一様性を保つ場合の一様系におけるゼロモードを議論する。凝縮体の分布 ($\xi = \text{定数}$) と化学ポテンシャルは GP 方程式を解くことにより

$$\xi = e^{i\theta} \sqrt{\frac{N_0}{V}}, \quad \mu = \frac{gN_0}{V}, \quad (2.3.62)$$

と求まる。この場合のゼロモードは、大域的位相変換対称性の破れに対するもの

$$\mathbf{y}_{0,\theta} = \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi^* \end{pmatrix}, \quad (2.3.63)$$

のみである。また、共役モードと規格化因子は式 (2.3.25) より

$$\mathbf{y}_{-1,\theta} = \frac{\partial}{\partial N_0} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{N_0 V}} \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad I = \frac{g}{V}, \quad (2.3.64)$$

となる。

ソリトン解に対するゼロモード

$g > 0$ かつ $V_{ex}(\mathbf{x}) = 0$ である GP 方程式には定数解以外にも次のような解析解があることが知られている：

$$\xi(x) = \sqrt{n_c} \tanh \{ \kappa(x - x_0) \}, \quad \mu = gn_c, \quad (2.3.65)$$

この解はダークソリトン解と呼ばれる [34]。ただし、 $\kappa = \sqrt{mgn_c/\hbar}$ 、 n_c はバルクの凝縮体密度である。凝縮原子数 N_c は

$$N_c = \int_{-L/2}^{L/2} dx |\xi(x)|^2 = n_c \left[L - \frac{2}{\kappa} \tanh \left(\frac{\kappa L}{2} \right) \right] \quad (2.3.66)$$

と表される。ただし、系のサイズを L とした。

このダークソリトン解は明らかに系の持つ並進対称性を破っている。そのため、ダークソリトン解に対するゼロモードは大域的位相変換対称性の破れと並進対称性の破れに対するもの2つが現れる。このときのゼロモード $\mathbf{y}_{0,i} = (f_i - f_i^*)$ の成分は

$$f_\theta = \xi(x), \quad (2.3.67)$$

$$f_x = i \frac{d}{dx} \xi(x) = i \sqrt{n_c} \kappa \operatorname{sech} \{ \kappa(x - x_0) \}, \quad (2.3.68)$$

となる。また、共役モード $\mathbf{y}_{-1,i} = (h_i - h_i^*)$ と規格化因子は

$$h_\theta = \frac{\sqrt{g}}{2L} [\tanh \{ \kappa(x - x_0) \} + \kappa x \operatorname{sech} \{ \kappa(x - x_0) \}], \quad (2.3.69)$$

$$h_x = -\frac{i}{4}, \quad (2.3.70)$$

$$I_\theta = \frac{g}{L}, \quad I_x = -\frac{g}{4\kappa}, \quad (2.3.71)$$

と求まる。

それぞれの関数形を図 2.3.1 に示す。ダークソリトン解は極形式で

$$\xi(x) = \begin{cases} |\xi(x)| & = |\xi(x)| e^{i0} & (x > s) \\ -|\xi(x)| & = |\xi(x)| e^{i\pi} & (x < s) \end{cases} \quad (2.3.72)$$

と表すことができる。これは、ソリトン中心を境に凝縮体の位相が π 飛ぶということを意味している。

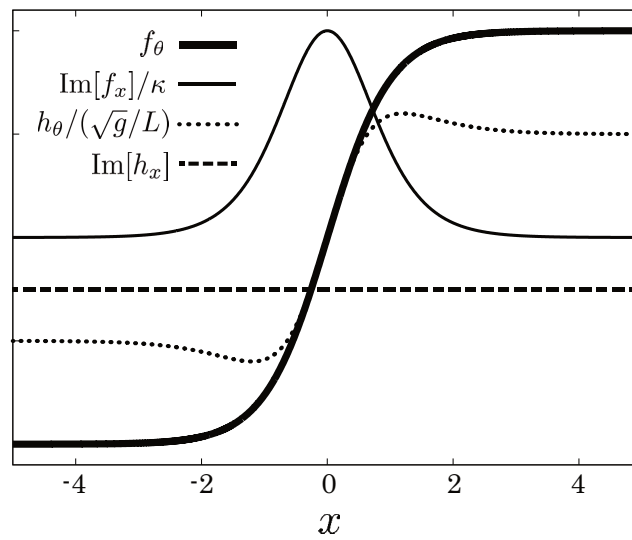


Fig. 2.3.1: ソリトン解に対するゼロモードと共役モードの概形を示す。この図では $\hbar = g = m = 1$ 、 $x_0 = 0$ とした。太い実線と細い実線はそれぞれ位相のゼロモード f_θ と並進のゼロモード f_x を表す。点線と破線はそれぞれ並進の位相の共役モード h_θ と共役モード h_x を表す。

第3章 ゼロモードの量子揺らぎと ゼロモード間の相互作用

2章ではゼロモードまで取り入れて非摂動ハミルトニアンを対角化する Lewenstein-You の方法を紹介した。彼らの方法はゼロモードを取り入れた非摂動ハミルトニアンの対角化法であるが、ゼロモード項は調和振動子型演算子で対角的でなく、量子座標で書かれる自由粒子型になる。そのため、ゼロモード項に関しては真空を定義する明確な基準がないという問題がある。この問題を回避する処方箋として、我々はゼロモードの高次項を非摂動ハミルトニアンに取り込むことを提案した [48]。この処方方で用いるハミルトニアンにはゼロモードと共役モードの間の非線形相互作用が入るという特徴を持つ。そのため、今後はこの処方を「Interactiong Zero Mode Formulation (IZMF)」と呼ぶことにする。

この章では、Lewenstein-You の方法におけるゼロモードの問題を説明し、それを回避する処方である IZMF の概要を説明する。その後、この手法を用いて一様凝縮体のゼロモードの量子揺らぎ、トラップ系された凝縮体のゼロモードの量子揺らぎ、ソリトンにより並進対称性が自発的に破れた凝縮体におけるゼロモードの量子揺らぎについて議論を行う。なお、ここからは簡単のため $\hbar = 1$ とする単位系をとることとする。

3.1 Lewenstein-You の方法におけるゼロモードの真空

Lewenstein-You は共役モードを導入することにより、場 φ の 2 次で構成されるハミルトニアンのゼロモード部分の三角化を行った。しかし、三角化までしか出来ないことの反映により、ゼロモード項は調和振動子型ではなく自由粒子型のハミルトニアンとなっている。これは、ゼロモードの真空 $|0\rangle_i$ を定義する明確な基準がないということを示している。それは次のような事情である。まず、式 (2.3.25) 中の規格化因子が $I_i < 0$ である場合を考えよう。このとき、非摂動ハミルトニアンのゼロ

モード部分は負の質量を持つ自由粒子ハミルトニアンとなる。このハミルトニアンは基底状態が存在しないため、真空を定義することは出来ない。一方、 $I_i > 0$ の場合、基底状態は運動量ゼロの平面波 $\hat{P}_i|0\rangle_i = 0$ となる。ゼロモード演算子の交換関係 $[\hat{Q}_i, \hat{P}_i] = i$ より、両者の間には不確定性関係

$$\Delta Q_i \Delta P_i \geq \frac{1}{2}, \quad (3.1.1)$$

が成立する。ただし、 $\Delta O_i = \sqrt{{}_i\langle 0|\hat{O}_i^2|0\rangle_i - i\langle 0|\hat{O}_i|0\rangle_i^2}$ とした。この式と $\Delta P_i = 0$ より、 \hat{Q}_i は発散することが結論される。全粒子数などの物理量にも \hat{Q}_i が含まれるため、この結果ではほとんどの物理量が発散することになってしまう。このように、この状態は物理的ではない結果を導くため、基底状態として相応しくない。

Lewenstein と You は論文 [44] の中で、ゼロモードの基底状態に平面波ではなく波束を選んだ上で ΔQ_θ を評価した。波束を選ぶことで、平面波で起こった物理量の明確な発散は回避されている。このとき、状態の時間発展演算子は自由ハミルトニアンであるため、固有状態である平面波以外の状態は時間と共に崩壊していくことに注意したい。すなわち、 ΔQ_θ は時間と共に増加していくことが分かる。場の展開においてゼロモード部分を Taylor 展開の一部

$$\psi = \xi - i\hat{Q}_\theta \xi + \dots \simeq e^{-i\hat{Q}_\theta \xi} + \dots \quad (3.1.2)$$

と考えると、 \hat{Q}_θ 位相演算子という意味を持つことがわかる。すなわち、 ΔQ_θ の評価は凝縮体の位相揺らぎの評価であると解釈できる。Lewenstein と You の非摂動ハミルトニアンで、平面波以外の状態を選ぶと、時間と共に位相揺らぎは増大していくことになる。彼らはこれを“量子位相拡散”と呼んでいる。ゼロモードの真空に定常状態は存在せず、そのため凝縮体の位相は時間と共に揺らぎが大きくなるという主張である。ただし、このように真空を波束とっても波束の崩壊により長時間では $\Delta Q_\theta(t \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ となるため、結局物理量の発散は起きてしまうということに注意が必要である。このように、Lewenstein-You の方法の範囲内ではゼロモード演算子が物理量の発散を引き起こすという結果となってしまう。

3.2 Interacting Zero Mode Formulation

Lewenstein-You の方法において基底状態が定常状態でなくなった背景には非摂動ハミルトニアンが自由粒子型であるというところにあった。この起源は非摂動ハミ

ルトニアンを場 $\hat{\phi}$ の 2 次としていたところにある。そもそもこの仮定は場の高次項から来る補正が小さいときに良い仮定となる。しかし、前節での考察より、ゼロモード演算子の高次項から来る補正は小さくないと考えられる。そこで、整合性を保つためには非摂動ハミルトニアンに含めるゼロモード部分に関しては 2 次までではなく、高次項まで含めるべきである。

この考えの下、非摂動ハミルトニアンを

$$\hat{H}_{\text{LY}} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \rightarrow \hat{H}_u = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \delta\hat{H}, \quad (3.2.1)$$

と定義し直す。ただし、新たに非摂動ハミルトニアンに追加する項は

$$\delta\hat{H} = \hat{H}_3^{QP} + \hat{H}_4^{QP} - [\delta\mu\hat{P} + \delta\nu\hat{Q}]. \quad (3.2.2)$$

である。上付き添え字 QP は量子座標 \hat{Q}_i 、 \hat{P}_i のみの項を集めるという記号である。つまり、前の 2 項は場の 3 次、4 次のハミルトニアンの中から量子座標 \hat{Q}_i 、 \hat{P}_i のみの項を集めたものである。

ここではまずゼロモードが 1 つ (位相) だけ存在する場合を考える。このときの非摂動ハミルトニアン \hat{H}_u^{QP} の具体形は

$$\begin{aligned} \hat{H}_u^{QP} = & \delta\nu\hat{Q} + (2J - \mu - \delta\mu + 2B - 4C + 2C'')\hat{P} + \frac{I - 4D}{2}\hat{P}^2 + 2B\hat{Q}\hat{P}\hat{Q} \\ & + 2D\hat{P}^3 + \frac{1}{2}A\hat{Q}^4 - 2B\hat{Q}^2 + (C + C'')\hat{Q}\hat{P}^2\hat{Q} + \frac{1}{2}E\hat{P}^4 \\ & - 2C'\hat{P}\hat{Q}\hat{P} - C'\{\hat{Q}, \hat{P}\} - B'\hat{Q}\{\hat{Q}, \hat{P}\}\hat{Q} - D'\hat{P}\{\hat{Q}, \hat{P}\}\hat{P}. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

となる。ここで、 $\{\hat{O}_1, \hat{O}_2\} \equiv \hat{O}_1\hat{O}_2 + \hat{O}_2\hat{O}_1$ とした。また、係数は

$$\begin{aligned} A &= g \int d^3x f^4, & B &= g \text{Re} \int d^3x |f|^2 f^* h, & B' &= g \text{Im} \int d^3x |f|^2 f^* h, \\ C &= g \int d^3x |f|^2 |h|^2, & C' &= g \int d^3x f^{*,2} h^2, & C'' &= g \int d^3x [|f|^2 |h|^2 - \text{Re} f^{*,2} h^2], \\ D &= g \text{Re} \int d^3x f^* |h|^2 h, & D' &= g \text{Im} \int d^3x f^* |h|^2 h, & E &= g \int d^3x |h|^4, \\ J &= \text{Re} \int d^3x f^* \hat{h}_0 h, & I &= \frac{\partial\mu}{\partial N_0}, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

である。ただし、煩雑さを回避するためここでは位相に関する添え字 θ は省略した。このハミルトニアン中の量子座標の高次項がポテンシャルのように振る舞っている。そのため、このハミルトニアンの固有状態 $|\Psi_\nu\rangle$;

$$\hat{H}_u^{QP} |\Psi_\nu\rangle = E_\nu |\Psi_\nu\rangle \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.2.5)$$

は束縛状態であり、 ΔQ や ΔP が発散することはない。すなわち、最低エネルギー状態が真空という自然な定義が可能となる。今後この方程式はゼロモード方程式と呼ぶことにする。

ここで、ハミルトニアン \hat{H}_u^{QP} には量子座標の奇数次の項が入っていることに注意する。この項により、一般に \hat{Q} , \hat{P} の真空期待値は0でなくなってしまう、場の分割条件は満たされなくなってしまう。非摂動ハミルトニアンを再定義する際加えた $\delta\nu$, $\delta\mu$ 項は、この場の分割条件

$$\begin{aligned} \langle \Psi | [-\delta\mu - 4C + (I - 4D)\hat{P} + 2B\hat{Q}^2 \\ + 6D\hat{P}^2 + 2C\hat{Q}\hat{P}\hat{Q} + 2E\hat{P}^3] | \Psi \rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

を満たすように決めるものである。この式より $\delta\nu$, $\delta\mu$ は

$$\delta\mu = \langle \Psi | [-4C + 2B\hat{Q}^2 + 6D\hat{P}^2 + 2C\hat{Q}\hat{P}\hat{Q} + 2E\hat{P}^3] | \Psi \rangle, \quad (3.2.7)$$

と取ればよいことが分かる。

さて、新たな非摂動ハミルトニアンにはゼロモードと共役モード間の交差項が自然に含まれていることに注意しよう。これは、ゼロモードと共役モードが相互作用する可能性を意味する。我々はこのような意味を込めてこの方法を IZMF と呼ぶことにする。

3.3 一様系におけるゼロモードの量子揺らぎ

ここでは、流れのない一様系の一様解を想定する。このとき、凝縮体の秩序変数は実数と出来るので、非摂動ハミルトニアン (3.2.1) は

$$\hat{H}_u = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \left[\hat{H}_3 + \hat{H}_4 \right]_{QP} - \delta\mu\hat{P}, \quad (3.3.1)$$

とできる。このハミルトニアンの \hat{Q} , \hat{P} 成分は

$$\begin{aligned} \hat{H}_u^{QP} = & -(\delta\mu + 4C)\hat{P} + \frac{I - 4D}{2}\hat{P}^2 + 2B\hat{Q}\hat{P}\hat{Q} + 2D\hat{P}^3 \\ & + \frac{1}{2}A\hat{Q}^4 - 2B\hat{Q}^2 + C\hat{Q}\hat{P}^2\hat{Q} + \frac{1}{2}E\hat{P}^4. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

である。係数は一様系であることから $f_\theta = \xi = \sqrt{N_0/V}$, $h_\theta = (2\sqrt{N_0V})^{-1}$ より

$$\begin{aligned} A &= gV\xi^4 = \frac{gN_0^2}{V}, & B &= gV\xi^3h = \frac{gN_0}{2V}, & C &= gV\xi^2h^2 = \frac{g}{4V}, \\ D &= gV\xi h^3 = \frac{g}{8N_0V}, & E &= gVh^4 = \frac{g}{16N_0^2V}, & I &= \frac{\partial\mu}{\partial N_0} = \frac{g}{V}, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

である。

ここで、変分法に従って $|\Psi\rangle$ を求めよう。試行関数として変分パラメータ α を持つガウス関数

$$\langle q|\Psi\rangle = \left(\frac{1}{2\pi\alpha^2}\right)^{1/4} e^{-\frac{q^2}{4\alpha^2}}. \quad (3.3.4)$$

を採用する。非摂動ハミルトニアン H_u^{QP} のエネルギー期待値 $f(\alpha) = \langle\Psi|H_u^{QP}|\Psi\rangle$ を最小化する：

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha} = 6A\alpha^3 - 4B\alpha^2 - \frac{I - 4D}{4\alpha^3} - \frac{3E}{8\alpha^5} = 0. \quad (3.3.5)$$

$N_0 \gg 1$ であるとき、 A と I が主要項となる。そのため、変分パラメータは

$$\alpha = \sqrt[6]{\frac{I}{24A}} = \frac{1}{\sqrt[6]{24}} N_0^{-1/3}, \quad (3.3.6)$$

と求まる。この結果は、変分近似の範囲内で、一様系の基底状態は相互作用 g に依存せず、凝縮粒子数 N_0 のみに依ることを示している。

\hat{Q} の標準偏差は

$$\Delta Q = \sqrt{\langle\Psi|\hat{Q}^2|\Psi\rangle - \langle\Psi|\hat{Q}|\Psi\rangle^2} = \alpha = \sqrt[6]{1/24} N_0^{-1/3} \quad (3.3.7)$$

である。 \hat{Q} は位相の揺らぎと解釈できるため、この結果は凝縮体の位相が凝縮粒子数の $-1/3$ の冪で揺らぐということを示している。この凝縮原子数が増えると、凝縮体の位相揺らぎが減少するという結論は自然なものだと言える。

3.3.1 数値計算結果

前節では変分法を用いてゼロモード状態を求めた。ここでは、数値的に式 (3.2.5) を解くことによりゼロモード状態及び、 ΔQ を求めよう。その結果を図 3.3.1 に示す。図 3.3.2 (a) は変分計算の結果である (α 、点線)。これはこれは数値計算の結果 (ΔQ 、実線) と良い一致を示している。 δ の定義は \hat{Q} の指数の変分計算からのずれである： $\Delta Q \sim N_0^{-(1/3+\delta)}$ 。図 3.3.2 (b) を見ると $N_0 \rightarrow \infty$ において $\delta \rightarrow 0$ となる

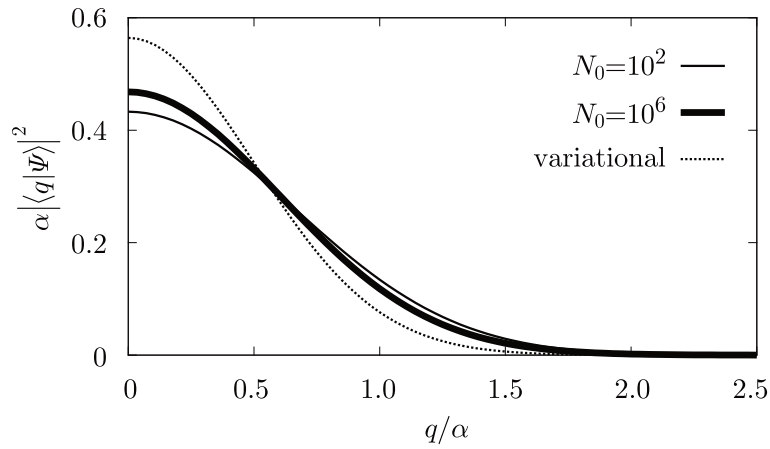


Fig. 3.3.1: 一様系におけるゼロモードの波動関数の q 表示。細線と太線は凝縮原子数 $N_0 = 10^2$ と 10^6 における数値計算結果。点線は変分により求めた波動関数である。軸は α を用いてスケールしている。

ことがわかる。すなわち、 $\Delta Q \sim N_0^{-1/3}$ であることがわかる。指数とは異なり係数の方は変分の結果とは異なる。図 3.3.2 (c) は係数比を示している。図より、係数比 $\Delta Q/\alpha$ は 1.20 に収束することが分かる。

3.4 トラップ系に対するゼロモードの量子揺らぎ

次に、一様系における結果

- $N_0 \gg 1$ において $\Delta Q \sim N_0^{-1/3}$
- 凝縮体の位相揺らぎ ΔQ は相互作用に依らない

が $V_{\text{ex}}(\mathbf{x}) \neq 0$ である非一様系でも成り立つことを示そう。冷却原子系における実験はトラップ系であるため、ここでの結果が実験にかかる可能性もある。

$g > 0$ を持つ d 次元系を想定する。 $g < 0$ の場合は $N_0 \gg 1$ で凝縮体が崩壊するため考えない。外部ポテンシャルには $V_{\text{ex}}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^d V_{\text{ex}}(\mathbf{x})$ という性質があるものを

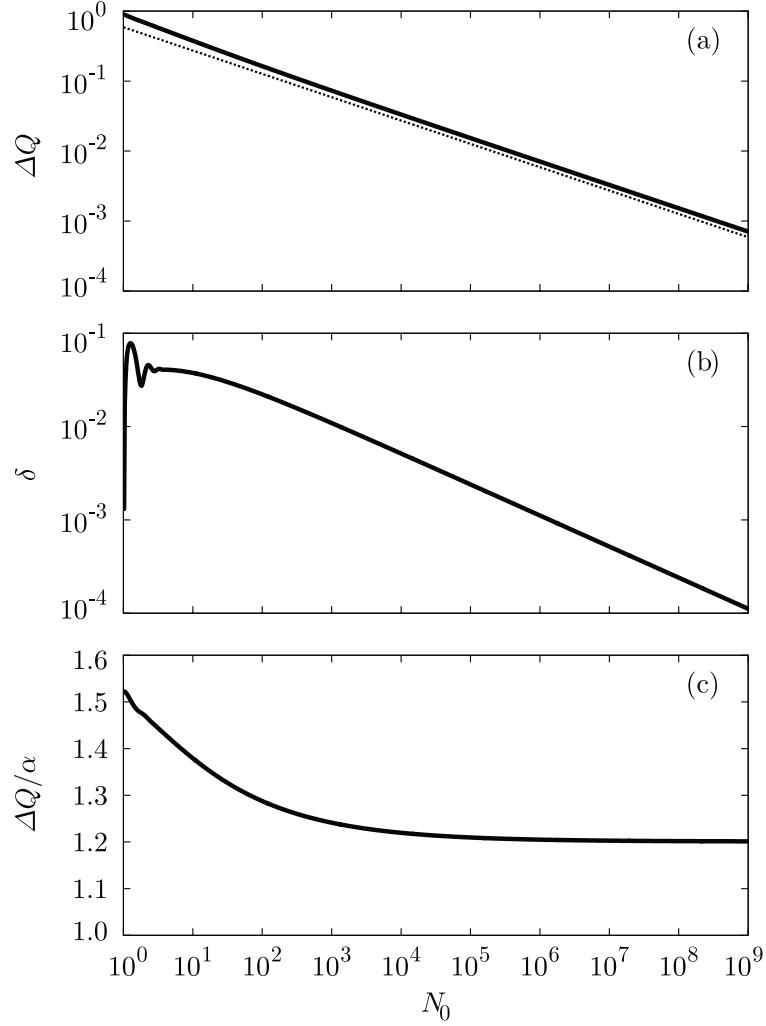


Fig. 3.3.2: 一様系における (a) ΔQ 、(b) δ 、(c) $\Delta Q/\alpha$ の N_0 依存性。(a) における点線は変分による見積もり $\alpha = (1/\sqrt[3]{24})N_0^{-1/3}$ を表す。(b) は分散 ΔQ の $-1/3$ からのずれ $\delta = -1/3 - \frac{d \log \Delta Q}{d \log N_0}$ を表す。

仮定しよう。ただし、 $\nu \geq 1$ である。ここで、virial 定理 [34] より、

$$2E_{\text{kin}} - \nu E_{\text{pot}} + dE_{\text{int}} = 0, \quad (3.4.1)$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2m} \int d^d x |\nabla \xi(\mathbf{x})|^2, \quad (3.4.2)$$

$$E_{\text{pot}} = \int d^d x V_{\text{ex}}(\mathbf{x}) |\xi(\mathbf{x})|^2, \quad (3.4.3)$$

$$E_{\text{int}} = \frac{g}{2} \int d^d x |\xi(\mathbf{x})|^4, \quad (3.4.4)$$

となる。また、GP 方程式より

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + 2E_{\text{int}} = \mu N_0, \quad (3.4.5)$$

であることも示せる。 $N_0 \gg 1$ を考え、Thomas-Fermi 近似 $E_{\text{kin}} = 0$ を用いると、化学ポテンシャルは

$$\mu = E_{\text{int}}(d + 2\nu)/\nu N_0 \quad (3.4.6)$$

となる。相互作用エネルギーは

$$E_{\text{int}} = \frac{A_\theta}{2} \simeq c_1 N_0^{c_2}, \quad (3.4.7)$$

となる。ただし、 $c_1 > 0$ 、 $c_2 > 1$ である。

これらの結果と、式 (3.2.4) と (3.3.6) より

$$\Delta Q = \sqrt[6]{\frac{(d + 2\nu)(c_2 - 1)}{48\nu}} N_0^{-1/3}, \quad (3.4.8)$$

を導くことが出来る。この結果は、一様系において示した主張が、有限体積の系でも成り立つことを示している。

3.5 ソリトン解による非一様系の場合

次に、ソリトンの存在により並進対称性が自発的に破れた非一様系を扱う。今回の解析では簡単のため 1 次元系を考える。

Lewenstein-You の方法でこの系の非摂動ハミルトニアンを表すと

$$\hat{H}_{LY} = \frac{\hat{P}_\theta^2}{2I_\theta^{-1}} + \frac{\hat{P}_x^2}{2I_x^{-1}} + \sum_{\ell=\text{ex.}} \omega_\ell \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell, \quad (3.5.1)$$

となる。ゼロモードが 2 つ存在することを反映して、量子座標も 2 組現れている。Dziarmaga は論文 [49] において、式 (3.5.1) を古典的な場のラグランジアンから導出した後に、真空をガウス波束と選び ΔQ_x の評価を行った。粒子数密度は

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \hat{\psi}^\dagger(x, t) \hat{\psi}(x, t) | 0 \rangle \\ &= [1 + \Delta Q_\theta^2(t)] |\xi(x)|^2 + \Delta Q_x^2(t) \left| \frac{d\xi(x)}{dx} \right|^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

と表されることから、 ΔQ_x はソリトン中心を埋める粒子数密度を表す。すなわち、 $\Delta Q_x(t)$ の評価は、ソリトン中心のデブリーションを評価することと等しい。時間発展は自由粒子型のハミルトニアンで行うため、Lewenstein-You の議論と同じく、 ΔQ_x は時間と共に増大していくことが結論できる。つまり、ソリトン中心の粒子数密度は時間と共に増大していくことになる。彼はこの計算により、ダークソリトンが消失する過程を記述したとした。また、ブライトソリトンについても同様の解析が行われている [50]。しかし、やはり適切な真空での解析である保証はない。

そこで、本章では、IZMF を用いてゼロモードの揺らぎの評価を行う。ゼロモードが 2 つ存在する場合のハミルトニアンは

$$\hat{H}_{u,1}^{QP} = \sum_{i=\theta,x} \left[-\delta\mu_i \hat{P}_i - \delta\nu_i \hat{Q}_i \right], \quad \hat{H}_{u,2}^{QP} = \sum_{i=\theta,x} \frac{\hat{P}_i^2}{2I_i}, \quad (3.5.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{u,3}^{QP} = \sum_{i,j,k=\theta,x} 2\text{Re} \left[-iA_{\theta j k \ell} \hat{Q}_j \hat{Q}_k \hat{Q}_\ell + B_{\theta j k \ell} \hat{Q}_j \{ \hat{Q}_k, \hat{P}_\ell \} - B_{k j \theta \ell}^* \hat{P}_\ell \hat{Q}_k \hat{Q}_j \right. \\ \left. + iC_{\theta j k \ell} \hat{Q}_j \hat{P}_k \hat{P}_\ell - iC'_{\theta j k \ell} \hat{P}_k \{ \hat{Q}_j, \hat{P}_\ell \} + D_{\theta j k \ell} \hat{P}_j \hat{P}_k \hat{P}_\ell \right], \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{u,4}^{QP} = \sum_{i,j,k=\theta,x} \left[\frac{A_{ijkl}}{2} \hat{Q}_i \hat{Q}_j \hat{Q}_k \hat{Q}_\ell - \text{Im}[B_{ijkl}] \hat{Q}_i \hat{Q}_j \{ \hat{Q}_k, \hat{P}_\ell \} - \text{Re}[C_{ijkl}] \hat{Q}_i \hat{Q}_j \hat{P}_k \hat{P}_\ell \right. \\ \left. + \frac{C'_{ijkl}}{2} \{ \hat{Q}_i, \hat{P}_k \} \{ \hat{Q}_j, \hat{P}_\ell \} - \text{Im}[D_{ijkl}] \{ \hat{Q}_i, \hat{P}_j \} \hat{P}_k \hat{P}_\ell + \frac{E_{ijkl}}{2} \hat{P}_i \hat{P}_j \hat{P}_k \hat{P}_\ell \right], \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &= g \int dx f_i^* f_j^* f_k f_\ell, & B_{ijkl} &= g \int dx f_i^* f_j^* f_k h_\ell, \\ C_{ijkl} &= g \int dx f_i^* f_j^* h_k h_\ell, & C'_{ijkl} &= g \int dx f_i^* f_j h_k^* h_\ell, \\ D_{ijkl} &= g \int dx f_i^* h_j^* h_k h_\ell, & E_{ijkl} &= g \int dx h_i^* h_j^* h_k h_\ell. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

である。この式にはゼロモードと共役モード間の交差項や、異なる起源に由来するゼロモード同士の交差項が自然に含まれていることに注意しよう。これは、ゼロモードと共役モードが相互作用をしたり、異なる起源に由来するゼロモード同士が相互作用する可能性を意味する。後の節で、実際にゼロモードと共役モード間やゼロモード同士の相互作用により物理量が影響を受けることを示す。

真空を決定するためには複雑なゼロモード方程式を解く必要がある。ここで最も興味があるのはゼロモード間の相互作用である。そのため、本質を抽出するために、

主要項のみ取り出す近似を行う。まず、式(2.3.67)–(2.3.70)を見ると f_θ と h_θ は奇関数であり、 f_x と h_x は偶関数である。そのため、係数 Eq. (3.5.6) の内ほとんどの項が奇関数の積分となり消える。残る項は順不同で (θ, θ, x, x) の足を持つもののみである。さらに、 L が回復長より長いとき h_x は小さくなる。そのため、係数 D と E は無視できるようになる。また、 f_x はソリトン中心まわりに局在するため、係数 A と B の寄与も小さいと考えてよい。すなわち、ハミルトニアンの中で主要な項は C と C' の項となる。3次の項は4次の項に比べ無視できるほど小さい。そのため、最終的にハミルトニアンは

$$\hat{H}_u^{QP} \simeq \hat{H}_{u,\theta}^{QP} + \hat{H}_{u,x}^{QP} + 3|C_{\theta\theta xx}| \hat{Q}_\theta^2 \hat{P}_x^2. \quad (3.5.7)$$

となる。このハミルトニアンの最終項は大域的位相変換と並進対称性の破れに対するゼロモード間の相互作用項である。このハミルトニアン(3.5.7)を用いたゼロモード方程式(3.2.5)を用いて真空を計算する。このときの真空の Q 表示を図3.5.1に示す。

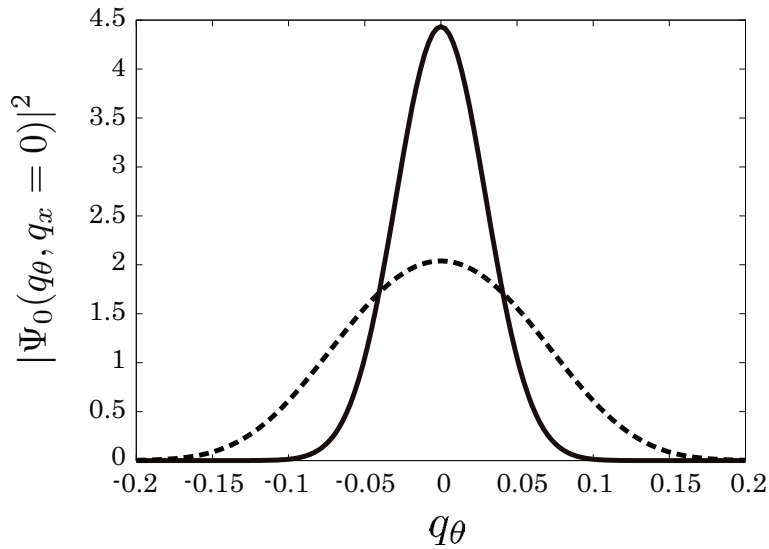


Fig. 3.5.1: 基底状態のゼロモード波動関数の Q 表示 $|\Psi_0(Q_\theta, Q_x = 0)|^2$ 。実線はハミルトニアンを 3.5.7 の \hat{H}_u^{QP} としたときの結果で、破線はハミルトニアンを $\hat{H}_{u,\theta}^{QP} + \hat{H}_{u,x}^{QP}$ としたときの結果。ただし、 $g = 1$ 、 $L = 1000$ としている。

さらに、この真空を用いて量子座標の期待値を計算したものを図 3.5.1 に示す。ゼロモード間の相互作用の影響を示すため、式(3.5.7)において相互作用項を含めたも

のと、含めなかったものをそれぞれ計算した。これを見ると、相互作用項により Q_θ 方向への広がりが増えていることが分かる。

続いて、ゼロモード演算子の分散 ΔQ_i を相互作用 g の強さをパラメータとして計算したものを図 3.5.2 に示す。この結果は

$$\Delta Q_\theta \sim g^{-0.092} \quad (3.5.8)$$

$$\Delta Q_x \sim g^{-0.192} \quad (3.5.9)$$

となる。すなわち、量子座標の揺らぎは g に対して減少する。

ソリトンのゼロモードは量子座標の揺らぎが小さいとき

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= \xi(x) - i\hat{Q}_\theta \xi(x) + \hat{Q}_x \frac{d\xi(x)}{dx} + \dots \\ &\simeq \xi(x + \hat{Q}_x) e^{-i\hat{Q}_\theta}. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

と近似できることより、 \hat{Q}_θ 、 \hat{Q}_x はそれぞれこの系の位相演算子とソリトン中心の位置演算子と解釈出来る。そのため、相互作用 g が大きくなるにつれ ΔQ_x 減少するという結果は、ソリトンの位置揺らぎが相互作用が大きくなると減少することを意味している。また、 ΔQ_θ は一様系のときとは異なり、相互作用 g に依存することを示している。これは、位置のゼロモードと位相のゼロモード間の相互作用の影響であると解釈することが出来る。

次にゼロモード揺らぎのサイズ依存性について議論する。そのため、ここでは有限の長さ L を持つ系を考えよう。

ΔQ_i のサイズ依存性を図 3.5.3 に示す。計算の結果、 ΔQ_i は

$$\Delta Q_\theta \sim L^{-0.440} \quad (3.5.11)$$

$$\Delta Q_x \sim L^{0.115} \quad (3.5.12)$$

となる。ここで、 ΔQ_x が L が大きくなるにつれて増大することに注意しよう。これは L が大きいとき、位置のゼロモードが系の物理量に影響を与えていることを示している。

L が増えるということは凝縮原子数 N_c も増えるということであるため、凝縮体の位相揺らぎ ΔQ_θ が L 依存するというのは不思議ではない。対して、 ΔQ_x がサイズ L に依存するというのは議論が必要である。これは、回復長を超えた部分の情報はソリトンに影響を与えないということが GP レベルの解釈から知られているためである。

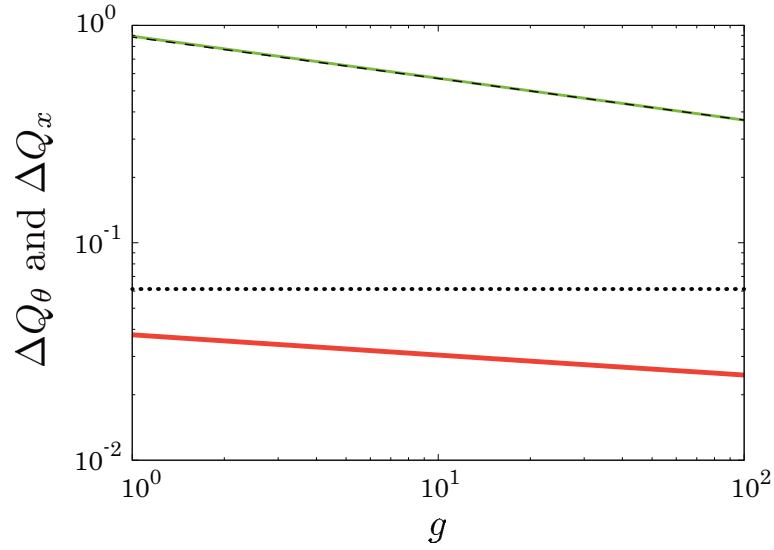


Fig. 3.5.2: 標準偏差 ΔQ_θ と ΔQ_x の g 依存性。粒子数は $N_0 = 10^3$ 、原子質量と相互作用定数は $m = g = 1$ とした。黒実線は ΔQ_θ であり、グレーの実線は ΔQ_x をハミルトニアン \hat{H}_u^{QP} の基底状態で計算したもの。破線と点線は ΔQ_θ と ΔQ_x をハミルトニアンを $\hat{H}_{u,\theta}^{QP} + \hat{H}_{u,x}^{QP}$ として計算したもの。

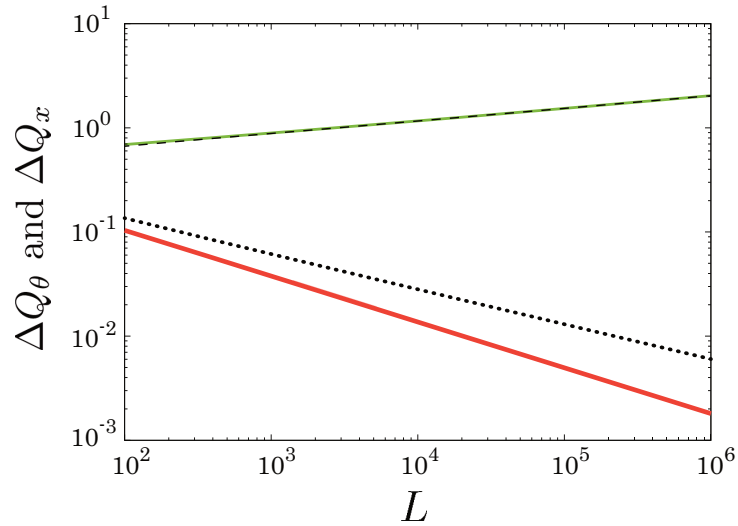


Fig. 3.5.3: 標準偏差 ΔQ_θ と ΔQ_x のサイズ依存性。原子質量と相互作用定数は $m = g = 1$ となる。

る。すなわち、 ΔQ_x は系の端の情報に依らないということが予想される。実際、ソリトンのゼロモード $f_x(x)$ はソリトン中心に局在する形をしているため、ソリトンのゼロモードはソリトンまわりの情報しか持ちえない。それではどこからソリトンは系のサイズ L の情報を得るのであろうか。ここで、ソリトンの共役モード (2.3.70) は系全体に及んでいることを思い出そう。ソリトンの位置 \hat{Q}_x に共役な演算子 \hat{P}_x の役割はソリトンの速度と関係すると予想できる。ソリトンに速度を与えるためにはソリトンの位相の飛びを π より小さくする必要がある。位相の飛びを減らすためには系全体に広がった関数が必要である。そのため、ソリトンの共役モードは系全体に広がっているのである。IZMF においてゼロモードの真空はゼロモードだけではなく、共役モードにも依存する。すなわち、共役モードを通して、系のサイズがソリトンの量子揺らぎに影響し得るのである。

第4章 ゼロモードに由来する 動的不安定モードの解析

対称性が自発的に破れて真空が無限に縮退した場合、ゼロモードが現れる。しかし、何らかの要因により対称性が明示的に破れた場合、厳密な意味でのゼロモードは現れなくなる。この章では、「対称性が自発的に破れた系」に「その対称性を微小に破る外部ポテンシャル」をかけて作られる「対称性が明示的に破れた系」のモード解析を行うことにより、「対称性が自発的に破れた系」におけるゼロモードが「対称性を明示的に破れた系」においてどのようなモードに変化するか調べる。この解析により、対称性が明示的に破れた系におけるゼロモードの名残とゼロモードの間にはどのような関係があるか明らかにする。

4.1 設定

今回用いるハミルトニアンは冷却原子系のハミルトニアンに「対称性を微小に破る外部ポテンシャル」 V_b を加えたものを仮定する：

$$\hat{H}_{t,H} = \hat{H}_H + \varepsilon \hat{H}_{b,H}, \quad (4.1.1)$$

$$\hat{H}_{b,H} = \int d\mathbf{x} V_b(\mathbf{x}) \hat{\psi}_H^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\psi}_H(\mathbf{x}). \quad (4.1.2)$$

ここで、ある対称性がポテンシャルにより陽に破れていると仮定している一方で、全ハミルトニアンの大域的位相変換対称であることに注意する¹。

¹対称性を微小に破る項を

$$\hat{H}_{b,H} = \bar{\varepsilon} \int d\mathbf{x} \left[\xi(\mathbf{x}) \hat{\psi}_H(\mathbf{x}) + \xi^*(\mathbf{x}) \hat{\psi}_H^\dagger(\mathbf{x}) \right], \quad (4.1.3)$$

とすれば、大域的位相変換対称性を破るようにすることもできる。

このハミルトニアンから導かれる GP 方程式は

$$\left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V_{ex}(\mathbf{x}) + \varepsilon V_b(\mathbf{x}) - \mu_\varepsilon + g|\xi_\varepsilon(\mathbf{x})|^2\right) \xi_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.1.4)$$

となる。この GP 方程式を摂動的に解こう。秩序変数 ξ_ε と化学ポテンシャル μ_ε は両者とも ε の整数幂で展開できると仮定する

$$\xi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \xi^{(0)}(\mathbf{x}) + \varepsilon \xi^{(1)}(\mathbf{x}) + \dots, \quad (4.1.5)$$

$$\mu_\varepsilon = \mu^{(0)} + \varepsilon \mu^{(1)} + \dots. \quad (4.1.6)$$

0 次の解は、「対称性が自発的に破れている系」の秩序変数と化学ポテンシャルである。1 次の解 $\xi^{(1)}$, $\mu^{(1)}$ は

$$\left(-\frac{\nabla^2}{2m} + V(\mathbf{x}) - \mu^{(0)} + 2g|\xi^{(0)}(\mathbf{x})|^2\right) \xi^{(1)}(\mathbf{x}) + g\xi^{(0)2}(\mathbf{x})\xi^{(1)*}(\mathbf{x}) = (\mu^{(1)} - V_b(\mathbf{x}))\xi^{(0)}(\mathbf{x}), \quad (4.1.7)$$

を解けば求まる。

このように秩序変数と化学ポテンシャルが摂動ポテンシャルにより変更を受けたことにより、Bogoliubov 行列は $T_\varepsilon = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \dots$ ここで、 $T^{(0)}, T^{(1)}$ は

$$T^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{(0)} & \mathcal{M}^{(0)} \\ -\mathcal{M}^{(0)*} & -\mathcal{L}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad T^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{(1)} & \mathcal{M}^{(1)} \\ -\mathcal{M}^{(1)*} & -\mathcal{L}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (4.1.8)$$

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{2m}\nabla^2 - \mu^{(0)} + 2g|\xi^{(0)}(\mathbf{x})|^2, \quad (4.1.9)$$

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\mu^{(1)} + V(\mathbf{x}) + 2g(\xi^{(0)}(\mathbf{x})\xi^{(1)*}(\mathbf{x}) + \xi^{(0)*}(\mathbf{x})\xi^{(1)}(\mathbf{x})), \quad (4.1.10)$$

$$\mathcal{M}^{(0)} = g\xi^{(0)2}(\mathbf{x}), \quad (4.1.11)$$

$$\mathcal{M}^{(1)} = 2g\xi^{(0)}(\mathbf{x})\xi^{(1)}(\mathbf{x}), \quad (4.1.12)$$

である。それに伴い Bogoliubov 方程式の固有値・固有関数も ε に依存するようになる：

$$T_\varepsilon \mathbf{y}_n^\varepsilon(\mathbf{x}) = \omega_n^\varepsilon \mathbf{y}_n^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (4.1.13)$$

以下 Bogoliubov 方程式を解き固有値、固有関数を求める。

4.2 励起モードに対する Bogoliubov 方程式の摂動論

この小節では励起モードの Bogoliubov 方程式の摂動展開を論文 [40] に基づき行う。励起モードは ε に関して Taylor 展開可能と仮定する：

$$\mathbf{y}_n^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_n^{(0)}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{y}_n^{(1)}(\mathbf{x}) + \cdots \quad (4.2.1)$$

ただし、ここでは縮退はないものとした²。このとき、Bogoliubov 方程式の 1 次の固有関数は

$$(T^{(0)} - \omega_n^{(0)})\mathbf{y}_n^{(1)}(\mathbf{x}) + (T^{(1)} - \omega_n^{(1)})\mathbf{y}_n^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.2.2)$$

となる。両辺 $\mathbf{y}_m(\mathbf{x})\sigma_3$ を左から掛けて \mathbf{x} について積分すると

$$(\omega_m^{(0)} - \omega_n^{(0)})(\mathbf{y}_m^{(0)}, \mathbf{y}_n^{(1)}) + (\mathbf{y}_m^{(0)}, T^{(1)}\mathbf{y}_n^{(0)}) - \omega_n^{(1)}(\mathbf{y}_m^{(0)}, \mathbf{y}_n^{(0)}) = 0, \quad (4.2.3)$$

となる。ここで、 $m = n$ とすると

$$\omega_n^{(1)} = (\mathbf{y}_n^{(0)}, T^{(1)}\mathbf{y}_n^{(0)}), \quad (4.2.4)$$

$m \neq n$ とすると

$$(\mathbf{y}_m^{(0)}, \mathbf{y}_n^{(1)}) = \frac{(\mathbf{y}_m^{(0)}, T^{(1)}\mathbf{y}_n^{(0)})}{\omega_n^{(0)} - \omega_m^{(0)}}, \quad (4.2.5)$$

となる。したがって、 $\mathbf{y}_n^{(1)}(\mathbf{x})$ は

$$\mathbf{y}_n^{(1)}(\mathbf{x}) = \sum_{m \neq n} \frac{(\mathbf{y}_m^{(0)}, T^{(1)}\mathbf{y}_n^{(0)})}{\omega_n^{(0)} - \omega_m^{(0)}} \mathbf{y}_m^{(0)}(\mathbf{x}) + c_n^{(1)} \mathbf{y}_n^{(0)}, \quad (4.2.6)$$

と求めることができる。これは内積の計量が不定形量であることを除き通常の量子力学の摂動論の公式と一致する。

²論文 [40] では縮退がある場合についても扱っている。この議論を通して、0 次で正ノルムに属する固有関数 $\mathbf{y}_n(\mathbf{x})$ と負ノルムに属する固有関数 $\mathbf{z}_m(\mathbf{x})$ が縮退することが複素固有値 ($\text{Re}[\omega] \neq 0$) 出現の必要条件であることを導いている。本論文で注目しているのは [40] で扱っていないゼロモード部分のため、縮退がある場合の議論については省略する。

4.3 ゼロモードに対する Bogoliubov 方程式の摂動論

ゼロモードに対する Bogoliubov 方程式は

$$T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) = \delta\omega_0^\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (4.3.1)$$

である。ここで、「対称性が自発的に破れた系」ではゼロモードと共役モードが対となることを思い出そう。共役モードは Bogoliubov 方程式の固有関数でないため、両者が満たす方程式は異なる。これに対して、「対称性が明示的に破れた系」では（他のゼロモードを除いて）全て Bogoliubov 方程式に従う。励起モードに対して行った通常の摂動展開ではこのような急激な変化を記述することは出来ないため、前節のような議論をゼロモードに適用することは出来ない。

ここでは縮退のある場合の摂動論に倣いモードを $\delta\mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{x})$ を 0 次の Bogoliubov 完全系で展開する：

$$\mathbf{y}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=\text{z.m.}} \{C_i^\varepsilon \mathbf{y}_{0,i}(\mathbf{x}) + D_i^\varepsilon \mathbf{y}_{-1,i}(\mathbf{x})\} + \sum_{n=\text{ex.}} \{A_n^\varepsilon \mathbf{y}_n(\mathbf{x}) + B_n^\varepsilon \mathbf{z}_n(\mathbf{x})\}. \quad (4.3.2)$$

これを Bogoliubov 方程式に代入し、 $\{\mathbf{y}_{0,i}, \mathbf{y}_{-1,i}, \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n\}$ で射影すると

$$(\mathbf{y}_{0,i}, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon) = \delta\omega_0^\varepsilon D_i^\varepsilon, \quad (4.3.3)$$

$$I_i D_i^\varepsilon + (\mathbf{y}_{-1,i}, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon) = \delta\omega_0^\varepsilon C_i^\varepsilon, \quad (4.3.4)$$

$$\omega_n A_n^\varepsilon + (\mathbf{y}_n, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon) = \delta\omega_0^\varepsilon A_n^\varepsilon, \quad (4.3.5)$$

$$-\omega_n B_n^\varepsilon + (\mathbf{z}_n, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon) = \delta\omega_0^\varepsilon B_n^\varepsilon, \quad (4.3.6)$$

となる。ただし、 $\delta T_\varepsilon = T_\varepsilon - T^{(0)}$ である。

(4.3.5)、(4.3.6) を

$$A_n^\varepsilon = \frac{(\mathbf{y}_n, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon)}{\delta\omega_0^\varepsilon - \omega_n}, \quad (4.3.7)$$

$$B_n^\varepsilon = \frac{(\mathbf{z}_n, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon)}{\delta\omega_0^\varepsilon + \omega_n}, \quad (4.3.8)$$

と書き換える。式 (4.3.2) において C_i^ε が主要項であることを考慮すると、 $A_n^\varepsilon, B_n^\varepsilon$ のリーディング項は

$$A_n^\varepsilon = \varepsilon C_i^\varepsilon \frac{(\mathbf{y}_n, T^{(1)} \mathbf{y}_0^\varepsilon)}{\delta\omega_0^\varepsilon - \omega_n} + \dots, \quad (4.3.9)$$

$$B_n^\varepsilon = \varepsilon C_i^\varepsilon \frac{(\mathbf{y}_n, T^{(1)} \mathbf{y}_0^\varepsilon)}{\delta\omega_0^\varepsilon + \omega_n} + \dots, \quad (4.3.10)$$

であることが分かる。対して、 D_i^ε は (4.3.3) より、

$$D_n^\varepsilon = \frac{(\mathbf{y}_{0,i}, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon)}{\delta \omega_0^\varepsilon} = \frac{\varepsilon C_i^\varepsilon}{\delta \omega_0^\varepsilon} (\mathbf{y}_{0,i}, T^{(1)} \mathbf{y}_0^\varepsilon) + \dots, \quad (4.3.11)$$

となる。これより、 $A_n^\varepsilon, B_n^\varepsilon$ は $C_i^\varepsilon, D_i^\varepsilon$ に対し無視できるオーダーであることが分かる。

次に、 $C_i^\varepsilon, D_i^\varepsilon$ に対する永年方程式を導こう。 $Y_{n,m}^{(ij)} = (\mathbf{y}_{n,i}, T^{(1)} \mathbf{y}_{m,j})$ と表記し、(4.3.4)、(4.3.3) 中の内積部分を展開すると、

$$(\mathbf{y}_{0,i}, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon) = \sum_j \left\{ C_j^\varepsilon Y_{0,0}^{(ji)} + D_j^\varepsilon Y_{0,-1}^{(ji)} \right\} + O(\varepsilon), \quad (4.3.12)$$

$$(\mathbf{y}_{-1,i}, \delta T_\varepsilon \mathbf{y}_0^\varepsilon) = \sum_j \left\{ C_j^\varepsilon Y_{-1,0}^{(ji)} + D_j^\varepsilon Y_{-1,-1}^{(ji)} \right\} + O(\varepsilon), \quad (4.3.13)$$

となる。これを (4.3.4)、(4.3.3) に代入し、まとめると $C_i^\varepsilon, D_i^\varepsilon$ を決定する永年方程式を導くことができる：

$$\sum_j \left\{ C_j^\varepsilon Y_{0,0}^{(ji)} + D_j^\varepsilon Y_{0,-1}^{(ji)} \right\} = \delta \omega_0^\varepsilon D_i^\varepsilon, \quad (4.3.14)$$

$$\sum_j \left\{ C_j^\varepsilon Y_{-1,0}^{(ji)} + D_j^\varepsilon (I_j \delta_{ji} + Y_{-1,-1}^{(ji)}) \right\} = \delta \omega_0^\varepsilon C_i^\varepsilon. \quad (4.3.15)$$

この節を締める前に、永年方程式中に現れる内積である $Y_{n,m}^{(ij)}$ の対称性についてコメントしておく。 $T^{(1)}$ は Bogoliubov 行列と同じ対称性

$$\sigma_1 T^{(1)} \sigma_1 = -T^{(1)*}, \quad \sigma_3 T^{(1)} \sigma_3 = T^{(1)\dagger}, \quad (4.3.16)$$

を持つため、 $Y_{n,m}^{(ij)}$ は

$$Y_{0,0}^{(ij)} = Y_{0,0}^{(ij)*} = Y_{0,0}^{(ji)}, \quad (4.3.17)$$

$$Y_{-1,0}^{(ij)} = -Y_{-1,0}^{(ij)*} = -Y_{0,-1}^{(ji)}, \quad (4.3.18)$$

$$Y_{-1,-1}^{(ij)} = Y_{-1,-1}^{(ij)*} = Y_{-1,-1}^{(ji)}, \quad (4.3.19)$$

という対称性が現れる。これは、 $Y_{0,0}^{(ij)}, Y_{-1,-1}^{(ij)}$ は実数、 $Y_{-1,0}^{(ij)}$ は純虚数であることを示している。

特に、大域的位相変換対称性に関するゼロモードと任意のゼロモードの内積が

$Y_{0,0}^{(\theta i)} = 0$ となることが示せる :

$$\begin{aligned}
Y_{0,0}^{(\theta i)} &= \int d\mathbf{x} \begin{pmatrix} \xi^{(0)} & -\xi^{(0)*} \end{pmatrix} \sigma_3 T^{(1)} \begin{pmatrix} f_i \\ -f_i^* \end{pmatrix} \\
&= \int d\mathbf{x} [(-\mu^{(0)} + \delta V)(\xi^{(0)*} f_i + \xi^{(0)} f_i^*) + 2g(\xi^{(0)*2} \xi^{(1)} f_i + \xi^{(0)2} \xi^{(1)*} f_i^*)] \\
&= \int d\mathbf{x} [f_i(-\mu^{(0)} + \delta V + 2g\xi^{(0)*} \xi^{(1)})\xi^{(0)*} + f_i^*(-\mu^{(0)} + \delta V + 2g\xi^{(0)} \xi^{(1)*})\xi^{(0)}] \\
&= \int d\mathbf{x} \left[f_i(-\mathcal{L}^{(0)} \xi^{(1)*} - \mathcal{M}^{(0)*} \xi^{(1)}(\mathbf{x}) + 2\mathcal{M}^{(0)*} \xi^{(1)}) \right. \\
&\quad \left. + f_i^*(-\mathcal{L}^{(0)} \xi^{(1)} - \mathcal{M}^{(0)} \xi^{(1)*}(\mathbf{x}) + 2\mathcal{M}^{(0)} \xi^{(1)*}) \right] \\
&= - \int d\mathbf{x} [\{f_i \mathcal{L}^{(0)} - f_i^* \mathcal{M}^{(0)}\} \xi^{(1)*} + \{f_i^* \mathcal{L}^{(0)} - f_i \mathcal{M}^{(0)*}\} \xi^{(1)}] \\
&= - \int d\mathbf{x} [\xi^{(1)*} \{\mathcal{L}^{(0)} f_i - \mathcal{M}^{(0)} f_i^*\} + \xi^{(1)} \{\mathcal{L}^{(0)} f_i^* - \mathcal{M}^{(0)*} f_i\}] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

式変形の途中では摂動1次の GP 方程式を用いている。

4.4 1次元ソリトン系に対する永年方程式の解

この節では1次元一様なソリトン系（大域的位相変換対称性+並進対称性の自発的破れ）を対象に、その並進のゼロモードがどのように推移するか見ていく。1次元一様なソリトン系のゼロモード、共役モードと規格化因子は(2.3.67)-(2.3.71)である。

この系において、永年方程式は

$$\begin{pmatrix} Y_{-1,0}^{(\theta\theta)} - \delta\omega_0^\varepsilon & I_\theta + Y_{-1,-1}^{(\theta\theta)} & Y_{-1,0}^{(\theta x)} & Y_{-1,-1}^{(\theta x)} \\ Y_{0,0}^{(\theta\theta)} & Y_{0,-1}^{(\theta\theta)} - \delta\omega_0^\varepsilon & Y_{0,0}^{(\theta x)} & Y_{0,-1}^{(\theta x)} \\ Y_{-1,0}^{(x\theta)} & Y_{-1,-1}^{(x\theta)} & Y_{-1,0}^{(xx)} - \delta\omega_0^\varepsilon & I_x + Y_{-1,-1}^{(xx)} \\ Y_{0,0}^{(x\theta)} & Y_{0,-1}^{(x\theta)} & Y_{0,0}^{(xx)} & Y_{0,-1}^{(xx)} - \delta\omega_0^\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_\theta \\ D_\theta \\ C_x \\ D_x \end{pmatrix} = 0, \tag{4.4.1}$$

となる。ここで、対称性より、 θ の自由度は分離可能。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon Y_{-1,0}^{(xx)} & I_x + \varepsilon Y_{-1,-1}^{(xx)} \\ \varepsilon Y_{0,0}^{(xx)} & \varepsilon Y_{0,-1}^{(xx)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x^\varepsilon \\ D_x^\varepsilon \end{pmatrix} = \delta\omega_{0,x}^\varepsilon \begin{pmatrix} C_x^\varepsilon \\ D_x^\varepsilon \end{pmatrix} + O(\varepsilon). \tag{4.4.2}$$

となる。この解は、

$$\delta\omega_{0,x}^\varepsilon = \pm \sqrt{\varepsilon I_x Y_{0,0}^{(xx)}} + O(\varepsilon). \quad (4.4.3)$$

である。この結果はゼロモードに対称性を陽に破る摂動を加えた場合、陽に破られた対称性に対応するゼロモードは「実モード対」もしくは「純虚数モード対」に推移することを意味している。特に、ゼロモードから複素モードである「純虚数モード対」が現れる可能性の示唆は重要である。この機構は、従来の複素固有値出現の機構である Bogoliubov 方程式の正ノルムのモードと負ノルムのモードの縮退 [40] を必要としない。つまり、新たな複素固有値出現の機構をゼロモードが与えていることになる。この純虚数という制限はモードの数が摂動ポテンシャルにより変わらないことからの帰結である。すなわち、ゼロモード部分の退化に関係したモードはゼロモードと共役モードの対であるため、複素モードは2つの対でのみ存在する純虚数モードとなったと結論される。

固有関数は、実モードの場合

$$\mathbf{z}_{0,x}^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ - \left| \frac{\delta\omega_{0,x}^\varepsilon}{I_x} \right|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_{0,x} + \left| \frac{\delta\omega_{0,x}^\varepsilon}{I_x} \right|^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}_{-1,x} \right\} + O(\varepsilon), \quad (4.4.4)$$

$$\mathbf{y}_{0,x}^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left| \frac{\delta\omega_{0,x}^\varepsilon}{I_x} \right|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_{0,x} + \left| \frac{\delta\omega_{0,x}^\varepsilon}{I_x} \right|^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}_{-1,x} \right\} + O(\varepsilon), \quad (4.4.5)$$

であり、複素モードの場合

$$\mathbf{Y}_{0,x}^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ i \left| \frac{\delta\omega_{0,x}^\varepsilon}{I_x} \right|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_{0,x} + \left| \frac{\delta\omega_{0,x}^\varepsilon}{I_x} \right|^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}_{-1,x} \right\} + O(\varepsilon), \quad (4.4.6)$$

$$\mathbf{Z}_{0,x}^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left| \frac{\delta\omega_{0,x}^\varepsilon}{I_x} \right|^{-\frac{1}{2}} \mathbf{y}_{0,x} + i \left| \frac{\delta\omega_{0,x}^\varepsilon}{I_x} \right|^{\frac{1}{2}} \mathbf{y}_{-1,x} \right\} + O(\varepsilon), \quad (4.4.7)$$

となる。

ゼロモードの係数は $O(\varepsilon^{-1/4})$ である。したがって、その概形はゼロモードに近い形である。固有モードは $\varepsilon = 0$ とした場合、発散することに注意しておく。この発散性は、ゼロモードの特異性を反映して必然的に現れるものである。

ここで、ゼロモード由来の純虚数モードが、凝縮体のどのような変化を増大させるか考えよう。ゼロモードの名残であるモードの形がほとんどゼロモードであると

いうことより

$$\begin{aligned}
\psi^\varepsilon(x, t) &= \xi(x) + \delta\psi^\varepsilon(x, t) \\
&\simeq \xi(x) + \delta' \frac{d\xi(x)}{dx} e^{|\text{Im}[\delta\omega_{0,x}^\varepsilon]|t} \\
&\simeq \xi(x + \delta' e^{|\text{Im}[\delta\omega_{0,x}^\varepsilon]|t}). \tag{4.4.8}
\end{aligned}$$

とすることが出来る。ここで、 δ' は凝縮体への変位により決まるパラメータである。これは、ゼロモード由来の純虚数モードは凝縮体の微小並進を増大させるように働くことを示している。

また、ダークソリトン系では規格化定数 I_x が負となるため、ゼロモード由来の実モードは anomalous モードとなる。これは、ダークソリトン由来のゼロモードは少しでもポテンシャルが入ると不安定モードに変化することを意味する。この事実は様々な先行研究で示されている [47]。

4.4.1 具体例 1 : Oscillating type potential

ここでは解析的に解ける例を見る。実パラメータ k を持つ、次のようなポテンシャルを考えよう：

$$\delta V_k(x) = gn_c \frac{\sin(\alpha k x)}{\tanh(\alpha x)} \left(-3 \tanh^2(\alpha x) + 1 - \frac{k^2}{2} \right), \tag{4.4.9}$$

このポテンシャルにおいて、1 次の GP 方程式は厳密に解くことができる

$$\xi^{(1)}(x) = \sqrt{n_c} \sin(\alpha k x), \quad \mu^{(1)} = 0. \tag{4.4.10}$$

そのため、 $Y_{0,0}^{(xx)}$ の解析的な表式も

$$Y_{0,0}^{(xx)} = 2gn_c \int ds (1 - \tanh^2(s))^2 \frac{\sin(ks)}{\tanh(s)} \left\{ 3 \tanh^2(s) + 1 - \frac{k^2}{2} \right\}, \tag{4.4.11}$$

と求まる。ただし、 $s = \alpha x$ としている。固有値は I_x と $Y_{0,0}^{(xx)}$ の積の符号で決まっているため、この値の正負が固有値が実か純虚数かを定める。 $k_c = 1.73 \dots$ で $Y_{0,0}^{(xx)}(k_c) = 0$ となることからわかるため、この値を境に固有値は実から純虚数に変わる。

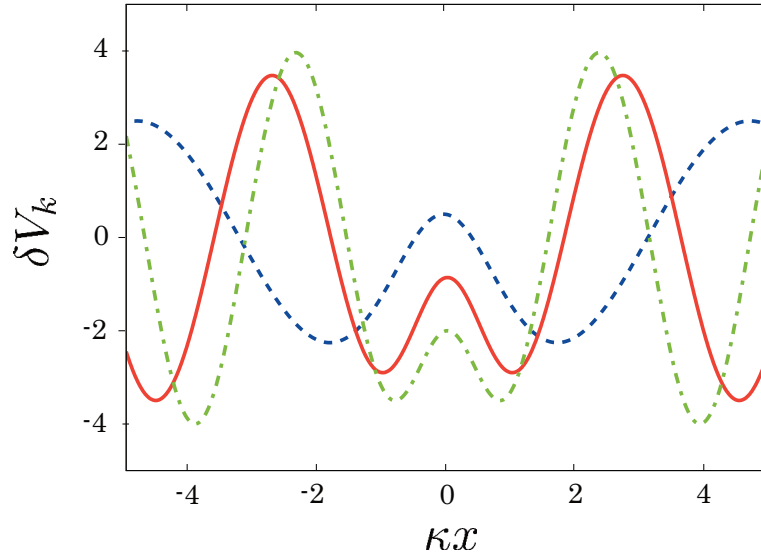


Fig. 4.4.1: $gn_c = 1$ としたときの振動型ポテンシャル $\delta V_k(x)$ の概形。青破線が $k = 1.0$ 、赤実線が $k = 1.73$ 、緑一点鎖線が $k = 2.0$ を示す。

4.4.2 具体例 2 : ガウス関数型摂動ポテンシャル

原点 (ソリトン中心) にガウス型ポテンシャル

$$\delta V_\eta = \frac{gn_c}{\sqrt{\pi}} \eta \exp(-\eta^2(\kappa x)^2) \quad (4.4.12)$$

がかかった系を考えよう。ここで、 η は実パラメータである。

ポテンシャルは $\eta \rightarrow \infty$ の極限でデルタ関数型 $\delta V_\infty = gn_c \delta(\kappa x)$ となる。この極限において GP 方程式は

$$\xi^\varepsilon(x) = \sqrt{n_c} \tanh(\kappa x), \quad (4.4.13)$$

$$\mu^\varepsilon = gn_c. \quad (4.4.14)$$

と解析的に解ける。すなわち、 $\xi^{(1)}(x) = 0$ 、 $\mu^{(1)} = 0$ である。固有値は

$$\delta\omega_{0,x}^\varepsilon = \pm i\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{gn_c}{\sqrt{2}}. \quad (4.4.15)$$

である。ここで、 $g > 0$ よりこの場合に固有値は純虚数となる。

η が一般の場合は解析的に解くことが出来ないので、数値的に $\delta\omega_{0,x}^\varepsilon$ を求める。手順としては以下の通り：

- 適当な値に η を設定する。

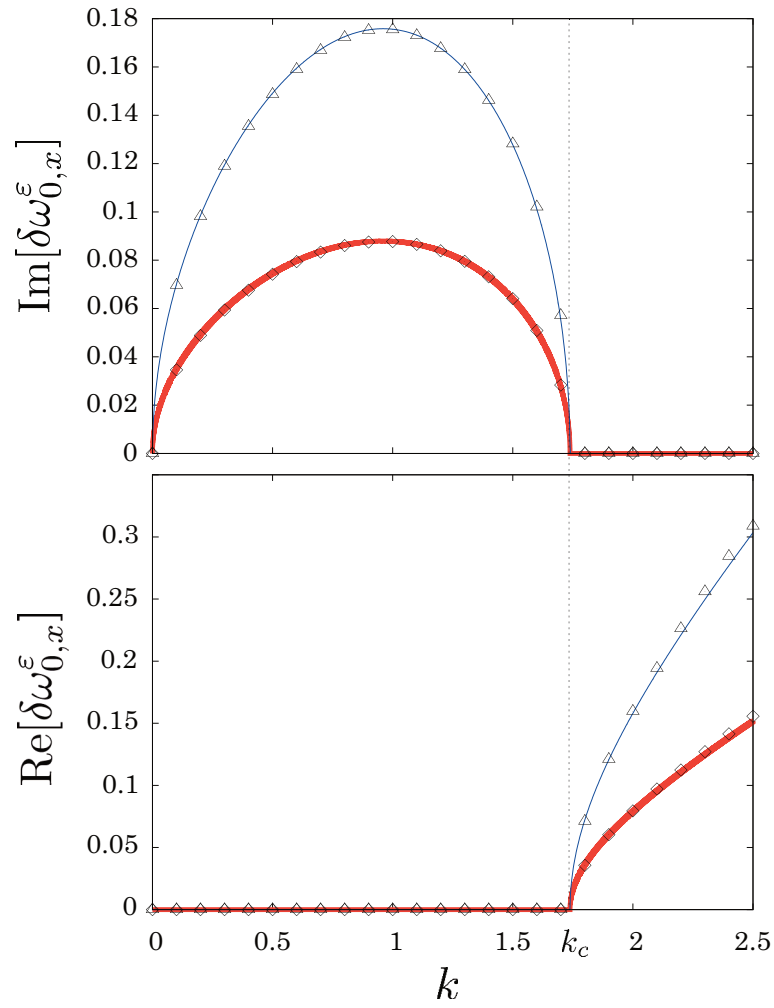


Fig. 4.4.2: 摂動ポテンシャルを振動型(4.4.9)としたときの固有値 $\delta\omega_{0,x}^\epsilon$ 。微小パラメータは $\epsilon = 0.01$ としている。実線は公式(4.4.3)を用いて計算した結果である。赤実線は $gn_c = 1$ とした結果で、青実線は $gn_c = 2$ としている。プロットは Bogoliubov 方程式を直接解いた場合の複素固有値である。ダイヤモンドプロットは $gn_c = 1$ とした結果で、三角形のプロットは $gn_c = 2$ としている。 $k_c = 1.73 \dots$ は実固有値と純虚数固有値が入れ替わるパラメータである。

- GP 方程式を解き $\xi^{(1)}$ 、 $\mu^{(1)}$ を求める。
- 公式 (4.4.3) に代入し、 $\delta\omega_{0,x}^\varepsilon$ を求める。

このようにして求めた $\delta\omega_{0,x}^\varepsilon$ と、公式を用いず直接 Bogoliubov 方程式を解いた結果を図 4.4.3 に示す。

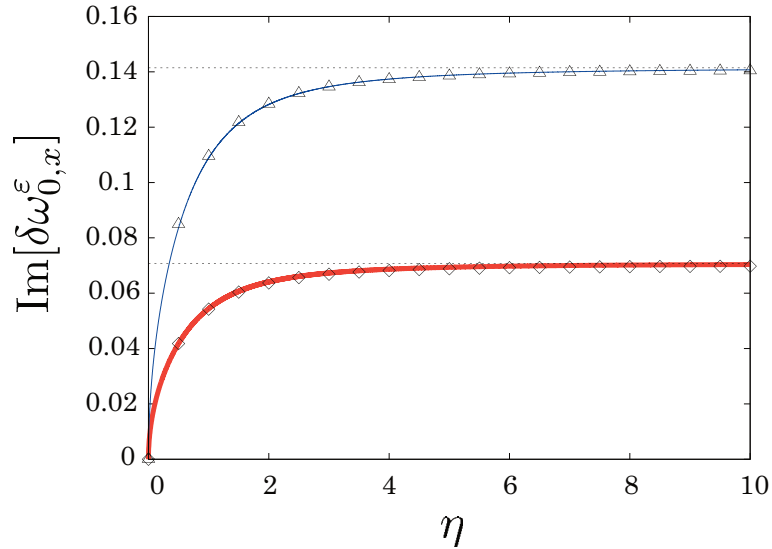


Fig. 4.4.3: 摂動ポテンシャルをガウス型 $\delta V_\eta = gn_c \eta / \sqrt{\pi} \exp(-\eta^2 (\kappa x)^2)$ としたときの固有値 $\delta\omega_{0,x}^\varepsilon$ 。微小パラメータは $\varepsilon = 0.01$ としている。実線は公式 (4.4.3) を用いて計算した結果である。赤実線は $gn_c = 1$ とした結果で、青実線は $gn_c = 2$ としている。プロットは Bogoliubov 方程式を直接解いた場合の複素固有値である。ダイヤモンドプロットは $gn_c = 1$ とした結果で、三角形のプロットは $gn_c = 2$ としている。破線は $\eta \rightarrow \infty$ としたとき、すなわち、ポテンシャルをデルタ関数型にしたときの値である。これは $gn_c = 1$ に対しては $0.0707\dots$ であり、 $gn_c = 2$ に対しては $0.1414\dots$ となる。

図は時間発展させたときのスナップショットである。初期のソリトン解を微小に左にずらしたものを用意すると、そのズレが時間とともに増大することが見て取れる。

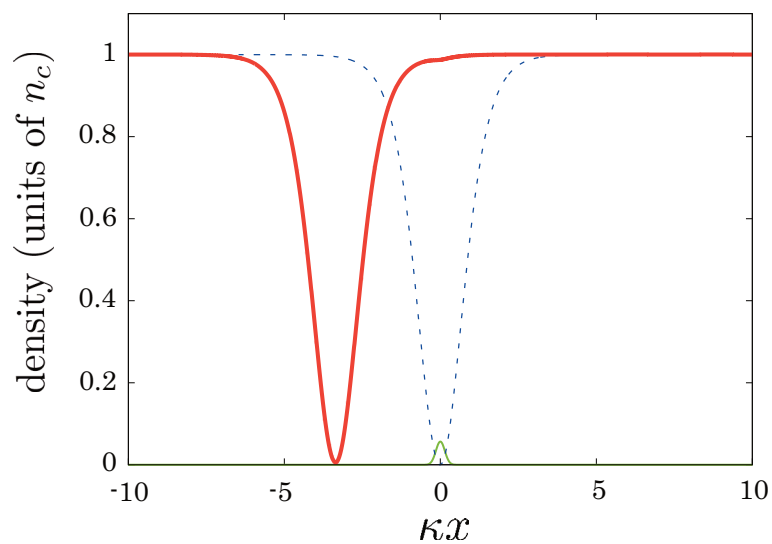


Fig. 4.4.4: パラメータを $gn_c = 2$ 、 $\eta = 5.0$ 、 $\varepsilon = 0.01$ としたガウス型ポテンシャル δV_η (緑実線) 中のソリトンの TDGP 方程式による時間発展のスナップショット。青破線は初期のソリトンであり、微小に左にソリトン中心をずらしたものである。赤実線は時間発展後のソリトンを示している。

第5章 まとめ

本論文では中性原子の BEC を対象として、ゼロモードが物理に及ぼす影響を見た。ここでは、これらの研究成果と今後の課題を述べる。

第2章ではまず、場の量子論の基本概念的なまとめを行った。その後、冷却原子系のモデルを用いて一様 BEC 系の導入を行った。非摂動ハミルトニアンを対角化する Bogoliubov 変換を行ったが、この変換は $\mathbf{k} = 0$ の長波長モードであるゼロモードを取り扱うことが出来ない。そこで、Bogoliubov 近似と呼ばれるゼロモードを無視する近似が行われることを見た。後半は、ゼロモードを含めて記述する非摂動ハミルトニアンを対角化する Lewenstein-You の方法を導入した。しかし、この方法はゼロモードを取り込んだ形式であるが、ゼロモードの真空を明確に定義する基準を持たないことを見た。

第3章では、この問題を回避するための処方箋として IZMF を提案し、ゼロモードの量子揺らぎについて議論を行った。IZMF では、場の2次まででなくゼロモード演算子の高次の項を取り込んだものを非摂動ハミルトニアンと再定義する。この非摂動ハミルトニアンの基底状態は束縛状態となるため、その基底状態が物理量の発散を引き起こすことはない。そのため、この基底状態を自然な真空と定義することが可能である。ここでは、この真空を用いて一様 BEC 系、トラップ系、ソリトンのある非一様系それぞれに対してゼロモードが与える量子揺らぎを評価した。その結果、凝縮体の位相揺らぎやソリトンの位置の揺らぎを評価することが可能となった。また、この手法はゼロモード間の相互作用が自然に含まれる形式であるため、ゼロモードが間の相互作用の影響も明らかにすることが出来た。

第4章では、対称性を陽に破るような摂動を加えたときのゼロモードの名残であるモードの振る舞いについて議論した。これを行うため、ゼロモードに対する Bogoliubov 方程式の摂動論を定式化した。Bogoliubov 方程式のゼロモード部分に対してはゼロモードの特異性から通常の摂動展開が不可能である。これはゼロモードと共役モードは必ず対として存在するため、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限でゼロモードとなるモー

ドには共役モードが伴わなければならないことから理解できる。そこでゼロモードの変位を0次のBdG完全系で展開し、その各係数に対する永年方程式を解くという手法をとった。その結果、ゼロモードは $O(\varepsilon^{1/2})$ の励起エネルギーを持つ励起モード対か純虚数モード対になることを見た。固有関数はゼロモードは赤外発散由来の特異な性質を反映し、ゼロモードの $O(\varepsilon^{-1/4})$ となる。特に、ソリトンの存在により並進対称性が自発的に破れた系を考えた場合、このゼロモードの名残であるモードはanomalousモードか純虚数モードになることを見た。この章の後半では具体的な摂動ポテンシャルを用いてこの事実を確認した。

本論文では、ゼロモードが物理に与える影響やゼロモードの役割を見た。今後の課題としてはまず、3章で与えた新たな非摂動ハミルトニアンから定義した真空の直交性を調べる事が挙げられる。2章で見たように、一様系における場の量子論での真空は互いに直交する。3章で与えた真空が非一様系においてもこの性質を持つかどうか調べる事は重要である。また、本論文の範囲内ではゼロモードの真空しか議論しなかったが、ゼロモード方程式を解くと励起状態が出てくる。そこで、この励起状態が観測量に与える影響について議論する必要がある。この一部は[57]にまとめている。また、4章で行った定式化は次元、成分、破れた対称性の種類に依らない。そのため、2次元以上の系、多成分系、並進以外の対称性の破れた系についても同様の機構による複素固有値が出現する可能性が存在する。この可能性を探ることも今後の課題である。

付録 A 南部-Goldstone の定理 の証明

A.1 証明の準備

A.1.1 変換の生成子

ここでは変換の生成子 \hat{G}_H を与えられたラグランジアンから構成する方法について議論する。

一旦古典場に戻る。ある古典場の微小変換

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t) + \eta\delta\psi(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.1.1})$$

がラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}[\psi(\mathbf{x}, t)] \rightarrow \mathcal{L}[\psi'(\mathbf{x}, t)] + \eta\delta\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.1.2})$$

を誘起するとする。

このとき、

$$\begin{aligned} \eta\delta\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{L}[\psi(\mathbf{x}, t) + \eta\delta\psi(\mathbf{x}, t)] - \mathcal{L}[\psi(\mathbf{x}, t)], \\ &= \eta\partial^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\delta\psi, \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

すなわち、

$$\delta\mathcal{L}(\mathbf{x}, t) = \partial^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\delta\psi \equiv \partial^\mu\mathcal{N}_\mu, \quad (\text{A.1.4})$$

である。

ここで、ラグランジアン密度が場の微小変換 (A.1.1) に対して不変であったとする。このとき、 $\delta\mathcal{L} = 0$ より

$$\partial^\mu\mathcal{N}_\mu = 0, \quad (\text{A.1.5})$$

となる。これは、ある種の電荷保存則を表している。そのため、 \mathcal{N}_μ はネーター電流と呼ばれる。

ネーター電流の第 0 成分に注目する。これは定義より

$$\mathcal{N}_0(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \psi)} \delta \psi(\mathbf{x}, t) = \pi(\mathbf{x}, t) \delta \psi(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.1.6})$$

と書くことが出来る。ただし、 $\pi(\mathbf{x}, t)$ は $\psi(\mathbf{x}, t)$ の正準共役な場である。この \mathcal{N}_0 を空間積分したものを $G(t)$ と書く

$$G(t) = \int d\mathbf{x} \mathcal{N}_0(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.1.7})$$

$G(t)$ と ψ の Poisson 括弧を取ると

$$\{\psi, G(t)\} = \delta \psi, \quad (\text{A.1.8})$$

となる。すなわち、ネーター電流の第 0 成分の空間積分 $G(t)$ は変換の生成子である。

これを量子化すると

$$\left[\hat{\psi}_H(\mathbf{x}, t), \hat{G}_H(t) \right] = i\hbar \delta \hat{\psi}_H(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.1.9})$$

となる。つまり、変換の生成子 $\hat{G}_H(t)$ はネーター電流の第 0 成分を用いて

$$\hat{G}_H(t) = \int d\mathbf{x}' \hat{\mathcal{N}}_{0,H}(\mathbf{x}'), \quad (\text{A.1.10})$$

と書くことが出来る。

A.1.2 スペクトル表示

空間的に一様な場に対する相関関数

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_H(\mathbf{x}, t) \hat{\mathcal{B}}_H(\mathbf{x}', t') | 0 \rangle \quad (\text{A.1.11})$$

のスペクトル表示を導入する。ここで、 $\hat{\mathcal{A}}_H$, $\hat{\mathcal{B}}_H$ はスカラー場であるとする。この場は時間・空間的に一様な系なので

$$\hat{\mathcal{A}}_H(\mathbf{x}, t) = \exp\left(-\frac{i\hat{\mathbf{P}}_H \mathbf{x}}{\hbar} + \frac{i\hat{H}_H t}{\hbar}\right) \hat{\mathcal{A}}_H(\mathbf{0}, 0) \exp\left(\frac{i\hat{\mathbf{P}}_H \mathbf{x}}{\hbar} - \frac{i\hat{H}_H t}{\hbar}\right) \quad (\text{A.1.12})$$

と書ける。相関関数に代入すると

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_{\text{H}}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathcal{B}}_{\text{H}}(\mathbf{x}', t') | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_{\text{H}}(\mathbf{0}, 0) \exp\left(\frac{i\hat{\mathbf{P}}_{\text{H}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} - \frac{i\hat{H}_{\text{H}}(t - t')}{\hbar}\right) \hat{\mathcal{B}}_{\text{H}}(\mathbf{0}, 0) | 0 \rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\omega > 0} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i\omega(t - t')} \langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_{\text{H}}(\mathbf{0}, 0) | \mathbf{k}, \omega \rangle \langle \mathbf{k}, \omega | \hat{\mathcal{B}}_{\text{H}}(\mathbf{0}, 0) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{A.1.13}$$

となる。ただし、2つめの=では $\hat{\mathbf{P}}_{\text{H}}$ と \hat{H}_{H} の同時固有状態

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{H}} | \mathbf{k}, \omega \rangle = \hbar \mathbf{k} | \mathbf{k}, \omega \rangle, \tag{A.1.14}$$

$$\hat{H}_{\text{H}} | \mathbf{k}, \omega \rangle = \hbar \omega | \mathbf{k}, \omega \rangle, \tag{A.1.15}$$

で作った1の分解

$$\sum_{\mathbf{k}} \sum_{\omega > 0} | \mathbf{k}, \omega \rangle \langle \mathbf{k}, \omega | = 1, \tag{A.1.16}$$

を挿入した。

ここで、スペクトル関数 $\sigma^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ を

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_{\text{H}}(\mathbf{0}, 0) | \mathbf{k}, \omega \rangle \langle \mathbf{k}, \omega | \hat{\mathcal{B}}_{\text{H}}(\mathbf{0}, 0) | 0 \rangle \equiv \frac{1}{V} \sigma^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \theta(\omega) \tag{A.1.17}$$

と定義すると

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{\mathcal{A}}_{\text{H}}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathcal{B}}_{\text{H}}(\mathbf{x}', t') | 0 \rangle &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\omega} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i\omega(t - t')} \sigma^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \theta(\omega)
\end{aligned} \tag{A.1.18}$$

と書くことが出来る。これを相関関数のスペクトル表示と呼ぶ。

また、相関関数 $\langle 0 | \hat{\mathcal{B}}_{\text{H}}(\mathbf{x}', t') \hat{\mathcal{A}}_{\text{H}}(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle$ も同様の議論により

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \hat{\mathcal{B}}_{\text{H}}(\mathbf{x}', t') \hat{\mathcal{A}}_{\text{H}}(\mathbf{x}, t) | 0 \rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\omega > 0} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) - i\omega(t' - t)} \langle 0 | \hat{\mathcal{B}}_{\text{H}}(\mathbf{0}, 0) | \mathbf{k}, \omega \rangle \langle \mathbf{k}, \omega | \hat{\mathcal{A}}_{\text{H}}(\mathbf{0}, 0) | 0 \rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\omega > 0} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + i\omega(t - t')} \langle 0 | \hat{\mathcal{B}}_{\text{H}}(\mathbf{0}, 0) | -\mathbf{k}, \omega \rangle \langle -\mathbf{k}, \omega | \hat{\mathcal{A}}_{\text{H}}(\mathbf{0}, 0) | 0 \rangle \\
&\equiv \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\omega} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + i\omega(t - t')} \sigma^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) \theta(\omega)
\end{aligned} \tag{A.1.19}$$

と出来る。ただし、スペクトル関数 $\sigma^{(-)}(\mathbf{k}, \omega)$ を

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{B}}_{\text{H}}(\mathbf{0}, 0) | -\mathbf{k}, \omega \rangle \langle -\mathbf{k}, \omega | \hat{\mathcal{A}}_{\text{H}}(\mathbf{0}, 0) | 0 \rangle \equiv \frac{1}{V} \sigma^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) \theta(\omega) \quad (\text{A.1.20})$$

と定義した。

A.2 南部-Goldstone 交換関係を用いた証明

秩序変数を持つための必要条件を考える。秩序変数を

$$\langle 0(\theta) | \delta \hat{A}_{\alpha, \text{H}} | 0(\theta) \rangle \equiv i v_{\alpha} \neq 0 \quad (\text{A.2.1})$$

とおく。

一般に変換の生成子は時間に依存する。しかし、ここでは \hat{G}_{H} は時間に依存しないものと要請する¹。

南部-Goldstone 交換関係は

$$\delta \hat{A}_{\alpha, \text{H}} = i \int d\mathbf{x}' \left[\hat{A}_{\alpha, \text{H}}, \hat{\mathcal{N}}_{0, \text{H}}(\mathbf{x}') \right], \quad (\text{A.2.2})$$

この真空期待値を取ると

$$\begin{aligned} i v &= \langle 0(\theta) | \delta \hat{A}_{\alpha, \text{H}} | 0(\theta) \rangle \\ &= i \int d\mathbf{x}' \langle 0(\theta) | \left[\hat{A}_{\alpha, \text{H}}, \hat{\mathcal{N}}_{0, \text{H}}(\mathbf{x}') \right] | 0(\theta) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

となる。右辺の被積分関数をスペクトル表示すると

$$\begin{aligned} &\langle 0(\theta) | \left[\hat{A}_{\alpha, \text{H}}, \hat{\mathcal{N}}_{0, \text{H}}(\mathbf{x}') \right] | 0(\theta) \rangle \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\omega, \mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \left\{ e^{-i\omega(t-t')} \sigma^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) - e^{i\omega(t-t')} \sigma^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) \right\} \theta(\omega) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\omega, \mathbf{k}} \int dk_0 e^{ik(x-x')} \left\{ \delta(k_0 - \omega) \theta(k_0) \sigma^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) - \delta(k_0 + \omega) \theta(-k_0) \sigma^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

¹時間に依存する場合、このここでの議論は必ずしも成立しない。例えば、クーロン力などの長距離力が含まれる場合はここでの議論が適応できない。

となる。ただし、 $k(x - x') = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \omega(t - t')$ とした。両辺 \mathbf{x}' について積分すると

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{x}' \langle 0(\theta) | \left[\hat{A}_{\alpha, \text{H}}, \hat{\mathcal{N}}_{0, \text{H}}(\mathbf{x}') \right] | 0(\theta) \rangle \\ &= \sum_{\omega} \int dk_0 e^{-ik_0(t-t')} \left\{ \delta(k_0 - \omega) \theta(k_0) \sigma^{(+)}(\mathbf{0}, \omega) - \delta(k_0 + \omega) \theta(-k_0) \sigma^{(-)}(\mathbf{0}, \omega) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

となる。ここで、左辺は時間 t' に依らないので、スペクトル関数はデルタ関数型 $\sigma^{(\pm)}(\mathbf{0}, \omega) = c^{(\pm)} \delta(\omega)$ である。これらを合わせると

$$iv = \langle 0(\theta) | \delta \hat{A}_{\alpha, \text{H}} | 0(\theta) \rangle = i \frac{c^{(+)} - c^{(-)}}{2} \neq 0, \quad (\text{A.2.6})$$

となる。今、この値は0でないとしているため、 $c^{(+)} \neq c^{(-)}$ でなければならない。これはスペクトル関数 $\sigma^{(\pm)}(\mathbf{0}, \omega)$ のどちらかは少なくとも $\delta(\omega)$ であることを意味する。すなわち、必ず $\mathbf{k} = 0$ で $\omega = 0$ に極が現れる。これより、長波長でエネルギー0の素励起が存在することが示される。

A.3 Ward-高橋恒等式を用いた証明

ここでは南部-Goldstone の定理の証明の一つである Ward-高橋恒等式を用いた証明を示す。

A.3.1 Ward-高橋恒等式

次のような変換の生成子 \hat{G}_{H} と場の演算子 \hat{A}_{H} で構成される因果相関関数

$$\langle\langle 0 | \text{T} \left[\hat{G}_{\text{H}}(t) \hat{A}_{\text{H}}(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots \hat{A}_{\text{H}}(\mathbf{x}_n, t_n) \right] | 0 \rangle\rangle \quad (\text{A.3.1})$$

を考える。この関数を時間 t について微分すると

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle 0 | T \left[\hat{G}_H(t) \hat{A}_H(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots \hat{A}_H(\mathbf{x}_n, t_n) \right] | 0 \rangle\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \delta(t - t_i) \langle\langle 0 | T \left[\hat{A}_H(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots [\hat{G}_H(t), \hat{A}_H(\mathbf{x}_i, t_i)] \cdots \psi_H(\mathbf{x}_n, t_n) \right] | 0 \rangle\rangle \\
&\quad + \langle\langle 0 | T \left[\left(\frac{d}{dt} \hat{G}_H(t) \right) \hat{A}_H(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots \hat{A}_H(\mathbf{x}_n, t_n) \right] | 0 \rangle\rangle \\
&= -i \sum_{i=1}^n \delta(t - t_i) \langle\langle 0 | T \left[\hat{A}_H(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots \delta \hat{A}_H(\mathbf{x}, t_i) \cdots \hat{A}_H(\mathbf{x}_n, t_n) \right] | 0 \rangle\rangle \\
&\quad + \int d\mathbf{x} \langle\langle 0 | T \left[\delta \hat{\mathcal{L}}_H(\mathbf{x}, t) \hat{A}_H(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots \hat{A}_H(\mathbf{x}_n, t_n) \right] | 0 \rangle\rangle \quad (\text{A.3.2})
\end{aligned}$$

となる。ただし、最初の $=$ では $d\theta(t)/dt = \delta(t)$ を、2つ目の $=$ では南部-Goldstone 交換関係と

$$\int d\mathbf{x} \delta \hat{\mathcal{L}}_H = \int d\mathbf{x} \left[\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathcal{N}}_H^0 + \text{div} \hat{\mathcal{N}}_H \right] = \frac{d}{dt} \int d\mathbf{x} \hat{\mathcal{N}}_H^0 = \frac{d}{dt} \hat{G}_H \quad (\text{A.3.3})$$

を用いた。この式の両辺を t について積分すると

$$\begin{aligned}
& i \sum_{i=1}^n \langle\langle 0 | T \left[\hat{A}_H(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots \delta \hat{A}_H(\mathbf{x}, t_i) \cdots \hat{A}_H(\mathbf{x}_n, t_n) \right] | 0 \rangle\rangle \\
&= \int d\mathbf{x} dt \langle\langle 0 | T \left[\delta \hat{\mathcal{L}}_H(\mathbf{x}, t) \hat{A}_H(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots \hat{A}_H(\mathbf{x}_n, t_n) \right] | 0 \rangle\rangle \quad (\text{A.3.4})
\end{aligned}$$

となる。この式は Ward-高橋恒等式と呼ばれる場の理論の基本式である。

A.3.2 縮退した真空に対する Ward-高橋恒等式

この節では、ラグランジアンが G -変換に対して不変 ($\delta \hat{\mathcal{L}}_H = 0$) かつ、真空がこの対称性を自発的に破っている状況における Ward-高橋恒等式を示す。

真空が縮退している場合は上記の議論がそのままでは使用できない。これは、 $\text{div} \hat{\mathcal{N}}$ の積分の境界を無視できなくなることによる。この様な状況に対応するためには、 G -変換対称性を微小に破る項 $\hat{\Xi}_H(x; \bar{\theta})$ ($\delta \hat{\Xi}_H(x; \bar{\theta}) \neq 0$) を加えたラグランジアン

$$\hat{\mathcal{L}}_H \rightarrow \hat{\mathcal{L}}_{\text{tot}, H} = \hat{\mathcal{L}}_H + \varepsilon \hat{\Xi}_H(x; \bar{\theta}) \quad (\text{A.3.5})$$

を考え²、一旦真空の縮退を解いてから

$$|0(\theta)\rangle \rightarrow |0(\bar{\theta})\rangle \quad (\text{A.3.6})$$

²対称性を微小に破る項は、ラグランジアンを持つ対称性を破るものであれば良い。

前節と同様の議論を行えばよい。ただし、計算の最後で $\varepsilon \rightarrow 0$ を取ることでラグランジアン対称性を回復する必要がある。

この状況において

$$\delta \hat{\mathcal{L}}_{\text{tot,H}} = \varepsilon \delta \hat{\Xi}_{\text{H}}(x; \bar{\theta}) \quad (\text{A.3.7})$$

であるため、Ward-高橋恒等式は

$$\begin{aligned} i \sum_{i=1}^n \langle 0, \bar{\theta} | \text{T} \left[\hat{A}_{\text{H}}(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots \delta \hat{A}_{\text{H}}(\mathbf{x}, t_i) \cdots \hat{A}_{\text{H}}(\mathbf{x}_n, t_n) \right] | 0, \bar{\theta} \rangle \\ = \int d\mathbf{x} dt \langle 0, \bar{\theta} | \text{T} \left[\varepsilon \delta \hat{\Xi}_{\text{H}}(x; \bar{\theta}) \hat{A}_{\text{H}}(\mathbf{x}_1, t_1) \cdots \hat{A}_{\text{H}}(\mathbf{x}_n, t_n) \right] | 0, \bar{\theta} \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.3.8})$$

となる。

A.3.3 南部-Goldstone の定理の証明

この節では、Ward-高橋恒等式を用いて南部-Goldstone の定理を示す。

$n = 1$ の Ward-高橋恒等式

$$i \langle 0, \bar{\theta} | \delta \hat{A}_{\text{H}}(\mathbf{x}, t) | 0, \bar{\theta} \rangle = \int d\mathbf{x}' dt' \langle 0, \bar{\theta} | \text{T} \left[\varepsilon \delta \hat{\Xi}_{\text{H}}(\mathbf{x}', t'; \bar{\theta}) \hat{A}_{\text{H}}(\mathbf{x}, t) \right] | 0, \bar{\theta} \rangle \quad (\text{A.3.9})$$

を考える。左辺は秩序変数である。右辺を Fourier 展開すると

$$\begin{aligned} v &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int d\mathbf{x}' \langle 0(\bar{\theta}) | \text{T} [\delta \hat{\Xi}_{\text{H}}(\mathbf{x}') \hat{A}_{\text{H}}(\mathbf{x})] | 0(\bar{\theta}) \rangle \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mu(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} \int d\kappa \frac{\rho(\mathbf{k}, \kappa)}{k_0^2 - \kappa^2 + i\eta} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int d\kappa \frac{\rho(\mathbf{0}, \kappa)}{\kappa^2 - i\eta} \end{aligned} \quad (\text{A.3.10})$$

となる。これより、Ward-高橋恒等式が $\varepsilon \rightarrow 0$ 極限でも満たされるためには κ が Z を定数として

$$\kappa^2 = Z\varepsilon \quad (\text{A.3.11})$$

かつ、この点でスペクトル関数が

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\mathbf{0}, \kappa = \sqrt{Z\varepsilon}) = \rho(\mathbf{0}, 0) \neq 0 \quad (\text{A.3.12})$$

となる必要がある。これより、長波長でエネルギー 0 の素励起が存在することが示される。これが、Ward-高橋恒等式を用いた南部-Goldstone の定理の証明である。

謝辞

本研究を進める上で、熱心にご指導いただいた早稲田大学理工学術院教授 山中由也先生に心より御礼申し上げます。山中先生には卒業研究の頃より研究指導など多くのことをご指導頂きました。場の量子論に関する多くの知識は山中先生から得ることが出来ました。また、本論文の審査にあたり、多忙の中有益なご教示を下さった、早稲田大学理工学術院教授 小山泰正先生、同 山本知之先生に厚く御礼申し上げます。

中村祐介博士には共同研究や日々の議論を通して、研究における様々なご助言やアイデアを頂きました。また、数値解析関係の知識は全て中村博士から学びました。桑原幸朗氏とは研究室配属当初から一緒にゼミをさせて頂きました。原子力開発機構の小林恵太博士には実りある議論をさせて頂きました。京都大学基礎物理学研究所の段下一平博士には本年度の夏にアトム型研究員として京都大学に行ったときに大変お世話になりました。また、発表の機会を下さりありがとうございました。同じ研究グループの今井良輔氏、横山大氏、吉岡良氏、永井康裕氏、川口拓磨氏、小山輝氏、新戸部裕隆氏、三浦丈昇氏、桂樹玲氏とは日頃のゼミを通して沢山の議論を致しました。他にも、井上智喜博士、本田澄氏、同級生の朝比奈毅典氏、清田俊輔氏、小嶋祐介氏や一期下の大坪竜也氏、片山雄裕氏とはゼミなどで意見を交わしました。この5年間お世話になった方々にこの場を借りて深くお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] H. Umezawa, H. Matsumoto, and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States* (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [2] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961).
- [3] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
- [4] 高橋康, 物性研究者のための場の量子論 I (培風館, 東京, 1974).
- [5] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- [6] K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [7] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [8] F. London, *Nature (London)* **141**, 643 (1938).
- [9] J. L. Lin and J. P. Wolfe, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1222 (1993).
- [10] H. Feshbach, *Ann. Phys. (N.Y.)* **5**, 357 (1958).
- [11] H. Feshbach, *Ann. Phys. (N.Y.)* **19**, 287 (1962).
- [12] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
- [13] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).

- [14] E. Hodby, G. Hechenblaikner, S. A. Hopkins, O. M. Margao, and C. J. Foot, Phys. Rev. Lett. **88**, 010405 (2002).
- [15] P. C. Haljan, I. Coddington, P. Engels, and E. A. Coenell, Phys. Rev. Lett. **87**, 210403 (2001).
- [16] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch, and I. Bloch, Nature (London) **415**, 39 (2002).
- [17] M. B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **76**, 4511 (1996).
- [18] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004).
- [19] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H. -J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett **80**, 2027 (1998).
- [20] Y. -J. Lin, R. L. Compton, K. Jiménez-García, J. V. Porto, and I. B. Spielman, Nature **462**, 628 (2009).
- [21] Y.-J. Lin, K. Jiménez-García, and I. B. Spielman, Nature **471**, 83 (2011).
- [22] M. Karski, L. Förster, J. M. Choi, A. Steffen, W. Alt, D. Meschede and A. Widera, Science **325**, 174 (2009).
- [23] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H. -J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Science **275**, 637 (1997).
- [24] A. Röhrl, M. Naraschewski, A. Schenzle, and H. Wallis, Phys. Rev. Lett. **78**, 4143 (1997).
- [25] D. S. Hall, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **81**, 1543 (1998).
- [26] S. Burger *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).
- [27] A. E. Muryshev, H. B. van Linden, van den Heuvel, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **60**, R2665 (1999).

- [28] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, *Science* **296**, 1290 (2002).
- [29] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, *Nature* **417**, 150 (2002).
- [30] 高橋康, 物性研究者のための場の量子論 II (培風館, 東京, 1976).
- [31] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [32] E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961); *J. Math. Phys.* **4**, 195 (1963).
- [33] L. P. Pitaevskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz. [Soc. Phys. JETP]* **40**, 546 (1961); *Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961).
- [34] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [35] M. R. Andrews, D. M. Stamper-Kurn, H. J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 553 (1997); **80**, 2967(E) (1998).
- [36] J. Steinhauer, R. Ozeri, N. Katz, and N. Davidson, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 120407 (2002).
- [37] D. A. Takahashi and M. Nitta, *Ann. Phys.* **354**, 101 (2015).
- [38] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. (Moscow)* **11**, 23 (1947).
- [39] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (Benjamin, New York, 1966).
- [40] Y. Nakamura, M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *Phys. Rev. A* **77**, 043601 (2008).
- [41] M. Okumura and Y. Yamanaka, *Phys. Rev. A* **68**, 013609 (2003).

- [42] M. Mine, T. Koide, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *Prog. Theor. Phys.* **115**, 683 (2006).
- [43] K. Kobayashi, M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *Ann. Phys.* **323**, 1247 (2008).
- [44] M. Lewenstein and L. You, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3489 (1996).
- [45] H. Matsumoto and S. Sakamoto, *Prog. Theor. Phys.* **107**, 679 (2002).
- [46] L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, (Oxford University Press, New York, 2003).
- [47] D. J. Frantzeskakis, *J. Phys. A: Math. Theor.* 43 (2010) 213001.
- [48] Y. Nakamura, J. Takahashi, and Y. Yamanaka, *Phys. Rev. A* **89**, 013613 (2014).
- [49] J. Dziarmaga, *Phys. Rev. A* **70**, 063616 (2004).
- [50] G. Huang, L. Deng, J. Yan, and B. Hu, *Phys. Lett. A* **357**, 150 (2006).
- [51] J. Dziarmaga and K. Sacha, *Phys. Rev. A* 66 (2002) 043620.
- [52] R. Ichihara, I. Danshita and T. Nikuni, *Phys. Rev. A* 78 (2008) 063604.
- [53] S. Middelkamp, G. Theocharis, P. G. Kevrekidis, D.J. Frantzeskakis, and P. Schmelcher, *Phys. Rev. A* 81 (2010) 053618.
- [54] S. Yi, O. E. Mustecaplioglu, and L. You, *Phys. Rev. Lett.* 90 (2003) 140404.
- [55] S. Yi, O. E. Mustecaplioglu, and L. You, *Phys. Rev. A.* 68 (2003) 013613.
- [56] Y. Kawaguchi, *Phys. Rev. A.* 89 (2014) 033627.
- [57] Y. Nakamura, J. Takahashi, Y. Yamanaka, and S. Ohkubo, arXiv:1411.6353.

List of publications

Thesis publications

- Junichi Takahashi, Yusuke Nakamura, and Yoshiya Yamanaka, “Interacting multiple zero mode formulation and its application to a system consisting of a dark soliton in a condensate”, Phys. Rev. A **92**, 023627 (2015).
- Yusuke Nakamura, Junichi Takahashi, and Yoshiya Yamanaka, “Formulation for the zero mode of a Bose-Einstein condensate beyond the Bogoliubov approximation”, Phys. Rev. A. **89**, 013613 (2014).
- Junichi Takahashi, Yusuke Nakamura, and Yoshiya Yamanaka, “Dynamical instability induced by the zero mode under symmetry breaking external perturbation”, Ann. Phys. **347**, 250 (2014).
- Junichi Takahashi, Yusuke Nakamura, and Yoshiya Yamanaka, “Relationship between Dynamical Instability and Zero Modes for Dark Soliton in Bose-Einstein Condensate ”, JPS Conference Proceedings **1**, 012100 (2014).
- 高橋 淳一, “ダークソリトンのある冷却原子系におけるゼロモードの役割”, 物性研究・電子版 Vol. 2 No. 3, 10113 (2013).

Invited lecture

- 高橋淳一, “Dynamical instability induced by zero mode in cold atomic system”, 京大基研セミナー (2015/8)

Oral presentations

- Junichi Takahashi, Yusuke Nakamura, Yoshiya Yamanaka, “Quantum fluctuation of soliton in Bose-Einstein condensate beyond Bogoliubov approximation”, 24th International Conference on Atomic Physics (2014/8).
- Yusuke Nakamura, Junichi Takahashi, Yoshiya Yamanaka, “Quantum state for zero mode of cold atomic gas system with Bose-Einstein condensate”, 24th International Conference on Atomic Physics (2014/8)
- Junichi Takahashi, Yusuke Nakamura, Yoshiya Yamanaka, “Nambu-Goldstone mode associated with a soliton and its dynamics”, Higgs Mode in Condensed Matter and Quantum Gases (2014/6).
- Yusuke Nakamura, Junichi Takahashi, Yoshiya Yamanaka, “Quantum state for Nambu-Goldstone mode of Bose-Einstein condensate”, Higgs Mode in Condensed Matter and Quantum Gases (2014/6).
- Junichi Takahashi, Yusuke Nakamura, Yoshiya Yamanaka, “The roles of the two zero and adjoint modes in the dynamics of dark soliton”, 23rd International Conference on Atomic Physics (2012/7)
- 川口拓磨, 中村祐介, 高橋淳一, 山中由也, “ダークソリトンの消失過程におけるゼロモードの量子揺らぎ”, 日本物理学会 2015 年秋季大会 (2015/9)
- 高橋淳一, 中村祐介, 山中由也, “並進対称性の自発的破れに伴うゼロモードの量子状態とソリトンの quantum depletion”, 日本物理学会 2014 年春季大会 (2015/3) 22pPSB-13
- 中村祐介, 高橋淳一, 山中由也, “捕捉された冷却中性原子 Bose-Einstein 凝縮体に対するゼロモードと位相揺らぎ”, 日本物理学会 2014 年秋季大会 (2014/9).
- 中村祐介, 高橋淳一, 山中由也, 大久保茂男, “Bose-Einstein 凝縮体に対するゼロモード量子状態と原子核におけるアルファ凝縮模型への応用”, 熱場の量子論とその応用 (2014/9).

- 高橋淳一, 中村祐介, 山中由也, “2次元ソリトン系に対する snake instability とゼロモードの関係”, 日本物理学会 2014 年春季大会 (2014/3).
- 高橋淳一, 中村祐介, 山中由也, “捕捉された中性冷却 Bose-Einstein 凝縮系における Bogoliubov de-Gennes の方法と Ward-高橋恒等式”, 日本物理学会 2013 年春季大会 (2013/3).
- 高橋淳一, 中村祐介, 山中由也, “捕捉された Bose-Einstein 凝縮系における Bogoliubov de-Gennes の方法とゼロモード” 2012 年熱場の量子論とその応用 (2012/9).
- 高橋淳一, 中村祐介, 山中由也, “ダークソリトンの動的不安定性による崩壊に対する 2つのゼロモードの役割”, 日本物理学会 2012 年秋季大会 (2012/9).
- 高橋淳一, “捕捉された Bose-Einstein 凝縮系における Bogoliubov-de Gennes の方法と zero mode の役割”, 第 57 回物性若手夏の学校 (2012/8).