博士論文

ループ量子重力理論に基づく宇宙物理学の基礎的問題の解析

Analysis of Fundamental Problems in Astrophysics based on Loop Quantum Gravity

2013 年 6 月

早稲田大学 先進理工学研究科
物理学及応用物理学専攻 理論宇宙物理学研究

田中 友

Tomo TANAKA

目次

第 1 章

イントロダクション

1.1　量子重力理論の概観

Einstein は重力を 4 次元時空の幾何学として捉えることによって一般相対性理論を定式化した。一般相対性理論はそれまでの Newton の重力理論では説明ができなかった水星の近日点移動を説明し、さらに光の屈折などの太陽系近傍の観測により検証されている。また、宇宙の進化やブラックホールの存在が予言され、それらは観測によって確認されるところとなり、一般相対性理論は正しいとされている。しかし、ブラックホール中心や宇宙初期においては密度や曲率などが発散する特異点が存在することが示されており、そこでは一般相対性理論が破綻する。しかし、この特異点は一般相対性理論という古典論の範囲で考えた時に生じるものであり、時空の量子論的な効果も含めて考えると特異点が生じないと考えられる。一般相対性理論と量子論を統一する理論は量子重力理論と呼ばれており、2 つの理論が現れて以降多くの理論物理学者によって取り組まれてきたが、いまだに完成されていない。

強重力場の典型であるブラックホールには熱力学に類似した性質があり、ブラックホール熱力学として大変よく研究されている。例えば、ブラックホールのエントロピーと事象の地平線の表面積には比例関係 (Bekenstein-Hawking の関係式) があることや、曲がった時空での場の量子論を考えることで、ブラックホールがある温度の熱輻射 (Hawking 輻射) を放出していることが示され、その温度の表式にはプランク定数が含まれる。これらの結果からエントロピーの表式にもプランク定数が含まれることがわかり、エントロピーは通常の量子統計力学のように量子論的な効果によって説明されることが期待される。しかし、このブラックホールの熱力学的性質の量子統計力学的な起源は未だ明らかにはされておらず、量子重力理論によって解決されると予想されている。

量子重力理論の一つで、現在有望視されているものにループ量子重力理論 (Loop Quantum Gravity[LQG]) がある。量子重力理論を含む素粒子統一理論の有力候補と考えられている超弦理論もあるが、非摂動論的な定式化がまだ出来ていないためブラックホールなどの強重力場を伴う現象の記述は困難である。しかし、LQG は 4 次元時空を基礎とし一般相対性理論をゲージ理論的に扱い、格子 QCD での手法を応用することにより、非摂動論的な方法で数学的に厳密に構築されている理論である。このため重力場の量子化が必要とされるような強重力場を伴うミクロなスケールにおいても解析を行うことが可能であり、ブラックホール熱力学の量子統計力学的起源や宇宙初期の特異点回避の解析において極めて有効な理論であると期待されている。そして非摂動論的な量子重力理論である LQG において、これらを説明する

ことが現在重要な課題の1つとなっており、またブラックホールエントロピーの量子統計力学的な起源の説明や特異点の回避について明確な答えを与えることが出来れば、量子重力理論完成へ向けた大きな第一歩になる。

LQG では、一般相対性理論での教訓を真剣に取り扱っている。つまり、重力は幾何学でありそのため基礎理論において背景計量は存在しないという教訓である。量子重力理論において、幾何学と物質は "共に" 量子力学的に生まれるべきである。したがって、素粒子理論と異なり、背景幾何上の量子的物質から始めたり、重力の量子効果を組み込むために摂動論を用いない。多様体は存在するが背景において計量(もしくは、実際に他の場) は存在しないのである。

古典論では、Riemann 幾何学は現代の重力理論の最終的な動力学方程式と同様に物理的な、運動学的な概念を構築するために適切な数学的な言語を与える。しかし、量子重力理論ではこの役割は "量子"Riemann 幾何学に取って代わられる。古典的な領域では、一般相対性理論は、重力の最も有効な理論とされており、QED の有名な試験を超えるぐらい驚くべき正確さで試験されている予言がある。よって、以下のように問うことは自然である。："適切な物質と結合している量子論的一般相対性理論 (もしくは、超重力理論 (超対称性を持つように一般化された重力理論)) が矛盾なく非摂動論的に存在するのだろうか？"

素粒子物理学においてその答えは否定的である。なぜなら、非摂動論的な量子重力に対して具体的な証拠があるからではなく、弱い相互作用の理論のアナロジーであるからである。Fermi による 4 点相互作用模型は低エネルギーではかなり良い模型であるが繰り込みに失敗している。Fermi 模型の非摂動論的な定式化を探すのではなく、4 点相互作用が $W^{\pm}$ と Z プロパゲータによって置き換えられている電弱相互作用の Glashow-Salam-Weinberg の繰り込み理論での模型に置き換えられることによってこの理論の進展が起こった。そして量子一般相対論の摂動論的な繰り込み不可能性が同様に指摘されている。しかしながら、この主張は一般相対性理論の場合において質的な新しい要素があるという重要な事実を見落としている。摂動論は時空が考えている状況化で物理の興味あるすべてのスケールで連続的であるという仮定がなされている。これは電弱と強い相互作用の理論において正しい仮定として用いられている。一方重力の場合では、興味のあるスケールは Planck 長 l_{Pl} によって与えられ、その連続的な描像がそのスケール以下で有効であると仮定する物理的根拠はない。通常の摂動論的な扱いの失敗はこの著しい誤りの仮定によるものが大きいかもしれない。そして、幾何学の物理的ミクロ構造に正しく立脚している非摂動論的な取り扱いはこれらの矛盾を解く事ができるかもしれない。

最後に、量子一般相対性理論を取り組む上で少し注意を述べておく。量子一般相対性理論が数学的に矛盾のない理論として存在したとしても、理解されているすべての物理の '最終的な' 理論であるとする先験的な理由はない。特に、古典的な一般相対性理論の場合のように、背景独立や一般共変性の要請は重力と物質の間の相互作用や物質場自身の間の相互作用の形を制限するが、理論にはこれらの相互作用を決定する原理を持たない。異なる言い方をすると、そのような理論は知られているすべての力の統一に対する満足する候補にはならないだろう。しかしながら、一般相対性理論が古典的な領域においてこの制限があるにも関わらずとても強力な結果があるように、量子一般相対性理論は、物理学の刺激的な未研究分野をさらに広げるために質的な新しい予言を持つべきである。実際、統一するということは他の相互作用でさえ理論の実用性にとって本質的な基準とはならない。例えば、QCD は強い相互作用と電弱相互作用を統一するわけではないが強力な理論である。さらに、我々が大統一理論のための実行可能な候補を未だ手にし

ていないという事実は QCD を何ら無効にするものではない。

1.2　量子重力理論で扱う物理的問題

量子重力に対するアプローチには 2 つのタイプの問題がある。それは個々のアプローチに ‘内在する’ 問題とすべてのアプローチが直面しなければならない問題である。前者の例はツイスター理論 (twistor theory) における (半平坦というよりはむしろ) 物理的な重力場の組み込みや弦理論 (string theroy) における対称性の破れや次元の簡約のメカニズムや正準量子化のアプローチにおける時空の共変性の問題である。

ここでは、満足すべき重力の量子論が立ち向かうべき長年の問題について述べ、後者のタイプの問題に焦点を当てることにする。

i) ビッグバン特異点やその他の特異点

古典重力理論のビッグバン (Big-bang) のような特異点の予言が物理の理論が有効な領域からはみ出てしまう最初のシグナルであることは広く信じられている。ここにすべての量子重力理論に対する重大な問題がある。それは、ビッグバンに置き換わるものは何であるのか？古典的な幾何学や連続的な描像は (強磁性体 (ferro-magnet) 平均場のような) 単なる近似なのか？もしそうであるなら、ミクロな描像は何であるのか？強磁性体の Heisenberg の量子模型のような時空の対応物は何であるのか？これらの基本的な構成物で理論を構築した時、宇宙の量子状態の発展には特異点がないのか？一般相対性理論は時空の曲率がビッグバンやビッグクランチ (Big-crunch) に近づくにつれて限りなく増加するが、無限の曲率に達する前に量子重力が不可欠である一般相対性理論では無視されていた量子効果が期待される。もしそうであるなら、曲率の上限は何であるのか？特異点付近では我々はどのように古典的な一般相対性理論を信じることができるのか？ “初期条件”(つまり、ビッグバンを記述する幾何学や物質の量子状態) について何を言うことができるのか？もしそれらを外部から課されなければならないなら、物理的な指導原理はあるのか？という問題である。

ii) ブラックホール

1970 年代前半、思考実験を用いて Bekenstein はブラックホールのエントロピーはその面積に比例しなければならないと主張した。同時期に Bardeen, Carter, Hawking は平衡状態にあるブラックホールは 2 つの基本法則 (熱力学の第 0 法則、第 1 法則と同じ形式) に従うことを示した。その 2 つの基本法則とはブラックホールの表面重力 κ は熱力学の温度 T の定数倍に一致することと地平線面積 a_{hor} はエントロピー S の定数倍に一致することである。

しかしながら、この解析は古典的な一般相対性理論に基づいたものであり、簡単な次元解析で比例係数は Planck 定数 $\hbar$ を含まなければならないことを示していたため、当初この類似は形式的なものだと思われていた。2 年後、ブラックホールの背景時空における場の量子論を用いて、Hawking はブラックホールは実際に温度 $T = \hbar\kappa/2\pi$ の黒体輻射を通して量子力学的に輻射していることを示した。第 1 法則とのアナロジーを用いると、ブラックホールのエントロピーは $S_{\mathrm{BH}} = a_{\mathrm{hor}}/4G\hbar$ によって与えられる。この結論は基礎物理の 3 つの柱 (一般相対性理論、量子論、統計力学) を一緒にしているため、人々の目を引きつけるものであった。しかし、この主張はむしろ原子における Bohr 模型を連想させるような古典と半古典のアイディアのごちゃまぜから結論付けられた主張である。ここで、以下のような自然な問題が生じる。

水素原子の Pauli-Schrödinger 理論のようなより基本的なものは何であるのか？もっと正確には、ブラックホールのエントロピーの統計力学的な起源は何であるのか？量子的なブラックホールの理解やエントロピーに対応する量子自由度と外部の曲がった時空との間を結ぶものは何であるか？量子重力理論の第 1 原理から Hawking 輻射を導くことができるのか？最終的な量子的記述での古典的な特異点の形跡 (情報損失のようなもの) はあるのか？という疑問である。

iii) Planck スケールの物理と低エネルギーの世界

一般相対性理論において、背景計量は存在せず、動力学が展開するような舞台は存在しない。幾何学自体がダイナミカルである。それゆえ、上で述べたように完全に満足する量子重力理論は背景時空の幾何学に依らないものでもある。しかし、必然的に背景独立な記述は良く知られている低エネルギー物理とは異なる物理的概念や数学的な道具を用いなければならない。重要な問題はこの低エネルギーでの記述が初期の Planck スケールでの世界から生じる (エネルギースケールで 16 乗のオーダーの違いがある) ことを示すことである。この “トップダウン” アプローチにおいて、基本理論は ‘十分な数の’ 半古典状態を許すのか？このような半古典的な部分は低エネルギーの物理を支えるために十分な背景幾何学を与えるのか？良く知られた記述を再現できるのか？さらに、なぜ通常の “ボトムアップ” な摂動的アプローチが失敗したのかを理解することができるのか？つまり、基礎的な記述を数学的に理路整然とさせ、通常の摂動的な量子論には存在しない本質的な特徴は何であるか？という問題である。

もちろんもっと多くの問題はある。例えば、時間、測度論や量子論の枠組みでの解釈の問題や微分同相不変な観測量やそれらの性質を計算する実践的な方法の問題や時間発展や S 行列を計算する実践的な方法やトポロジーやトポロジー変化の役割の研究などがある。しかし、ここで述べた 3 つの問題は追求している特定のアプローチとは大きく独立しており、一般的に概念的な問題に原因があるため物理的観点から見てより基本的な問題である。

1.3　ループ量子重力理論の発展について

近年、これらの基本的な物理的な問題の多くがループ量子重力理論によって取り組まれてきた。(i) 一様等方な量子宇宙論での特異点の自然な解決。(ii) 宇宙の地平線とともに天文学的に興味があるブラックホールを含む地平線のエントロピーの統計力学的な導出。(iii) 背景独立な非摂動論と Minkowski 時空上の摂動的な低エネルギー物理を結びつける半古典的なテクニックの導入。(iv) すべての Riemann 幾何学の演算子が離散固有値を持っており、連続的な時空が単に近似であることを意味している。(v) 正準量子化のアプローチにおいて量子 Einstein 方程式の系統的な定式化。(vi) 量子重力理論の背景独立な経路積分を与えるスピンフォーム (spin foam) 模型の発展。この発展は重要である。例えば、(v) と対比して量子 Einstein 方程式は量子幾何動力学 (quantum geometrodynamics) (ループ量子重力理論よりも 20 年以上さかのぼる正準アプローチ) において正確な数学的な意味をまだ与えられていない。それは、理論に含まれている演算子の積が発散を持つからである。

これらすべての発展は 1990 年代中頃において系統的に発展してきた幾何学の詳細な量子論から生じている。この理論は以下の 2 つの発展から生まれたものである。(a) Yang-Mills 理論と同じ相空間を持つ

接続の動力学理論としての一般相対論の定式化。(b) ループ*1を用いた接続の量子論の発見的であるが極めて有力な取り扱い。

本論文で扱うのは簡単のため重力場のみに焦点をあてるが、ゲージ場、フェルミオン、スカラー場が重力と結合していても可能である。

1.4　本論文について

本論文では、LQG で知られている面積固有値の表式を用いたブラックホールのエントロピーの導出の一般化の議論と対称性を課した時空に LQG の量子化の方法を使って量子宇宙論を展開する理論であるループ量子宇宙論を用いた初期特異点の回避の可能性についての議論を行った。

以下に本論文の構成を述べる。

まず第 2 章から第 6 章まではループ量子重力理論について解説を行った。第 2 章では、一般相対性理論を量子化するために理論を接続という幾何学量を用いた Hamilton 形式の定式化について解説をする。第 3 章では、量子化へむけて議論のスケッチを行い、スカラー場の例を挙げて解説をしている。第 4 章では、抽象的ではあるが背景独立な接続の量子論について述べ、以下の 3 つの段階に分けて解説を行った。1 番目にコンパクト Lie 群 G の群多様体上の ‘粒子’ の量子力学を通して導入を与え、2 番目に任意のグラフ上の構造群 G の (背景独立な) 格子ゲージ理論の量子運動学を与えた。3 番目に構造群 G を持つ連続体での接続について議論した。第 5 章では、ループ量子重力理論の大きな理論的予言である幾何学量の離散化について解説を行った。ここでは面積演算子と体積演算子について議論し、それぞれの固有値が離散スペクトルを持つことを示した。この離散固有値を用い、ブラックホールのエントロピーについて議論することになる。第 6 章では、量子拘束条件を満たす Hilbert 空間の構成について解説を行った。スカラー拘束条件 (Hamiltonian 拘束条件) については一般解が知られている訳ではないが、解くための処方箋について述べている。

第 7 章と第 8 章が本論文における研究について述べた章である。

第 7 章では、ループ量子重力理論の応用であるブラックホールのエントロピーについて、一般的な面積固有値の表式を用いた場合の導出について議論を行った。ループ量子重力理論を用いたブラックホールのエントロピーの導出は 1996 年より行われており、様々な方法によって計算されてきた。しかし、それらの結果は一致しておらず、どれが正しいのか、またはどれも正しくないのか未だにわかっていない。そこで本章ではそれらの場合を含む一般的な場合でのブラックホールのエントロピーの導出の議論を行った。

第 8 章では、対称性を課した時空に LQG の量子化の方法を使って量子宇宙論を展開する理論であるループ量子宇宙論を用いた初期特異点の回避の可能性についての議論を行った。ループ量子重力理論が 2001 年に初めて宇宙論に応用されて以来、様々な宇宙モデルで議論され、またいくつかの量子化の方法が提案されてきた。本章では平坦な一様等方宇宙モデルにおいてホロノミーの取り方と演算子順序について宇宙が大きくなった時の波動関数の振る舞いと初期特異点での演算子順序による波動関数の振る舞いの違いに着目して系統的な解析を行った。

---

*1 これがループ量子重力理論の名前の原点である。今では理論において本質的な役割をしないが、歴史的な理由のためこの名前が広く用いられている。現在の枠組みはループではなくグラフに基づいて構築されている。

第 9 章で全体のまとめを行い本論文の結論を述べた。

付録では、物理定数と Planck スケールについてまとめた。そして量子重力理論の歴史について簡単にまとめた。また、作用を構成するための三脚場・スピン接続を用いたスカラー量をまとめた。さらに Ashtekar 変数を用いた量子宇宙論による Wheeler-DeWitt 方程式と一般解と本論文で用いたループ量子宇宙論での差分方程式の連続極限と任意の物質場がある場合についてまとめた。

第 2 章

重力の接続理論

一般相対性理論は通常計量の理論として与えられる。しかし、一般相対性理論を接続の動力学[*1]として書き換えることもできる。そのような再定式化は Hamilton 形式においてすべての理論が同じ運動学 (kinematics) を共有しているという意味において、一般相対性理論を自然界にある他の 3 つの基本的な力を記述するゲージ理論に近い形にするものである。もちろん違いはダイナミクスにある。特に、他の相互作用のゲージ理論のダイナミクスは背景時空を要請するが、一般相対性理論ではそうではない。それにもかかわらず、適切に修正することによって、ゲージ理論で用いられている量子化のテクニックを一般相対性理論に適応することができる。以下でこの方法によって関数解析の困難 (計量に基づく量子重力の '幾何動力学' アプローチ ('geometrodynamical' approach) が形式的なレベルから抜け出すことが出来ない困難) が解決されることを見ていく。

この章では、一般相対性理論の接続を用いた定式化を見ていく。(ただし、歴史順の議論ではない。) 本章から第 6 章までのループ量子重力理論の概要は文献 [1–3] を大変参考にした。

まず、記法について以下で整理をする。

$\mathcal{M}$ をトポロジーが $M \times \mathbb{R}$ と仮定した 4 次元時空多様体 (向き付けはされている) とする。簡単のため、この章では M は境界を持たない向き付けされているコンパクトな 3 次元多様体であるとする。テンソル場に関しては Penrose の abstract index を用いる。時空計量は $g_{\mu\nu}$ によって表され、その符号は $(-,+,+,+)$ である。Lorentz 時空の場合において、時空は時間の向き (time-orientable) があるとする。$g_{\mu\nu}$ と両立する零捩率 (torsion free) である微分演算子を ∇ によって表し、その曲率テンソルは $R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}K_\delta = 2\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]}K_\gamma$、$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\beta}$、$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ である。四脚場形式のために、4 次元ベクトル空間 V を符号が $-,+,+,+(+,+,+,+)$ の固定された計量 $\bar{\eta}_{IJ}$ を持つ空間とし、'内部空間'('internal space') とする。直交した余四脚場 (co-tetrad) を e^i_a とする。最後に、しばしば $k = 8\pi G$ とおく。G は Newton 定数である。ここでは作用の重力の項しか書かないが、物質が存在する場合でも超重力理論の場合でも高次元の場合でも同様にできる。

[*1] 実際 1940 年代後半、Einstein と Schrödinger は一般相対性理論を接続の理論に書き換えていた。しかしながら、彼らは Levi-Civita 接続を用いていたため結果的に理論がむしろ複雑なものになっていた。

2.1　Palatini 作用の Holst による修正

Palatini 形式において、基本的な重力変数は $\mathcal{M}$ 上の 1 形式の場 $(e_\mu{}^I, \omega_\mu{}^I{}_J)$ からなり、それぞれ V と $\bar{\eta}_{IJ}$ を保存する V の線形変換の $SO(\bar{\eta})$ 群の Lie 代数 $so(\bar{\eta})$ の値をもつ。トポロジーの仮定より、余標構 (co-frame)$e_\mu{}^I$ は大域的に定義される。つまり、それらは各点 $x \in \mathcal{M}$ で $T_x\mathcal{M}$ と V の間の同相写像 (isomorphism) を与える。作用は、

$$S_{(P)}(e,\omega) = \frac{1}{4k}\int_{\mathcal{M}} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge \Omega^{KL} \tag{2.1}$$

によって与えられる。ここで、ϵ_{IJKL} は $\bar{\eta}_{IJ}$ と両立する V 上の交代テンソルであり、$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon_{IJKL} e^I_\alpha e^J_\beta e^K_\gamma e^L_\delta$ の向きは M 上で固定されているものと一致していて、

$$\Omega := \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega \tag{2.2}$$

は接続 1 形式 $\omega_\mu{}^I{}_J$ の曲率である。余標構 e^I_μ は時空の計量を $g_{\mu\nu} = \eta_{IJ} e^I_\mu e^J_\nu$ で決定する。したがって、良く知られている Einstein-Hirbert 作用と比較して $S_{(P)}$ は変数 ω^{IJ}_μ に依存する。しかし、接続に対する作用の変分による運動方程式は ω^{IJ}_μ が

$$\mathrm{d}e + \omega \wedge e = 0 \tag{2.3}$$

のような余標構によって完全に決定されることを意味する。

もし、接続がそのように決定されているとしたら、$S_{(P)}$ は

$$S_{(P)}(e,\omega(e)) = \frac{1}{2k}\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{|\det\, g|} R \tag{2.4}$$

となり、良く知られた Einstein-Hilbert 作用となる。ここで、R は $g_{\mu\nu}$ のスカラー曲率である。それゆえ、計量に対する運動方程式は Einstein-Hilbert 作用のものと同じになる。

作用 $S_{(P)}$ は $\mathcal{M}$ の微分同相写像の元で不変であるだけでなく、局所 $SO(\bar{\eta})$ 変換

$$(e,\omega) \mapsto (e', \omega') = (b^{-1}e, b^{-1}\omega b + b^{-1}db) \tag{2.5}$$

の元でも不変となっている。

この作用を Legendre 変換をして Hamilton 理論へと移行するのは容易であるがつまらないものである。この理論は第 2 種拘束条件を持つことがわかり、それらの拘束条件を解いた時、(接続のダイナミクスは失われているが) 幾何動力学の通常の Hamilton 理論の三脚場のヴァーションを導く。これは以下のようにすると解決することができる。(e,ω) から構成される別の不変量があり、作用に追加しても運動方程式が変わらないものがある。Holst によって議論された修正された作用は

$$S_{(H)}(e,\omega) = S_{(P)}(e,\omega) - \frac{1}{2k\gamma}\int_{\mathcal{M}} e^I \wedge e^J \wedge \Omega_{IJ} \tag{2.6}$$

によって与えられる[*2]。ここで γ は任意であるが固定された数であり、Barbero-Immirzi パラメータと呼ばれている。量子論への移行を考えると γ は 0 に出来ないことに注意しておく。ここでの目的はこの

[*2] この修正は (反) 自己双対接続に基づいた枠組みでのかなり多くの研究 (特にこれらの変数を用いた一般相対性理論に対する作用の発見) によって強く動機付けされている。

作用やそれから導かれる Hamilton 理論を解析することである。以下の節で Hamilton 理論が背景独立な接続の動力学理論として自然に解釈されることをみていく。

Yang-Mills 理論を思い出すと、作用に古典的な運動方程式を変えない ‘トポロジカルな項’(‘topological term’) を加えることもできる。なぜならその被積分関数は 3 形式の外微分として再表現されることができるからである。今回の場合、加えた項はトポロジカルな起源を持っていないが、第 1Bianchi 恒等式のため ω の運動方程式が満たされている時に恒等的に消える。それゆえ、状況は二つの場合で似ていると考えられる。つまり、両方の場合で加えられている項は古典的な運動方程式を変化させないし、量子論においてユニタリー同値でないような古典的な相空間への正準変換を誘導する。結果として、パラメータ γ は Yang-Mills 理論のよく知られた θ パラメータと似ている。量子論では Yang-Mills 理論が同値でない θ セクターを持っているように、重力の場合においても同値でない γ セクターを持つ。

最後に以下で共変的な相空間での定式化でのシンプレクティック構造 (symplectic structure) を示す。ここで相空間 $\Gamma_{\rm cov}$ を $\mathcal{M}$ 上の場の方程式の解空間とする。シンプレクティック構造を定義するため、以下のような一般的な手順をとる。解空間での接ベクトルを $\bar{\delta} \equiv (\bar{\delta}e, \bar{\delta}\omega)$ と書くことにする。$\Gamma_{\rm cov}$ 上では場の方程式は満たされるので、$\bar{\delta}$ に沿った変分の元で 4 形式 L_4 の Lagrangian の変化は

$$(\bar{\delta}L_4)|_{\Gamma_{\rm cov}} = \mathrm{d}L_3(\bar{\delta})$$

の形をしており、L_3 は $\mathcal{M}$ 上の 3 形式で、$\bar{\delta}$ に線形に依存する。そして、$\Theta(\bar{\delta}) := \int_M L_3(\bar{\delta})$ を通じて解空間上の 1 形式 Θ を定義することができる。シンプレクティック構造 Ω は解空間上の Θ の回転 (curl) の $\Gamma_{\rm cov}$ への単なる引き戻しである。この場合、$\bar{\delta}L_{(H)}$ は

$$\bar{\delta}L_{(H)} = -\frac{1}{2\gamma k}\mathrm{d}\left[e^I \wedge e^J \wedge \bar{\delta}(\omega_{IJ} - \frac{\gamma}{2}\epsilon_{IJKL}\omega^{KL})\right]$$

によって与えられる。そこから、シンプレクティック構造は

$$\Omega(\delta_1, \delta_2) = -\frac{1}{k\gamma}\int_M [\delta_{[1}(e^I \wedge e^J)] \wedge \left[\delta_{2]}(\omega_{IJ} - \frac{\gamma}{2}\epsilon_{IJKL}\omega^{KL})\right] \tag{2.7}$$

によって与えられ、δ_1 と δ_2 はすべて $\Gamma_{\rm cov}$ に対する接ベクトルである。一般的に考えて、積分の値はその評価で用いられる Cauchy 面 M の特定の選び方には依存しない。

$\Gamma_{\rm cov}$ の接ベクトルが特に $\mathrm{d}e + \omega \wedge e = 0$ の線形化された式を満たしているという事実を用いると、シンプレクティック構造の γ 依存項が恒等的に消えることは簡単に確かめることができる。つまり、$\Gamma_{\rm cov}$ が γ に依存しないだけでなく、その上のシンプレクティック構造 Ω でも γ に依存しないということである。シンプレクティック構造からわかるように、$e^I \wedge e^J$ の運動量共役量は γ の選び方に依存する。したがって、上で注意したように Yang-Mills 理論での θ 項のように Holst 作用の γ 項は単に相空間上の正準変換を誘導するだけである。

実際には、正準変換は以下の $so(\bar{\eta})$ 上の写像によって誘導される。

$$X_{IJ} \mapsto \frac{1}{2}\left(X_{IJ} - \frac{\gamma}{2}\epsilon_{IJKL}X^{KL}\right)$$

この写像が

$$\gamma^2 = \sigma := \mathrm{sgn}(\det\,\bar{\eta})$$

の時を除いて、$so(\bar{\eta})$ 上のベクトル空間の同型写像であることは簡単に確かめられる[*3]。γ がこれらの例外の値を取る場合、この写像は Hodge-dual 演算子 $\star$: $X_{IJ} \mapsto \frac{1}{2}\epsilon_{IJ}{}^{KL}X_{KL}$ の固有値 $-\gamma\sigma$ に対応する $so(\bar{\eta})$ の部分空間上への射影となる。さらにこの場合において、写像は Lie 代数準同型 (Lie algebra homomorphism) である。Riemann 時空の場合 ($\bar{\eta}$ の符号が (+,+,+,+) の時) では、これは $\gamma = \pm 1$ の時である。また、Lorentz 時空の場合 ($\bar{\eta}$ の符号が (-,+,+,+) の時) では、$\gamma = \pm i$ の時である。これらの例外的な場合すべてにおいて、理論はより豊富な構造を持つ。特に、シンプレクティック構造に現れる組み合わせ $\left(\frac{1}{2}(\omega_{IJ} - \gamma^{\star}\omega_{IJ})\right)$ は再び (半平坦な) 接続となっている。

歴史的には本章でまとまられている量子重力理論への背景独立なアプローチは半平坦な接続を用いた一般相対性理論の再定式化に基づいている。半平坦な接続を用いた再定式化では、古典理論のすべての方程式はかなり簡単化され、基礎をなしている構造はこれらの変数でより明らかなものになる。これらは Penrose の nonlinear gravitons 理論 [4] や Newman の H-space construction 理論 [5] とかなり近い関係にある。Riemann 時空の符号において、量子論でもこれらの変数を用いることができるが、一方 Lorentz 時空の場合では、半平坦な接続は非コンパクト群の Lie 代数を値に持ち、そのような接続の空間上の関数解析は量子論で要求される構築を実行できるほど十分によく発展していない。それゆえ、Lorentz 時空の場合でのもっとも大きな進展は、コンパクトな構造群を持つ接続を用いることができる γ の値を実数値に取る場合に起こった。

2.2 Riemann 多様体と半平坦接続

2.2.1 準備

$\bar{\eta}$ が正定値であるとする。$\sigma = 1$ であるので、半平坦な場合は $\gamma = \pm 1$ に対応する。

$$\omega^{(+)}_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\omega_{IJ} - \frac{\gamma}{2}\epsilon_{IJ}{}^{KL}\omega_{KL}\right) \tag{2.8}$$

を考える。ここで、$\gamma = 1$ ならば、反自己双対となり、$\gamma = -1$ ならば、自己双対となる。これらの場合、Holst 作用は

$$S_{(H)}(e, \omega^{(+)}) = -\frac{1}{k\gamma}\int_{\mathcal{M}} \Sigma^{IJ}_{(+)} \wedge \Omega^{(+)}_{IJ}$$

のように簡単になる。ここで $\Sigma^{IJ}_{(+)}$ は $e^I \wedge e^J$ の (反) 自己双対部分であり、

$$\Sigma^{IJ}_{(+)} = \frac{1}{2}\left(e^I \wedge e^J - \frac{\gamma}{2}\epsilon^{IJ}{}_{KL}e^K \wedge e^L\right)$$

$\Omega^{(+)}_{IJ}$ は Ω_{IJ} の (反) 自己双対部分であり、$\omega^{(+)}_{IJ}$ の曲率である。

$$\Omega^{(+)} = \mathrm{d}\omega^{(+)} + \omega^{(+)} \wedge \omega^{(+)}$$

[*3] 結果として、γ の一般的な値に対して ω^{IJ}_{μ} の $S_{(H)}$ の変分による接続の運動方程式は (2.3) となる。したがって、$S_{(H)}$ を変分することによって得られる解空間は $S_{(P)}$ を変分することによって得られる解空間と同じになる。例外的な値の場合、この方程式は ω^{IJ}_{μ} の (反) 自己双対部分が余標構 e^I_{μ} と両立する接続の (反) 自己双対部分と等しくなることを示す。しかし、$S_{(H)}$ と $S_{(P)}$ を極値化することによって得られる解空間が等しいことはこの場合も正しい。

考えている理論が完全な (Riemann 多様体での) 一般相対性理論であることに注意する。つまり、我々は単に $\omega^{(+)}$ が半平坦な (つまり自己双対か反自己双対な) 接続である場 $(e^I, \omega^{(+)}_{IJ})$ を用いて記述したに過ぎない。

シンプレクティック形式 (2.7) は

$$\Omega(\delta_1, \delta_2) = -\frac{2}{k\gamma}\int_M [\delta_{[1}\Sigma^{IJ}_{(+)}] \wedge [\delta_{2]}\omega^{(+)}_{IJ}] \tag{2.9}$$

$$= \int_M \mathrm{d}^3x[\delta_1 P^a_{IJ}\delta_2 A^{IJ}_a - \delta_2 P^a_{IJ}\delta_1 A^{IJ}_a] \tag{2.10}$$

で、A_{IJ} は $\omega^{(+)}_{IJ}$ の M への引き戻しであり配位空間を表している。また、

$$P^a_{IJ} := -\frac{1}{2k\gamma}\eta^{abc}\Sigma^{(+)}_{bcIJ}$$

はその正準共役運動量を表している。これより η^{abc} は M 上の向きを決めたのと同じ向きの M 上の計量独立な Levi-Civita 密度を表す。したがって、P^a_{IJ} は M 上の密度 1 の擬ベクトル (pseudo-vector) である。[*4]

2.2.2 Legendre 変換

$\mathcal{M}$ 上に滑らかな (‘時間’) 関数 t を導入する。これは、$\mathrm{d}t$ がいたるところ非零で各 t = 一定面が M と微分同型 (diffeomorphic) である。さらにベクトル場 t^α を $t^\alpha\nabla_\alpha t = 1$ であるように導入する。したがって、t^α は ‘時間発展ベクトル場’ として考えることができる。t = 一定面 M に対して垂直な単位ベクトルを n^α とかき、t^α を $t^\alpha = Nn^\alpha + N^\alpha$ と分解する (ここで $N^\alpha n_\alpha = 0$ である)。関数 N はラプス (lapse) 関数とよばれ、ベクトル場 N^α はシフト (shift) ベクトルと呼ばれる。M 上のベクトル場、余ベクトル場への射影演算子をそれぞれ q^a_α、q^α_a とかく。最後に、各添字が n^μ に対して垂直であるテンソル場 $T^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta}$ はその射影である $T^{a\ldots b}{}_{c\ldots d} := q^a_\alpha\ldots q^b_\beta q^\gamma_c \ldots q^\delta_d T^{\alpha\ldots\beta}{}_{\gamma\ldots\delta}$ と同一視される。

以上の準備で Legendre 変換を行うことは容易となり、計算は著しく短くなる。上で導入した A^{IJ}_a と P^a_{IJ} を用いると、

$$S_{(H)} = \int \mathrm{d}t \int_M \mathrm{d}^3x \left(P^a_{IJ}\mathcal{L}_t A^{IJ}_a - h_{(+)}(A, P, N, N^a, \omega^{(+)}\cdot t)\right) \tag{2.11}$$

を得る[*5]。ここで、Hamiltonian 密度 $h_{(+)}$ は以下のように与えられる。

$$h_{(+)} = -(\omega^{(+)}_{IJ}\cdot t)G^{IJ} + N^aC^{(+)}_a + NC_{(+)} \tag{2.12}$$

[*4] 座標の言葉では、M 上の任意の滑らかな場 V^{IJ} と 1 形式 f_a に対して、3 形式 $V^{IJ}f_aP^a_{IJ}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$ は座標に依らない M 上の体積要素である。

[*5] ここ以降で、内部空間の添字に対する Lie 微分は単にスカラーとして扱う (つまり、無視をするということである)。したがって、$\mathcal{L}_tA^{IJ}_a = t^b\partial_bA^{IJ}_a + A^{IJ}_b\partial_bt^b$ となる。

ここで、

$$G_{IJ} := \mathcal{D}^{(+)}_a P^a_{IJ} := \partial_a P^a_{IJ} + A_{aI}{}^K P^a_{KJ} + A_{aJ}{}^K P^a_{IK} \tag{2.13}$$
$$C^{(+)}_a := P^b_{IJ} F^{IJ}_{ab} \tag{2.14}$$
$$C_{(+)} := -\frac{k}{\sqrt{|\det q|}} P^{aJ}_I P^{bK}_J F_{abK}{}^I \tag{2.15}$$

ここで、F^{IJ}_{ab} は A^{IJ}_a の曲率であり、$F = \mathrm{d}A + A \wedge A$ である。また、q は M 上の 3 次元計量

$$q_{ab} = q^\alpha_a q^\beta_b g_{\alpha\beta} \tag{2.16}$$

の行列式である。$h_{(+)}$ の形はシンプレクティック構造から示唆されるように A^{IJ}_a を配位変数、P^a_{IJ} をその共役運動量として見なせることを裏付ける。運動量は簡単に

$$-\mathrm{Tr} P^a P^b = P^a_{IJ} P^{bIJ} = \frac{1}{k^2}(\det\, q) q^{ab}$$

のように 3 次元計量と関係付く。

ここで注意をしておく。$\omega \cdot t, N, N^a$ は Lagrange の未定乗数 (Lagrange multiplier) である。つまり、それらを支配する方程式はない。基本動力学変数は A^{IJ}_a と P^a_{IJ} だけである。すべての他のダイナミカルな場はそれらによって決定される。$S_{(H)}$ のこれらの未定乗数に対する変分は

$$G_{IJ} = 0 \quad , \quad C^{(+)}_a = 0 \quad , \quad C^{(+)} = 0 \tag{2.17}$$

という拘束条件を与える。背景場なしの理論にとっていつものことだが、Hamiltonian は拘束条件の和となる。作用の A^{IJ}_a と P^a_{IJ} に対する変分はこれら基本動力学場に対する運動方程式を与える。これら 3 つの拘束条件と 2 つの発展方程式は Einstein 方程式と等価である。

2.2.3 Hamilton 形式

Legendre 変換から正準相空間 Γ_{can} は正準共役な M の場 (A^{IJ}_a, P^a_{IJ}) の組で構成される。唯一の非自明な Poisson 括弧式は

$$\left\{A^{IJ}_a(x), P^b_{KL}(y)\right\} := \frac{1}{2}\left(\delta^I_{[K}\delta^J_{L]} - \frac{\gamma}{2}\delta^I_{[M}\delta^J_{N]}\epsilon^{MN}{}_{KL}\right)\delta^b_a \delta(x,y) \tag{2.18}$$

である。重要な点は、配位変数 A^{IJ}_a が再び 3 次元多様体 M 上の接続となるが、構造群はいまスピン群 $SO^{(+)}(\bar{\eta})$ であることである (ここで Riemann 時空の場合では $SU(2)$ と同型である)[*6]。したがって、Hamilton 形式では一般相対性理論はスピン接続の動力学として扱われる。

基本正準共役変数は 3 つの拘束条件に支配されている。拘束条件を満たす時に任意の 2 つの拘束条件の Poisson 括弧式が零になることはすぐに確かめられる。つまり、Dirac の言葉で**第 1 種** (*first class*) の拘束条件ということである。最初の拘束条件 $G^{(+)}_{IJ}$ は $SO^{(+)}(\bar{\eta})$ における内部ゲージ変換を生成する。これらのゲージ回転を法として、2 つ目の $C^{(+)}_a$ は M 上の微分同相変換を生成し、3 つ目の $C^{(+)}$ は Nn^α

[*6] 完全な群 $SO(\bar{\eta})$ は $(P, A) \mapsto (b^{-1}Pb, b^{-1}Ab + (b^{-1}\mathrm{d}b)^{(+)})$ によって与えられる相空間上の作用を許す。ここで、$^{(+)}$ は $so(\bar{\eta})$ の $so^{(+)}(\bar{\eta})$ への射影を表している。しかし、その射影のため A は $SO(\bar{\eta})$ 接続として変換をしない。

に沿った‘時間発展’を生成する。M 上の P^a_{IJ} と 3 次元計量 q_{ab} の間の関係式を用いることで、これらの方程式が Einstein 方程式と等価であることが示される。しかし、重力が物質と結合している場合でさえ、計量に直接依らずに接続 A^{IJ}_a とその共役運動量だけで定式化することができる。この意味で、重力は $SO^{(+)}(\bar{\eta})$Yang-Mills 理論と同じ相空間 Γ_{can} を持つ‘ゲージ理論’とみなすことができるが、背景時空の計量を参照しない完全に拘束されている動力学になっている。

2.2.4 一般的な実数値の γ

一般相対性理論の半平坦接続の動力学としての定式化は Lorentz 時空の符号を持つ場合でも詳細に研究されている。しかし、この場合接続が複素数であり、また構造群が非コンパクトであるため、ある種の困難が生じる。量子論へ向かうために、コンパクトな構造群を用いる (つまり、γ を実数値で与える) ことで、問題を回避することができる。それゆえ、ここでは γ を零でない任意の実数とする。いま $-,+,+,+$ の符号に興味があるが、解析自体は $+,+,+,+$ の符号の場合でも適応することができる。

2.2.5 準備

まず、便宜上、部分ゲージ固定を行う。内部ベクトル場 n^I を $n^I n_I = \sigma(\sigma$ は $\bar{\eta}$ の符号) で固定し、それが一定であることを要請する ($\bar{\eta}_{IJ}$ に加えて、n^I を消す平坦な微分演算子 ∂ に制限する。)。$V_\perp$ を n^I に垂直な V の 3 次元部分空間とする。$V_\perp$ の要素は小文字の上付き文字 $(i, j, \ldots, k)$ で表し、$V_\perp$ への射影演算子は q^i_I で表す。特に、

$$\eta_{ij} = q^I_i q^J_j \bar{\eta}_{IJ}$$

は $V_\perp$ 上の誘導計量である。n^I を固定しているので、群 $SO(\bar{\eta})$ は n^I を不変にする部分群 $SO(\eta)$ に簡約される。最後に、V 上の交代テンソル ϵ_{IJKL} は以下を通して $V_\perp$ 上の交代テンソル ϵ_{ijk} を自然に誘導する。

$$\epsilon_{ijk} = q^I_i q^J_j q^K_k n^L \epsilon_{LIJK}$$

次に、‘時間関数’t を導入し、2.2.2 節の時と同様の構造を導入し、もし Lorentz 多様体の場合を考えるなら更なる条件が以下のように必要である。ベクトル場 t^α は未来向きであり、n^α は M に垂直な未来向きの単位時間的ベクトルであるとする。$n^\alpha := n^I e^\alpha_I$ が与えられた葉層構造 (foliation) に対して単位垂直ベクトルであるという意味で固定された n^I と‘両立’する余標構場 e^I_α のみを考える。(すべての余標構はこの条件を満足することに関連したゲージである。(2.5) を参照。) これらの余標構はそれぞれ正規直交余三脚場 $e^i_a := e^I_\alpha q^i_I q^\alpha_a$ を自然に定義する。つまり、葉層構造の各葉 (leaf)M 上で誘導計量 q_{ab} が $q_{ab} = e^i_a e^j_b \eta_{ij}$ によって与えられる。同様に、接続 1 形式 ω^{IJ}_α は M 上の 2 つの $so(3)$ 値を持つ 1 形式を自然に定義する。

$$\Gamma^i_a := \frac{1}{2} q^\alpha_a q^i_I \epsilon^{IJ}{}_{KL} n_J \omega^{KL}_\alpha \quad \text{and} \quad K^i_a := q^i_I q^\alpha_a \omega^{IJ}_\alpha n_J \tag{2.19}$$

これら 1 形式は自然な幾何学的意味を持っている。Γ^i_a は M 上の $so(\eta)$ 接続であり、もし ω^{IJ}_α が e^I_α と両

立するなら e^i_a と両立する。したがって、もし $\mathrm{d}e+\omega\wedge e=0$ を満たしていたら、

$$\mathrm{d}e^i+\epsilon^i{}_{jk}\Gamma^j\wedge e^k=0 \tag{2.20}$$

となる。また K^i_a がもし $\mathrm{d}e+\omega\wedge e=0$ を満たしていたら、M 上の外曲率であり、

$$K^i_a=(q^\alpha_a q^b_\beta\nabla_\alpha n^\beta)e^i_b \tag{2.21}$$

である。

これらの場を用いると、シンプレクティック構造は

$$\Omega(\delta_1,\delta_2)=\int_M \mathrm{d}^3x(\delta_1 P^a_i\delta_2 A^i_a-\delta_2 P^a_i\delta_1 A^i_a) \tag{2.22}$$

となる。ここで、

$$P^a_i:=\frac{1}{2k\gamma}e^j_b e^k_c\eta^{abc}\epsilon_{ijk}\quad 、\quad A^i_a:=\Gamma^i_a-\sigma\gamma K^i_a \tag{2.23}$$

である。A^i_a は $so(\eta)$ 値を持つ M 上の接続 1 形式であることに注意する。また、P^a_i は $so(\eta)$ 値を持つ M 上の密度 1 のベクトルである。幾何学的には、M 上の密度 1 の正規直交三脚場 $\tilde{E}^a$ を表し、

$$k\gamma P^a_i=\sqrt{|\mathrm{det}q|}e^a_i\equiv\tilde{E}^a_i|\mathrm{det}q|q^{ab}=k^2\gamma^2P^a_iP^b_j\eta^{ij} \tag{2.24}$$

である。ここで、$|\mathrm{det}q|q^{ab}=k^2\gamma^2P^a_iP^b_j\eta^{ij}$ であり、$\det q$ は M 上の 3 次元計量 q_{ab} の行列式である。

以上をまとめる。ゲージ固定をすることで、まず $SO(\bar{\eta})$ から $SO(\eta)$ へ内部ゲージ群を簡約化した。新しい配位変数 A^i_a は M 上の $so(\eta)$ 値を持つ接続であり、余三脚場 e^i_a と両立するスピン接続 Γ^i_a と外曲率 K^i_a から構成される。γ の因子は別にして、共役運動量 P^a_i は密度 1 の三脚場と解釈される。正準変数 A^i_a と P^a_i と幾何学変数 e^i_a と K^i_a の間の関係式が半平坦の場合でも成り立つことに注意する。ただ単に更なる条件 $\sigma^2\gamma^2=\pm1$ があるだけである。

2.2.6　Legendre 変換

Holst 作用に戻って 2.2.2 節のように Legendre 変換を行う。計算は単純であるが得られた Hamiltonian 密度 h の完全な表式はより複雑になる。上でやったように

$$S_{(H)}=\int\mathrm{d}t\int_M\mathrm{d}^3x(P^a_i\mathcal{L}_tA^i_a-h(A^i_a,P^a_i,N,N^a,\Gamma\cdot t)) \tag{2.25}$$

となり、h は

$$h=(\omega^i\cdot t)G_I+N^aC_a+NC \tag{2.26}$$

によって与えられる。ここで、$\omega^i\cdot t:=-\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega_{jk}\cdot t$ と N^a と N は Lagrange 未定乗数である。しかし、拘束条件は

$$G_i=\mathcal{D}_aP^a_i=\partial_aP^a_i+\epsilon_{ij}{}^kA^j_aP^a_k\quad,\quad C_a=P^b_iF^i_{ab}-\frac{\sigma-\gamma^2}{\sigma\gamma}K^i_aG_i$$
$$C=\frac{k\gamma^2}{2\sqrt{|\mathrm{det}q|}}P^a_iP^b_j[\epsilon^{ij}{}_kF^k_{ab}+(\sigma-\gamma^2)2K^i_{[a}K^j_{b]}]+(\gamma^2-\sigma)k\partial_a\left(\frac{P^a_i}{\sqrt{|\mathrm{det}q|}}\right)G_i \tag{2.27}$$

となり、付け加えられている項がある。ここで、F^i_{ab} は接続 A^i_a の曲率であり、$|\det q|$ は P^a_i を用いて

$$|\det q| = \frac{(k\gamma)^3}{\sqrt{|\det \eta|}} \det P \tag{2.28}$$

と直接表される。したがって、拘束条件の全体の構造は半平坦の場合とよく似ている。しかし、拘束条件には新しい複雑な量がある。$K^i_a = (1/\sigma\gamma)(\Gamma^i_a - A^i_a)$ を含んでおり、Γ^i_a は P^i_a の非多項式関数である。[*7](これらの項は因子 $(\sigma^2 - \gamma^2)$ があるので、半平坦の場合では消える。)

2.2.7 Hamilton 形式

正準相空間 Γ_{can} は 3 次元多様体 M 上の場 (A^i_a, P^a_i) からなる。ここで、A^i_a は $so(\eta)$ 値を持つ接続 1 形式であり、P^a_i は $so(\eta)$ に双対な値を持つ密度 1 のベクトルである。唯一残る Poisson 括弧式は

$$\{A^i_a(x), P^b_j(y)\} := \delta^i_j \delta^b_a \delta(x, y) \tag{2.29}$$

である。したがって、相空間は構造群が $SO(\eta)$ の Yang-Mills 理論と同じである。Dirac の言葉での第 1 種の 3 つの拘束条件がある。基本正準変数の Hamilton 方程式の発展は、

$$\dot{A}^i_a = \{A^i_a, H\} \qquad , \qquad \dot{P}^a_i = \{P^a_i, H\} \tag{2.30}$$

である。ここで、Hamiltonian は単に $H = \int_M \mathrm{d}^3 x h$ である。3 つの拘束条件と 2 つの発展方程式は完全に Einstein 方程式と等価である。したがって、一般相対性理論は再び接続の動力学として表された。

相空間の構造を詳細に見る前に、2 つの重要なことを強調しておく。まず、Hamilton 形式において単に場 (A^i_a, P^a_i) で始めているだけである。つまり、Barbero-Immirzi パラメータ γ に依存する Poisson 括弧式ではない。したがって、正準相空間は γ に非依存である。γ は基本正準変数で幾何的な場 (空間的三脚場 e^i_a と外曲率 K^i_a) を表した時にだけ現れる ((2.24) と (2.21) を参照)。次に、半平坦接続と一般の接続の間の概念的な相違を述べる。ともに配位空間は M 上の接続である。さらに、これらの接続と場 e^i_a, K^i_a の間の関係は形式上等価である。しかし、2.2 節での変数 A^{IJ}_a は時空の接続 A^{IJ}_α の M への引き戻しであるが、変数 A^i_a はそのようには得られない。時空の幾何学的見方から A^i_a はあまり自然ではない。これは、古典論の見通しからいうと明確な欠点であるが、正準量子化に対しては何ら障害にはならない。実際、時空の幾何学は質点の力学の軌道に類似しており、粒子の軌道は量子力学において何の役割もしないことからもわかるだろう。

最後に、拘束条件の構造をみる。期待するように、最初の拘束条件 $C_i = 0$ は内部 $SO(\eta)$ 回転の元で不変にさせる単なる 'Gauss の法則' である。実際、M 上の $so(\eta)$ 値を持つ任意の滑らかな場 Λ^i に対して相空間上の関数

$$\mathcal{C}_G(\Lambda) := \int_M \mathrm{d}^3 x \Lambda^i G_i \tag{2.31}$$

は Λ^i に沿った内部回転を生成する。

$$\{A^i_a, \mathcal{C}_G(\Lambda)\} = -\mathcal{D}_a \Lambda^i \qquad \text{and} \qquad \{P^a_i, \mathcal{C}_G(\Lambda)\} = \epsilon_{ij}{}^k \Lambda^j P^a_k \tag{2.32}$$

[*7] 実数 γ を用いる可能性は 1980 年代中頃には指摘されていたが、K^i_a の項が量子論において扱いにくいと思われたため、この可能性は Lorentz 多様体の場合では無視されていた。この困難性を克服した Thiemann の発見によって見方が変わった。

2 つ目の拘束条件の意味を明らかにするために、上で見た内部回転を生成する項を引いておくと便利である。それゆえ、M 上の滑らかなベクトル場 $\vec{N}$ に対して

$$C_{\mathrm{Diff}}(\vec{N}) := \int_M \mathrm{d}^3x (N^a P_i^b F_{ab}^i - (N^a A_a^i) G_i) \tag{2.33}$$

を定義する。この拘束条件は $\vec{N}$ に沿った微分同相変換を生成する。

$$\{A_a^i, C_{\mathrm{Diff}}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} A_a^i \qquad , \qquad \{P_i^a, C_{\mathrm{Diff}}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} P_i^a \tag{2.34}$$

最後に 3 番目の拘束条件を考える。量子化を行うために適切な係数を持つ Gauss 拘束条件を取り除いておくと便利である。Barbero と Thiemann に従い、

$$\mathcal{C}(N) = \frac{k\gamma^2}{2} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^3x N \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{|\mathrm{det} q|}} \left[\epsilon_k^{ij} F_{ab}^k + 2(\sigma - \gamma^2) K_{[a}^i K_{b]}^j\right] \tag{2.35}$$

を考えることにする。期待するようにこの拘束条件は (M から ‘離れる’) 時間発展を生成する。これらの拘束条件の間の Poisson 括弧式は以下のようになる。

$$\{\mathcal{C}_{\mathrm{G}}(\Lambda), \mathcal{C}_{\mathrm{G}}(\Lambda')\} = \{\mathcal{C}_{\mathrm{G}}([\Lambda, \Lambda'])\} \quad \{\mathcal{C}_{\mathrm{G}}(\Lambda), \mathcal{C}_{\mathrm{Diff}}(\vec{N})\} = -\mathcal{C}_{\mathrm{G}}(\mathcal{L}_{\mathrm{N}}\Lambda) \tag{2.36}$$

$$\{\mathcal{C}_{\mathrm{Diff}}(\vec{N}), \mathcal{C}_{\mathrm{Diff}}(\vec{N}')\} = \mathcal{C}_{\mathrm{Diff}}([\vec{N}, \vec{N}']) \tag{2.37}$$

$$\{\mathcal{C}_{\mathrm{G}}(\Lambda), \mathcal{C}(N)\} = 0 \quad \{\mathcal{C}_{\mathrm{Diff}}(\vec{N}), \mathcal{C}(M)\} = -\mathcal{C}(\mathcal{L}_N M) \tag{2.38}$$

$$\{\mathcal{C}(N), \mathcal{C}(M)\} = k^2\gamma^2\sigma(\mathcal{C}_{\mathrm{Diff}}(\vec{S}) + \mathcal{C}_{\mathrm{G}}(S^a A_a)) + (\sigma - \gamma^2)\mathcal{C}_{\mathrm{G}}\left(\frac{[P^a \partial_a N, P^b \partial_b M]}{|\det\ q|}\right) \tag{2.39}$$

ここで、S^a は

$$S^a = (N\partial_b M - M\partial_b N) \frac{P_i^b P^{ai}}{|\det\ q|} \tag{2.40}$$

である。幾何動力学のように、一番最後の Poisson 括弧式の拘束条件を積分している場 (smearing field) はダイナミカルな場自身に依存している。それゆえ、拘束条件の代数は BRST の意味で未解決である。つまり、我々は構造定数ではなく、‘構造関数’ を扱っているのである。第 6 章でこれについて議論する。

以上をまとめる。Euclid 空間での一般相対性理論と Lorentz 多様体での一般相対性理論はともにコンパクトな構造群を持つ (実数を値に持つ) 接続の動力学として定式化することができる。Lorentz セクターの代償は拘束条件やそれらの Poisson 括弧式が複雑になる実数の Barbero-Immirzi パラメータで議論しなくてはならないことである。

注意

(i) 簡単のため、この章では重力場にのみ焦点をあてた。物質との結合は超重力理論のように一般相対性理論の枠組みで半平坦な重力の接続を用いた論文で詳細に議論されている [6, 7]。物質項において Barbero-Immirzi パラメータ γ を一般的な値で扱うことに対する修正は最小限に留まる。

(ii) ここで議論した重力項のみにおいて、一般的な γ の実数値に対する内部群は $SO(\eta)$ である。ここでの場合では、$SO(\eta) = SO(3)$ なので η_{ij} は正定値である。しかし、スピノル (spinor) に拡張したいため、今後内部群として $SU(2)$ を考えることにする。このことによって一般的な場合や半平坦の場合において構造群が同じになる。

(iii) この章を通して議論の中で標構、余標構、計量が非退化の場合を仮定した。しかし、最終的な Hamilton 形式は退化している場合も扱えるように自然に拡張することができる。特にラプス関数 N を密度 -1 に変えることで、場 P^a_i が退化の場合 ($\det\, P = 0$) の可能性を考慮することができる。幾分か驚くべきことであるが、ダイナミクスはうまく定義でき退化している計量をもつ一般相対性理論の場合へ拡張ができる。

第 3 章

量子化へ向けて

以下の章で系統的に (一般相対性理論を含む) 接続の背景独立な量子論や幾何学の量子論を段階を追って構築する。本章では動機付けや基礎となっているアイディアのスケッチを与えることにする。

3.1 スカラー場の理論

よく知られている物理学での議論を明確にさせるために、正準量子化のアプローチでの Minkowski 時空での自由な有質量スカラー場に対する状態の Hilbert 空間や基本演算子の構成を簡単にみることにする。古典的配位空間 $\mathcal{C}$ は一般に $t =$ 一定 面 M 上で無限遠で 0 になる滑らかな関数 ϕ の空間として与えられる。非相対論的な量子力学を考えると、その量子状態は $\mathcal{C}$ 上の '二乗可積分関数'Ψ で与えられるであろう。しかし、系は無限自由度を持っているので積分論はより複雑になり、直感的な予想は適切に修正される必要がある。

鍵となるアイディアは Kolmogorov に立ち戻って有限次元の積分論から無限次元の積分論を構成することにある。典型的に空間的スライス M 上の実試験関数 e と取られる 'プローブ' の空間 $\mathcal{S}$ を導入する。$\mathcal{S}$ の要素は $\mathcal{C}$ 上の線形関数を

$$h_e(\phi) = \int_M \mathrm{d}^3 x e(x)\phi(x) \tag{3.1}$$

とし、h_e を通してスカラー場 $\phi \in \mathcal{C}$ の構造を捉える。

これは場 ϕ の情報の一部分、すなわち 'e に沿った成分' を表す。プローブの集合 $\alpha : h_{e_1}, \ldots, h_{e_n}$ と n 個の実変数を持つ (適切に正則な) 複素数値関数 ψ を与えると $\mathcal{C}$ 上のより一般的な関数 Ψ を

$$\Psi(\phi) := \psi\left(h_{e_1}, \ldots, h_{e_n}\right) \tag{3.2}$$

で定義することができる。これは選ばれたプローブによって選び出された ϕ の n'成分' のみに依存する。(正確には、Ψ は Ψ_α と書かれるべきであるが記法の簡単化のため添字を省略する。) そのような関数は *cylindrical* であるとよばれる[*1]。それらによって作られる線形空間を Cyl_α と書くことにする。$\mathbb{R}^n$ 上の

[*1] *cylindrical function* という名前は円筒測度 (cylindrical measure) を定義するために導入される無限次元の多様体上の積分論に由来する。与えられたグラフに関連する cylindrical function は接続の空間の次元のいくつかに対して定数である、つまり接続の空間上の円筒 (cylinder) として見ることができる。

測度 $\mu_{(n)}$ が与えられると、明らかに Cyl_α 上のエルミート内積

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\mu_{(n)} (\bar{\psi}_1 \psi_2)\bigl(h_{e_1}(\phi), \ldots, h_{e_n}(\phi)\bigr) \tag{3.3}$$

が定義できる。アイディアはこの内積をすべての cylindrical 関数の空間 Cyl に拡張することである。つまり、プローブのある集合に対して cylindrical である $\mathcal{C}$ 上のすべての関数の空間へ拡張することである。しかし、$\mathcal{C}$ 上の与えられた関数 Ψ がプローブの **2** つの異なる集合に対して cylindrical であるかもしれないことからわかる重大な注意がある。(例えば β が単に α に新しいプローブを加えることによって拡大されて得られるものであるならば、すべての $\Psi \in \mathrm{Cyl}_\alpha$ は Cyl_β の要素でもある。) 内積は内積の値が関数を表すために用いるプローブの特定の集合 α に依存しない場合に限りうまく定義される。この要請は測度 $\mu_{(n)}$ の族 (family) に整合性条件を課す。この条件は非自明であるが、具体的な例を挙げることはできる。最も簡単な例は $\mu_{(n)}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の規格化されたガウス測度に取ることによって与えられる。整合性条件を満たす測度のすべての族 $\{\mu_{(n)}\}$ は一般の cylindrical 関数を積分することを可能にし、それゆえ $\mathcal{C}$ 上の *cylindrical* 測度 μ を定義するといわれている。$\bigl(\mathrm{Cyl}, \langle \bullet, \bullet \rangle\bigr)$ の Cauchy 完備化 $\mathcal{H}$ は量子状態の空間と考えることができる。

もしこの構成がプローブのある 1 つの集合 α に制限されるならば、結果的に Hilbert 空間は (無限次元ではあるが) むしろ小さい空間になるであろう。なぜなら有限の自由度のみをもつ系の量子状態の空間に対応するからである。無限の自由度を持つ巨大な拡大は場 ϕ において無限の自由度を組み込ませることができるすべての $\mathcal{C}$ の上の ‘チャート’ を与えるプローブの任意の集合 α を考えることで可能となる。

ある 1 つの cylindrical 関数は、‘本当’ の依存性が有限の変数のみであるという意味で ‘偽’ の無限次元関数である。しかし、Cauchy 完備化によって ‘正真正銘’ 無限の自由度に依存している状態を得ることができる。しかし、一般的にこれらの状態は $\mathcal{C}$ 上の関数として実現することはできない。自由場の場合において、適切な測度は (0 平均であり演算子 $\Delta - \mu^2$ によって決定される偏差をもつ) ガウス測度であり、すべての量子状態はプローブの空間 $\mathcal{S}$ のトポロジー双対である緩増加超函数の空間 $\mathcal{S}'$ 上の関数として実現される。実際、cylindrical 測度は $\mathcal{S}'$ 上の正則なボレル測度 μ に拡張することができ、Hilbert 空間は $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{S}', \mathrm{d}\mu)$ によって与えられる。$\mathcal{S}'$ は量子配位空間とよばれる。最後に、Schrödinger 量子力学のように、配位演算子 $\hat{\phi}(f)$ は乗法によって表され、運動量演算子 $\hat{\pi}(f)$ は微分 (とガウス測度に対するベクトル場の発散 $\int \mathrm{d}^3 x \delta / \delta\phi(x)$ の倍数) によって表される[*2]。この自由場の ‘Schrödinger’ 表現はより知られた Fock 表現と完全に等価である。

したがって、全体の状況は量子力学と類似している。無限自由度の存在によって大きな修正が引き起こされる。それは滑らかな場の古典的配位空間 $\mathcal{C}$ は超函数の量子配位空間 $\mathcal{S}'$ に拡大されることである。演算子の積に関係する場の量子論的困難はこの拡大に直接由来するものである。

[*2] 相互作用している場の理論では時空次元が低い場合のみ構成が可能となる。例えば $\lambda\phi^4$ 理論の場合、時空次元が 2 次元である場合に存在することが知られているが、非ガウス測度を含んでいる。

3.2 接続の理論

2 章でみたように、一般相対性理論は配位変数が '空間的' 多様体 M 上の $SU(2)$ 接続であるように記述することができる。この節では、スカラー場の量子化の方法が接続の背景独立な理論を組み入れるためにどのように変更されるのかをみていく。ここでは構造群を任意のコンパクト群 G とし、M 上のすべての適切に正則な接続の空間を $\mathcal{A}$ によって表すとする。$\mathcal{A}$ は理論の古典的配位空間である[*3]。

アイディアはここでも問題を有限の次元に分解することである。したがって、最初にやるべきことは接続場から有限の自由度を引き抜くプローブの集合を導入することである。新しい要素はゲージ不変性である。つまり、プローブを接続からゲージ不変な情報を引き抜くためにうまく選ばなければならない。それゆえ、M にあるエッジ e に沿ったホロノミー h_e を通して cylindrical 関数を定義することは自然なことである。このことはエッジをプローブとして用いることを示唆している。スカラー場とは異なり、ホロノミーは古典場 A の線形関数ではない。ゲージ理論においてプローブと古典場の間の双対性は非線形なものとなる。

有限個のエッジ e を持つ M 上のグラフを α と書くことにする。そして M 上の接続 A が与えられた時、α のエッジ e に沿ったホロノミー $h_e(A)$ は接続 A のグラフ α への制限におけるゲージ不変な情報を含んでいる。これらは有限の自由度のみをもつが、A の完全なゲージ不変な情報はすべての可能なグラフ α を考えることによって得ることができる。

スカラー場の時のように、まず 1 つのグラフ α を用いた積分論を考える。もしグラフ α が n 個のエッジを持っていたとすると、ホロノミー $h_{e_1}, \ldots, h_{e_n}$ は G の要素の n 組 $(g_1, \ldots, g_n)$ と接続 A を関連付ける。それゆえ、G^n 上の (適切に正則な) 関数 ψ が与えられると、古典的配位空間 $\mathcal{A}$ 上の関数 Ψ を

$$\Psi(A) := \psi\left(h_{e_1}(A), \ldots, h_{e_n}\right) \tag{3.4}$$

と定義することができる。これらの関数はグラフ α に対して cylindrical であるといわれ、それらの空間を Cyl_α と書くことにする。Cyl_α 上のスカラー積を定義するために G^n 上の測度 $\mu_{(n)}$ を選ぶことは自然であり、

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle := \int_{G^n} \mathrm{d}\mu_{(n)} \bar{\psi}_1 \psi_2 \tag{3.5}$$

とする。これは Cyl_α にエルミート内積を与える。この解析は格子ゲージ理論において用いられる解析の完全なアナロジーであり、ここで格子の役割をするのはグラフ α である。

しかし、3.1 節のように Cyl_α の要素は無限次元空間 $\mathcal{A}$ 上の有限の '座標'$h_{e_1}, \ldots, h_{e_n}$ にのみ依存するために '偽' の無限次元関数である。$\mathcal{A}$ の完全な情報を得るために、M でのすべての可能なグラフを考えなければならない[*4]。あるグラフ α に対して cylindrical である $\mathcal{A}$ 上の関数を Cyl と書くことにする。そ

[*3] この章の目的は一般的な戦略のスケッチをすることなので、簡単のため自明束を仮定し、接続が G の Lie 代数に値を持つ 1 形式として大域的に定義されるものとする。

[*4] この方法は Minkowski 時空の場の理論に対する格子的アプローチにおいて用いられる通常の連続極限とは少し異なっている。ここでの方法はスケールを与える運動学的計量がない背景独立な理論にうまく適している。テクニカルには '射影極限' を含んでいる。

うすると Cyl_α から Cyl へと積分論を拡張することが主な問題となる。Cyl の要素 Ψ_1 と Ψ_2 が多くのグラフに対して cylindrical であるかもしれないし、内積の値が (3.5) の右辺の積分を実行する際に用いられるグラフとは独立であることのアプリオリな保証は存在しないために再び重要な巧妙な方法を考えなければならない。内積をうまく定義するという要請は、G^n 上の測度 $\mu_{(n)}$ の選び方にシビアな制限を課すことを意味している。しかし、5 章で議論するように背景独立な量子論の構成という目的によって課される「理論が微分同相共変的である」という要請と矛盾しないような自然な選び方が存在する。

スカラー場の場合のように、G^n 上の測度 $\mu_{(n)}$ の整合的な集合は $\mathcal{A}$ 上の cylindrical 測度を与え、一般的な結果はそのような測度は $\mathcal{A}$ の拡大である $\bar{\mathcal{A}}$ 上の正則なボレル測度へ自然に拡張されることを保証する。$\bar{\mathcal{A}}$ は量子配位空間とよばれる。$\bar{\mathcal{A}}$ は M 上の連続な場として表現することはできないが、それにもかかわらず M の中のエッジにうまく定義されたホロノミーを割り当てる'一般化された接続' を含んでいる。これらは量子接続とよばれている。概念的に、量子論を構成するための $\mathcal{A}$ から $\bar{\mathcal{A}}$ への拡大はスカラー場の場合の $\mathcal{C}$ から $\mathcal{S}'$ への拡大ととてもよく似ている。この拡大は量子論 (特に量子地平線の表面状態の議論) において鍵となる役割をする。このことは格子理論とは異なり、無限自由度の正真正銘の場の理論を扱うという事実があるからである。

量子配位空間 $\bar{\mathcal{A}}$ の構造はよく理解されている。特に (非可換幾何学において成功している) 代数的アプローチを用いた微分幾何学が $\bar{\mathcal{A}}$ 上で発展してきている。5 章や 6 章で議論するように、それは物理的に面白い演算子の導入を可能にする。

ここで述べてきたアイディアのスケッチは次章で系統的に発展させる。まずコンパクト Lie 群 G 上の量子力学を議論し、そしてそれを用いグラフ上の接続の量子論を導入する。その後、連続体での接続の量子論を議論する。この構造は量子幾何学を導入するために 5 章で用いられる。

第 4 章

接続の量子論：背景独立な運動学

この章では 2 章での正準形式の議論を参照せず、抽象的に背景独立な接続の量子論を運動学的枠組みで構成しよう。一般的に構成するために、構造群が任意のコンパクト Lie 群 G であるゲージ場で議論することにする。3 つのパートに分けて説明する。まず、コンパクト Lie 群 G の群多様体上の '粒子' の量子力学を通して導入を与える。2 番目に任意のグラフ上の構造群 G を持つ (背景独立な) 格子ゲージ理論の量子運動学 (quantum kinematics) を考える。最後に構造群 G を持つ連続体での接続について考える。

例えば、Einstein-Yang-Mills 理論での議論のように一般的なコンパクト Lie 群に基づく構成は重要である。しかし、2 章で見たように、量子幾何学や量子 Eintsien 方程式に対して関係する群は $G = SU(2)$ である。それゆえ、この場合についてより詳細に説明を行う。G の次元を d、その Lie 代数を $\mathfrak{g}$ と書くことにする。しばしば $\mathfrak{g}$ の基底 τ_i を用いることにする。$G = SU(2)$ の場合、Lie 代数 $\mathfrak{g} = su(2)$ は複素数、トレースレス、反自己共役な 2×2 行列の Lie 代数と同一視される。そして Cartan-Killing 計量 η_{ij} はすべての $\xi, \eta \in su(2)$ に対して

$$\eta(\xi, \zeta) = -2\mathrm{Tr}(\xi\eta) \tag{4.1}$$

によって与えられる。この場合、τ_i は

$$[\tau_i, \tau_j] = \epsilon^k{}_{ij}\tau_k \tag{4.2}$$

を満足する正規直交基底を構成する。

4.1 コンパクト Lie 群 G 上の量子力学

コンパクト Lie 群 G の群多様体上の '自由' 粒子を考える。ここではこの粒子の量子力学について議論する。ここで構成する Hilbert 空間と演算子は後で議論する接続の理論の量子運動学のために直接有用となるだろう。また直接的な物理的応用がある。例えば、$G = SO(3)$ の場合、'free spherecal top(自由球形コマ)' を記述し、$G = SU(2)$ の場合、Skyrme モデルにおけるハドロンの記述に重要な役割をする。

4.1.1　相空間

粒子の配位空間は G の群多様体であり、その相空間は余接束 $T^\star(G)$ である。$T^\star(G)$ 上の関数の間の自然な Poisson 括弧式は

$$\{f_1, f_2\} = \frac{\partial f_1}{\partial q^i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_2}{\partial q^i}\frac{\partial f_1}{\partial p_i} \tag{4.3}$$

で与えられる。ここで、q^i は G 上の座標であり、(q^i, p_i) はそれに対応する $T^\star(G)$ 上の座標である。

すべての G 上の滑らかな関数 f は配位変数を定義し、すべての滑らかなベクトル場 X^i は $T^\star(G)$ 上の運動量変数 $P_X := X^i p_i$ を定義する。任意の余接束上でそれらの (非自明な)Poisson 括弧式は関数へのベクトル場の作用とベクトル場の間の Lie 括弧を反映し、

$$\{P_X, f\} = -\mathcal{L}_X f, \qquad \{P_X, P_Y\} = -P_{[X,Y]} \tag{4.4}$$

となる。これらの配位観測量 (configuration obsevable) と運動量観測量 (momentum observable) はそれらが曖昧さのない量子対応物が存在するという意味で ‘基本的’(‘*elementary*’) であるとよばれる。

Lie 群なので、G は G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と同型である 2 つの自然なベクトル場の Lie 代数を構成する。任意の $\xi \in \mathfrak{g}$ が与えられると、G 上の左 (右) 不変なベクトル場 $L^{(\xi)}(R^{(\xi)})$ を

$$L^{(\xi)} f(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g\mathrm{e}^{t\xi}), \qquad R^{(\xi)} f(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\mathrm{e}^{-t\xi} g) \tag{4.5}$$

となるように定義する。(符号は $g \mapsto g^{-1}$ のもとで $L^{(\xi)} \mapsto R^{(\xi)}$ となるように決める。)

対応する $T^\star(G)$ 上の運動量関数を $J^{(L,\xi)}, J^{(R,\xi)}$ と書くことにする。それらは $T^\star SO(3)$ 上の良く知られている ‘角運動量関数’ の一般化である。それぞれの集合は Poisson 括弧式の元で閉じている d 次元ベクトル空間をなす。G 上の任意のベクトル場 X は $L^{(\xi)}(R^{(\xi)})$ の (汎関数の) 線形組み合わせで表されるので、それは運動量観測量の $2d$ 次元空間のみを考えるのに十分である。

この粒子は ‘自由’ なので、Hamiltonian は以下のように運動項によってのみ与えられる。

$$H(p, q) = \eta^{ij} p_i p_j \tag{4.6}$$

ここで η_{ij} は G 上で定義された計量テンソルであり、G の左作用・右作用に対して不変である。$\mathfrak{g}$ の正規直交基底 τ_i $(i = 1, \ldots, d)$ が与えられ、$J^{(L,\tau_i)}$ を $J_i^{(L)}$ によって表し、$J^{(R,\tau_i)}$ を $J_i^{(R)}$ によって表すことにすると、Hamiltonian は

$$H(p, q) = J_i^{(L)} J_j^{(L)} \eta^{ij} = J_i^{(R)} J_j^{(R)} \eta^{ij} \tag{4.7}$$

で与えられる。すべてのこれらの基本観測量が量子論で演算子を自然に定義することをみていく。

4.1.2　量子化

G には規格化された Haar 測度 μ_H があるので、量子状態の Hilbert 空間は Haar 測度に対する G 上の 2 乗可積分関数の空間 $L^2(G, \mathrm{d}\mu_H)$ と考えられる。配位演算子と運動量演算子を以下のように導入する。

G 上のすべての滑らかな関数 f の配位演算子 $\hat{f}$ は

$$(\hat{f}\psi)(g) = f(g)\psi(g) \tag{4.8}$$

とすべての運動量関数 $X^i p_i$ の運動量演算子 $\hat{J}_{(X)}$ は

$$(\hat{J}^{(X)}\psi)(g) = \mathrm{i}\left[\mathcal{L}_X\psi + \frac{1}{2}(\mathrm{div}X)\psi\right](g) \tag{4.9}$$

のように関連付けることができる。ここで $\mathrm{div}X$ は G 上の不変体積要素に対するベクトル場 X の発散である。(また、簡便さのため $\hbar$ は省略している。) これら配位空間演算子と運動量演算子の間の交換子がそれらの古典的対応物の Poisson 括弧式を反映していることは簡単に確認できる。特に $\mathfrak{g}$ の正規直交基底 τ_i に関係する左 (右) 不変ベクトル場に関係する演算子に興味がある。ここで

$$\hat{L}_i = \hat{J}_i^{(L)}, \qquad \hat{R}_i = \hat{J}_i^{(R)} \tag{4.10}$$

とおく。右不変ベクトル場と左不変ベクトル場の発散は消えるため、演算子の作用は Lie 微分項によってのみ与えられる。つまり、形式的には運動量関数と ψ の間の Poisson 括弧式によって与えられるということである。これらの演算子を用いて量子 Hamiltonian は

$$\hat{H} = \hat{L}_i\hat{L}_i\eta^{ij} = \hat{R}_i\hat{R}_i\eta^{ij} = -\Delta \tag{4.11}$$

によって与えられる。ここで Δ は G 上の Laplace 演算子である。

4.1.3　スピン状態

以下の節の接続の議論において、状態の Hilbert 空間の ‘一般化されたスピンネットワーク分解’ は重要な役割を演ずる。その準備として Hilbert 空間 $L^2(G, \mathrm{d}\mu_H)$ の有限次元部分空間への直交分解を導入する。G の非同値既約表現を j でラベルする。また j 表現の空間を V_j、その双対空間を $V_j^\star$ と書くことにする。Weyl の定理より分解

$$L^2(G, \mathrm{d}\mu_H) = \oplus_j \mathcal{S}_j, \quad \mathcal{S}_j = V_j \otimes V_j^\star \tag{4.12}$$

が与えられる。

$G = SU(2)$ の場合、この分解をより具体的に記述することができる。よく知られた角運動量の量子力学からわかるように、この場合演算子 $\hat{J}^2 = -\Delta$ の固有値は $j(j+1)$ で与えられる。ここで j は非負の半整数で既約表現をラベルする。各 V_j は $2j+1$ 次元である。そしてさらに各 $\mathcal{S}_j = V_j \otimes V_j^\star$ を直交 1 次元部分空間に分解する。要素 $\xi \in su(2)$ を固定し、交換する演算子のペア $\left(\hat{L}_{(\xi)}, \hat{R}_{(\xi)}\right)$ を考える。j が与えられると、これらの演算子のすべての固有値 $j_{(L,\xi)}$ と $j_{(R,\xi)}$ はそれぞれ $-j, -j+1, \ldots, j$ を持ち、それらのペアは 1 次元固有部分空間 $\mathcal{S}_{j, j_{(L,\xi)}, j_{(R,\xi)}}$ を定義する。したがって、

$$L^2(SU(2), \mathrm{d}\mu_H) = \otimes_j \mathcal{S}_j = \otimes_{j, j_{(L,\xi)}, j_{(R,\xi)}} \mathcal{S}_{j, j_{(L,\xi)}, j_{(R,\xi)}} \tag{4.13}$$

となる。この事実はスピンネットワーク分解を考える際に役に立つ。

4.2　グラフ上の接続

接続の理論を考える前に、コンパクト Lie 群 G 上の量子力学との間の量子力学系として有限のエッジを持つ固定されたグラフ α 上の接続について考えよう。この系は α 上の格子ゲージ理論と等価である。次の節で理論に与えられた多様体上の可能なすべてのグラフを‘つなぎ合わせる’ことによって得られる連続体の接続場の理論をみていく。

グラフはエッジと頂点の集合として考えられるかもしれない。また‘流動的’格子[*1]として扱われるかもしれない (‘流動的’というのはエッジは長方形である必要がないからである。実際、背景計量を持たないので‘長方形’のような言葉に不変な意味がないのである。)。もし、グラフ α のすべてのエッジ e が別のグラフ α' のいくつかのエッジ e'_k で $e = e'_1 \circ \cdots \circ e'_k$ と書かれるならば、α は α' よりも大きい (もしくは α を含む)($\alpha \geqq \alpha'$) という。

4.2.1　グラフ上の接続空間

グラフ α 上の G 接続 A_α は α の各エッジ e 上に定義された $\mathfrak{g}$ 値 1 形式 A_e の集合である。具体的に各 A_α は M 上の滑らかな $\mathfrak{g}$ 値 1 形式の α への引き戻しによって定義される[*2]。したがって、α 上の接続を単に M 上の滑らかな接続の同値類と考えることができる。ここで α の各エッジへの接続の制限が一致する場合 2 つが同値であるという。

α 上の G 接続の空間を $\mathcal{A}_\alpha$ と書くことにする。この空間は α のエッジに沿った局所ゲージ変換のため無限次元となっている。格子ゲージ理論のように、グラフ α と関係する接続の (背景独立な) 理論に対する配位空間と取ることができる有限次元空間 $\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ を構成するために局所ゲージ変換による余剰要素を取り除くことは都合が良い。

$\mathcal{G}_\alpha$ のゲージ変換 g_α は α 上のすべての点 x_α からの写像 $g_\alpha : x_\alpha \to G$ である。したがって、g_α は M 上で定義された G 値関数のグラフ α へ制限と考えることができる。g_α の元で、接続 A_α は

$$A_\alpha \mapsto g_\alpha^{-1} A_\alpha g_\alpha + g_\alpha^{-1} \mathrm{d}_\alpha g_\alpha \tag{4.14}$$

と変換する。ここで、d_α は α のエッジに沿った外微分である。今、商空間

$$\bar{\mathcal{A}}_\alpha := \mathcal{A}_\alpha / \mathcal{G}_\alpha^0, \qquad \bar{\mathcal{G}}_\alpha := \mathcal{G}_\alpha / \mathcal{G}_\alpha^0 \tag{4.15}$$

を考える。ここで、$\mathcal{G}_\alpha^0$ は α の頂点上で単位元であるすべての局所ゲージ変換 g_α によって与えられる部分群である。任意であるが向き付けは固定されている α の各エッジを選ぶ。そうすると、すべての要

[*1] もっと正確にはグラフ α は α のエッジと呼ばれる M のコンパクト 1 次元部分多様体の有限集合であり、(i) すべてのエッジが境界を持つ埋め込まれた区間 (端点を持つ開いたエッジ (open edge)) かマークポイントを持つ埋め込まれた円 (‘端点’を持つ閉じたエッジ (closed edge)) か埋め込まれた円 (ループ (loop)) のいずれかである、(ii) もしエッジが α の別のエッジと交わるならば、その端点の 1 つか 2 つでのみで交わるという条件を満たす。エッジの端点は頂点とよばれる。この正確な定義は 4.3 での Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を十分大きなものにしたり、一般化された‘スピンネットワーク分解’を行うことが保証されるために必要である。

[*2] 本論文では固定された自明化を用いることにする。この節では下付きのギリシャ文字はいつもグラフを表し時空上の場を示すわけではないことに注意する。

素 $\bar{A}_\alpha \in \bar{\mathcal{A}}_\alpha$ を同値類 $\bar{A}_\alpha$ における接続 A_α によって定義される平行移動 (つまりホロノミー) の G 値の $\bar{A}_\alpha(e)$ と同一視することができる[*3]。したがって、$\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ と G^n の間、$\bar{\mathcal{G}}_\alpha$ と G^m の間の自然な 1 対 1 写像が

$$\mathcal{I}_E : \bar{\mathcal{A}}_\alpha \to G^n \qquad \mathcal{I}_E(\bar{A}_\alpha) = (\bar{A}_\alpha(e_1), \ldots, \bar{A}_\alpha(e_n)) \tag{4.16}$$

$$\mathcal{I}_V : \bar{\mathcal{G}}_\alpha \to G^m \qquad \mathcal{I}_V(\bar{g}_\alpha) = (\bar{g}_\alpha(v_1), \ldots, \bar{g}_\alpha(v_m)) \tag{4.17}$$

と定められる。ここで $e_1, \ldots, e_n$ は α のエッジ、$v_1, \ldots, v_m$ は α の頂点である。$\mathcal{I}_E$ はエッジの向きに依存していることに注意する。次の節でこの写像が重要な役割をし、最終的な結果が向き付けに依らないことがわかる。

格子ゲージ理論にしたがって、$\bar{A}_\alpha$ を α 上の接続の理論の配位変数、$\bar{g}_\alpha$ を配位変数上の (残りの) ゲージ変換と呼ぶことにする。(残りの) ゲージ変換の群である $\bar{\mathcal{G}}_\alpha$ が $\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ 上の非自明な作用を持つので、物理的な配位空間は商空間 $\bar{\mathcal{A}}_\alpha/\bar{\mathcal{G}}_\alpha$ によって与えられる。

注意

商空間 $\bar{\mathcal{A}}_\alpha/\bar{\mathcal{G}}_\alpha$ は以下の方法で特徴づけることができる。α の頂点 v_0 を固定する。そして、$\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ を v_0 を基点とする α の第一ホモトピー群の自由生成子とする (つまり v_0 から始まる α の中のすべてのループはその生成子やそれらの逆元の積であり、この分解は一意的である。)。$\bar{A}$ から G^h への写像

$$\bar{A} \mapsto (\bar{A}(\alpha_1), \ldots \bar{A}(\alpha_h)) \tag{4.18}$$

は $\bar{\mathcal{A}}_\alpha/\bar{\mathcal{G}}_\alpha$ と G^m/G の間の 1 対 1 対応を定義する。ここで商空間は残りのゲージ作用 $(U_1, \ldots, U_h)g := (g^{-1}U_1 g, \ldots, g^{-1}U_h g)$ に対するものである。

4.2.2 量子論

$\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ は配位空間であるので、量子状態を $\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ 上の 2 乗可積分関数として自然な表現がある。このことは $\mathcal{A}_\alpha$ 上の測度を定義することが要請される。明らかな方法として $\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ を G^n によって表現するために (4.16) の写像 $\mathcal{I}_E$ を用い、G 上の Haar 測度を用いることである。これは $\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ に μ_0 と書かれる自然な測度を寄与させる。したがって、量子状態の空間は Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\alpha = L^2\left(\bar{\mathcal{A}}_\alpha, \mathrm{d}\mu^0_\alpha\right)$ ととることができる。G^n の関数 ψ の $\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ 上の関数への引き戻しを Ψ と書くことにする。

$$\Psi = \mathcal{I}_E^\star \psi \tag{4.19}$$

$\mathcal{I}_E^\star$ は全単射なので、$\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ 上のすべての関数 Ψ は $\mathcal{H}_\alpha$ の量子状態 Ψ を G^n 上の関数 ψ として考えられる表現をとることができる。そうすると、内積は

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \int_{G^n} \mathrm{d}\mu^0_H \bar{\psi}_1 \psi_2 \tag{4.20}$$

[*3] 簡単のため、以降 α のすべてのエッジが 2 つの頂点を持つ場合を議論する。もしグラフ α が頂点を持たない閉じたエッジ e' を持つなら、(e' は頂点を持たないので)$\mathcal{G}^0_\alpha$ は e' の点ですべてのゲージ変換を含む。そうすると、$\bar{A}_\alpha(e') \in G/\mathrm{Ad}$($G$ 上の随伴作用による商空間の要素) となる。したがって、一般のグラフに対して、もし頂点を持たないと自他エッジの数を n_0、残りのエッジの数を n_1 ($n = n_0 + n_1$) と書くと、以下で定義される写像 $\mathcal{I}_E$ の像は $[G/\mathrm{Ad}]^{n_0} \times G^{n_1}$ である。この構成と結果は一般のグラフに容易に拡張できる。

と書かれる。ここで、μ_H^0 は G^n 上の Haar 測度である。Haar 測度は $g \mapsto g^{-1}$ の元で不変であるので、内積は $\mathcal{I}_E$ の定義にある α のエッジの向き付けの選び方には依存しない。内積がゲージ変換の残りの群 $\bar{\mathcal{G}}_\alpha$ の $\mathcal{H}_\alpha$ 上の誘導された作用の元でも不変となることを確かめるのは容易である。

$\mathcal{H}_\alpha$ 上の興味深い演算子を導入する。$\mathcal{H}_\alpha$ は α のエッジにそれぞれ関係している空間 $L^2(G, \mathrm{d}\mu_H)$ のテンソル積である。$L^2(G, \mathrm{d}\mu_H)$ 上の演算子 $\hat{L}_i$ と $\hat{R}_i$ を用い、対応 (4.16) が G のコピーと α の各エッジを関連づけるという事実を用いて、$\mathcal{H}_\alpha$ 上のある演算子 $\hat{J}_i^{(v,e)}$ を定義する。α の頂点 v と端点として v をもつエッジ e と $\mathfrak{g}$ の基底 τ_i を与え、

$$\hat{J}_i^{(v,e)}\Psi = \mathcal{I}_E^\star[(1 \otimes \cdots \otimes \hat{J}_i \otimes \cdots \otimes 1)\psi] \tag{4.21}$$

とおく。ここで、非自明な作用はエッジ e と関係する G のコピー上のみであり、もし頂点 v がエッジ e のソースなら $\hat{J}_i = \hat{L}_i$ であり、もし頂点 v がエッジ e のターゲットなら $\hat{J}_i = \hat{R}_i$ である。したがって、エッジ e は $\hat{J}_i^{(v,e)}$ が非自明な作用をする G のコピーを決定し、一方、頂点 v は作用が左不変か右不変であるベクトル場を通して行われるかどうかを決定する。

4.2.3　一般化されたスピンネットワーク

積構造 $\mathcal{H}_\alpha \sim [L^2(G, \mathrm{d}\mu_H)]^{\otimes n}$ は G 上の量子力学に重要な結果を与える。特に (4.12) を用いると、$\mathcal{H}_\alpha$ は有限次元の部分空間 $\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j}}$ へ分解することができる。ここで $\mathbf{j} = \{j_1, \ldots, j_n\}$ は α の各エッジに G の既約表現を割り当てている。個別の部分空間 $\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j}}$ は残りのゲージ変換の群の作用の既約表現へさらに分解することができる。$\mathbf{l} = \{l_1, \ldots, l_v\}$ によって α の各頂点 v へ G の既約表現を割り当てるとしよう。そうすると、各 $\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j}}$ はすべての頂点 v での残りのゲージ変換の群の既約表現 $\mathbf{l}$ をもつすべてのベクトルからなる部分空間 $\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j},\mathbf{l}}$ へさらに分解することができる。そして、

$$\mathcal{H}_\alpha = \oplus_{\mathbf{j}}\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j}} = \oplus_{\mathbf{j},\mathbf{l}}\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j},\mathbf{l}} \tag{4.22}$$

となる。$\mathcal{H}_\alpha$ のゲージ不変部分空間は頂点のラベル付けに対応し

$$\mathbf{l} = \vec{0} \qquad l_v = \text{自明表現}\ (\alpha\ \text{のすべての}\ v\ \text{に対して}) \tag{4.23}$$

量子幾何学への応用のため、この分解を $G = SU(2)$ の場合で具体的に書いておく。この議論はラベル $\mathbf{j}$、$\mathbf{l}$ のより詳細な記述を与えることによって上で述べた抽象的な構成を行うことができる。

例

α の各エッジ e で演算子 $\hat{J}_e^2$

$$\left(\hat{J}_e\right)^2 := \eta^{ij}\hat{J}_i^{(v,e)}\hat{J}_j^{(v,e)} \tag{4.24}$$

を考えよう。ここで、η^{ij} は $su(2)$ 上の Cartan-Killing 計量 (4.1) であり、v は e のソースかターゲットである。それらは $SU(2)$ の異なるコピーに作用するので、これらのすべての演算子は固有値 $j_e(j_e+1)$ をもつ (ここで j_e は非負の半整数である。) ので、演算子のこの集合の各同時固有空間 $\mathcal{H}_j$ は $\mathbf{j} = (j_{e_1}, \ldots, j_{e_n})$ によってラベルされる。したがって、全 Hilbert 空間の分解

$$\mathcal{H}_\alpha = \oplus_{\mathbf{j}}\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j}} \tag{4.25}$$

が得られる。個別の部分空間 $\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j}}$ は $SU(2)$ の 1 つのコピーの場合で導入された $\mathcal{S}_j$ の自然な拡張である。それらは以下のいくつかの興味深い性質をもつ。(i) 各 $\mathcal{H}_{\mathbf{j}}$ は $\mathcal{H}_\alpha$ の有限次元の部分空間である。(ii) すべての $\hat{J}_i^{(v,e)}$ の作用によって保たれる。(iii) (α の頂点で非自明に作用する) $\bar{\mathcal{G}}_\alpha$ のゲージ変換の (誘導された) 作用によって保たれる。

最後に、可換な演算子をさらに導入することによって、さらなる分解を実行することができる。特に重要なものは頂点演算子 $[\hat{J}^v]^2$ であり、α の各頂点 v と関係している。それらは

$$[\hat{J}^v]^2 := \eta^{ij}\hat{J}_i^v\hat{J}_j^v \qquad \text{ここで } \hat{J}_i^v := \sum_{v\text{ の }e'} \hat{J}_i^{(v,e')} \tag{4.26}$$

によって定義される。ここで、和は v と交わるすべてのエッジ e' で取られている。発見的に、$\hat{J}_i^e$ は 'エッジ e 上に乗っている' 角運動量演算子としてみなすことができ、$\hat{J}_i^v$ は頂点 v に '着く' 全角運動量演算子である。演算子 $[\hat{J}^v]^2$ が演算子 $[\hat{J}^e]^2$ と可換であることを確認するのは容易である。したがって、もし $[\hat{J}^v]^2$ の固有値を $l_v(l_v+1)$ によって書くと、部分空間 $\mathcal{H}_{\mathbf{j}}$ はさらに分解することができ、以下の全 Hilbert 空間の細密な分解へと達する。

$$\mathcal{H}_\alpha = \oplus_{\mathbf{j}}\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j}} = \oplus_{\mathbf{j},\mathbf{l}}\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j},\mathbf{l}} \tag{4.27}$$

ここで、$\mathcal{H}_{\mathbf{j},\mathbf{l}}$ は演算子 $[\hat{J}^e]^2$ と $[\hat{J}^v]^2$ の同時固有空間である。

注意

可換演算子の集合を拡大することができ、$\mathcal{H}_\alpha$ の分解をさらに細かくすることができる。以下で $G = SU(2)$ での手順を示そう。各頂点 v で興味深いエッジ $(e'_1, \ldots, e'_k)$ の順序を考えよう。そして、以下のような演算子の集合を導入しよう。

$$\begin{gathered}
\left(\hat{J}_i^{(v,e'_1)} + \hat{J}_i^{(v,e'_2)}\right)\eta^{ij}\left(\hat{J}_j^{(v,e'_1)} + \hat{J}_j^{(v,e'_2)}\right), \ldots, \\
\left(\hat{J}_i^{(v,e'_1)} + \hat{J}_i^{(v,e'_2)} + \hat{J}_i^{v,e'_3}\right)\eta^{ij}\left(\hat{J}_j^{(v,e'_1)} + \hat{J}_j^{(v,e'_2)} + \hat{J}_j^{v,e'_3}\right), \ldots, \\
\cdots \qquad \cdots \\
\left(\hat{J}_i^{(v,e'_1)} + \cdots + \hat{J}_i^{(v,e'_{k-1})}\right)\eta^{ij}\left(\hat{J}_j^{(v,e'_1)} + \cdots + \hat{J}_j^{(v,e'_{k-1})}\right)
\end{gathered} \tag{4.28}$$

ここで、各括弧は頂点 v で定義される演算子のみの和を含む。これらの演算子は互いに可換であり、演算子 $[\hat{J}^e]^2$、$[\hat{J}^v]^2$ と可換である。もしこれらの演算子の固有値を $\mathbf{s}$ によってラベルするならば、各同時固有空間 $\mathcal{H}_{(\mathbf{j},\mathbf{l},\mathbf{s})}$ は三重項 $(\mathbf{j},\mathbf{l},\mathbf{s})$ によってラベルすることができる。各 $\mathcal{H}_{(\mathbf{j},\mathbf{l},\mathbf{s})}$ は半整数値 l_v に対応するゲージ変換 $\bar{\mathcal{G}}_\alpha$ の群の既約表現である。

α のエッジの任意のラベル $\mathbf{j}$ が与えられた時、残りの 2 つのラベル $\mathbf{l}$、$\mathbf{s}$ は下の不等式によって制限される。

$$s_{1,2} \in \left\{\left|j_{e'_1} - j_{e'_2}\right|, \left|j_{e'_1} - j_{e'_2}\right| + 1, \ldots, j_{e'_1} + j_{e'_2}\right\} \tag{4.29}$$

$$s_{1,2,3} \in \left\{\left|s_{1,2} - j_{e'_3}\right|, \ldots, s_{1,2} + j_{e'_3}\right\} \tag{4.30}$$

$$\cdots$$

$$s_v \in \left\{\left|s_{1,2,\ldots,k-1} - j_{e'_k}\right|, \ldots, s_{1,2,\ldots,k-1} + j_{e'_k}\right\} \tag{4.31}$$

これらの条件を考えた場合、$\mathcal{H}_{\mathbf{j}}$ の以下のような正規直交分解

$$\mathcal{H}_\alpha = \oplus_{\mathbf{j}}\mathcal{H}_{\mathbf{j}}, \qquad \mathcal{H}_{\mathbf{j}} = \oplus_{\mathbf{l}}\mathcal{H}_{(\mathbf{j},\mathbf{l})} \qquad \mathcal{H}_{(\mathbf{j},\mathbf{l})} = \oplus_{\mathbf{s}}\mathcal{H}_{(\mathbf{j},\mathbf{l},\mathbf{s})} \tag{4.32}$$

を得る。ここで、ラベル **j**、**l**、**s** は正の半整数値であり、不等式 (4.29)-(4.31) を満たす。ゲージ不変な状態の部分空間は自明な **l** によってラベルされている。

4.3　M 上の接続

2 章で議論したように一般相対性理論のような G 接続場の理論を立ち戻ろう。M 上のグラフ α を与えられた時、M 上の各接続 A はただ制限することによって α 上の接続 $A|_\alpha$ を定義する。さらに、A は M 上のすべての可能なグラフ α を考えることによって定義される集合 $\{A|_\alpha\}$ によって完全に決定される。それゆえ、グラフ上の接続の量子論を織り合わせることによって M 上の接続の理論に対する背景独立な量子運動学を構築することができる。

4.3.1　古典的相空間

簡単のため、M 上の自明束上の G 接続を考える。この制限はこの枠組みの応用が $G = SU(2)$ の量子幾何学であり、3 次元多様体上のすべての $SU(2)$ 束が自明であることによる。すべての構造がゲージ共変であるので、大域的自明化をし、M 上の滑らかな $\mathfrak{g}$ 値 1 形式 A を接続を見なすのは便利である[*4]。すべてのそのような 1 形式の空間は古典的な配位空間であり、$\mathcal{A}$ と書かれる。相空間は (A_a^i, P_i^a) のペアで構成される。ここで $A \in \mathcal{A}$ であり、P は M 上の $\mathfrak{g}$ 値のベクトル密度である。Yang-Mills 理論の用語に従い、A_a^i を接続とよび、P_a^i を Yang-Mills 理論のアナロジーとして電場 *electric fields* とよぼう。重力の場合、$kP_i^a = (8\pi G\gamma)P_i^a$ は (密度 1 の) 正規直交三脚場と解釈できる。ここで γ は Barbero-Immirzi パラメータである。この事実はこの章では何の役割もしないが、量子 Riemann 幾何学を導入する際に重要になる。

相空間上の 2 つの滑らかな関数の間の Poisson 括弧式は

$$\{f_1(A,P), f_2(A,P)\} = \int_M \mathrm{d}^3x \left(\frac{\delta f_1}{\delta A_a^i}\frac{\delta f_2}{\delta P_i^a} - \frac{\delta f_2}{\delta A_a^i}\frac{\delta f_1}{\delta P_i^a} \right) \tag{4.33}$$

によって与えられる。ゲージ群 $\mathcal{G}$ は M 上の G 値の関数 g の群である。この群は相空間上への自然な作用があり、

$$(A \cdot g, P \cdot g) = (g^{-1}Ag + g^{-1}\mathrm{d}g, g^{-1}Pg) \tag{4.34}$$

で与えられる。直接的な量子アナロジーであるような基本古典量は M 上のパス e に沿うホロノミー $A(e)$(の複素数値関数) と M 上の 2 次元面 S を貫く ($\mathfrak{g}$ 値の関数 f によって積分されている) 電場のフラックス $P(S,f)$ である。この節では、これらの相空間関数の正確な定義の導入やそれらの性質を調べる。

技術的な簡単化のため、解析的である 3 次元多様体 M に制限し、M 上の閉じた区分的解析的なエッジ e と閉じた区分的解析的な部分多様体 S のみを用いる[*5]。M 上のエッジ $e : [t_2, t_1] \to M$ と接続 A が

[*4] 背景となる議論は [8] を参照。n 次元多様体 M 上の非自明な束に一般化するのはかなり容易である。

[*5] もっと正確には各エッジ $e : [t_n, t_1] \mapsto M$ に対して、区間 $[t_n, t_1]$ は M の中の閉じた区間の像が解析的である閉じた区間 $[t_n, t_{n-1}], \ldots [t_2, t_1]$ による被覆が許される。各面 S は閉包 $\bar{S}$ がコンパクトかつ境界を持つ M の解析的な部分多様体である $\bar{S} = \cup_I S_I$ であるような M のトポロジー部分多様体である。(これらの仮定は緩めることができ、滑らかな構造のみで議論することができる。)

与えられれば、e に沿った $e(t_1)$ から $e(t)$ までの平行移動が以下の微分方程式と初期条件によって定義される。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_e(t, t_1; A) = -A_a(e(t))\dot{e}^a(t)U(t, t_1; A), \qquad U(t_1, t_1; A) = \mathbb{1} \tag{4.35}$$

$A \in \mathcal{A}$ が与えられると、e 全体に沿った平行移動は $A(e)$ によって記述される。

$$A(e) := U_p(t_2, t_1; A) \tag{4.36}$$

したがって、$A(e) \in G$ は e の向き付けを保つ再パラメータ化の元で不変であり、後の章で重要な役割をする 2 つの重要な性質がある。

$$A(e_2 \circ e_1) = A(e_2)A(e_1), \qquad A(e^{-1}) = A(e)^{-1} \tag{4.37}$$

ここで e^{-1} は e から向きを単に逆にすることによって得られる。

‘電場フラックス’ は面 S を用いて定義される。S 上で Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の双対 $\mathfrak{g}^\star$ に値を持つ滑らかな関数 f を固定し、S を通して P のフラックスを

$$P(S, f) := \int_S f_i \Sigma^i \tag{4.38}$$

として定義する。ここで $\Sigma^i_{ab} = \eta_{abc}P^{ci}$ は電場の双対な 2 形式である。

量子化へ向けて、これらの変数の間の Poisson 括弧式を計算しよう。相空間は余接束であるので、配位変数は Poisson 括弧式を消す。(量子状態が接続の関数である配位表現を導入するのは可能である。) 配位変数 $A(e)$ と共役運動量 $P(S, f)$ の間の Poisson 括弧式は簡単に計算でき、単純な幾何学構造を持つ。$e \cap S \neq \emptyset$ であるエッジ e は S 上のあるか、端点の 1 つで S と交わっている ‘基本的’ なエッジの和として自明に書かれる。(これは e 上に適切に新しい頂点を導入することによって単純になされる。) そして、点 p で S と交わる ‘基本的’ なエッジ e に対して、

$$\{A(e), P(S, f)\} = -\left[\frac{\kappa(S, e)}{2}\right] \times \begin{cases} A(e)\tau^i f_i(p) & p \text{ が } e \text{ のソース} \\ -f_i(p)\tau^i A(e) & p \text{ が } e \text{ のターゲット} \end{cases} \tag{4.39}$$

となる。ここで τ^i は $\mathfrak{g}$ の正規直交基底であり、$\kappa(S, e)$ は 0 か ± 1 である。

$$\kappa(S, e) = \begin{cases} 0 & e \cap S = \emptyset \text{ か } e \cap S = e \\ +1 & e \text{ が } S \text{ の上にある} \\ -1 & e \text{ が } S \text{ の下にある} \end{cases} \tag{4.40}$$

したがって、もし e と S が互いに交わらないか、e が S(の閉包) にある場合、括弧式は消え、もし ‘単純’ な交点を持つならば、係数が交点でともに積分する場 f の値によって決定される配位変数 $A(e)$ の線形和によって与えられる。

それに反して、運動量の間の Poisson 括弧式は以下の技術的な複雑さのため簡単ではない。配位変数 (ホロノミー)$A(e)$ は A を 1 次元曲線 e に沿って積分することによって得られ、運動量 (電場フラックス) は電場 2 形式 e を 2 次元面で積分することによって得られる。接続 A は 1 形式で双対な電場 Σ は 2 形式であるので、この量の積分は特に背景の計量が存在しない場合には幾何学的にとても自然である。しか

しながら、積分が 3 次元においてなされる場の理論での通常の手続きとは逆に、この積分場は完全な 3 次元での視点からみてそれ自身が ‘超関数’ である。それゆえ、Poisson 括弧式を評価する際に注意が必要である。A_e や $P(S,f)$ の定義にある 1 次元や 2 次元での積分は Poisson 括弧式 (4.39) の計算に ‘ふさわしい’。しかしながら、技術的な困難が積分された電場の間の Poisson 括弧式の評価において生じる。もし、運動量演算子 $P(S,f)$ 同士の Lie 括弧が消えなければならないように Poisson 括弧式を用いるなら、(4.39) は $A(e)$、$P(S,f)$、$P(S,f)$ の Jacobi 恒等式が満たされないことを意味する。正しい手順は運動量 $P(S,f)$ は配位空間 $\mathcal{A}$ 上のベクトル場 $X_{(S,f)}$ に対する $X_{(S,f)}\cdot P$ の形をとるという事実[*6]を用いる。その結果、$P(\tilde{S},\tilde{f})$ の間の (非自明な)Lie 括弧式はホロノミーの関数の環上のベクトル場 $X_{(S,f)}$ の作用によって決定される。一般にこれらのベクトル場が交換しない。それゆえに、運動量の間の Poisson 括弧式が一般に消えない。配位変数や運動量変数の間の正しい Lie 代数は配位空間 $\mathcal{A}$ 上の関数とベクトル場の幾何学的 Lie 代数によって与えられる。この Lie 代数は自然に (4.39) を組み入れ、運動量変数の間の非自明な Poisson 括弧式を与える。それは対応する基本量子演算子の交換子に反映される。

4.3.2　量子配位空間 $\bar{\mathcal{A}}$ と Hilbert 空間 $\mathcal{H}$

有限の自由度の系の量子力学において、状態は古典的配位空間上の関数によって記述される。一方、場の理論では量子状態はより大きい空間-量子配位空間-上の関数である。古典的配位空間上の ‘良い’ 関数はより大きい空間への拡張を許す。この場合、これらは $\mathcal{A}$ 上の cylindrical 関数といわれているものである。n 個のエッジを持つグラフ α を考えよう。そうすると、G^n 上の C^∞ 複素数値関数 ϕ を与えると、$\mathcal{A}$ 上の関数 Φ_α を

$$\Phi_\alpha(A)=\phi(A(e_1),\cdots,A(e_n)) \tag{4.41}$$

を通して定義することができる。(厳密には、Φ は添字 (α,ϕ) がつく。しかしながら、記法の簡単さのため ϕ を落とすことにする。) そのような関数の空間を Cyl_α と書こう。$\mathcal{A}$ 上の関数 Φ はあるグラフ α から構成されるなら、*cylindrical* とよばれる。注意として (i)Cyl_α と $\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ 上の関数の空間の間の自然な同型写像がある。(ii) 与えられたグラフ α に対して cylindrical なすべての関数はより大きいグラフ α' に対して自動的に cylindrical である; $\mathrm{Cyl}_\alpha\subseteq\mathrm{Cyl}_{\alpha'}$ これらの事実は繰り返し使われることになる。すべての cylindrical な関数の空間を Cyl と書こう。したがって、

$$\mathrm{Cyl}=\cup_\alpha\mathrm{Cyl}_\alpha \tag{4.42}$$

となる。

あるグラフ α が与えられると、式 (4.20) を用いて Cyl_α 上の自然な内積を

$$\langle\Phi_\alpha,\Psi_\alpha\rangle=\int_{G^n}\mathrm{d}\mu_H^0\bar{\phi}\psi \tag{4.43}$$

と導入することができる。この空間の Cauchy 完備化は $\mathcal{H}_\alpha=L^2(\bar{\mathcal{A}}_\alpha,\mathrm{d}\mu_\alpha^0)$ と自然な同型写像である Hilbert 空間を与える。記法の簡単さのため以降 $\mathcal{H}_\alpha$ と書くことにする。

[*6] もっと正確には、$X_{(S,f)}$ はホロノミーの関数の環 (つまり Cyl 空間) 上の微分である。場の理論の教科書の取り扱いの視点では、これらの関数は M の 3 次元開集合よりも 1 次元エッジを台に持ち ‘特異’ である。これは Jacobi 恒等式の直感と相容れない結果の原点である。

このアイディアは (4.43) を通してすべての cylindrical 関数の空間上の内積を導入することである。2つの異なるグラフ α_1 と α_2 に基づく 2 つの cylindrical 関数 Φ_{α_1} と Ψ_{α_2} が与えられているとしよう。そして α_1 と α_2 のすべてエッジと頂点をすべて含む 3 つ目のグラフ α_3 を導入することができ、2 つの関数を α_3 に対する cylindrical 関数として見なすことができる。そして $\alpha = \alpha_3$ として (4.43) を用いて Φ_{α_1} と Ψ_{α_2} の間の内積を定義しようとすることができる。鍵となる問題は内積の結果がこの時に用いられた特定のグラフ α_3 と独立であるかどうかである。幸運なことに、Haar 測度の右不変性や左不変性と規格化 ($\int_G \mathrm{d}\mu_H = 1$) を選んだという事実はその答えが肯定的であることを意味する。したがって、G 上の Haar 測度のおかげで、Cyl は自然なエルミート内積を持つ。その Cauchy 完備化を $\mathcal{H}$ と書こう。これは接続の背景独立な理論の量子運動論に対する Hilbert 空間である。

Cyl_α の Cauchy 完備化 $\mathcal{H}_\alpha$ は単に $L^2(\bar{A}_\alpha, \mathrm{d}\mu^0_\alpha)$ であるので、$\mathcal{H}_\alpha$ のすべての要素は $\bar{A}_\alpha$ 上の関数として表現することができる。(もっと正確にはもしそれらが測度 0 だけ異なるなら $\bar{A}_\alpha$ 上の関数の同値類である。) 不幸なことに、このことは $\mathcal{H}$ では本当ではない。Cyl のすべての要素は $\mathcal{A}$ 上の関数であるが、Cauchy 完備化において、$\mathcal{A}$ 上の関数として表現できない極限の点を選び出す。このことは無限自由度 (特に場の理論) の系でよく生じるものである。そうすると自然な疑問が湧いてくる。$\mathcal{H}$ が $\bar{\mathcal{A}}$ 上の (ある正則な Borel 測度に対して) すべての 2 乗可積分関数の空間と同型である $\mathcal{A}$ の拡大 $\bar{\mathcal{A}}$ があるのだろうか？この答えは肯定的であり、この $\bar{\mathcal{A}}$ は量子配位空間 (*quantum configulation space*) とよばれる。

驚くべきことに、とても有用な $\bar{\mathcal{A}}$ の単純な特徴付けを与えることができる。$\bar{\mathcal{A}}$ の要素を $\bar{A}$ と書き、それを量子的接続 (*quantum connection*) とよぼう。$\bar{A}$ は M の中の各 e に G の $\bar{A}(e)$ を以下のように割り当てる。

$$\bar{A}(e_2 \circ e_1) = \bar{A}(e_2)\bar{A}(e_1), \qquad \bar{A}(e^{-1}) = (\bar{A}(e))^{-1} \tag{4.44}$$

したがって、この場合、すべての滑らかな接続 A は自動的に一般化された接続を定義し、$\bar{A}(e)$ は単に通常のホロノミーである。しかしながら、一般の $\bar{A}$ は任意の不連続性を持つ。つまり、(4.44) 以外の要請はない。このことはなぜ $\bar{\mathcal{A}}$ が $\mathcal{A}$ よりも大きいのかの理由である。それにもかかわらず、(Gel'fand 理論のために) 自然なトポロジーに対して、$\mathcal{A}$ は $\bar{\mathcal{A}}$ に稠密に埋め込まれており、$\bar{\mathcal{A}}$ はコンパクトである。したがって、量子配位空間 $\bar{\mathcal{A}}$ は古典的配位空間 $\mathcal{A}$ の完備化として自然に考えられる。最後に、量子論において正則化の過程でよく用いられる重要な事実について注意しておく。量子接続 $\bar{A}$ とグラフ α が与えられているとき、グラフのすべてのエッジ e に対して $\bar{A}(e) = A(e)$ となる滑らかな接続 A が存在する。

次に量子状態について考える。$\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ 上の誘導された Haar 測度 μ^0_α の族が $\bar{\mathcal{A}}$ 上の正則な Borel 測度を定義し、μ^0 と書こう。M 上の微分同相写像は $\bar{\mathcal{A}}$ 上に自然な誘導された作用をもつ。測度 μ^0 はこの作用の元で不変である[*7]。これはなぜ $\mathcal{H} = L^2(\bar{\mathcal{A}}, \mathrm{d}\mu_0)$ が接続の背景独立な理論に対する状態の適切な Hilbert 空間であるかの理由である。

最後に、演算子のような $\mathcal{H}$ 上の他の構造を導入するために繰り返し用いられているように μ^0 を導く本質的なステップを強調しておく。空間 $\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ から始める。それぞれの $\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ は測度 μ^0_α が考えられる。この測

*7 当初は、数学者の間では非自明な微分同相不変な測度が存在しないと広く期待されていたため驚くべきことだった。しかしながら、この μ^0 は $\bar{\mathcal{A}}$ というより $\mathcal{A}$ 上で定義されていることに注意する。我々の構成がしっかりとした数学的基盤の上に成り立っているという事実を強調するために測度論の簡単な議論をしてきた。物理の分野において習慣的な状況とは逆に我々の汎関数積分は正式ではないが、うまく定義されており有限である。測度 $\mathrm{d}\mu^0$ は [9, 10] で導入され、[11–13] で異なる視点から議論されている。

度の族はグラフ α と α' に対して cylindrical である $\bar{\mathcal{A}}$ 上の関数 f が与えられたとき

$$\int_{\bar{\mathcal{A}}_\alpha} \mathrm{d}\mu^0_\alpha f_\alpha = \int_{\bar{\mathcal{A}}_{\alpha'}} \mathrm{d}\mu^0_{\alpha'} f_{\alpha'} \tag{4.45}$$

であるという意味で矛盾がない。$\bar{\mathcal{A}}$ 上の μ^0 の存在を保証するのがこの無矛盾性である。もっと一般には、$\bar{\mathcal{A}}$ 上の (幾何学的構造と同様に) 正則な Borel 測度が (いわゆる射影のテクニックを通して) 有限の空間 $\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ 上の矛盾のない構造を '互いに組み合わせる' ことで定義される。そのような測度のいくつかの族が構成され、μ^0 がもっとも単純なもので、ある一意性の結果のため、それらの中でもっとも便利である。

$\mathcal{A}$ から $\bar{\mathcal{A}}$ への移行はかなり非自明であり、格子ゲージ理論を越え、接続 A の無限自由度を考えるために生じる。Minkowski 時空での場の理論のように、古典的配位空間 $\mathcal{A}$ が量子配位空間 $\bar{\mathcal{A}}$ に ($\bar{\mathcal{A}}$ 上の自然な Gel'fand トポロジーにおいて) 稠密に埋め込まれているが、測度論的に $\mathcal{A}$ は疎である。つまり、$\mathcal{A}$ は μ_0 測度ゼロの集合に含まれる。一般的な量子状態が '非古典的な' 接続で与えられるという事実は '単なる数学的なテクニック' ではない。つまり、Hilbert 空間の言葉においてこのことは場の理論的無限 (例えば、我々がナイーヴに場の演算子をかけることができないという理由) の原点である。そして、隠れた無限がないようにするために、量子配位空間 $\bar{\mathcal{A}}$ に注意を払うことが必要である。

4.3.3　一般化されたスピンネットワーク

$\mathcal{H}$ を様々なグラフに関係する Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\alpha$ の直和として分解する試みは自然であり、さらに有限次元の Hilbert 空間へ直交分解するために 4.2.2 で導入された構成を用いる。しかし、このアイディアには基本的な問題がある。グラフ α に対して cylindrical な $\bar{\mathcal{A}}$ 上の各関数がすべてのより大きいグラフに対しても cylindrical であった。したがって、$\mathcal{H}$ の部分空間とみなせ、Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\alpha$ は互いに直交できない。この障害を越えるために、新しい Hilbert 空間を導入しよう。グラフ α が与えられたとき、$\mathcal{H}'_\alpha$ を α に完全に含まれるすべてのグラフ $\tilde{\alpha}$ と関連する部分空間 $\mathcal{H}_{\tilde{\alpha}}$ に直交する $\mathcal{H}_\alpha$ の部分空間とする。この $\mathcal{H}'_\alpha$ の導入を通して、望まない冗長性を取り除く。もし $f \in \mathcal{H}'_\alpha$ なら、α とは異なるグラフ β に対する $\mathcal{H}'_\beta$ に属することはできない。$\mathcal{H}'_\alpha$ の定義は扱いにくいように思うかもしれないが、式 (4.22) を用いて、$\mathcal{H}'_\alpha$ の具体的な記述を与えることは簡単である。

各表現が非自明であるような e のエッジに G の既約表現の $\mathbf{j}' = \{j'_1, \ldots, j'_n\}$ を割り当てる。次に、α の偽の各頂点 v で非自明な α の頂点に既約表現の割当を $\mathbf{l}' = \{l_1, \ldots, l'_{n_v}\}$ と書こう。ここで頂点 v が偽であるというのは、2 価である場合か v で交わるエッジ e_i と e_{i+1} が $e_i \circ e_{i+1}$ 自身が (v が '単にエッジを分割するような') 解析的なエッジである場合である。そうすると、$\mathcal{H}'_\alpha$ は

$$\mathcal{H}'_\alpha = \oplus_{\mathbf{j}',\mathbf{l}'} \mathcal{H}'_{\alpha,\mathbf{j}',\mathbf{l}'} \tag{4.46}$$

によって与えられる。$\mathcal{H}'_{\alpha,\mathbf{j}'}$ の定義において $\mathbf{j}'$ の条件は $(j_1, \ldots, j_n)$ のいずれかが消える Cyl の関数は $\mathcal{H}'_{\tilde{\alpha}}$ に属する。ここで、$\tilde{\alpha}$ は j_i が消えるようなエッジを取り除くことによって得られるより小さいグラフである。$\mathbf{l}'$ の条件は $\mathcal{H}'_{\alpha_1,\mathbf{j}'}$ の関数が α_1 の 1 つかそれ以上のエッジを新しい頂点を単に挿入し分割することによって α_2 が得られる $\mathcal{H}'_{\alpha_2}$ の関数も定義するために生じる冗長性を取り除く。$\mathcal{H}$ の望ましい分解は

$$\mathcal{H} = \oplus_\alpha \mathcal{H}'_\alpha = \oplus_{\alpha,\mathbf{j}'} \mathcal{H}'_{\alpha,\mathbf{j}'} \tag{4.47}$$

と書くことができる。

例

$G=SU(2)$ に対して、この手順をもっと具体的に行うことができる。グラフ α が与えられたとき、空間 $\mathcal{H}'_\alpha$ は以下の条件を満たす演算子 $[\hat{J}^v]^2$ と $[\hat{J}^e]^2$ のすべての同時固有ベクトルによって張られる空間 $\mathcal{H}_\alpha$ の部分空間である。条件 (i)$[\hat{J}^e]^2$ の固有値 $j'_e(j'_e+1)$ はグラフ α の各エッジ e に対して非零、(ii)$[\hat{J}^v]^2$ の固有値 l'_v は各偽の頂点 v で非零である。

$G=SU(2)$ の時、$\mathbf{j}$ と $\mathbf{l}$ は半整数、もしくはスピンの集合であり、分解 (4.47) は $\mathcal{H}$ のスピンネットワーク分解といわれる。一般のゲージ群に対して、それは $\mathcal{H}$ の一般化されたスピンネットワーク分解とよばれる。部分空間 $\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j}'}$ は有限次元であり、その要素は M 上の接続[*8]の量子論の一般化されたスピンネットワーク状態といわれる。これから見ていくように、スピンネットワーク部分空間 $\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j}'}$ は興味深い幾何学的演算子によって左不変である。この意味で、分解 (4.47) は直接的な物理的意味をもつ。(4.47) においてすべてのグラフの和があるため、Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ はとても大きい空間である。実際に、最初に議論された際に、'大きすぎて制御できない' と思われていた。しかしながら、射影技術の導入、スピンネットワーク、Hilbert 空間の直交分解によって、量子論が実際に格子ゲージ理論やスピン系での量子力学からテクニックを持ってくることによって相対的に簡単に発展することができた。

注意

3 価のスピンネットワークは量子重力に対する完全に異なるアプローチにおいて 1971 年に Penrose によってすでに導入されていた。Penrose は以下のような構成の視点にたって議論していた。: "私は確かに宇宙がこの描像であると提案したくない。。。しかし、私が記述しているモデルの本質的特徴はより現実的な状況へ応用できるより完全な理論と関連性はまだないということはありそうもないことではない。"[*9] 3 価のグラフは実際に半古典的な状況では '単純すぎる' が、Penrose の総合的な視点は量子幾何学において具体的で正確な方法によって理解される。

4.3.4　基本量子演算子

非相対論的な量子力学において、典型的にまず無限遠で急速に減衰する滑らかな関数の空間 $\mathcal{S}$ 上の演算子を定義し、完全な Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役な演算子に拡張していた。ここで同様の手順に従い、基本量子演算子を定義する。ここで $\mathcal{S}$ の役割は Cyl によって行われる。

配位演算子から始めよう。古典的な配位変数は $\bar{A}$ 上の複素数値 cylindrical 関数 f によって表現される。対応する量子演算子 $\hat{f}$ を

$$(\hat{f}\Psi)(\bar{A})=f(\bar{A})\Psi(\bar{A}) \tag{4.48}$$

と定義しよう。

*8　ときどき、この用語は特定の計算において選ばれた $\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j}'}$ における状態の正規直交基底とよばれる。しかしながら、そのような正規直交基底の導入はさらなる構造が要請される。$\mathcal{H}$ に自然に得られるものは一般化されたスピンネットワーク基底というようりもむしろ分解 (4.47) のみである。

*9　"I certainly do not want to suggest that the universe 'is' this picture . . . But it is not unlikely that essential features of the model I am describing could still have relevance in a more complete theory applicable to more realistic situations"

次に、2 次元面 S と S 上で $\mathfrak{g}$ 値の積分される場 f^i によってラベルされる運動量演算子 $\hat{P}_{S,f}$ を定義しよう。演算子 $\hat{L}_i$ と $\hat{R}_i$ のように、この作用は古典的な運動量と配位変数の間の Poisson 括弧式によってのみ与えられる。すべての $\Psi \in \mathrm{Cyl}$ に対して、

$$(\hat{P}_{(S,f)}\Psi)(\bar{A}) = i\hbar\{P(S,f), \Psi\}(\bar{A}) \tag{4.49}$$

後で用いるために、運動量演算子の作用を具体的に書いておこう。もし $\Psi \in \mathrm{Cyl}_\alpha$ ならば、

$$\hat{P}_{(S,f)}\Psi = \frac{\hbar}{2}\sum_v \left[\sum_{e \text{ at } v} \kappa(S,e)\hat{J}_i^{(v,e)}\Psi\right] \tag{4.50}$$

となる。ここで $\kappa(S,e)$ は (4.40) と同じものである。2 階微分可能な cylindrical 関数からなる定義域 $\mathrm{Cyl}^{(2)}$ では、これらの演算子は $\mathcal{H}$ 上で本質的自己共役 (essentially self-adjoint) (つまり、一意的な自己共役拡張が可能) である。$\hat{P}_{(S,f)}$ を ‘S 通過する電場のフラックス’ として解釈すると 2 次元面 S と α が S と交わる頂点 v と関係する Cyl_α 上の演算子 $\hat{J}_{i(u)}^{(S,v)}$ と $\hat{J}_{i(d)}^{S,v}$ を用いて別の表現ができる。(ここで (u) は ‘up’ を、(d) は ‘down’ を意味する。) もし、S の ‘上’ に α のエッジ $e_1, \ldots, e_u$ があり、S の ‘下’ にエッジ $e_{u+1}, \ldots, e_{u+d}$ があれば、

$$\hat{J}_{i(u)}^{S,v} = \hat{J}_i^{(v,e_1)} + \cdots + \hat{J}_i^{(v,e_u)} \tag{4.51}$$

$$\hat{J}_{i(d)}^{S,v} = \hat{J}_i^{(v,e_{u+1})} + \cdots + \hat{J}_i^{(v,e_{u+d})} \tag{4.52}$$

となる。これらの演算子を用いると、

$$\hat{P}_{(S,f)} = \frac{\hbar}{2}\sum_{v\in S} f^i(v)\left(\hat{J}_{i(u)}^{S,v} - \hat{J}_{i(d)}^{S,v}\right) \tag{4.53}$$

となる。ここで和は S のすべての点でとる。(cylindrical 関数に作用するとき、非加算な和において有限の項のみが非零であるため、演算子は Cyl 上でうまく定義されている。)

4.3.5 ゲージ対称性と微分同相対称性

古典論において、接続が定義されている束の自己同型写像は理論の対称性である。これらの対称性の群は M 上の滑らかな微分同相写像の群と滑らかな局所ゲージ変換群との半直積である。この節で量子論的な立場からこれらの対称性を議論しよう。一方で量子接続が任意の非連続性を持つことが可能であり、もう一方でそれらは閉じた区分解析的なエッジでのみと関連しているために変更が生じる。

まずゲージ変換をみていく。局所 G 回転 $\bar{g}\colon M \to G$ が与えられたとき、M においてソース v_- とターゲット v_+ を持つすべてのエッジ e に対して

$$\bar{g}\cdot\bar{A}(e) = g(v_+)\bar{A}(e)(g(v_-))^{-1} \tag{4.54}$$

によって定義される $\bar{\mathcal{A}}$ 上の能動的な写像がある。$\bar{g}$ は任意の非連続な M 上の G 値関数とできることに注意しておく。これらのゲージ変換の群を $\mathcal{G}$ と書こう。$\bar{\mathcal{A}}$ 上の自然な測度 μ_0 は $\bar{\mathcal{G}}$ の元で不変である。その結果、$\mathcal{H}$ 上の $\bar{\mathcal{G}}$ の対応する作用はユニタリーである。

$$(U_{\bar{g}}\Psi_\alpha)(\bar{A}) = \Psi(\bar{g}\cdot\bar{A}) \tag{4.55}$$

部分空間 $\mathcal{H}'_\alpha$、$\mathcal{H}'_{\alpha,\mathbf{j}'}$、$\mathcal{H}'_{\alpha,\mathbf{j}',\mathbf{l}'}$ のそれぞれはこの作用によって左不変である。さらに、$\mathcal{H}'_{\alpha,\mathbf{j}'}, \mathbf{l}' = 0$ の各量子状態はゲージ不変である。つまり、すべての $U_{\bar{g}}$ によってそれ自身に写されるということである。これは量子 Gauss 条件の解の Hilbert 空間を特徴づけるときに有効となる。

M 上の微分同相写像に話を戻そう。閉じた区分解析的エッジに制限しているため、M 上の解析的な微分同相写像は $\bar{A}$ に自然な作用を与える。しかしながら、Cyl への自然な写像 $\varphi : M \to M$ の大きな群がある。φ を M 上のすべての許されるグラフ[*10]を許されるグラフに写すような M 上の C^n 微分同相写像としよう。そうすると、量子接続の空間 $\bar{A}$ での φ の作用を M のすべてのパス e に対する

$$\varphi \cdot \bar{A}(e) = \bar{A}(\varphi(e)) \tag{4.56}$$

と定義することができる。そのような微分同相写像の群を Diff と書こう。この群の各要素 φ は Cyl で同型写像を自然に定義する。さらに、測度 μ_0 は Diff 不変であり、演算子 U_φ が各 $\bar{\varphi}$ によって $\mathcal{H}$ の中で定義され、

$$U_\varphi \Psi(\bar{A}) := \Psi(\bar{\varphi} \cdot (\bar{A})) \tag{4.57}$$

はユニタリーである。しかし、Diff に誘導される作用の元で、部分空間 $\mathcal{H}'_\alpha$、$\mathcal{H}'_{\alpha,\mathbf{j}'}$、$\mathcal{H}'_{\alpha,\mathbf{j}',\mathbf{l}'}$ は左不変とならず、それらは共変的に変換される。

群 Diff はすべての C^n 微分同相写像の部分群であるが、全解析的微分同相写像の群よりもかなり大きい空間である。極めて重要な違いは Diff の局所的性質である。：$x \in M$ のすべての点と x を含むすべての開近傍に対して、$\mathcal{U}_x$ の中では x は非自明に写されるが、$\mathcal{U}_x$ の外側では自明であるような写像 $\varphi \in \mathrm{Diff}$ がある。Diff の一般的な要素は解析的でない。おおざっぱに言うと、Diff は区分解析的 C^n 微分同相写像の群と考えることができる。この群は微分同相拘束条件を課す際に重要な役割をする。

注意

今まで述べてきた運動論の記述において、$\Psi(\bar{A}) = 1$ は $\mathcal{H}$ において唯一のゲージ不変かつ微分同相不変である状態である[*11]。この対称性より、それを '基底状態' とみなすことができる。それはすべての運動量 (か三脚場) 演算子によって消滅される。Cyl_α の要素は '励起状態' を表し、幾何学が α のエッジに沿ってのみ励起される。積分された三脚場 $\hat{E}_{S,f}$ は S が α のすくなくとも 1 つのエッジと交わっている時のみこれらの状態に非自明な作用を与える。これらの基本的な励起は 1 次元であるため、量子幾何学はポリマー的 (*polymer-like*) といえる。もしグラフがいくつかのエッジのみをもっていたら、高度な量子力学的状態 (いくつかの光子がある場合の量子 Maxwell 場の状態のアナロジー) をもつ。古典幾何学を近似するために多くのエッジをもち M と縦横無尽に交わっている 'とても密' な高い励起状態が必要になる。

接続の背景独立な理論に対する量子運動論の議論をまとめよう。

まず、古典相空間上のホロノミーとフラックス関数の Lie 代数を導入した。その後、このホロノミーーフラックス代数の量子アナロジーの自然な微分同相共変的な表現を構築した。わかりやすくするために、建設的なアプローチをとり、コンパクト Lie 代数 G 上の量子力学から始め、グラフ上の接続の量子論を

[*10] 許されるグラフの各エッジ e は閉じた区分解析的であることを思い出そう。それゆえ、区間のすべての解析的な埋め込み $e : [0,1] \to M$ に対して、像 $\varphi(e[0,1])$ は各 $e_I : [0,1] \to M$ が再び解析的な埋め込みとなる有限の和 $\cup_I e_I([0,1])$ であることが要請される。

[*11] M 上の微分同相写像は第 1 種拘束条件によって生成されるので、すべての物理的な状態は微分同相不変であるべきであると期待される。この期待は実際実証されるが、物理的状態は運動論での Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ よりも確かに大きい $\mathrm{Cyl}^\star$ に属する。

通して理論を展開してきた。一方、実際の発展は広い視野と第一原理から行われてきた。主な問題はホロノミーーフラックス代数の物理的に適切な表現を見つけることである。スタート地点は配位変数の代数を保つ Cyl がアーベル $\star$ 代数を持つことであった。上限ノルム (sup-norm) においてそれを完成させることによって、量子配位演算子の $C^{\star}$ 代数 $\overline{\mathrm{Cyl}}$ を得る。方略としては最初にその表現を探すことであり、そして、得られた Hilbert 空間上の運動演算子を表すことであった。Gel'fand の一般的な定理は $\overline{\mathrm{Cyl}}$ のすべての表現は以下のタイプであることを保証する。Hilbert 空間は正則な Borel 測度に対して $C^{\star}$ 代数の Gel'fand スペクトルとよばれるコンパクトな Hausdorff 空間上の 2 乗可積分関数の空間であり、配位演算子はその上に乗法として作用する。非自明な事実は Cyl の構造がスペクトルが示すのに容易であるということである。つまり、それは正確に我々の空間 $\bar{A}$ である。したがって、一歩ずつ構成してきた基本変数の代数表現は実際一般的な Gel'fand の表現理論に根本をなしている。

この方法がかなり一般的でうまく定義されているけれども、それにもかかわらずなぜより一般的な代数アプローチを選ぶのではなく、かわりに特定の表現に焦点を当てるのか？それはいくつかの部分的一意性定理が確立され、一般共変性が運動論的量子代数の一意的なサイクリック表現を選ぶことが十分であることが示唆されている。これは Segal 達による影響力のある結果の量子幾何学的アナロジーであり、Minkowski 時空での場の理論における Fock 真空を特徴づける。しかし、結果は Poincaré 不変性だけでなく、具体的な (すなわち自由な) 動力学を仮定しているが、この一意性定理はそのような動力学上の制限をしていない。したがって、量子幾何学的枠組みは驚くべくぐらいタイトである。これらの結果は背景独立な理論に対して、代数的アプローチの完全な一般化が不必要であるかもしれないといっているようである。もし一意的な微分同相不変な表現があるなら、その上に制限させるかもしれない。一般相対性理論のような非自明な拘束系に対して、このことはそのような拘束をもつ理論の満足し扱いやすい代数的取り扱いがまだ可能であるために幸運なことである。

第 5 章

量子 Riemann 幾何学

この章では、$\mathcal{H}$ の単純な幾何学的演算子を導入する。一般相対性理論の相空間に対して内部群は $SU(2)$ であり、Riemann 幾何学は (密度 1 である) 三脚場 $\tilde{E}_i^a = k\gamma P_i^a$ にコード化されていることを思い出そう。ここで、$\gamma > 0$ は Barbero-Immirzi パラメータである。それゆえ、量子論において $G = SU(2)$ とし、幾何学的演算子が三脚場演算子 $\hat{P}_{(S,f)}$ から作られる。ここでは直接的な応用 (エントロピー計算、量子動力学) をもつ面積演算子と体積演算子のみを取り扱うことにする。長さ演算子については [14] を参照。

5.1 面積演算子

S を M の閉じた 2 次元部分多様体であるか境界を持たない開いた 2 次元部分多様体であるとする。古典論において、その面積は $A(S) = \int_S \mathrm{d}^2x\sqrt{h}$ によって与えられる相空間上の関数である。ここで、h は S 上の内在的 (intrinsic, 固有)2 次元計量 h_{ab} の行列式である。ここでの目的はこの相空間の関数に対応する量子演算子を構成し、その性質を解析することである。

5.1.1 正則化

自然な方法はまず '基本' 変数 $P(S,f)$ を用いて A_S を書き直すことである。そして各 $P(S,f)$ を曖昧さなしの量子対応物によって置き換えることである。この方法はこれから述べる正則化の方法を自然に示す。

S を大量の基本セル $S_I(I = 1, 2, \ldots, N)$ に分割する。その各セルに内部三脚場 τ^i を導入し、その要素を試験場 f^i として用いることによって、$P(S,\tau^i) = P^i(S_I)$ とする。次に、(2.11) より密度 1 の正規直交三脚場 $\tilde{E}_i^a$ が $\tilde{E}_i^a = 8\pi G\gamma P_i^a$ を通して運動量場 P_i^a と関係していた。

$$[A_S]_N = 8\pi G\gamma \sum_{I=1}^{N} \sqrt{P^i(S_I)P^j(S_I)\eta_{ij}} \tag{5.1}$$

とおく。ここで η_{ij} は $su(2)$ 上の Cartan-Killing 計量である。そして、$[A_S]_N$ は以下の意味で面積 $A(S)$ の近似表現である。セル S_I の座標サイズを I において一様に 0 にいくようにセルの数を無限大にする極限で、

$$\lim_{N\to\infty} [A_S]_N = A_S \tag{5.2}$$

となる。各 $P^i(S_I)$ は曖昧さなく定義された量子演算子となるので、$[A_S]_N$ は適切に '正則化された面積関数' を表現し、極限 $N \to \infty$ は正則化因子を取り除く操作に対応する。量子論において、近似された面積演算子を定義し、各 I に対して $\hat{P}^i(S_I)\hat{P}^j(S_I)\eta_{ij}$ が $\mathcal{H}$ 上の正定値の自己共役演算子であることに注意して、

$$[\hat{A}_S]_N := 8\pi G\gamma \sum_{I=1}^{N} \sqrt{\hat{P}^i(S_I)\hat{P}^j(S_I)\eta_{ij}} \tag{5.3}$$

とおく。この演算子の具体的な表現を得るために、ある 1 つのグラフ α に関する Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\alpha$ への作用に制限しよう。まず、すべての基本セル S_I が α と多くても 1 点で交差する (もしくは α の線分を含む) ように分割を十分大きく取る。そして、積分された三脚場演算子の表式 (4.50) を用いて、(5.3) の和に寄与する非零の項が α と交差する S_I からのみきて、さらに更なる分割はこの結果を変えないことがわかる。したがって、与えられたグラフ α に対して、極限 $N \to \infty$ はすでに達成されていた。いくらか驚くことであるが、正則化因子の取り除きは量子論においてむしろ簡単に行うことができる。結果的に演算子 $\hat{A}_{S,\alpha}$ が

$$\hat{A}_{S,\alpha} = 4\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2 \sum_v \sqrt{-\Delta_{S,v,\alpha}} \tag{5.4}$$

によって与えられる。ここで、v は S にある α のすべての頂点で和を取っており、'頂点 Laplace 演算子'$\Delta_{S,v,\alpha}$ は Cyl_α 上で

$$\Delta_{S,v,\alpha} = -\left(\hat{J}^{S,v}_{i(u)} - \hat{J}^{S,v}_{i(d)}\right)\left(\hat{J}^{S,v}_{j(u)} - \hat{J}^{S,v}_{j(d)}\right)\eta^{ij} \tag{5.5}$$

のように定義される。('up' と 'down' 演算子 $\hat{J}^{S,v}_{i(u)}$ と $\hat{J}^{S,v}_{i(d)}$ は (4.51) で定義されている。) したがって、各 $\mathcal{H}_\alpha$ 上で非負の自己共役面積演算子 $\hat{A}_{S,\alpha}$ を得ることができた。

これらの演算子が完全な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のうまく定義された面積演算子を得るために組み合わせることがきできるかどうかという疑問が浮かび上がる。$\bar{A}$ 上の測度の定義のように、これは族の無矛盾性の問題である。もっと正確には、Cyl の要素 Ψ が 2 つの異なるグラフ α_1 と α_2 に対する Cyl_{α_1} と Cyl_{α_2} のともに属するとすると、$\hat{A}_{S,\alpha_1}\Psi$ は Cyl の要素として $\hat{A}_{S,\alpha_2}\Psi$ と等しいのかという問題である。答えは肯定的である。したがって、あるグラフ α に対して (5.4) によって Cyl_α に制限が与えられる $\mathcal{H}$ 上の非負の自己共役演算子 $\hat{A}_S$ が存在する。

実際、S 上の積分が全面積演算子 $\hat{A}_S$ を与える $\sqrt{h(x)}$ に対応する基本面積演算子を定義することもできる。点 $x \in S$ を固定し、x がセル S_I の内部に含まれるように細密にする。近似された面積要素 $[\sqrt{h(x)}]_N$ を

$$\sqrt{[h(x)]_N} = \frac{8\pi G\gamma}{\epsilon^2}\sqrt{P^i(S_I)P^j(S_I)\eta_{ij}} \tag{5.6}$$

を通して導入する。ここで、ϵ^2 はセル S_I の座標面積である。N を無限大にもっていったように、セルの座標サイズを一様に縮めていき、$\sqrt{h(x)_N}$ を $\sqrt{h(x)}$ にもっていく。前でやったように、正則化された量子演算子

$$\widehat{\sqrt{h(x)}}_N = \frac{8\pi G\gamma}{\epsilon^2}\sqrt{\hat{P}^i(S_I)\hat{P}^j(S_I)\eta_{ij}} \tag{5.7}$$

を単に積分された P を対応する演算子に置き換えることによって得ることができる。最後に正則化因子を取り除く。結果は $\mathcal{H}$ 上でうまく定義された演算子値超関数であり、Cyl_α への作用

$$\widehat{\sqrt{h_S(x)}} = 4\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2 \sum_v \delta^2_{(S)}(x,v)\sqrt{-\Delta_{S,v,\alpha}} \tag{5.8}$$

によって与えられる。ここで、$\delta^2_{(S)}(x,v)$ は S 上の 2 次元 Dirac のデルタ関数であり、和は α と S の交点 v で取っている。再び、この演算子の族は無矛盾であり、それゆえ $\mathcal{H}$ 上の演算子 $\widehat{\sqrt{h_S(x)}}$ を定義する。

注意

運動量演算子 $\hat{P}(S,f)$ と面積演算子 $\hat{A}_S$ の定義において、境界のない 2 次元多様体 S のみを考えた。もし、S をさらに $S = S' \cup I \cup S''$ とさらに分割したら (ここで S' と S'' は境界のない 2 つの 2 次元部分多様体であり、I は境界のない 1 次元部分多様体である)、古典的には $A_S - (A_{S'} + A_{S''}) = 0$ であるが、量子幾何学の超関数的性質のため、I を通過するエッジを持つグラフへの作用が非自明であるから、$\hat{A}_S - (\hat{A}_{S'} + \hat{A}_{S''})$ は非零となる。面積の加法性を得るために、I は 1 次元多様体であるけれども、この演算子を I の量子面積 $\hat{A}_{S,I}$ としてみなすことは自然である。この手順を進めるために、量子面積演算子 $\hat{A}_{V,S}$ に S の点 v も割当られる。詳細に計算すると、この演算子は単に $4\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2\sqrt{-\Delta_{S,v}}$ であることを示す。このことより、$\hat{A}_S = \sum_v \hat{A}_{S,v}$ である。つまり、面の量子面積はその上にある ‘すべての点に関係する面積’ の足し合わせによって得られるということである。

5.1.2 面積演算子の性質

各 Cyl_α に対して、面積演算子は

$$\hat{A}_{S,\alpha} = \int_S \mathrm{d}^2x \widehat{\sqrt{h_{S,\alpha}}}(x) = 4\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2 \sum_v \sqrt{-\Delta_{S,v,\alpha}} \tag{5.9}$$

によって定義される。$\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ 上の 2 階微分可能な関数からなる $\mathrm{Cyl}^{(2)}_\alpha$ の定義域で、この演算子は $\mathcal{H}_\alpha$ 上の本質的に自己共役演算子である。演算子のこの族が無矛盾であるから、定義域 $\mathrm{Cyl}^{(2)}$ での結果的な面積演算子も $\mathcal{H}$ 上で本質的に自己共役演算子となる。そして、演算子はゲージ不変 (頂点 v で $SU(2)$ ゲージ回転を生成する頂点演算子 $\hat{J}^v_i$ と可換) になることがわかる。その定義は背景構造を要請しないため微分同相共変である。

演算子の固有値は有限の和

$$a_S = 4\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2 \sum_I \sqrt{-\lambda_I} \tag{5.10}$$

によって与えられる。ここで、λ_I は演算子 Δ_{S,v_I} の任意の固有値である。この演算子は 3 つの可換な演算子の和

$$-\Delta_{S,v} = 2\left(\hat{J}^{(d)}_{S,v}\right)^2 + 2\left(\hat{J}^{(u)}_{S,v}\right)^2 - \left(\hat{J}^{(d)}_{S,v} - \hat{J}^{(u)}_{S,v}\right)^2 \tag{5.11}$$

のように共変的な形で書くことができる。ここでその固有値は明らかである。それらは

$$-\lambda = 2j^{(u)}\left(j^{(u)}+1\right) + 2j^{(d)}\left(j^{(d)}+1\right) - j^{(u+d)}\left(j^{(u+d)}+1\right) \tag{5.12}$$

によって与えられ、$j^{(u)}$、$j^{(d)}$、$j^{(u+d)}$ は任意の半整数で通常の条件

$$j^{(u+d)} \in \{|j^{(u)} - j^{(d)}|, |j^{(u)} - j^{(d)}| + 1, \ldots, j^{(u)} + j^{(d)}\} \tag{5.13}$$

を満たしている。

したがって、面積演算子の一般的な固有値は有限の和

$$a_S = 4\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2 \sum_I \sqrt{2j^{(u)}(j^{(u)}+1) + 2j^{(d)}(j^{(d)}+1) - j^{(u+d)}(j^{(u+d)}+1)} \tag{5.14}$$

によって与えられている。ここで、j は拘束条件 (5.13) が満たされている。

したがって、すべての固有値は離散的であり、面積ギャップ (最も小さい非零固有値 a_S) は

$$\Delta a_S = 4\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{5.15}$$

で与えられる。連続した固有値の間のレベル幅は一様ではなく、大きい固有値に対して指数的に減っている。このことは、固有値は本質的に離散的であるけれども連続近似は極めて良くとても急速に行われる。以下で考えるようなゲージ不変な部分空間とは異なるように、完全な運動学的 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上でこれらすべての性質は S のトポロジーとは無関係である。

5.1.3　ゲージ不変な部分空間

次に $\mathcal{H}$ のゲージ不変な部分空間に $\mathcal{H}_{\mathrm{inv}}$ に制限して考えよう。これは、すべての頂点演算子 $\hat{J}_i^v$ 対してゼロ固有値となる Cyl の要素によって張られる (すべての頂点 v に対して部分空間 $l_v = 0$ の状態)。面積演算子 $\hat{A}_S$ が S の大域的な性質に依存する。もし S の閉包が非自明な境界をもつ多様体であるならば、スペクトルは (5.14) と同じになる。しかしながら、もし $\partial S = \emptyset$ であるならば、ゲージ不変性は S に '入ってくる' 全スピンに追加の条件が課される。

この場合、まず、S は M を 2 つの非連結な開集合に分ける (M が $\mathbb{R}^3$ で S がその中にある 2 次元球面であるような場合など)。そして (5.12) のスピン $j_I^{(u)}$、$j_I^{(d)}$ は条件

$$\sum_I j_I^{(u)} \in \mathbb{N}, \qquad \sum_I j_I^{(d)} \in \mathbb{N} \tag{5.16}$$

を満足させる必要がある。ここで、$\mathbb{N}$ は自然数の集合である。また S に境界がないが $M \setminus S$ が連結である (例えば M が 3 次元トーラスであり、S がその中の 2 次元トーラスである) 時、条件は緩まり、

$$\sum_I j_I^{(u)} + \sum_I j_I^{(d)} \in \mathbb{N} \tag{5.17}$$

となる。特に、これらの場合、面積ギャップは増える。前者の場合、それは $4\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2(\sqrt{2})$ で与えられ、後者の場合は $4\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2$ で与えられる。したがって、(M, S) のトポロジーと面積ギャップの間で面白い関係がある。

もし、フェルミオン的な場がなければ、すべての物理的に関係のある状態は考えている状況下で $\mathcal{H}$ のゲージ不変な部分空間である $\mathcal{H}_{\mathrm{inv}}$ にある。しかしながら、フェルミオンがある場合、状態の重力部分は

フェルミオンがある場所の頂点でゲージ不変にはならない。特に、もし S の内部 (S が 2 次元球面の時) にフェルミオンがある場合、S の面積固有値は制限は緩くなり、これらの固有値からフェルミオンの存在を '気づく' ことができる。

注意

(i) 面 S を固定し、S の中にあり、S とグラフが交わる各頂点でゲージ不変であるエッジを持たないグラフに対する Cyl の状態のみを考える。(これは特に S とグラフのすべての交点が単に 2 価の頂点である場合である。) この場合、$j_I^{(u+d)} = 0$、$j_I^{(u)} = j_I^{(d)}$ であり、面積固有値は

$$a_S = 8\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2 \sum_I \sqrt{j_I(j_I+1)} \tag{5.18}$$

のように大幅に簡単化される。当初、間違ってこれらがすべての面積固有値であると信じられていた。

(ii)

面積演算子の定義 (5.4) から $\hat{A}_S$ と $\hat{A}'_S$ が面 S と S' が交わるなら可換でなくなることがわかる。これは Riemann 幾何学演算子が同時対角化されない[*1]ことを意味するために著しい性質となる。量子力学でさえ、配位空間が非自明な多様体なら一般に運動量表現は存在しないため、驚くことではない。しかしながら、この結果は、接続の動力学と幾何動力学 (geometrodynamics) の間の基礎的なつながりを浮き彫りにする。我々が見てきたように、量子接続動力学はとても 'タイト' で、一度基本変数としてホロノミー $A(e)$ と '電場フラックス'$P(S,f)$ が選ばれたら、背景独立な量子化において本質的に自由は存在しない。したがって、これらの一見したところ緩い仮定の元で、計量表現は (少なくとも明らかな表現において) 存在しないと結論することができる。この非交換性は概念的な興味であるけれども、半古典的な状況において、交換子の期待値は極端に小さいであろう。また、非交換性は Planck スケールを除いて観測可能な効果は現れない。

5.2 体積演算子

R を M の開部分集合とする。古典理論において､相空間上のその体積は $V_R = (\sqrt{8\pi G\gamma})^3 \int_R \mathrm{d}^3x \sqrt{|\mathrm{det}P|}$ によって与えられる。我々の目的はこの相空間の関数に対応する量子演算子を構成し、その性質を解析することである。詳細は [15–18] を参照。

5.2.1 正則化

面積演算子の時のように、まず、'基本' 変数 $P(S,f)$ によって V_R の古典表現を書き表すことからはじめ、各 $P(S,f)$ を量子的対応物に置き換える。これは正則化された体積演算子を与える。しかしながら、正則化因子を取り除く際に、テクニカルにより困難なことに出くわすため、手順をさらに追加する。

R の座標系 (x^a) を固定し、正の数 ϵ を考える。R の分割 $\mathcal{P}_\epsilon$ を以下のように定義する。R を各セル C が与えられている座標系で ϵ よりも小さい体積をもち、2 つの異なるセルは境界上の点でのみ共有する

[*1] したがって、多くの論文においてよく見られる 'スピンネットワーク基底はすべての幾何学的演算子を対角化させる' という主張は正しくない。$\mathcal{H}$ の自然なスピンネットワーク分解 (4.47) はあるが、自然なスピンネットワーク基底は存在しない。面 S が与えられると、$\hat{A}_S$ を対角化させるスピンネットワーク基底を見つけることができるが、すべての面と関連した面積演算子を対角化させる基底は存在しない。

ような立方体になるように族 $\mathcal{C}$ へ分割する。各セル C において、3 つの 2 次元面 $s=(S^1,S^2,S^3)$ を導入し、各面は C を 2 つの互いに素な部分へ分け、$a=1,2,3$ に対して $x^a|_{S^a}=$ 一定 になるとする。対 (C,s) の族は $\mathcal{P}_\epsilon$ を定義する。分割 $\mathcal{P}_\epsilon$ が与えられると、以下のような体積 V_R の近似表現を導入することができる。

$$V_R^{\mathcal{P}_\epsilon}=\sum_{C\subset R}\sqrt{|q_{s,C}|}\qquad \text{ここで } q_{s,C}=\frac{(8\pi G\gamma)^3}{3!}\epsilon^{ijk}\eta_{abc}P^i(S^a)P^j(S^b)P^k(S^c) \tag{5.19}$$

そして

$$\lim_{\epsilon\to 0}V_R^{\mathcal{P}_\epsilon}=V_R \tag{5.20}$$

となり、座標系や分割の依存性はこの極限で消える。

量子論へ移行するために、各グラフ α に対する体積演算子 $\hat{V}_{R,\alpha}$ の無矛盾な族を定義する必要がある。グラフ α を固定し、α の各頂点 v がいくつかのセル C_V の 2 次元面 S^1、S^2、S^3 の 3 つ組の交点であるような分割 $\mathcal{P}_\epsilon$ を考えよう。そうすると、近似体積関数 $V_R^{\mathcal{P}_\epsilon}$ から量子演算子 $\hat{V}_{R,\alpha}^{\mathcal{P}_\epsilon}$ を簡単に導くことができる。

$$\hat{V}_{R,\alpha}^{\mathcal{P}_\epsilon}=\sum_{C\subset R}\sqrt{|\hat{q}_{s,C}|}\qquad \text{ここで}\hat{q}_s=\frac{(8\pi G\gamma)^3}{3!}\epsilon_{ijk}\eta_{abc}\hat{P}^i(S^a)\hat{P}^j(S^b)\hat{P}^k(S^c) \tag{5.21}$$

である。この演算子は $\bar{\mathcal{A}}_\alpha$ 上の 3 階微分可能関数の空間 $\mathrm{Cyl}_\alpha^{(3)}$ 上でうまく定義されている。さらに、演算子の極限 $\epsilon\to 0$ は存在する。しかしながら、古典論とは異なり、正則化の過程で用いた分割 $\mathcal{P}_\epsilon$ には依存する。このことは簡単な面積演算子の時には生じなかった新しい複雑性である。しかし、正則化因子を取り除く前に分割 $\mathcal{P}_\epsilon$ の構成で用いた本質的な背景構造に対する平均を取ることによってこの問題を扱うことができる。この余分なステップは [17] に詳しく書いてある。結果的に演算子は

$$\hat{V}_{R,\alpha}=\kappa_0\sum_v\sqrt{|\hat{q}_{v,\alpha}|} \tag{5.22}$$

によって与えられる。ここで、

$$\hat{q}_{v,\alpha}=(8\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2)^3\frac{1}{48}\sum_{e,e',e''}\epsilon_{ijk}\epsilon(e,e',e'')\hat{J}_i^{(v,e)}\hat{J}_j^{(v,e')}\hat{J}_k^{(v,e'')} \tag{5.23}$$

であり、κ_0 は (通常 1 におくが) 平均操作からくる全体に掛かる決まらない定数係数であり、v は α の頂点の集合をとり、各 e、e'、e'' は v で出会う α のエッジの集合をとり、$\epsilon(e,e',e'')$ は向き付け因子である。(したがって、もし頂点 v の 3 つのエッジに対する接ベクトルが平面、つまり 2 次元平面上にある場合、であれば $\epsilon(e,e',e'')=0$ になる。もしそれらが定義する向き付けが M の基準向き付けと同じ向きであったり逆向きであったりするならば ± 1 となる。) この演算子の族が無矛盾であり、定義域が $\mathrm{Cyl}^{(3)}$ である $\mathcal{H}$ 上の 1 つの稠密に定義された演算子 $\hat{V}_R$ を定義することを確かめるのは容易である。

再び、各 $\mathrm{Cyl}_\alpha^{(3)}$ に体積基本演算子を導入することは意味があるであろう。

$$\widehat{\sqrt{q(x)}}_\alpha=\kappa_0\sum_v\delta^{(3)}(x,v)\sqrt{|\hat{q}_v,\alpha|} \tag{5.24}$$

これらの演算子の族は無矛盾であり、$\hat{V}_R = \int_R \mathrm{d}^3x \widehat{\sqrt{|q(x)|}}$ を満足する $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された演算子 $\widehat{\sqrt{q(x)}}$ を持つ。

最後に、古典論において点 x での接続とその点を含む領域の体積の間の Poisson 括弧式 $\{A^i_a(x), V_R\}$ は余三脚場 $e^i_a(x)$ に比例する。この事実は、長さ演算子の定義を導き、また量子動力学の議論において著しく特徴づける余三脚場演算子を導入する際に有効に用いられる。

5.2.2 体積演算子の性質

$\hat{V}_R$ はゲージ不変であり、M の微分同相写像 ($\varphi : M \to M$ の元で $\hat{V}_R \to \hat{V}_{\varphi \cdot R}$ である) に対して共変的である。全体積演算子 $\hat{V}_M$ は微分同相不変である。したがって、その作用は $\mathrm{Cyl}^\star$ の微分同相不変な部分空間上でうまく定義されている。この性質は Hamiltonian 拘束条件の解析で重要な役割を果たす。

(5.23) の $\epsilon(e, e', e'')$ の存在のため、もし v で出会うすべてのエッジが平面的であれば $\hat{q}_{v,\alpha} = 0$ になることは明らかである。特に、もし v が 2 価であれば $\hat{q}_{v,\alpha} = 0$ である。もっと驚くべきことに、すべての 3 価の頂点に対しても $\hat{q}_{v,\alpha}\Psi = 0$ は状態 Ψ が v でのゲージ変換に対して不変であることを与える。実際、e、e'、e'' が v で出会う α のエッジであるとしよう。定義より $\epsilon(e, e', e'') = 1$ である。v でのゲージ不変性 ($\hat{J}^{(v,e)}_i + \hat{J}^{(v,e')}_i + \hat{J}^{(v,e'')}_i = 0$) を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{48}{(8\pi\gamma l^2_{\mathrm{Pl}})^3}\hat{q}_{v,\alpha}\Psi &= \epsilon^{ijk}\hat{J}^{(v,e)}_i \hat{J}^{(v,e')}_j \hat{J}^{(v,e'')}_k \Psi \\
&= -\epsilon^{ijk}\hat{J}^{(v,e)}_i \left(\hat{J}^{(v,e)}_j + \hat{J}^{(v,e'')}_j\right) \hat{J}^{(v,e'')}_k \Psi \\
&= -2i\left(\hat{J}^{(v,e)}_j \hat{J}^{(v,e'')}_k \eta^{jk} - \hat{J}^{(v,e)}_i \hat{J}^{(v,e'')}_j \eta^{ij}\right)\Psi \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

を得る。

面積演算子のように、$\hat{q}_{v,\alpha}$、$\hat{V}_{R,\alpha}$、$\hat{V}_R$ のすべての固有値が実数で離散的であるがわかる。$\hat{V}_R$ のスペクトル (つまり、すべての固有値の集合) が特定の開領域 R に関係なく同じである。点 $x \in M$ が与えられると、$\widehat{\sqrt{q(x)}}$ のスペクトル (つまり、固有値の完全な集合) は $\mathcal{H}$ の正規直交分解において (有限次元の) スピンネットワーク空間 $\mathcal{S}_{\alpha,\mathbf{j},\mathbf{l}}$ のそれぞれへの $\hat{q}_x$ の制限した時のスペクトルの和によって単純に与えられる。この性質のため、体積演算子 $\hat{V}_R$ の多くの固有値と固有ベクトルは多くの特別な場合において計算されている ([15, 19–21] を参照)。しかしながら、完全なスペクトル、大きい体積に対して固有値の数がどのように増えるのかの概算ですらよく知られていない。

ゲージ不変な状態の空間において、最も簡単な固有ベクトルは 4 価の頂点から作られる。この場合でさえ、固有値の完全な集合は知られていない。しかし、テクニカルな単純化は量子 Hamiltonian 拘束条件の解析で役立つ体積演算子の行列要素の計算を行うことができるようになる。v をエッジ e、e'、e''、e''' が出会う α の 4 価の頂点とする。そして、$l_v = 0$ の部分空間 $\mathcal{S}_{\alpha,\mathbf{j},\mathbf{l}}$ 上の $\hat{q}_{v,\alpha}$ の作用を考えよう。そうすると、

$$
\hat{q}_{v,\alpha} = (8\pi\gamma l^2_{\mathrm{Pl}})^3 \frac{1}{8}\kappa(e, e', e'', e''')\epsilon^{ijk}\hat{J}^{v,e}_i \hat{J}^{v,e'}_j \hat{J}^{v,e''}_k \tag{5.26}
$$

となり、ここで、$\kappa(e, e', e'', e''') \in \{-2, -1, 0, 2, 3, 4\}$ であり、v での 4 つの接ベクトルの微分同相クラ

スに依存している。v でのゲージ不変性を用いると、表現は

$$\hat{q}_{v,\alpha} = (8\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2)^3 \frac{1}{32i}\kappa(e,e',e'',e''') \left[\left(\hat{J}^{(v,e')} + \hat{J}^{(v,e'')} \right)^2, \left(\hat{J}^{(v,e)} + \hat{J}^{(v,e'')} \right)^2 \right] \tag{5.27}$$

の形に表すことができ、部分空間 $\mathcal{H}_{\alpha,\mathbf{j},\mathbf{l}}$ の行列要素の計算を簡単化させる。

最後に、量子動力学で重要な役割をする体積演算子の性質を注意しておく。$R(x,\epsilon)$ を点 $x \in M$ の近傍の族とする。そうすると、$\mathrm{Cyl}_\alpha^{(3)}$ の任意の要素 Ψ が与えられると、

$$\lim_{\epsilon\to 0} \hat{V}_{R(x,\epsilon)}\Psi \tag{5.28}$$

は存在するが、零である必要はない。これは量子幾何学の ‘離散的’ な性質を反映している。

5.2.3　‘External な’ 正則化

基本運動量は 2 次元面で積分されているので、幾何演算子を定義する際の正則化において、必ず古典相空間上の幾何学的関数を $P(S,f)$ を用いて書き表すことから始まる。しかし、これを達成する時に考慮すべき自由度があり、異なる表現が正則化因子を取り除いた時に古典相空間上の同じ関数を与えるかもしれないが、その量子対応物はこの性質を持っている必要はない。これは量子論の通常の ‘因子の順序付けの問題’ である。特に、各基本セル C の体積をセルの中にある 3 つの 2 次元面 S^a $(a=1,2,3)$ によって表している。この方法は ‘internal regularization’ と言われる。他の自然な方法はセルを囲っている 6 つの 2 次元面 $\tilde{S}^a$ $(a=1,\ldots,6)$ を用いることである。この ‘external regularization’ の方策は 3 価のグラフのゲージ不変な状態に対して Rovelli と Smolin [22] によって最初に導入された。この体積演算子はこれらの状態に対して恒等的に零になることが後にわかったが、Rovelli と Pietri [15] はこの方法を非自明な状況へ拡張できることを示した。

詳細な解析 [17] では、R の分割を注意して構成することによって収束性の問題に注意を払えば等しく実行できることを示した。そうすると、最終的な体積演算子は (5.23) の形を取るが、

$$\hat{V}_{R,\alpha}^{\mathrm{Ext}} = \kappa_0 \sum_v \sqrt{|\hat{q}_{v,\alpha}^{\mathrm{Ext}}|} \qquad \text{ここで、}\hat{q}_{v,\alpha}^{\mathrm{Ext}} = (8\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2)^3 \frac{1}{48} \sum_{e\neq e'\neq e''\neq e'''} \epsilon^{ijk} \hat{J}_i^{(v,e)} \hat{J}_j^{(v,e')} \hat{J}_k^{v,e''} \tag{5.29}$$

によって与えられる。グラフ α に対して cylindrical であり 3 価の頂点 v でゲージ不変である状態 Φ は新しい $\hat{q}_{v,\alpha}^{\mathrm{Ext}}$ によって消滅される。さらに、ゲージ不変な 4 価の頂点では $\hat{q}_{v,a\alpha}^{\mathrm{Ext}}$ は v での接ベクトルの微分同相クラスに依存する乗法因子を法として $\hat{q}_{v,\alpha}$ と等しい。単純な状態のこの近い関係にも関わらず、2 つの演算子は (5.29) に向き付け因子 $\epsilon(e,e',e'')$ がないために基本的に異なる。特に、この因子のため、始めに構成した演算子はグラフの頂点の異なる構造を知っているということになる。それとは逆に (5.29) の作用は ‘トポロジカル’ である。

内部で正則化された演算子は多くの論文で用いられる。例えば、連続体での体積演算子の性質の Thimeann による解析 [18] や格子の Loll の解析 [19, 23] は (5.23) を参照している。同様のことは Hamiltonian 拘束条件の議論において Thiemann や他の人によって用いられている体積演算子にも当てはまる。

第 6 章

量子発展 (Quantum dynamics)

量子幾何学の枠組みは量子 Einstein 方程式の正確な定式化に対して適切な方法を与える。2 章で述べたように、演算子値の超関数の積の背景独立な正則が困難であるために、量子 Einstein 方程式が幾何動力学においてまだ形式的なままである。それとは逆に、接続動力学では運動学的状態のうまく定義されている Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を得ており、量子 Einstein 方程式の左辺を $\mathcal{H}$ 上のうまく定義された演算子によって表そうとする試みは自然である。相互作用する (低い次元の) 場の量子論において、量子運動学と量子動力学との間のデリケートな関係がある。つまり、基本演算子代数の表現が適切に選ばれない限り、典型的に Hamiltonian を Hilbert 空間上でうまく定義することに失敗してしまう。一般相対性理論のような複雑な系に対して、'正しい' 運動学的な表現を選ぶという問題は極端に難しいであろうことは想像できる [24]。しかし、主な簡単化は一意性のため行うことができる。つまり、一般共変性の要請はホロノミーと電場のフラックスによって生成される代数の一意的な表現を選び出す [25–28]。それゆえ、接続の背景独立な理論に対して 1 つの道具を得ることができ、もちろんこの数学的に自然な運動学の代数を与える動力学に対する自然な方法は '物理的に正しい'。(この但し書きは場の量子論にも存在する。) この方法は量子 Einstein 方程式に対するうまく定義された候補の理論となるだろう。

一般相対性理論は背景場を持たないために理論がその相空間の定式化を完全に拘束することを思い出そう。量子論へ移行するために、2 つの標準的なアプローチのうち 1 つを用いることができる。2 つの標準的なアプローチとは (i)'本当の自由度' を表す理論の簡約された相空間を見つけ、それによって拘束条件を取り除き、そして結果的に拘束されていない理論の量子論を構築するアプローチ、(ii) まず拘束条件を無視し完全な相空間に対して量子運動学を構成し、そして拘束条件に対応する量子演算子を見つけ、最後に物理的状態を得るために量子拘束条件を解くアプローチである。ループ量子重力理論は Dirac によって始められたように 2 番目の方法をとる。このプログラムは量子 Einstein 方程式のすべてに立脚していることを具体的に見ることができる $(2+1)$ 次元重力 [29,30] や (3+1) 次元のミニスーパースペース [31] のような多くの簡単化された系において完成されている。拘束系の量子化は [32] をみると良い。一般相対性理論で出くわした概念的やテクニカルな複雑さを適切に取り扱うために Dirac の最初のプログラムが修正され、適切に拡張されてきた。'refined algebraic quantization' とよばれる枠組みを用いることにする。さらなる詳細は [33–35] を参照すると良い。

6.1　ガウス拘束条件

ガウス拘束条件 $G_i = \mathcal{D}_a P_i^a = 0$ は一般相対性理論の相空間上の内部 $SU(2)$ 回転を生成するものであった。もっと正確に述べると、M 上の $su(2)$ 値の関数 ξ が与えられると、相空間の関数を得るために

$$\mathcal{C}_{\mathrm{G}}(\xi) = \int_M \mathrm{d}^3x P_i^a(x)\mathcal{D}_a\xi^a(x) \tag{6.1}$$

のようにそれを積分場として用いることができる。これは無限小正準変換 $(A, P) \to (A - \mathcal{D}\xi, P + [\xi, P])$ を生成する。発見的な ansatz $P \to -\mathrm{i}\hbar\delta/\delta A$ を用いると $\mathcal{C}_{\mathrm{G}}(\xi)$ を $\mathcal{H}$ 上のうまく定義された演算子にすることは容易である。任意の $\Psi_\alpha \in \mathrm{Cyl}_\alpha^{(1)}$ に対して、

$$\hat{\mathcal{C}}_{\mathrm{G}}(\xi)\Psi_\alpha = \hbar\sum_v\sum_e\left(\xi^i(v)J_i^{(v,e)}\right)\Psi_\alpha \tag{6.2}$$

ここで、最初の和は α のすべての頂点 v で和を取っており、2 つ目の和は v で出会うすべてのエッジ e で和を取っている。$\hbar$ の因子は別として、この作用は $\mathcal{H}_\alpha$ 上のゲージ変換の生成子と一致する。この $\mathcal{H}_\alpha$ 上の演算子の族は無矛盾であり、$\hat{\mathcal{C}}_{\mathrm{G}}(\xi)$ によって書かれる $\mathcal{H}$ 上の自己共役な演算子を定義する。有限のゲージ変換はこれらの演算子によって生成される 1 径数ユニタリー群によって生成される。

物理的状態はすべての $\xi \in su(2)$ に対する $\hat{\mathcal{C}}_{\mathrm{G}}$ の核 $\mathcal{H}_{\mathrm{inv}}^{\mathrm{G}}$ に属する。$\hat{\mathcal{C}}_{\mathrm{G}}$ の作用はよく知っているため、核を見つけるのは容易である。つまり、Hilbert 空間の分解を用いて

$$\mathcal{H}_{\mathrm{inv}}^{\mathrm{G}} = \bigoplus_{\alpha,\mathbf{j}}\mathcal{H}'_{\alpha,\mathbf{j},\mathbf{l}=0} \tag{6.3}$$

となる。これらの状態は $\bar{\mathcal{G}}$ の一般化されたゲージ変換の元で自動的に不変となり、簡約化された量子配位空間 $\bar{\mathcal{A}}/\bar{\mathcal{G}}$ 上の関数と見なすことができる。$\mathcal{H}_{\mathrm{inv}}^{\mathrm{G}}$ は零が拘束演算子 $\hat{\mathcal{C}}_{\mathrm{G}}(\xi)$ のスペクトルの離散部分にあるため、$\mathcal{H}$ の部分空間となる。特に、$\mathcal{H}_{\mathrm{inv}}^{\mathrm{G}}$ は $\mathcal{H}$ から Hilbert 構造を受け継ぎ、$\mathcal{H}_{\mathrm{inv}}^{\mathrm{G}} = L^2\left(\bar{\mathcal{A}}/\bar{\mathcal{G}}, \mathrm{d}\mu_0^{\mathrm{G}}\right)$ である。ここで、$\mathrm{d}\mu_0^{\mathrm{G}}$ は $\bar{\mathcal{A}}/\bar{\mathcal{G}}$ 上の自然な測度であり、自然な射影写像 $\bar{\mathcal{A}}$ から $\bar{\mathcal{A}}/\bar{\mathcal{G}}$ の元で $\mathrm{d}\mu_0$ の押し出し (push-forward) である。すべての (面積 $\hat{A}_S$ や体積 $\hat{V}_R$ のような) ゲージ不変な演算子は $\mathcal{H}_{\mathrm{inv}}^{\mathrm{G}}$ でうまく定義された作用を持つ。

ガウス拘束条件を容易に課すことができ、$\mathcal{H}_{\mathrm{inv}}^{\mathrm{G}}$ の構造がとても単純であるという事実は手順を非自明なものにする。例えば、もし $\bar{\mathcal{A}}$ において通常の超関数空間の 1 つを量子配位空間として用いるならば、ガウス拘束条件を課すことや物理的状態の Hilbert 空間の構築は複雑になり、これらの困難さを乗り越えることは明らかではない。

しかし、Hamilton 形式において時間発展が拘束条件によって生成されるため、量子論において動力学は拘束条件演算子に記号化されている。単純な例は Minkowski 空間の中の自由粒子によって与えられ、古典的相空間上の拘束条件 $g^{ab}p_ap_b + m^2 = 0$ は量子論で動力学を支配する $\Box\phi - m^2\phi = 0$ となる。

6.2　微分同相拘束条件

次に微分同相拘束条件を考えよう。この拘束条件を課すことはより複雑であろうことはわかる。それは鍵となる違い、$SU(2)$ ゲージ回転の元で不変である $\mathcal{H}$ の無限次元部分空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{inv}}^{\mathrm{G}}$ があるが、微分同相写

像はグラフを動かすためにすべての微分同相写像の作用によって不変である $\mathcal{H}$ の唯一の要素は $\bar{\mathcal{A}}$ 上の定数関数であるというためである。結果として、量子拘束条件に対する解は運動学的 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ にはなく、より大きい空間 Cyl の双対 $\mathrm{Cyl}^\star$ にある。これはまれなことではない。拘束条件 $p_x = 0$ を持つ $\mathbb{R}^3$ の中の粒子のような単純な量子力学系でさえ、拘束条件に対する解は運動学的な Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ で有限のノルムを持つのことが出来ず、より大きな空間、例えば $\mathbb{R}^3$ の中の超関数の空間などに属する。同様の方法で、系統的な枠組みを構築することが可能であり、微分同相拘束条件に対する一般解を得ることができる。

6.2.1　方法

M 上の各ベクトル場 N^a は重力の相空間上の拘束条件の関数 $\mathcal{C}_{\mathrm{Diff}}(\vec{N})$ を

$$\mathcal{C}_{\mathrm{Diff}}(\vec{N}) = \int_M \mathrm{d}^3x \left(N^a F^i_{ab} P^b_i - P^a \mathcal{D}_a \left(N^b A^i_b\right)\right) \tag{6.4}$$

と定義していた。$\mathcal{C}_{\mathrm{Diff}}(\vec{N})$ によって生成される無限小正準変換の元で、$(A, P) \to (A + \mathcal{L}_{\vec{N}} A, P + \mathcal{L}_{\vec{N}} P)$ となる。数学的に正確な文献において、量子論で最初に興味があるのは拘束条件によって生成される有限のゲージ変換である。それゆえ、我々の場合、物理的な状態が $\vec{N}$ によって生成される有限のゲージ変換 φ の元で不変であるように要請することによって微分同相拘束条件を課すことは適切である。$\bar{\mathcal{A}}$ 上の測度 $\mathrm{d}\mu_0$ は微分同相不変であるので、φ の誘導される作用はユニタリーである。したがって、ベクトル場 N^a が与えられると M 上の微分同相写像の 1 径数族 $\varphi(\lambda)$ とそれに対応する $\mathcal{H}$ 上のユニタリー演算子の族 $\hat{\varphi}(\lambda)$ を得る。しかし、この族は φ が α を動かすなら Cyl_α は $\mathrm{Cyl}_{\varphi\cdot\alpha}$ に正規直交なので、λ において弱連続ではない。したがって、$\hat{\varphi}(\lambda)$ の無限小生成子が存在しないことになる。しかし、これは拘束条件の量子実行に対して有限の微分同相写像を直接実行できるため、問題にはならない。つまり、物理的な状態は M 上の適切な微分同相写像 φ の誘導される作用 $\hat{\varphi}$ の元で不変である。

拘束条件を解くために、そのような拘束条件[*1]に対して一般的に得られる ‘group averaging procedure’ を用いよう。つまり、物理的状態は微分同相群の誘導された作用に対して Cyl の要素を平均することによって得られる。群平均の結果は微分同相不変であることは直感的に明らかである。しかしながら、Cyl の状態を用いたが、結果は自然に $\mathrm{Cyl}^\star$ に属する。$\mathrm{Cyl}^\star$ は Cyl の代数的双対である[*2]。有限次元の拘束系において、一般に 3 重項 $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}_{\mathrm{kin}} \subset \mathcal{S}^\star$ を用いる。ここで、$\mathcal{S}$ は典型的に無限遠で急速に減少する滑らかな関数の空間であり、$\mathcal{S}^\star$ は超関数の空間である。拘束条件に対する解は、拘束条件によって生成される群に対して $\mathcal{S}$ の要素を平均することによって得られ、それらは運動学的な Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}$ というよりも一般的に $\mathcal{S}^\star$ に属する。今の場合、完全に対応する状況にあり、三重項は $\mathrm{Cyl} \subset \mathcal{H} \subset \mathrm{Cyl}^\star$ である。

最後に、グラフ α が閉じた区分解析的エッジを持つことを要請しているという事実からくる重要なテクニカルな巧妙さがある。一方、古典的相空間は滑らかな (つまり C^∞ の) 場 (A, P) から構成されている。

[*1] 量子ガウス拘束条件は $\bar{\mathcal{G}}$ 上の群平均を通しても厳密に実行することができる。最終的な結果は同じである。ここでは、スカラー拘束条件に対する手順に近い手順を採用した。

[*2] 最後に、Hilbert 空間のトポロジーより細かい Cyl 上の適切なトポロジーを導入しなければならない。$\mathrm{Cyl}^\star$ を Cyl のトポロジー的双対としよう。プログラムはこのような洗練さには達しておらず、ちょっとの間かなり大きい代数的双対を用いる。

滑らかな微分同相写像 φ は拘束条件 (6.4) によって生成される有限の正準変換に対応し、相空間上のうまく定義された作用を持つ。その作用は定義に閉じた区分解析的エッジと超曲面が含まれているため、'基本変数' の完全な代数への単なる拡張ではない。それゆえ微分同相写像を課す自然な方法は、枠組みを拡張し滑らかなエッジや超曲面を扱うことである。これは可能であるが、2 つの滑らかな曲線はお互い無限の点で交わるためにテクニカルな議論はもっと複雑なものになる。そこで、'媒介'(in-between) アプローチを用い、基本変数へのうまく定義された作用と Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を持つ M のすべての C^n 級の微分同相写像の部分群 Diff を用いる。物理的視点より、単なる解析的な微分同相写像に対する平均よりもより適切なものであり、数学的な視点から、非解析的なエッジと超曲面と関係する複雑さを回避させるものである。

6.2.2　物理的状態

これからやるべきことは、微分同相拘束条件に対する一般解を構成することである。このため、スピンネットワーク分解 (4.47)：$\mathcal{H} = \oplus_\alpha \mathcal{H}'_\alpha$ を用いる。まずいくつかの記法を導入する。グラフ α が与えられる時、α から α への写像である Diff の部分群を Diff_α と書き、その中で α への自明な作用 (つまり、α のすべてのエッジと向き付けを保つ作用) を持つ部分群を TDiff_α と書こう。誘導される作用 $\widehat{\mathrm{TDiff}_\alpha}$ は Cyl_α への自明な作用である。次に、Diff_α を α を保つすべての微分同相写像の群としよう。そうすると、商群

$$\mathrm{GS}_\alpha = \mathrm{Diff}_\alpha / \mathrm{TDiff}_\alpha \tag{6.5}$$

は α のグラフ対称性の群となる。それは有限群であり、Cyl_α への非自明な誘導された作用 $\widehat{\mathrm{GS}_\alpha}$ を持つ。群平均の方法において、無矛盾性は、これらの群の軌道の '体積' によって分割しなければならないことを要請する。

微分同相拘束条件に対する一般解を構成するために、2 つのステップを行う。1 つ目は任意の $\Psi_\alpha \in \mathcal{H}'_\alpha$ が与えられた時、それをグラフ対称性の群のみを用いて平均し、$\mathcal{H}'_\alpha$ から GS_α の元で不変である部分空間への射影写像 $\hat{P}_{\mathrm{diff},\alpha}$ を得る。

$$\hat{P}_{\mathrm{diff},\alpha} \Psi_\alpha := \frac{1}{N_\alpha} \sum_{\varphi \in \mathrm{GS}_\alpha} \varphi \star \Psi_\alpha \tag{6.6}$$

ここで、N_α は GS_α の要素数であり、$\varphi \star \Psi_\alpha$ は φ の元での Ψ_α の引き戻しである。この写像は $\mathcal{H} = L^2(\bar{\mathcal{A}}, \mathrm{d}\mu_0)$ からすべての α に対して GS_α の元で不変である部分空間への射影 $\hat{P}_{\mathrm{diff}}$ へ自然に拡張する。

2 番目のステップとして、グラフ α を動かす残りの微分同相写像に対する平均を取る。これはとても大きい群であり、平均の結果が $\mathcal{H}$ よりも $\mathrm{Cyl}^\star$ に属する。したがって、各 $\Psi_\alpha \in \mathcal{H}'_\alpha$ と任意の cylindrical な関数 $|\Phi_\beta\rangle$ への (線形な) 作用によって定義される要素 $(\eta(\Psi_\alpha)|$ を結びつける。

$$(\eta(\Psi_\alpha)|\Phi_\beta\rangle = \sum_{\varphi \in \mathrm{Diff}/\mathrm{Diff}_\alpha} \langle \varphi \star \hat{P}_{\mathrm{diff},\alpha} \Psi_\alpha, \Phi_\beta \rangle \tag{6.7}$$

ここで、右辺の括弧は $\mathcal{H}$ の要素間の内積を意味する。$\varphi \in \mathrm{Diff}/\mathrm{Diff}_\alpha$ は無限の要素 φ を含むが、任意の β が与えられると、有限の数の項のみ非零になり、そのため、$\eta(\Psi_\alpha)$ はうまく定義される。しかし、

$\langle\eta, \Phi_\beta\rangle$ がすべての $\Phi_\beta \in \mathrm{Cyl}$ に対して (6.7) の右辺と等しくなるような $\mathcal{H}$ のベクトル η は存在しない。したがって、$(\eta(\Psi_\alpha)|$ は関数というより $\bar{\mathcal{A}}$ 上の '正真正銘の超関数 (genuine distribution)' である。$\mathcal{H}$ 上の内積の微分同相不変性のため、$\eta(\Psi_\alpha)$ は $\mathrm{Diff}(M)$ の作用の元で不変である。すべての $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ に対して

$$(\eta(\Psi_\alpha)|\varphi \star \Phi_\beta\rangle = (\eta(\Psi_\alpha)|\Phi_\beta\rangle \tag{6.8}$$

である。微分同相拘束条件に対する一般解の空間を $\mathrm{Cyl}^\star_{\mathrm{diff}}$ と書くことにする。最後に、Ψ_α は Cyl_α の任意の要素なので、写像

$$\eta : \mathrm{Cyl} \to \mathrm{Cyl}^\star_{\mathrm{diff}} \tag{6.9}$$

を構成できる。したがって、Cyl のすべての要素は群平均で微分同相拘束条件に対する解を与える。この意味で、微分同相拘束条件に対する一般解を得る。写像 η はガウス拘束条件の場合の $\mathcal{H}$ からゲージ不変な部分空間 $\mathcal{H}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{inv}}$ への射影の対応物である。しかし、上で議論してきた 2 つの拘束条件の違いのため、η は Cyl から異なる空間 $\mathrm{Cyl}^\star_{\mathrm{diff}}$ への写像なので射影にはならない。それにもかかわらず、群平均の方法は自然に解空間に Hermite 内積

$$(\eta(\Psi)|\eta(\Phi)) := (\eta(\Psi)|\Phi) \tag{6.10}$$

を定義することができ、右辺は平均の際に用いられる特定の Ψ や Φ には依らないことがわかる。$\mathrm{Cyl}^\star_{\mathrm{diff}}$ の Cauchy 完備化を $\mathcal{H}_{\mathrm{diff}}$ と書く。最後に、最初の $\Psi \in \mathrm{Cyl}$ をゲージ不変である (つまり $\mathrm{Cyl} \cup \mathcal{H}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{inv}}$ の要素) に制限することによってガウス拘束条件と微分同相拘束条件に対する一般解を得ることができる。この解の空間を $\mathrm{Cyl}^\star_{\mathrm{inv}}$ によって

$$\mathrm{Cyl}^\star_{\mathrm{inv}} = \eta\left(\mathrm{Cyl} \cup \mathcal{H}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{inv}}\right) \tag{6.11}$$

と書くことにする。

演算子に対する作用はどうなるであろうか？まず Cyl 上の非自明な (ゲージ不変であり) 微分同相不変である演算子が存在することに注意しておく。例えば、全体積演算子 $\hat{V}_M$ である。そのような演算子を $\mathcal{O}$ と書くことにする。その双対 $\mathcal{O}^\star$ は $\mathrm{Cyl}^\star_{\mathrm{inv}}$ において

$$(\mathcal{O}^\star\eta(\Psi)|\Phi\rangle := (\eta(\Psi)|\mathcal{O}\Phi\rangle \tag{6.12}$$

のようにうまく定義されている。(さらに、$\mathcal{O}^\star$ はすべての α に対して $\mathcal{H}'_\alpha$ の像を保存する。) 演算子 $\mathcal{O}^\star$ は $\mathcal{H}_{\mathrm{diff}}$ 上の自然な内積 (6.10) に対して自己共役であることは $\mathcal{O}$ が $\mathcal{H}$ において自己共役であることと必要十分である。この性質は $\mathcal{H}$ 上の内積が数学的に自然であるだけでなく、'物理的に正しい' ということを示す。

以上をまとめる。微分同相拘束条件を解く際に用いられる基本的なアイディアはとても単純である。運動学的状態を物理的な状態を得るために微分同相群の作用で平均するということだけである。しかし、この方法が実行することができるかどうかは非自明である。例えば、数学的に正確な記述は幾何動力学のプログラムをうまく避けている。さらに、最終的な結論はいくつかの問題を抱えている。それらを挙げてこの節を終えることにする。

注意

(i) $(\eta(\Psi)|$ は任意の $\Psi \in \mathrm{Cyl}$ に対する微分同相拘束条件の解ではあるが、Cyl の要素と微分同相拘束条件に対する解の間の 1 対 1 対応があるというのは正しくはない。このことは写像 η が非自明な核を持つからである。特に、射影写像 $\hat{P}_{\mathrm{diff}}$ 自身は非自明な核を持ち、(6.7) によって η の核でもある。(それに加えて、$a_0 + \cdots + a_n = 0$ であるような $a_0\Psi_\alpha + a_1\varphi_1 \star \Psi_\alpha + \cdots + a_n\varphi_\alpha \star \Psi_\alpha$ の形の Cyl の要素もまた η の核である。) それゆえ、多くの論文で見られる '微分同相拘束条件に対する解はスピンネットワーク状態の微分同相クラスである' という主張は発見的なものであるのみである。

(ii) 微分同相写像は多様体 M に埋め込まれたスピンネットワークを、抽象的な埋め込まれていないスピンネットワークによって単に置き換えることによって課すことができるという主張もよく見られる。ここでまとめた系統的なアプローチで、この主張が誤りであるとわかる。特に、エッジが絡まっているグラフはすべてのエッジが絡まっていないグラフへ微分同相写像によって写すことは出来ない。その結果、写像 η は 2 つのグラフと関係したスピンネットワーク状態を微分同相拘束条件に対する異なる解に写す。一方、抽象的な埋め込まれていないグラフのように、それらは等価であり、同じスピンネットワーク関数を定義する。微分同相拘束条件が埋め込まれたスピンネットワークを抽象的なスピンネットワークに置き換えることによって組み込むことができるということを単に主張する新しいアプローチを考えることができる。しかし、元々の微分同相拘束条件は M 上の基本正準変数 (A, E) への作用であり、作用はグラフが埋め込まれている時のみ、グラフに写すことができるので、第一原理からそのようなアプローチを正当化することは難しいであろう。

(iii) $n > 0$ の C^∞ 級の微分同相写像でお互い写し合うことが出来ない 4 価かそれ以上のグラフの連続族があることに注意する。結果として、これらのグラフの 2 つに基づく $\mathcal{H}_{\mathrm{diff}}$ の状態は互いに正規直交である。したがって、とても大きい群 Diff によって取り除く時でさえ、Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{diff}}$ はまだ非可分である。しかし、考えている状況化でグラフの族を保つ M の位相同型写像を考える、つまり、$n = 0$ を考えよう。そうすると、これらのグラフの '問題' のある連続族が群平均の方法においてすべて同一視され、微分同相拘束条件に対する解の Hilbert 空間は可分となるだろう。しかしながら、古典的な拘束条件は位相同型写像が生成されず、さらに、位相同型写像が相空間へのうまく定義された作用を持たないため、直接的な物理的状況から Diff のこの拡大を '正当化' することは難しい。

(iv) $\mathrm{Cyl}^\star_{\mathrm{diff}}$ が Diff の元で不変な $\mathrm{Cyl}^\star$ のすべての要素の空間 $\mathrm{Cyl}^\star_{\mathrm{Diff}}$ の固有部分集合であることを注意する。しかし、すべての $(\Psi| \in \mathrm{Cyl}^\star_{\mathrm{Diff}}$ が

$$(\Psi| = \sum_{[\alpha]} (\Psi_{[\alpha]}| \tag{6.13}$$

のように一意的に分解される。ここで、$\Psi_{[\alpha]} \in \eta(\mathrm{Cyl}_\alpha)$ であり、$[\alpha]$ はグラフの微分同相クラスで和を取っている。右辺の和は非加算であるが、結果は任意の cylindrical 関数への作用において有限の数の項が消えないために、$\mathrm{Cyl}^\star$ のうまく定義された要素となる。

6.3　スカラー拘束条件 (Hamiltonian 拘束条件)

ガウス拘束条件と微分同相拘束条件によって生成される正準変換は時空の描像においてそれらは '固定された時間' で作用するという意味で、古典論の運動学的なゲージ変換である。量子動力学の難解な部分

はスカラー拘束条件 (Hamiltonian 拘束条件) にある。群平均の方法によって量子論においてそれを実行することを想像することができる。しかし、この方法はこの拘束条件によって生成された有限の正準変換は古典論のレベルでさえよく理解されていないため、用いることが難しい。それゆえ、ガウス拘束条件に対して用いた方法を用いる。つまり、古典的な積分された拘束条件の関数に対応する量子拘束条件を構成し、その核を探すことを考える。この拘束条件の形は複雑であるため、その実行は他の 2 つの拘束条件の実行より明白ではないし完全でもない。特に、本当の不定性は正則化の方法において存在し、異なる方法を探さなければならない。ここでの非自明なことはうまく定義された方法の存在である。物理的な視点から完全に実行可能であるかどうかは未だ理解されていない問題の 1 つである。この節では、Thiemann によって導入されたアプローチの最も発展している方法に従う [36–38]。しかし、量子化の不定性を明らかにするためにその方法を一般化し、元々の方法に自由度があり、うまく定義された拘束条件演算子になっていることを強調しておく。効率的な計算の道具を与えるというよりも基本的な概念構造を明らかにさせることに重きを置くことにする。

6.3.1　正則化された古典的表現

面積演算子や体積演算子のように、まずやるべきことは、スカラー拘束条件の古典的表式を直接的な量子対応物を持つ相空間の関数のみを含む Riemann 和として表現し直すことである。実接続変数を用いると、ラプス N で積分されたスカラー拘束条件 (2.35) は 2 つの項の和として

$$\mathcal{C}(N)=\left(\frac{\gamma}{4k}\right)^{\frac{1}{2}}\int_M \mathrm{d}^3x N\frac{P^a_iP^b_j}{\sqrt{\mathrm{det}P}}\left[\epsilon^{ij}{}_kF^k_{ab}+2(\sigma-\gamma^2)K^i_{[a}K^j_{b]}\right] \tag{6.14}$$

と書かれる。ここで、$k=8\pi G$ であり、$\mathrm{det}q=(\kappa\gamma)^3\mathrm{det}P$ の関係を用いている。また符号が $+,+,+,+$ であり、半平坦セクター $\gamma^2=\sigma$ で行うならば、2 番目の項は零となる。したがって、1 番目の項は Euclidean の一般相対性理論のスカラー拘束条件と解釈される。それゆえ、完全な Lorentz 拘束条件は

$$\mathcal{C}(N)=\sqrt{\gamma}\mathcal{C}^{\mathrm{Eucl}}(N)-2(1+\gamma^2)\mathcal{T}(N) \tag{6.15}$$

として書かれる。ここで、Lorentz 符号に対応する $\sigma=-1$ を用いている。

1 番目の項について考える。幾何学的演算子と比較して、3 つの困難さがある。1 つ目として、$\mathcal{C}^{\mathrm{Eucl}}$(N) の表現は三脚場 P^a_i だけでなく、接続 A^i_a の曲率 F^i_{ab} も含んでいることである。しかし、ゲージ理論において通常の手順に従い、直接演算子にすることができるホロノミーを用いて曲率を表すことは容易である。2 つ目として、$\mathcal{T}(N)$ の表現には外曲率の項を含んでいることである。幸運なことに、これらはうまく定義された演算子の対応物を持つ $\mathcal{C}^{\mathrm{Eucl}}$ と全体積の間の Poisson 括弧式を用いて表現されることがわかる。最後の困難は、分母に体積要素 $\sqrt{\mathrm{det}P}$ の存在である。まず、これは致命的な欠点であるように思われる。Thiemann の鍵となる洞察により解決される。余三脚場 e^i_a を表す組み合わせ

$$e^i_a:=\frac{\sqrt{k\gamma}}{2}\eta_{abc}\epsilon^{ijk}\frac{P^b_jP^c_k}{\sqrt{\mathrm{det}P}} \tag{6.16}$$

は扱いやすい Poisson 括弧式

$$e^i_a(x)=\frac{2}{k\gamma}\left\{A^i_a(x),V\right\} \tag{6.17}$$

として表現されることができる。この事実を用いて、Euclid スカラー拘束条件部分 $\mathcal{C}^{\mathrm{Eucl}}(N)$ は

$$\mathcal{C}^{\mathrm{Eucl}}(N) = -\frac{2}{k^2\gamma^{\frac{3}{2}}}\int_M \mathrm{d}^3x N(x)\eta^{abc}\mathrm{Tr}\left(F_{ab}(x)\{A_c(x), V\}\right) \tag{6.18}$$

と書かれる。この表現は量子化に対してうまく適しているということが分かる。

拘束条件の表現 (6.15) の 2 番目の項 $\mathcal{T}(N)$ は

$$\mathcal{T}(N) = \frac{\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{k}}\int_M \mathrm{d}^3x N\left(K^i_{[a}K^j_{b]}\frac{P^a_iP^b_j}{\sqrt{\mathrm{det}P}}\right) \tag{6.19}$$

によって与えられる。望ましい形にこの項を書き換えるために、K^i_a を Poisson 括弧式

$$K^i_a = \frac{1}{k\gamma}\left\{A^i_a, \bar{K}\right\} \tag{6.20}$$

として表現する。ここで、$\bar{K}$ は外曲率のトレースの積分

$$\bar{K} = k\gamma\int_M \mathrm{d}^3x K^i_a P^a_i \tag{6.21}$$

である。$\bar{K}$ 自身は

$$\bar{K} = \gamma^{-\frac{3}{2}}\left\{\mathcal{C}^{\mathrm{Eucl}}(1), V\right\} \tag{6.22}$$

のように Poisson 括弧式として表すことができる。したがって、$\mathcal{T}(N)$ は

$$\mathcal{T}(N) = -\frac{2}{k^4\gamma^3}\int_M \mathrm{d}^3x N(x)\eta^{abc}\mathrm{Tr}\left(\left\{A_a(x), \bar{K}\right\}\left\{A_b(x), \bar{K}\right\}\left\{A_c(x), V\right\}\right) \tag{6.23}$$

として表すことができる。

したがって、量子論へ適応する変数を用いた拘束条件を表すために、曲率と接続の項を適切に表現し直しさえすればよい。もし s を座標長さが ϵ の線分であり、ループ β が面積 ϵ^2 の座標平面 P の境界であるなら、

$$\left\{\int_s A, V\right\} = -[\bar{A}(s)]^{-1}\{\bar{A}(s), V\} + o(\epsilon) \tag{6.24}$$

$$\left\{\int_s A, \bar{K}\right\} = -[\bar{A}(s)]^{-1}\{\bar{A}(s), \bar{K}\} + o(\epsilon) \tag{6.25}$$

$$\int_P F = \frac{1}{2}\left(\bar{A}(\beta^{-1}) - \bar{A}(\beta)\right) + o(\epsilon) \tag{6.26}$$

となる。これらの公式は接続と曲率をホロノミーで置き換えるための具体的な方法を与える。例えば、もし M がトポロジー的に $\mathbb{R}^3$ であるなら、基本セルのエッジの座標長さが ϵ である立方体の分割を導入するのが 1 番簡単である。頂点 $v_\Box$ を基点とする基本セル $\Box$ のエッジを s_1、s_2、s_3 と書き、これらのエッジに正規直交な面の境界である $v_\Box$ を基点とする 3 つの向きづけられたループを β_1、β_2、β_3 と書こう。そうすると、

$$\mathcal{C}^{\mathrm{Eucl}}_\Box(N) = -\frac{2N(v_\Box)}{k^2\gamma^{\frac{3}{2}}}\sum_I \mathrm{Tr}\left(\left(\bar{A}(\beta_I) - \bar{A}(\beta_I^{-1})\right)\bar{A}(s_I)^{-1}\left\{\bar{A}(s_I), V\right\}\right) \tag{6.27}$$

からなる $\sum_\square \mathcal{C}_\square^{\rm Eucl}(N)$ はセルのサイズを零 (そして、セルの数を無限大) にする極限で $\mathcal{C}^{\rm Eucl}(N)$ へ収束する Rimeann 和である。同様に、和 $\sum_\square \mathcal{T}_\square(N)$ は

$$\mathcal{T}_\square(N) = \frac{2N(v_\square)}{k^4\gamma^3}\epsilon^{IJK}\mathrm{Tr}\left(\bar{A}\left(s_I^{-1}\right)\left\{\bar{A}(s_I),\bar{K}\right\}\bar{A}\left(s_J^{-1}\right)\left\{\bar{A}(s_J),\bar{K}\right\}\bar{A}\left(s_L^{-1}\right)\left\{\bar{A}(s_L),V\right\}\right) \tag{6.28}$$

であり、セルのサイズを零にする極限で $\mathcal{T}(N)$ が収束する Rimenan 和となる。これらの Riemann 和はそれゆえ古典的な拘束条件の '正則化' を与えていると見なすことができる。幾何学的演算子のように、アイディアは '正則化された表現' の古典量をそれらの量子対応物によって置き換え、そして正則化因子を取り除くことである。**Rovelli** や **Smolin** によって最初に指摘されたこの正則化の特筆すべき特徴は、正則化のパラメータ ϵ が表現から消えていることである。したがって、正則化因子を取り除く前に ϵ の適切なべき乗を拘束条件にかける必要はないのである。つまり、繰り込みを伴っていないのである。

立方体による分割はより一般的な古典的正則化の最も簡単な例である。利用できる自由度は以下のようにまとめることができる。すべての値 $\epsilon \in [0,\epsilon_0]$ に対して、Σ の分割に可能な任意の形のセル $\square$ に割り当てることができる。分割のすべてのセル $\square$ において、エッジ $s_J(J=1,\ldots,n_s)$ とループ $\beta_i(i=1,\ldots,n_\beta)$ を定義し、n_s と n_β は異なるセルに対して異なる値であるかもしれない。最後に、$SU(2)$ の任意の選ばれた表現 ρ を固定しよう。この全体の構造を R_ϵ と書き、

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{C}_{R_\epsilon}^{\rm Eucl}(A,E) = \mathcal{C}^{\rm Eucl}, \qquad \lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{T}_{R_\epsilon}(A,E) = \mathcal{T}(A,E) \tag{6.29}$$

の性質を保つなら、許容できる古典的正則化因子と呼ぼう。ここで、

$$\mathcal{C}_{R_\epsilon}^{\rm Eucl} = \sum_\square \mathcal{C}_{R_\epsilon\square}^{\rm Eucl} \tag{6.30}$$

$$\mathcal{C}_{R_\epsilon\square}^{\rm Eucl} = \frac{N(v_\square)}{k^2\gamma^{\frac{3}{2}}}\sum_{iJ} C^{iJ}\mathrm{Tr}\left(\left(\rho\left[\bar{A}\left(\beta_i\right)\right]-\rho\left[\bar{A}\left(\beta_i^{-1}\right)\right]\right)\rho\left[\bar{A}\left(s_J^{-1}\right)\right]\left\{\rho\left[\bar{A}\left(s_j\right)\right],V\right\}\right) \tag{6.31}$$

であり、

$$\mathcal{T}_{R_\epsilon} = \sum_\square \mathcal{T}_{R_\epsilon\square} \tag{6.32}$$

$$\mathcal{T}_{R_\epsilon\square} = \frac{N(v_\square)}{k^4\gamma^3}\sum_{I,J,K} T^{IJK}\mathrm{Tr}\left(\rho\left[\bar{A}\left(s_I^{-1}\right)\right]\left\{\rho\left[\bar{A}\left(s_I\right)\right],\bar{K}\right\}\rho\left[\bar{A}\left(s_J^{-1}\right)\right]\left\{\rho\left[\bar{A}\left(s_J\right)\right],\bar{K}\right\}\right. \tag{6.33}$$

$$\left.\times\rho\left[\bar{A}\left(s_K^{-1}\right)\right]\left\{\rho\left[\bar{A}\left(s_K\right)\right],V\right\}\right) \tag{6.34}$$

であり、C^{iJ} と T^{IJK} は固定された定数であり、スケールパラメータ ϵ とは独立である。古典的な正則化因子の族は立方体の例の修正、セル、ループ、エッジの形やそれらの相対的な位置を適切に変更することによって構築することができる。

6.3.2 量子スカラー拘束条件

次にやるべきことは、正則化された古典的拘束条件を量子演算子にし、そして正則化因子を取り除くことである。この方法を実行する際に 3 つの非自明な問題に出くわす。

幾何学演算子のように、最初のステップは正則化された表現が直接的な量子対応物を持つ相空間の関数のみを含むために容易である。しかし、'明らかな' 量子演算子は 1 つのグラフに対して cylindrical である状態でうまく定義されているが、最後に結果的に演算子の族が無矛盾であることがわかる。このことは最初の非自明な問題である。これに立ち向かう最も簡単な方法は Hilbert 空間の分解 $\mathcal{H}=\oplus_\alpha \mathcal{H}'_\alpha$ を用いることであり、各 $\mathcal{H}'_\alpha$ での量子拘束条件を定義する。任意の 2 つの $\mathcal{H}'_\alpha$ の正規直交性のため、演算子の結果的な族は自動的に無矛盾となる。

$\mathcal{C}^{\mathrm{Eucl}}_{R_\epsilon}$ から始める。$\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{H}'_\alpha$ を固定する。量子演算子は単純にホロノミーと体積の関数を演算子にし、Poisson 括弧式を $1/\mathrm{i}\hbar$ をかけた交換子に置き換えることによって得ることができる。したがって、任意のグラフ α が与えられ $\epsilon>0$ とすると、

$$\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{\square}:=-\frac{\mathrm{i}N(v_\square)}{k^2\gamma^{\frac{3}{2}}\hbar}\sum_{i,J}\mathrm{Tr}\left(\left(\rho\left[\bar{A}(\beta_i)\right]-\rho\left[\bar{A}(\beta_i^{-1})\right]\right)\rho\left[\bar{A}(s_J^{-1})\right]\left[\rho\left[\bar{A}(s_J)\right],V\right]\right) \tag{6.35}$$

による

$$\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{R_{\epsilon,\alpha}}:=\sum_{\square}\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{\square}(N) \tag{6.36}$$

は任意の古典的正則化因子 R_ϵ に対して定義域 $\mathcal{D}_\alpha=\mathcal{H}'_\alpha\cup\mathrm{Cyl}_\alpha$ を持つ $\mathcal{H}'_\alpha$ 上の稠密に定義された演算子である。ここで、2 つ目の非自明な問題に出くわす。つまり、最終的な演算子が微分同相不変でなければならないということである。これを解決するために、固定するのではなく、微分同相写像の元でグラフ α からその像へ動かすように共変的に写される正則化因子を用いなければならない。それゆえ、正則化因子を適切なものに制限しなければならない。

微分同相不変な量子正則化因子 $R_{\epsilon,\alpha}$ は許容される古典的な正則化因子の族であり、以下の性質を満足する。

(a) 分割は α のすべての頂点 v がちゃんと $R_{\epsilon,\alpha}$ の 1 つのセルに含まれるという意味で十分細かい。

(b) もし (α,v) が (α',v') と微分同相写像で結びつくならば、すべての ϵ と ϵ' に対して、5 重項 $(\alpha,v,\square,(s_I),(\beta_J))$ は $\square$ と $\square'$ がそれぞれ R_ϵ と R'_ϵ のセルであり、それぞれ v と v' が含まれているような 5 重項 $(\alpha',v',\square',(s'_I),(\beta'_J))$ に微分同相写像で結びつく[*3]。そのような微分同相写像と両立する量子正則化因子は存在する。具体的な例は [37] で与えられている。そのような $R_{\epsilon,\alpha}$ が与えられると ϵ のすべての値に対して、演算子 $\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{R_{\epsilon,\alpha}}(N)$ は共通の定義域 $\mathcal{D}_\alpha$ を持つ $\mathcal{H}'_\alpha$ 上で稠密に定義されている。この演算子の族は定義域 Cyl を持つ完全な Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された $\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{R_\epsilon}$ を決め、ϵ の値とは無関係である。さらに、ϵ の任意の値に対してこの定義域は演算子 $\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{R_\epsilon}$ によってそれ自身に写される。

したがって、後は正則化因子を取り除くだけである。ここで、3 つ目の非自明な問題に出くわす。典型的に、$\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{R_{\epsilon,\alpha}}|\Psi\rangle$ は $\epsilon\neq\epsilon'$ であれば $\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{R_{\epsilon',\alpha}}|\Psi\rangle$ と直交している。その結果、演算子は $\mathcal{H}$ 上で (弱トポロジーでさえ) 収束しない。このことは $\mathcal{H}$ のトポロジーと関連した一般的な問題である。微分同相拘束条件 $\mathcal{C}_{\mathrm{diff}}(\vec{N})$ の演算子対応物を定義しているが、その場合でもこの問題に出くわす。しかし、微分同相拘束条件に対する解が運動学的な Hilbert 空間に属することに失敗した (つまり、Cyl の代数的双対である $\mathrm{Cyl}^\star$ に属している) ことを思い出そう。それゆえ、全体の描像の無矛盾性のために必要としていることは、$\mathcal{H}$

*3　体積演算子の性質が $\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{\square}$ の作用が正則化因子の線分 s_I の 1 つが α の頂点と交わる時のみ非自明となるため、頂点を含むようなセルのみに制限する必要がある。

ではなく $\mathrm{Cyl}^\star$ の十分大きい部分空間のみへのスカラー拘束条件の作用である。そして、この作用はうまく定義されており非自明である。もっと正確に述べると、各 $(\Psi| \in \mathrm{Cyl}^\star$ に対して、正則化されている拘束条件演算子の作用はすべての $|\Phi\rangle \in \mathrm{Cyl}^\star$ に対して自然に

$$\left[(\Psi|\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{R_\epsilon}\right]|\Phi\rangle := (\Psi|\left[\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{R_\epsilon}|\Phi\right] \tag{6.37}$$

によって与えられる。ここで明らかな方法により正則化因子を取り除くことができる。

$$\left[(\Psi|\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}(N)\right]|\Phi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}(\Psi|\left[\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{R_\epsilon}(N)|\Phi\right] \tag{6.38}$$

を通して

$$\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{R_\epsilon}(N) \tag{6.39}$$

を定義しよう。この極限は各点 (つまり、各 $|\Phi\rangle \in \mathrm{Cyl}$) でのみ存在することに注意しておく。結果的に、演算子の定義域、極限が存在する $\mathrm{Cyl}^\star$ の $(\Psi|$ の集合がとても大きなものになる。特に、以下で議論するように、微分同相拘束条件に対する解の大きなクラスを含んでしまう。スカラー拘束条件の $\mathcal{T}(N)$ の項は完全に同様の方法で扱うことができる。特に、最初に演算子 $\hat{\hat{K}}$ を

$$\hat{\hat{K}} := \frac{\mathrm{i}}{\hbar\gamma^{\frac{3}{2}}}[\hat{V},\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}(1)] \tag{6.40}$$

を通して定義しよう。そして、$\hat{\hat{K}}$ と量子正則化因子 $R_{\epsilon,\alpha}$ を用いて定義域 $\mathrm{Cyl}^\star$ への正則化された演算子 $\hat{\mathcal{T}}_\square(N)$ を

$$(\Psi|\hat{\mathcal{T}}_\square(N) = \frac{\mathrm{i}N(v_\square)}{k^4\gamma^3\hbar^3}T^{IJK}(\Psi|\mathrm{Tr}\left(\bar{A}\left(s_I^{-1}\right)\left[\bar{A}\left(s_I\right),\hat{\hat{K}}\right]\bar{A}\left(s_J^{-1}\right)\left[\bar{A}\left(s_J\right),\hat{\hat{K}}\right]\bar{A}\left(s_K^{-1}\right)\left[\bar{A}\left(s_K\right),\hat{V}\right]\right) \tag{6.41}$$

を定義しよう。これらの定義を組み合わせて、すべての $(\Psi| \in \mathrm{Cyl}^\star$ に対する正則化されたスカラー拘束条件演算子

$$(\Psi|\hat{\mathcal{C}}_{R_\epsilon}(N) := (\Psi|\left(\sqrt{\gamma}\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}_{R_\epsilon}(N) - 2(1+\gamma^2)\sum_\square\hat{\mathcal{T}}_\square(N)\right) \tag{6.42}$$

が得られる。(6.38) のように $\varepsilon \to 0$ の極限を取ることによって正則化因子を取り除くことができる。この構成法より、演算子の作用は微分同相共変的である。したがって、各微分同相共変的な量子的正則化因子はスカラー拘束条件演算子を定義する。これらの正則化因子を選ぶ際に自由度が存在するため、考えうる量子化の不定性がある。それにも関わらず、すべてのこれらの構成はいくつかのとても非自明な性質を示す。それを 2 つ与えることによってこの節を終わることにする。

まず、最初に注意したように、うまく定義された処方箋が背景独立な状況において量子 Einstein 方程式に正確な意味をあたえるために存在することは重要なことである。例えば、幾何動力学において Wheeler-DeWitt 方程式はまだ形式的なままに留まっている。次に、これらの構成法は驚くべきぐらいうまく微分同相拘束条件に対する解と一致している。まず、このことを見るために、微分同相共変的な量子正則化因子の選択に関わりなく、演算子 $\hat{\mathcal{C}}_{R_\epsilon}(N)$ は ϵ とは無関係である。つまり、すべての ϵ、ϵ'、$|\Psi\rangle \in \mathrm{Cyl}$、$N$ に対して、

$$\hat{\mathcal{C}}_{R_{\epsilon'}}(N)|\Psi\rangle = U_\varphi\hat{\mathcal{C}}_{R_{\epsilon'}}(N)|\Psi\rangle \tag{6.43}$$

となる微分同相写像 φ がある。次に、$(\Psi| \in \mathrm{Cyl}^{\star}$ が微分同相不変であるとしよう。そうすると、すべてのラプス関数 N に対して、実際に結果 $(\Psi|\left(\hat{\mathcal{C}}_{R_\epsilon}(N)\right)$ は ϵ には非依存であり、(6.42) の右辺の極限の元での表現となる。したがって、正則化因子は自明に取り除かれる。したがって、正則化された演算子のために ($\mathcal{H}'_{\alpha\cap\mathrm{Cyl}_\alpha}$ の要素を群平均することによって構成された) $\mathrm{Cyl}^{\star}$ での微分同相不変な状態は自動的にスカラー拘束条件演算子の定義域に含まれる。2 つの拘束条件を扱う方法の間のこの一致はかなり非自明なことである。

注意

Thiemann のオリジナルの構成法では、Hamiltonian 拘束条件演算子は $\mathrm{Cyl}^{\star}_{\mathrm{diff}}$ において定義されていた。第 2 章で見たように、2 つのスカラー拘束条件の Poisson 括弧式は古典論において微分同相拘束条件によって与えられていた。それゆえ、微分同相不変な状態において、量子スカラー拘束条件演算子は交換することが期待される。正則化因子 R_ϵ の選び方に関わらず、それらは交換する。より厳しい試験を得るために、Thimenann の演算子の定義域は [39, 40] においてわずかに拡張された。'habitat(生息地)' と呼ばれる拡張された定義域は微分同相不変ではない $\mathrm{Cyl}^{\star}$ のある要素も含んでいる。それにも関わらず、スカラー拘束条件の間の交換関係は habitat においても消えることがわかる。このことは気がかりなことのように思われる。しかし、古典的 Poisson 括弧式に対応する量子演算子も habitat のすべての状態を消滅させる。したがって、矛盾は存在しない。つまり、habitat はこの量子化の手順の非自明な実行可能な基準を与えるには小さすぎることが分かるだけである。ここで導入された演算子の定義域は habitat を含んでおり、同じ結果を得ることができる。もっと重要なことに、この定義域は著しく大きく半古典的状態を含んでいるかもしれない。もしこのことが正しいならば、この量子化の方法を試験するより強い実行可能な基準は得られるであろう。特に、拘束条件の古典的な Poisson 括弧式の代数の関係に加え、古典的発展と半古典的状態への拘束条件の作用の間の関係を解析することが可能になるかもしれない。

6.3.3　スカラー拘束条件に対する解

この節では量子拘束条件に対する解を見つける難しい問題をどのように単純な問題の組み合わせに系統的に還元することができるのかを見ていく。このため、量子正則化因子 $R_{\epsilon,\alpha}$ のもっと具体的な形を得ることが必要になる。

正則化因子のもっとも便利なクラスは Thiemann によるオリジナルの構成を少し修正することを要請する。このクラスに限定することの制限は以下のようにする。グラフ α を固定し、正則化因子によって定義される M の分割において頂点 v を含むセル $\square$ を考える。最初の制限は $\square$ に割り当てられたすべてのエッジ s_k は v から出ていくエッジの固有線分でなければらない。次の制限は閉じたループ β に課されるものである。エッジのすべての対 e_I、e_J に対して、(i) ループは v を含むが α の他の点は含まない (ii) 平面が α を保つ微分同相写像で結ばれるものを除いて定義されるエッジを含む 2 次元平面の中の 2 つのエッジの '間' にある (iii) 順序づけられた線分の対 e_I、e_J によって平面に定義される向き付けに対して時計回りであることを満たす三角形の閉じたループ β_{IJ} を割り当てる。(ループをラベルしている 2 つの添字 I、J はこれまでに出てきた (例えば (6.31) の) 添字 i に対応する。) 最後に、正則化因子の定数 C^{IJK}、T^{IJK} はそれぞれ $\pm\kappa_1$、0 と $\pm\kappa_2$、0 であり、M の背景の向き付けに関係する v での線分 s_I、s_J、s_K に接するベクトルの三脚場の向き付けに依存している。ここで κ_1、κ_2 はある定数である。

このような正則化因子が与えられると、$\mathrm{Cyl}^\star$ の微分同相不変な要素への $\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}(N)$ と $\hat{\mathcal{C}}(N)$ の作用が以下のように簡単にまとめるような単純な幾何学的構造を持つ。$(\Psi_\alpha| \in \mathrm{Cyl}^\star$ が $\mathcal{H}'_\alpha$ の状態を群平均することによって得られるとする。そうすると、もし α がグラフの任意の頂点での正則化因子によって導入されるタイプの閉じたループがないのであれば、両方の演算子とも状態を消滅させる。もし α がそのような閉じたループを含むならば、$\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}(N)$ は 1 つのループを取り除き、$\hat{\mathcal{C}}(N)$ は 2 つのループを取り除き、それぞれの場合において頂点での intertwiner の可能な変化も存在する。Thiemann による正則化において導入された言葉によると、正則化因子によって導入されたタイプの閉じたループは *extraordinary* と呼ばれる。

もっと正確にいうと、拘束条件演算子は以下のように作用する。同じ微分同相クラスに属するラベルされているグラフが $j(\rho)$ によってラベルされている extraordinary なループを含むようなラベルされているグラフ (α_0, j_0) を考えよう。ここで ρ は正則化において用いられる表現である。この性質を持つラベルされているグラフを単純 (*simple*) と呼ぼう。単純グラフ α が与えられると $\mathcal{H}'_\alpha$ の要素を群平均することによって得られる $\mathrm{Cyl}^\star_{\mathrm{diff}}$ のすべての要素 $(\Psi_\alpha|$ は $\hat{\mathcal{C}}(N)$ の核である。これは解の大きなクラスである。しかし、これらの状態は $\hat{\mathcal{C}}(N)$ の 2 つの項 $\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}(N)$、$\hat{\mathcal{T}}(N)$ のそれぞれによって消滅される。その結果、それらは Euclid スカラー拘束条件と Lorentz 拘束条件の両方を解くことになる。この意味で、それらは古典的 Hamiltonian 拘束条件に対する時間対称な解の対応物であり、とても特別な物理的状況をよく捉えている。

より興味深い解は extraordinary なエッジを持つグラフから得られる。いくつかの記法を導入する。$j(\rho)$ によってラベルされている n 個の extraordunary なループの生成や微分同相写像によって与えられたグラフ (α_0, j_0) から得られるすべてのラベルされたグラフ (α', j') の集合を考える。この集合を $\Gamma^{(n)}_{[(\alpha_0,j_0)]}$ と書き、スピンネットワーク状態を平均した対応する微分同相写像の線形な範囲を $\mathcal{D}^{(n)}_{[(\alpha_0,j_0)]}$ と書くことにする。得られる空間は有限次元であり、お互いの自明な交わりを持つ。

$$([(\alpha_0, j_0)], n) \neq ([(\alpha'_0, j'_0)], n') \Rightarrow \mathcal{D}^{(n)}_{[(\alpha_0,j_0)]} \cap \mathcal{D}^{(n')}_{[(\alpha'_0,j'_0)]} = \{0\} \tag{6.44}$$

結果として、それらは以下のとても有効な性質を持つことがわかる。すべての $(\Psi| \in \mathrm{Cyl}^\star_{\mathrm{diff}}$ は

$$(\Psi| = \sum_{\alpha,j,n} (\Psi|_{(n)[(\alpha,j)]} \tag{6.45}$$

として一意的に分解することができる。ここで、$(\Psi|_{(n)[(\alpha,j)]} \in \mathcal{D}^{(n)}_{[(\alpha,j)]}$ である。この分解の有効性はスカラー拘束条件に対する解を見つけることを体系化する。

$\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}(N)$ から始める。Euclid 理論に対して、以下のすべての $[(\alpha, j)], n$ に対する驚くべき結果

$$(\Psi|\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}(N) = 0 \Leftrightarrow (\Psi|_{(n)[(\alpha,j)]}\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}(N) = 0 \tag{6.46}$$

を得る。したがって、$(\Psi|$ は拘束条件の **Euclid** 部分の解である時かつその時に限り分解 **(6.45)** に対するその成分もまた解である。これは Euclid 拘束条件に対する一般的な微分同相不変な解を見つける問題が有限次元の部分空間で解を見つけるという問題に還約されるため、とても有効な性質である。これらの部分空間のそれぞれで、行列の核を見つけるにすぎず、計算機で容易に計算できる問題である。相互に、拘束条件に対する任意の微分同相不変な解 (例えば、平坦な接続のみを持つ状態) が与えられると、分解

は新しい解の族を与える。$(2+1)$ 次元において、この性質は任意の半古典的状態がこれらの '基本' 解の重ね合わせによって得ることができるということを意味する。

最後に、完全な (Lorentz) スカラー拘束条件演算子 $\hat{\mathcal{C}}(N)$ について考える。ここでの方法において、微分同相不変な解を見つける問題は階層的な問題になる。より正確には、方程式

$$(\Psi|\hat{\mathcal{C}}(N)=0 \tag{6.47}$$

は以下の階層的な方程式と等価である。

$$\begin{aligned}
&(\Psi_{(1)[\alpha,j]}|\hat{\mathcal{T}}(N)=0\\
&(\Psi_{(2)[\alpha,j]}|\hat{\mathcal{T}}(N)=(\Psi_{(1)[\alpha,j]}|\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}(N) && (6.48)\\
&\cdots\\
&(\Psi_{(n+1)[\alpha,j]}|\hat{\mathcal{T}}(N)=\sum_n(\Psi_{(n)[\alpha,j]}|\hat{\mathcal{C}}^{\mathrm{Eucl}}(N) && (6.49)\\
&\cdots
\end{aligned}$$

一般的に、手順は無限のステップが含まれる。しかし、解に対して部分的な制御を与え、新しい ansatze(例えば、有限のステップの後展開が終わるという要請など) を仮定すれば良い。

注意

上で述べた手順は Thiemann のオリジナルの方法のバリエーションの 1 つであるため、相対的なメリットを比較することは意味がある。Thiemann の方法は三角形 $\beta_i(\mathcal{C}^{\mathrm{Eucl}}(N)$ の曲率項を表すホロノミー) の 3 つのエッジのうちの 2 つがグラフのエッジに沿っているというように単純なものになっている。しかし、空間 $\mathcal{D}^{(n)}_{(\alpha,j)}$ の対応物が重なっており、拘束条件を解く手順をより複雑なものにさせる。

以上をまとめよう。この節では Hamiltonian 拘束条件を定義し、その解を見つける一般的な枠組みを示した。この手順は問題を扱いやすくし、含まれている不定性を取り除く。特に、微分同相共変的な量子正則化因子 $R_{\epsilon,\alpha}$ の各選択が $\mathcal{D}$ 上の量子拘束条件演算子 $\hat{\mathcal{C}}$ を与える。正則化因子の各選択に対して、簡潔さのため無視している因子順序の自由度がある。一般的に、これらの演算子はお互い異なり、異なる量子発展を定義し、それらの実行可能性を試験する物理的な基準を考えなければならない。量子宇宙論ではここで用いた因子順序が用いられる。発見的に動機付けされた条件を課すことによって量子正則化因子の選択における自由度を制限する試みもある。しかし、正準的な選択は生み出されていない。したがって、未だに多くの不定性があり、どの候補が完全に実行可能であるのかどうかはっきりしていない。鍵となる基準は拘束条件に対する解集合が多くの半古典的状態を含むのに十分富んでいるべきである。この問題は理論の半古典的セクターをうまく制御するまで系統的に解決されないであろう。上で議論したように、解を見つけるための一般的な方策があり、その結果、この問題を解決すると期待することができる。この方法に対する部分的な根拠は $(2+1)$ 次元 Euclid 一般相対性理論から来ている。上で注意したように、この理論において、すべての半古典的状態は量子拘束条件に対する '基本解' を重ね合わせることによって回復することができ、系統的な手順を通して得られる。この結果は (2+1) 次元理論がすべて背景の幾何学がないことに関係した概念的な問題を持っているために、促されている。しかし、(2+1) 次元理論は有限の自由度のみを持つため、協力な可能性として考えることはできない。

以上で量子運動学と量子動力学の一般的な枠組みの議論を終えることにしよう。以降の章では様々な応用について議論する。

第 7 章

ループ量子重力理論での BH エントロピーの導出

7.1 イントロダクション

ブラックホールは一般相対性理論によって予言されたものだが、それは今や天体物理学や宇宙論においてとても重要な対象となっている。そして、大変興味深いことの 1 つにブラックホールのダイナミクスが熱力学と類似した法則によって記述されていることが挙げられる。Bekenstein によってブラックホール地平線の面積がブラックホールのエントロピーを表すと予言された [41]。この予言は Hawking の発見によって本当に両者に関係があることが示された [42]。もしブラックホールが熱力学によって記述することが出来るのならば、熱力学が現象論でありより基本的な理論である統計力学によって説明されるように重力のより基本的な理論が存在しなければならないことになる。そして我々はそれは量子重力理論によって基礎付けられると考えている。

ブラックホールのエントロピーに関するもっとも不思議なことの 1 つに "エントロピー・面積則"が挙げられる。熱力学において、エントロピーは示量変数であり系の体積に比例する物理量である。しかし、ブラックホールの場合ではブラックホールのエントロピー S は地平線の面積 A に比例し、その関係式は有名な Bekenstein-Hawking の関係式 $S = A/4$ によって与えられる。

この関係式を説明するような半古典的なアプローチ (エンタングルメントエントロピーなど) は数多くあるが、基本的な理解は完全な量子重力理論によって得られなければならない。我々は量子重力理論によってブラックホールのエントロピーの起源やブラックホール熱力学の起源を説明することが出来ると信じており、量子重力理論によってブラックホールのミクロな自由度が何であるのかが明らかにされると考えている。

今日まで量子重力理論へ向けたアプローチがとして、ストリング理論とループ量子重力理論 (LQG) が挙げられる。ストリング理論において、ブラックホールのエントロピーの統計的起源は双対性を用い、膜 (ブレーン) の配位の自由度を数えることによって与えられている [43]。しかし、エントロピー・面積則は極限ブラックホールにおいてのみ示されているだけである。一方 LQG において、もっと一般的なブラックホールに対してエントロピー・面積則のような法則が示されている [44]。ここで "のような" という意味は、比例関係までは示されているが比例係数に未知の基本定数 γ を含むため決めることが出来ないとい

う意味である。この γ は Barbero-Immirzi パラメータとよばれている。LQG は背景独立な定式化のため、ブラックホールの種類によらずに統計的起源を示すことが出来る [45]。このため、我々は LQG に焦点を当てて議論することにする。

[44] において、Rovelli はスピンネットワークのアイディアを用い、ブラックホールの地平線の面積を固定させた場合におけるエッジの配位の自由度を数えることに成功した。しかし、ブラックホールの事象の地平線は局所的な物理量を用いて定義することは出来ず、ブラックホール時空全体を知らなければならないため、量子重力理論によって事象の地平線を記述することは困難である。そこで、Ashtekar、Baez、Corichi、Krasnov ら (ABCK) は時空の内部境界として "孤立地平線"(isolated horizon) を定義した。そして、孤立地平線とその外側の時空の境界条件を量子化することによって、彼らは孤立地平線上の自由度を数え、ブラックホールのエントロピーを求めた [45]。

ここで、主に鍵となるアイディアはブラックホールの地平線が孤立地平線によって与えられ、ブラックホールのエントロピーが地平線のミクロな状態と関係があるということである。そのミクロな状態はブラックホールの体積ではなく、表面積によってエントロピーに寄与するものである。ヒルベルト空間が孤立地平線上のヒルベルト空間とその外側の時空に対するヒルベルト空間のテンソル積に分解すること出来るため、簡単化された面積スペクトルが用いられる。そして、Barbero-Immirzi パラメータは Bekenstein-Hawking の関係式となるように決定される。しかし、この値は宇宙論 [46] やブラックホールの準固有振動 [47–49] のような異なる議論によって示されている値とは一致していない。つまり、我々はどの値を適応して良いのか？地平線の自由度を数える際に不定性はあるのか？という疑問が生じる。実際、[3] によって採用されているような異なる面積スペクトルの選び方がある。もちろんその場合では異なる Barbero-Immirzi パラメータが与えられている。そこで、面積スペクトルの定義による不定性を理解するため、我々は LQG によって得られている最も一般的な面積スペクトルを用い、ブラックホールのエントロピーについて議論した。

本章では、ブラックホールのエントロピーを計算する際に一般的な面積スペクトル (7.9) を用いることにする。ここで ABCK フレームワークを用い、ブラックホールのエントロピーとして (7.9) に対して j と m $(= -j, -j+1, \cdots, j-1, j)$ の自由度を数えた。そして j と m の自由度の数の対数 ("エントロピー") が面積 (7.9) に比例することがわかった [50]。

7.2 孤立地平線とその量子幾何学

ループ量子重力理論の元で考える前に、Hamiltnin 拘束条件がどのように課されるのかといったような詳細な部分に依らない量子幾何学の結果が正しいかどうか判断する応用について議論しておく。1 章で説明したように、1970 年代半ばブラックホールのエントロピー $S_{\rm BH} = \left(a_{\rm hor}/4l_{\rm Pl}^2\right)$ の量子統計力学的起源は何であるのか？という重大な問題が考えられはじめた。このエントロピーを計算するミクロな自由度は何であるのか？この関係は太陽質量のブラックホールの場合 $(\exp 10^{77})$ 個[*1] の量子状態を持つことを意味し、その数は通常の統計力学で考えられる数に比べとても大きな数である。これらの状態はすべてどこに存在するのであろうか？これらの疑問に答えるため、1990 年初頭に Wheeler は '*It* from *Bit*' と命名

[*1] 太陽質量：$M_\odot \approx 1.99 \times 10^{33}$[g]、Planck 長：$l_{\rm Pl} \approx 1.6 \times 10^{-33}$[cm]

された発見的描像を提案した。その発見的描像とは、ブラックホールの地平線を面積が 1Planck 単位面積 $l_{\rm Pl}^2$ を持つように基本セルに分割し、それぞれのセルに 2 つのミクロ状態を割り当てるというものである。そうすると、全状態数 $\mathcal{N}$ は $\mathcal{N} = 2^n$ によって与えられる。ここで $n = \left(a_{\rm hor}/l_{\rm Pl}^2\right)$ は基本セルの数である。その結果、エントロピーは $S = \ln \mathcal{N} \sim a_{\rm hor}$ によって与えられる。したがって、係数までは一致しないが、エントロピー (It) は各セルに対して 2 つの状態 (Bit) を割り当てることによって説明されることがわかる。この定性的な描像は単純ではあるが魅力的な描像である。したがって、この発見的なアイディアを第一原理から系統的な解析によって裏付けることができるのか？'基本セル' の起源は何であるのか？なぜそれぞれの基本セルに正確に 2 つの状態が寄与するのか？もっと重要な疑問はこの描像がすべてのブラックホールでなされるためには何が必要なのか？という疑問が湧いてくる。それは '*It* **from** *Bit*' という考え方は任意の 2 次元面に適応できると考えられるからである。量子幾何学はこれらの問題に対して詳細に議論することができる。

量子幾何学を用いると正確な描像はもう少し複雑なものになる。面積スペクトルはかなり複雑な表式であるので、'基本セル' はすべて同じ面積である必要はないし、各セルの '内部状態' の数を **2** 個に限定することもない。それにもかかわらず、エントロピーの計算において主な寄与をするのは Wheeler によって予想された状態からくることがわかった。この節ではまず量子論の出発点として有効な古典的な一般相対性理論における '孤立地平線の枠組み'('isolated horizon framework') について述べる。そして最も単純な (歪んでなく回転していない) 地平線の量子幾何学を議論し、最小結合している物質の存在が許される場合のエントロピー計算を示す。最後に非最小結合を持っていたり、歪んでいたり、回転をしている場合への拡張を議論する。

7.2.1 孤立地平線

エントロピーの問題に対する系統的なアプローチは興味のある地平線のクラスをまず明確にすることを要請する。エントロピー公式は平衡状態にあるブラックホールに対して曖昧さなしに決まることが期待されるので、多くの解析は定常的な永遠のブラックホール (つまり、4 次元一般相対性理論の Kerr-Newman 族) に焦点が当てられている。しかし、物理的な視点からはこの仮定は制限しすぎているように思われる。つまり、通常の系のエントロピーの統計力学的計算では、与えられている系が平衡状態にあるだけであり、全世界が平衡状態にあるわけではないということである。それゆえ、ブラックホール自身が平衡状態であることを課せば十分であると考えられる。ブラックホールの外側の幾何学は時間に依存しないようにする必要はない。さらに、歪んでいたり毛 (Yang-Mills や他の場) が生えているかもしれないブラックホールのエントロピーについても説明されるべきであろう。そして、1970 年代半ばから熱力学はブラックホールだけでなく宇宙的地平線 (cosmological horizon) にも適応された。以上のことから、これらの様々な状況が 1 つの方法で扱うことができるのか？という疑問が生じる。古典的な一般相対性理論において、孤立地平線の枠組みはこれらすべての状況を含むことができる自然な手段を与える。また、この枠組みは量子化の自然な出発点として与える Halitonian 形式も与えることができる。

まず基本的な定義から述べる。Hamiltonian 形式へ移行すると 3 次元多様体 M を扱うことになるが、ここでは 4 次元時空多様体 $\mathcal{M}$ から始める必要がある。

非膨張地平線 (*non-expanding horizon*)Δ とは、光的な 4 次元時空 $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ の 3 次元部分多様体であ

り、トポロジーが $S^2 \times \mathbb{R}$ となる、以下の条件を満たすものである。

(i) 光的法ベクトル l の膨張 (expansion)θ_l が零であり、
(ii) $-T^{\alpha}_{\ \beta} l^{\beta}$ が未来向きで因果的ベクトルであるというとても弱い要請を満たすストレス・エネルギーテンソル $T_{\alpha\beta}$ を持ち Δ 上で場の方程式が保たれている。(l^a は未来向きと仮定。)

この 2 つの条件に対してそれぞれ注意を述べておく。(i) もし expansion が 1 つの光的法ベクトルで消えるなら、すべての光的法ベクトルに対して消えることになる。(ii) 全ての通常の物質場によって満足されるストレス・エネルギーテンソルに対する条件は、それらが重力と最小結合していることを示す。

この定義は地平線の任意の 2 次元球面の断面の面積が一定であり、Δ を越える物質のフラックスが消えることを保証している。また、時空の微分演算子 ∇ が自然に Δ 上の一意的な微分演算子 $\mathcal{D}$ を誘導することを意味する。Δ は光的 3 次元面なので、符号が $0,+,+$ となる退化した内部 '計量'q_{ab} を持つ。対 $(q_{ab}, \mathcal{D})$ は Δ の '幾何学' と言われることがある。ブラックホール自身が平衡状態であるという概念は、この幾何学が時間に依らないという要請によって捉えられる。

孤立地平線 (*isolated horizon*)(Δ, l) は l が対称性 (つまり、$\mathcal{L}_l q_{ab} = 0$ であり、Δ 上で $[\mathcal{L}_l, \mathcal{D}] = 0$ である) を持つような光的法ベクトル l を持つ非膨張地平線 Δ である。

一般的にこれらの条件を満たす光的法ベクトル l には定数スケーリングの不定性があるが、一意的に決まることを示すことができる。

孤立地平線の定義は Killing 地平線の概念からブラックホール力学に対する本質的要素であり、もっと一般的には地平線の外部領域でのダイナミカルな過程や輻射を認め、地平線のみが平衡状態にあるという概念を捉えるような '本質的な' 部分のみを抽出しているのである。実際、Einstein 方程式は地平線に近い部分に輻射が存在するような孤立地平線を持つ解を許している [51, 52]。事象の地平線の場合とは異なり、この定義が Δ に対して局所的な条件を用いていることに注意をしておく。この節のはじめに述べた目的に対して、以下の 2 つの重要な結果がある。

(i) 孤立地平線の定義は定常ブラックホールの事象の地平線だけでなく、通常の宇宙の地平線の場合にも満足している。したがって、熱力学が適応されるすべての状況を 1 つの方法で扱うことができる。
(ii) もし内部境界が孤立地平線となるような時空に制限するならば、作用原理や **Hamiltonian** 形式がうまく定義され、結果的に相空間は無限自由度を持っていることになる。このことは一般的な事象の地平線や Killing 地平線を用いた場合、そのようにはならない。

次に、孤立地平線の対称性の群について考えよう。$(\Delta, l, q, \mathcal{D})$ の対称性は Δ をそれ自身に写す時空の微分同相写像である。つまり、l が定数倍され、q と $\mathcal{D}$ が保たれるような写像である。l^a の滑らかな拡張によって生成される微分同相写像が対称性となっていることは明白である。よって、対称性の群 G_Δ は少なくとも 1 次元であることがわかる。そうすると、もっと他の対称性はあるのかという疑問が生じるだろう。一般的に (Poincaré 群や Anti-de Sitter 群のような) 無限遠ですべての計量が固定された計量 (Minkowski 計量や Anti-de Sitter 計量) に漸近するための普遍的な対称性の群がある。しかし、孤立地平線の場合には強重力場中にあり、時空計量は普遍的な計量には一般的に漸近しない。それため、対称性の群は普遍的とはならない。しかし、以下のような 3 つの普遍的なクラスは存在する。

(i)　Type I：孤立地平線が球対称である場合。この場合、G_Δ は 4 次元である。
(ii)　Type II：孤立地平線が軸対称である場合。この場合、 G_Δ は 2 次元である。
(iii)　Type III：l^a によって生成される微分同相写像が唯一の対称性となる場合。この場合、 G_Δ は 1 次元である。

これらの対称性が地平線の幾何学によってのみ決まることに注意をしておく。つまり時空計量が地平線の近傍においてさえ等長変換が許される必要はないのである。物理的に、Type II の地平線が最も興味深い対象である。それは Type II の地平線は (他のブラックホールの外側の物質による) 歪みや毛を組み入れるような一般化と同様に Kerr-Newman 地平線を含んでいるからである。ブラックホール力学の第 0 法則と第 1 法則は Type II の孤立地平線へ自然に拡張することができる。特に、Einstein-Maxwell 理論では孤立地平線の内部幾何学のみを用いて地平線の質量 M_Δ や角運動量 J_Δ を定義することができ、第 1 法則

$$\mathbf{d}M_\Delta = \frac{\kappa}{8\pi G}\mathbf{d}a_\Delta + \Omega\mathbf{d}J_\Delta + \Phi\mathbf{d}Q_\Delta \tag{7.1}$$

が成り立つことが示される。ここで、κ、Ω、Φ はそれぞれ地平線での表面重力、角速度、電気ポテンシャルである。$\mathbf{d}$ は (無限次元の) 相空間の外微分を表している。孤立地平線力学のこの法則は平衡状態にあるすべてのブラックホールや宇宙の地平線を包含し、任意の歪みや回転を持つブラックホールも含んでいる。

7.2.2　Type I の孤立地平線：量子論

まず、Type I の孤立地平線について詳細に議論し、非最小結合する物質や Type II の地平線を含むように結果を一般化しよう。Type I に関する議論を 3 つの部分に分けることにする。まず最初に Hamilton 形式を導入する。次に量子的な地平線幾何学を記述する。最後にエントロピー計算をまとめる。

Hamilton 形式

考える時空が固定された面積 a_0 を持つ Type I の孤立地平線 Δ である内部境界を許すような重力場と物質場からなる場合の一般相対性理論について考える。Δ 近傍の幾何学的構造と内部境界によって引き起こされる Hamilton 形式の修正について焦点を当てる。

(部分)Cauchy 面 M と孤立地平線 Δ が交わる 2 次元球面を S と書こう。Δ 上に内部ベクトル場 r^i(つまり、$SU(2)$ の Lie 代数における単位 2 次元球面から S への同型写像) を導入し、内部 $SU(2)$ 自由度を $r^iP^a_i = \sqrt{|\mathrm{det}q|}r^a$ を要請することによって $U(1)$ へ部分ゲージ固定を行う。ここで r^a は S に対する単位法ベクトルである。そうすると、Δ 内部幾何学は $\underline{A}^i r_i =: 2W$ の M 上の接続 A^i の S への引き戻しによって完全に決定されることが分かる。そして、W が 2 次元球面 S に内在するスピン接続になっている。つまり S 上で $W = \frac{1}{2}\underline{A}^i r_i = \frac{1}{2}\underline{\Gamma}^i r_i$ となる ((2.23) を参照)。したがって、もし $SO(2)$ の内部回転自由度を持つ S 上の正規直交ダイアッド $(m, \tilde{m})$ を用いると、W は対応する $U(1)$ 束上の接続となる。S 上の $U(1)$ 束は非自明であり、$\oint_S \mathrm{d}W$ は零ではなく、-2π になる。(しかし、任意のスピン接続の Chern 類は同じであり $\oint_S \mathrm{d}W = 0$ となる。相空間の接ベクトル δW は 1 形式であり S 上で大域的に定義されている。この事実はシンプレクティック構造の議論で有効になる。) 最後に、S が Type I の孤立地平線 (をも

つ M の交面) であるという事実は 2 つの正準共役な場の間の関係式

$$F := \mathrm{d}W = -\frac{2\pi}{a_0} 8\pi G\gamma \underline{\Sigma}^i r_i \tag{7.2}$$

によって捉えられる。ここで、$\underline{\Sigma}^i$ は運動量 P_i^a に双対な M 上の 2 形式 $\Sigma_{ab}^i = \eta_{abc} P_j^a \eta^{ij}$ の S への引き戻しである。したがって、孤立地平線の境界条件によって、独立である 2 つの場が関係付くことになった。このことから期待するように、境界条件は独立な場の数を減すことになる。特に、正準共役な場 A_a^i、Σ_{ab}^i の S への引き戻しは $U(1)$ 接続 W によって完全に決定される。

Hamilton 形式における主な修正は重力のシンプレクティック構造に表面項

$$\Omega(\delta_1, \delta_2) = -\int_M \mathrm{Tr}(\delta_1 A \wedge \delta_2 \Sigma - \delta_2 A \wedge \delta_1 \Sigma) + \frac{1}{2\pi} \frac{a_0}{4\pi G\gamma} \oint_S \delta_1 W \wedge \delta_2 W \tag{7.3}$$

が必要になることである。ここで、$\delta \equiv (\delta A, \delta\Sigma)$ は相空間 $\mathbf{\Gamma}$ の接ベクトルである。W は地平線上の本質的に唯一の '自由なデータ' であるので、シンプレクティック構造の表面項が W を用いてすべて表現できることは驚くことではない。しかし、新しい表面項が正確に $U(1)$-Chern-Simons 理論のシンプレクティック構造であることは興味深く幾分か驚くべきことである。**Maxwell**、**Yang-Mills**、スカラー場、ディラトン場のシンプレクティック構造には表面項は現れない。概念的には、このことは重要なことである。つまり、このことはなぜ (最小結合している物質に対して) ブラックホールのエントロピーが面積だけに依存し、物質の電荷に依存しないのかということの本質的な理由となっているからである。

量子的な地平線の幾何学

古典理論において、ブラックホールの表面の場は連続性によって外側の場のみから決定される。つまり、古典的な相空間には表面上に独立な自由度は存在しないことになる。一方、量子論において、場は超関数であり、非連続性がある。そのため、ブラックホールの表面上の場とその外側の場との間には有効的な結合はない。このことが量子論における '独立な表面の状態' の生成に関係する。

これまで見てきた '外側' の量子幾何学を内部境界 S が存在する場合に拡張しなければならない。一般化された接続の空間 $\bar{A}$ は積 $\bar{A} = \bar{A}_V \times \bar{A}_S$ であり、$\bar{A}_V$ はブラックホールの外側にある (閉じた区分解析的な) エッジに $SU(2)$ の要素を割り当てたもので、$\bar{A}_S$ は S 上にある (閉じた区分解析的な) エッジに $U(1)$ の要素を割り当てたものである。それゆえ、全 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ として $\mathcal{H} = \mathcal{H}_V \otimes \mathcal{H}_S$ を考えることは自然である。ここで $\mathcal{H}_V$ は外側の一般化された接続の適切な関数から作られ、$\mathcal{H}_S$ は一般化された表面の接続の適切な関数から作られる。$\mathcal{H}_V$ は外側の量子幾何学から得られ $\mathcal{H}_V = L^2(\bar{A}, \mu_0)$ である。では表面上の Hilbert 空間は何であるのか？その答えはシンプレクティック構造の表面項の構造によって示唆され、地平線上の Chern-Simons 理論の Hilbert 空間となるべきである。さらに、この表面項の係数は量子 Chern-Simons 理論が

$$k = \frac{a_0}{4\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2} \tag{7.4}$$

によって与えられる (無次元の) 結合定数 (またはレベル k) を持たなければならないことを示す。しかし、S が任意の **2** 次元面ではなく孤立地平線であることを保証する境界条件 (7.2) を考えなければならない。

鍵となるアイディアはそれを量子力学的に課すことであり、$\mathcal{H}$ 上の演算子方程式として

$$\left(1\otimes\hat{F}\right)\Psi=-\frac{2\pi}{a_0}8\pi G\gamma\left(\left(\hat{\underline{\Sigma}}\cdot r\right)\otimes 1\right)\Psi \tag{7.5}$$

を通して課すことである。ここで、$\hat{F}$ は表面上の演算子であり、$\hat{\underline{\Sigma}}$ は体積の Hilbert 空間の演算子であることに注意しておく。解の基底が $\Psi=\Psi_V\otimes\Psi_S$ のタイプの状態によって与えられることは容易に示すことができる。ここで Ψ_V は体積演算子の固有状態であり、Ψ_S は同じ固有値を持つ表面演算子の固有状態である。(7.5) の右辺の外側の演算子のすべての固有値は外側の量子幾何学から知ることができる。((4.50) を参照。) それらは、

$$-\left(\frac{2\pi}{a_0}\right)\left(8\pi l_{\mathrm{Pl}}^2\sum_I m_I\delta^3(x,p_I)\eta_{ab}\right) \tag{7.6}$$

によって与えられる。ここで、m_I は半整数であり、和は S 上の puncture と呼ばれる点の有限の集合で取っており、η_{ab} は S 上の計量に依らない Levi-Civita 密度である。それゆえ、量子境界条件 (7.5) から $\mathcal{H}_S$ が puncture を持つ 2 次元球面 S 上の $U(1)$-Chern-Simons 理論の Hilbert 空間であるべきであることが分かる。ここで、puncture を持つ 2 次元球面 S では曲率 F の表式が有限の puncture に集中している δ 超関数の形を持つことになる。

S 上の puncture の集合 $\mathcal{P}$ を固定し、この穴のあいた球面上の $U(1)$-Chern-Simons 理論を考える。この理論の相空間は $\mathbf{\Gamma}_S^{\mathcal{P}}=\left(\bar{\mathcal{A}}_S^0\right)/\left(\bar{\mathcal{G}}^{\mathcal{P}}\rtimes\mathcal{D}^{\mathcal{P}}\right)$ である。ここで $\bar{\mathcal{A}}_S^0$ は puncture を除いていたるところ平坦である接続の空間であり、$\bar{\mathcal{G}}^{\mathcal{P}}$ は puncture を除いて恒等的である局所 $U(1)$ ゲージ変換の空間であり、$\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ は puncture と puncture での構造を固定する S の微分同相写像の空間であり、$\rtimes$ は半直積[*2][*3]を意味する。この相空間は集合 $\mathcal{P}$ に n 個の puncture があり、$\mathbb{T}^{2(n-1)}$ 上に自然なシンプレクティック構造があるならば、トーラス $\mathbb{T}^{2(n-1)}$ と同型になる。正準共役な座標の便利な取り方として以下のような座標を導入する。n 番目の puncture を ‘原点’ として固定し、I 番目の puncture を n 番目の puncture を繋げる曲線の族を γ_I $(I=1,2,\ldots,n-1)$ と書き、最初の $n-1$ 個の puncture のそれぞれを囲む ‘小さな’ 閉じたループを η_I と書こう。そうすると、各 I では γ_I と η_I の 2 つのホロノミーが正準共役となる。この相空間はしばしば非可換トーラスと呼ばれる。

ブラックホールの表面上の状態の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_S^{\mathcal{P}}$ はこのトーラスの幾何学的量子化から得られる。これは $(S,\mathcal{P})$ 上の $U(1)$-Chern-Simons 理論の量子状態の空間である。全表面 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_S$ はこの Hilbert 空間の集合 $\mathcal{P}$ が大きい極限での帰納的極限となる。体積 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_V=L^2(\bar{\mathcal{A}},\mathrm{d}\mu_0)$ もグラフ α による Hilbert 空間 $(\mathcal{H}_V)_\alpha$ の帰納的極限として得ることもできる。

次に、量子境界条件 (7.5) を課さなければならない。このことは全体の枠組みに対して非常に非自明な疑問を生じさせる。表面上の Hilbert 空間の構成は (7.5) に強く動機づけられていた。しかし、この構成は完全でありこれ以上の自由度はない。Chern-Simons 理論の Hilbert 空間において、表面上の演算子 $\hat{F}$

[*2] puncture を固定する必要性は数学の文脈では ‘通常の習慣’ であるが、物理的な視点では技術的な障害の最も細心の注意を要することである。それは微分同相拘束条件を課したり状態数を数え上げる際に重要な役割を演じる。

[*3] G,H を位相群とし、$\mathrm{Aut}(H)$ を位相群 H の自己同型写像全体からなる群とする。準同型写像 $\pi:G\to\mathrm{Aut}(H)$ が与えられていたとする。π によって引き起こされた写像 $G\times H\to H,\quad (g,h)\mapsto\pi(g)h$ が連続であるならば、直積集合 $G\times H$ に、群演算：$(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2):=(g_1g_2,h_1(\pi(g_1)h_2)),\quad (g_1,g_2\in G,h_1,h_2\in H)$、位相として直積位相を与えると位相群が得られる。これを $G\ltimes H$ と書き、G と H の半直積群という。

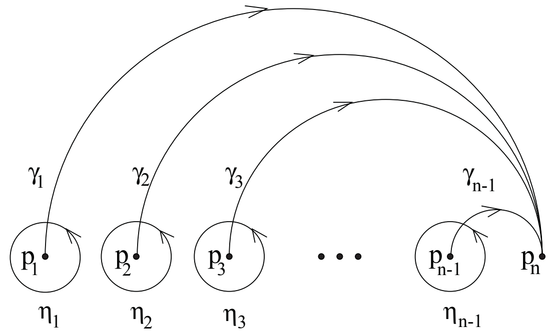


図 7.1　表面の相空間の座標の取り方

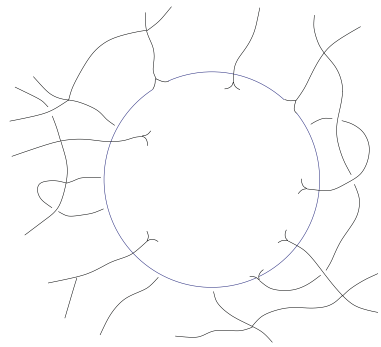


図 7.2　量子的な地平線。外側でのポリマー励起は地平線に ‘刺さって’ おり、量子化された面積に寄与する。角度欠損を生じている puncture 以外では地平線は平坦である。この角度欠損を足し合わせると地平線に 2 次元球面のトポロジーを与えることになる。

の固有値を計算することができる。そして、この計算は体積 Hilbert 空間とは完全に独立である。つまり、外側の量子幾何学について考えることは決してないのである。そこで、すべての要となる重大な疑問が生じる。それは、$\hat{F}$ の固有値は (7.5) の外側の演算子の固有値 (7.6) と同じであるのか？という疑問である。もしそうでなければ、量子境界条件に対する解は存在しないことになるだろう。注目すべき事実は、2 つの計算が完全に異なるものであっても **2 つの演算子の固有値の無限集合が一致する**ということである。このことは特別な場合において孤立地平線の境界条件のため Chern-Simons 理論のレベルが Barbero-Immirzi パラメータ γ と面積 a_0 に関係付くために生じる。したがって、3 つの完全に独立な理論 (古典的一般相対性理論での孤立地平線の枠組み、ブラックホールの外側の量子幾何学、puncture を持つ地平線上の Chern-Simons 理論) の間に一致する部分が存在するのである。そして、この一致によって地平線の量子幾何学に完全な数学的記述が与えられることになる。

最後に、量子 Einstein 方程式を課さなければならない。ガウス拘束条件は全状態 $\Psi_V \otimes \Psi_S$ がゲージ不変であることを要請する。微分同相拘束条件は S 上の微分同相写像がゲージ変換として見なされるべきであることを要請する。ここで再び重大な数学的な障害が生じるが、最終的な結果は単純である。外側と表面のそれぞれが残りのゲージ自由度 $\left(\bar{\mathcal{G}}/\bar{\mathcal{G}}^{\mathcal{P}}\right)$ の元で非自明に変換されることになるが、全状態はゲージ不変である。($\mathcal{D}/\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ に対応する) 残りの微分同相拘束条件を課すことは puncture の数のみが意味を持

ち、それらの位置は無関係である[*4]ということである。

それに反して、Hamiltonian 拘束条件は表面上の状態 (つまり、地平線の量子幾何学) を制限するものではない。これは古典理論において、拘束条件を積分する関数 (ラプス関数) が孤立地平線上 (と通常無限遠で) で零になる時のみ汎関数微分可能である (つまりゲージを生成する) ためである。孤立地平線に沿った時間発展は拘束条件のみによってではなく、本当の **Hamitonian** によって生成される。

以上をまとめると、物理的な表面上の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_S^{\mathrm{Phys}}$ は $\mathcal{H}_S^{\mathrm{Phys}} = \oplus_n \mathcal{H}_S^n$ によって与えられる。ここで $\mathcal{H}_S^n$ は外側の幾何学のポリマー励起が S と交わる n 個の puncture を持つ球面 S 上の $U(1)$-Chern-Simons 理論の Hilbert 空間である。その $\mathcal{H}_S^n$ について以下のことが言える。W は S 上の内部スピン接続であり、F は puncture を除いて消えるために量子地平線の内部幾何学は n 個の puncture を除いて平坦である。この puncture のまわりの η_I ホロノミーは非自明となる。その結果、puncture は角度欠損を与え、そして量子化されている。それらは足し合わせると 4π になり、Gauss-Bonnet の定理の量子対応物になっている。

注意

(i) ここでの議論は地平線の境界条件が重要であった。つまり、一般の 2 次元面では成り立たない。したがって、Wheeler の 'It from Bit' の考え方の最も重要な欠点が克服されている。演算子方程式 (7.5) を通して境界条件を課すことの意味は接続 W と三脚場 $\underline{\Sigma}^i r_i$ が共に揺らぎ、それらが別々に揺らぐことが要請されるということである。この方程式は量子ブラックホールが何であるのか？という疑問に答える最初のステップとなるだろう。

(ii) この枠組みを非最小結合する場や Type II の地平線を含めるように拡張するために、表面上の Hilbert 空間の構成に対するたった 3 つの本質的な数学的要素があることを注意しておく。それらは、(a) 表面上のシンプレクティック構造が (7.4) のレベル k を持つ $U(1)$-Chern-Simons 理論のシンプレクティック構造であることが示される (7.3) の表面項の表式、(b) 地平線の境界条件 (7.2)、(c) 三脚場演算子 $\underline{\Sigma}^i r_i$ のスペクトル (7.6) の 3 つである。

7.3　ブラックホールの地平線に対する ABCK フレームワーク

本節では 4 章と 5 章と前節のうち LQG でのブラックホールのエントロピーの議論に必要な部分をまとめることにする。4 章において述べたように、LQG において量子状態はスピンネットワークによって記述される [53]。スピンネットワークの基本要素は、エッジと頂点である。エッジは $SU(2)$ ゲージ群を反映しており、スピン j ($j = 0, 1/2, 1, 3/2, \cdots$) がラベル付けされている。頂点はエッジ間の交わりを表している。スピン j_1, j_2, j_3 が 1 つの頂点で交わる 3 価のエッジに対して、以下の条件を満足しなければな

*4　少し注意を与えておく。(i) Chern-Simons 理論において、指数型の演算子 $\exp(\mathrm{i}\hat{F})$ のみがうまく定義されており、$\hat{F}$ はうまく定義されていない。よって、数学的に意味のある量子境界条件は (7.5) の指数型のヴァージョンである。(ii) puncture での $U(1)$ ゲージ群は量子 $U(1)$ 群に置き換わる。変形パラメータは Chern-Simons 理論のレベル k によって与えられ、それは量子化する前の要請により整数であることが要請される。このことは各 puncture での角度欠損が量子化されることを意味する。(iii) 表面上の Hilbert 空間の構成において puncture での構造を固定しなければならなかった。$\mathcal{D}/\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ の元でこの構造は変化するため、表面上の Hilbert 空間の無限のコピーを用いることになり、$\mathcal{D}/\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ はゲージ変換であるという事実はコピーの内ただ 1 つが物理的に意味のあるものであることを意味する。つまり、$\mathcal{D}/\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ の微分同相写像がゲージ変換であるという事実は 'ゲージ固定' によってなされる。

らない。

$$j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{N}, \tag{7.7}$$
$$j_i \leqq j_j + j_k \ \ (i, j, k : \text{すべて異なる}) \tag{7.8}$$

この条件はスピンネットワークのゲージ不変性を保証するものである。

この定式化を用いることで、面積や体積に対するスペクトルの一般的な表式が得られる [22, 54]。ブラックホールの地平線を議論するために重要な面積スペクトル A_j は、

$$A_j = 4\pi\gamma \sum_i \sqrt{2j_i^u(j_i^u+1) + 2j_i^d(j_i^d+1) - j_i^t(j_i^t+1)} \tag{7.9}$$

によって与えられる。ここで、γ は Barbero-Immirzi パラメータと呼ばれ、正準共役な変数を選ぶ際の不定性と関係がある [55]。和は 2 次元面とエッジの全交点に対して取っている。ここで添字の u、d、t はそれぞれ 2 次元面に対して上側のエッジ、下側のエッジ、2 次元面上のエッジを表している。ただし、上側や下側は自由に決めることができる。

地平線の面積を固定し、その面積を持つようなスピンネットワークのエッジの配位の自由度を数えることでブラックホールのエントロピーが計算される [44]。しかしながら、ブラックホールの事象の地平線を定義するには全時空構造を知る必要があり、量子重力理論において事象の地平線を記述することは難しい。そこで、Ashtekar らは [45] において、まず局所的な地平線として孤立地平線を定義し、その地平線上の自由度を数えることでブラックホールのエントロピーを求めた。ここで、少し簡単にこの ABCK フレームワークを解説する。

通常、ブラックホール熱力学を記述する際に時空の完全な発展の後に定義される事象の地平線を考える。しかしながら、事象の地平線を考えることは系が孤立している熱力学的な状況を議論するには制限しすぎているように思われる。孤立している系という状況を適切に取り扱うために、ABCK フレームワークにおいて孤立地平線 (isolated horizon) が定義された。そのような孤立地平線を定義する際の主な困難は、大局的な Killing 場がない時にブラックホール熱力学を定義すること (または、適切な “表面重力” を定義すること) である [56]。孤立地平線での要請のため、スピンネットワークの接続を $SU(2)$ ではなく $U(1)$ へ簡約化することができる。($SU(2)$ 接続を用いた孤立地平線の取り扱いへのアプローチは [57] などで行われはじめている。) $U(1)$ 接続の曲率 F_{ab} を用いて、孤立地平線とその外側の間の境界条件を

$$F_{ab} = -\frac{2\pi\gamma}{A} \underline{\Sigma}^i_{ab} r_i \tag{7.10}$$

と表すことができる。ここで、A は孤立地平線の面積で、r_i は孤立地平線に対する単位法線ベクトルである。$\underline{\Sigma}^i_{ab}$ はトライアド密度 E^a_i の孤立地平線への引き戻しである。つまり、

$$E^a_i = \gamma\eta^{abc}\Sigma_{bci} \tag{7.11}$$

ということである。ここで、η^{abc} は Levi-Civita 3 形式密度である。式 (7.10) は、下で与える条件 (iv) を決定する際に重要な役割を演じる。

LQG において、Hilbert 空間はスピンネットワークによって定義される。孤立地平線を持つ系を考える時は、Hilbert 空間を孤立地平線での Hilbert 空間とその外側での Hilbert 空間のテンソル積 ($H_{\rm IH} \otimes H_\Sigma$) に分解することができる。

孤立地平線に刺さっているスピン $(j_1^u, j_2^u, \cdots, j_n^u)$ を持つ上側のエッジを用いて、H_Σ を

$$H_\Sigma = \bigoplus_{j_i^u, m_i} H_\Sigma^{j_i^u, m_i} \tag{7.12}$$

という風に直和として与えることができる。ここで、m_i は $-j_i^u$, $-j_i^u+1$, $\cdots$, j_i^u の値のうちどれか 1 つを持つ。これは、孤立地平線に対して垂直なフラックス演算子の固有値 $e_{s'}^{m_i}$ と

$$e_{s'}^{m_i} = 8\pi\gamma m_i \tag{7.13}$$

と関係がある。ここで、s' はスピン j_i^u を持つエッジと 1 つの交点をもつ孤立地平線の一部分である。

[45] で示されているように、孤立地平線の外側の拘束条件は状態数の数え上げに基本的に影響を与えない。面積演算子の固有値 A_j は

$$\text{(i)} \quad A_j \leqq A \tag{7.14}$$

を満足しなければならない[*5]。

孤立地平線の Hilbert 空間 $H_{\rm IH}$ を構成する際には幾分かの困難がある。しかし、地平線の面積 A を

$$A = 4\pi\gamma k \tag{7.15}$$

とするなら、$H_{\rm IH}$ を構成することができる。ここで、$k(\in \mathbb{N})$ は Chern-Simons 理論においてレベルと呼ばれる自然数である。また、$H_{\rm IH}$ は微分同相不変であり $Z_{\rm k}$ ゲージ変換 (“量子化された”$U(1)$ ゲージ変換) に対して不変である関数を用いて構成される。さらにこの条件に加えて、

$$\text{(ii)} \ (\mathrm{j}_1^{\mathrm{u}}, \mathrm{j}_2^{\mathrm{u}}, \cdots, \mathrm{j}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{u}}) \text{ の順序の固定}$$

の条件が要求される。これは同時に j^d と j^t の順序も決まることを意味する。孤立地平線上でスカラー拘束条件は考えない。なぜなら、Lapse 関数は孤立地平線上では消えるからである。結果として、$H_{\rm IH}$ は (7.12) と同様にホロノミー演算子 $\hat{h}_i$ の固有状態 Ψ_b の直和で与えられる。ここで $\hat{h}_i$ と Ψ_b は

$$\hat{h}_i \Psi_b = e^{\frac{2\pi i b_i}{k}} \Psi_b \tag{7.16}$$

という関係である。

孤立地平線のトポロジーが S^2 であることを保証する量子 Gauss-Bonnet の定理より、

$$\text{(iii)} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = 0 \mod k \tag{7.17}$$

が要請される。

[*5] ここで、面積を固定した際により適切である区間 $[A-\delta A, A+\delta A]$ ではなく、条件 $A_j \leqq A$ を考えることに注意しておく。このことによる違いは最終的な結果に影響を与えない。なぜならば、表式 (7.27) のため、面積が大きい極限 $A \to \infty$ に対して、$S := \ln W = \ln\left(\frac{dN}{dA}\delta A\right) \approx \ln N(A)$ となるからである。

最後に、ブラックホールとその外側に対する境界条件 (7.10) を量子化しなければならない。H_{IH} 上でのうまく定義されている演算子は指数関数の形 $\exp[i\hat{F}]$ のみであるため、境界条件を

$$\left(\exp\left[i\hat{F}\right]\otimes 1\right)\Psi = \left(1\otimes\exp\left[-i\frac{2\pi\gamma}{A}\underline{\Sigma}\cdot r\right]\right)\Psi \tag{7.18}$$

と記述する。ここで、Ψ は $H_{\mathrm{IH}}\otimes H_{\Sigma}$ の状態を表す。これから、

$$\text{(iv)}\quad b_i = -2m_i \mod k \tag{7.19}$$

となることがわかる。地平線上の自由度を数えるために必要な条件は条件 (i)-(iv) である。条件 (iii) と (iv) から、

$$\text{(iii)}'\quad \sum_{i=1}^{n} m_i = n'\frac{k}{2} \tag{7.20}$$

が得られる。ここで、n' は整数である。よって、(i)-(iv) の代わりに条件 (i), (ii), (iii)$'$ を課すことにする。

以下では、上で与えた条件の元での地平線上の自由度の数え上げを行う。まず、条件 (i) と (ii) を課した場合での自由度を数え、そして [58] に従って条件 (iii) を含んだ場合での自由度を数えることにする。

7.4　面積条件を満たす可能な状態の数え上げ

固定されたブラックホールの面積に対する面積スペクトル $\{A_j\}$ についての自由度を数えることによって、ブラックホールのエントロピーが得られるという議論がなされた [44]。そこでは、ブラックホールの地平線上のエッジはないという仮定 ($j_i^t = 0$) をすることによる簡単化された面積スペクトルを用いていた。この仮定はどの頂点も地平線上にはないという仮定である。そのような仮定の下で、条件 (7.8) から $j_i^u = j_i^d (:= j_i)$ が得られる。そして、

$$A_j = 8\pi\gamma\sum_i\sqrt{j_i(j_i+1)} = A \tag{7.21}$$

を満足する面積スペクトル $\{A_j\}$ についての自由度を数えるだけで十分である。数え上げられた自由度の数の対数を取ることによって与えられるエントロピーが地平線の面積に比例することがわかった。そして、マクロなブラックホールに対して Bekenstein-Hawking のエントロピー・面積則 $S = A/4$ を課すことによって、Barbero-Immirzi パラメータの値を決めることができる。[45] において Ashtekar らはこのアイディアを孤立地平線のフレームワーク (ABCK フレームワーク) [56] を用いた地平線条件での場合に拡張した。このオリジナルの議論で行われた状態数の数え上げの誤りは [59, 60] において修正されている。Barbero-Immirzi パラメータの正しい値は現在では $\gamma = 0.2375\cdots$ によって与えられている。自由度の数え上げに関する同様の議論は [61–65] においてなされている。

しかし、これらの簡単化された面積スペクトル (7.21) に対する仮定が唯一の選択であるのかどうかという疑問が生じる。実際、[3] において Thiemann は異なるスペクトルが用いている。彼は、地平線の内側は存在しないという条件、つまり地平線の内側にはエッジがない ($j_i^d = 0$) という境界条件を適用した。条件 (7.8) を用いることによって、$j_i^u = j_i^t := j_i$ が得られる。これから (7.21) とは異なるスペクトル

$$A_j = 4\pi\gamma\sum_i\sqrt{j_i(j_i+1)} \tag{7.22}$$

が与えられる。もちろんこのスペクトルは異なる自由度の数を与え、Barbero-Immirzi パラメータの値も異なり、$\gamma = 0.323\cdots$ となっている [66]。

結果が面積スペクトルの選び方に依っているため、正しい選び方を知らなければならない。しかし、現在の半古典的なアプローチでは困難であるかもしれない。量子重力理論でのアプローチが思い浮かぶであろうが、その代わりにこの章においては面積スペクトルの選び方でどのくらいの違いがあるのかを見ていくことにする。このため、一般的な面積スペクトル (7.9) の場合を議論する。零ではない 3 つのスピン (j_i^u、j_i^d、j_i^t) を全て考慮しなければならないため、上で述べた 2 つの場合に比べかなり多くの自由度となる。計算が少し複雑になるため、まず簡単化された面積スペクトルの場合の自由度の数え上げをまとめ、そしてそれを一般的な面積スペクトルの場合に拡張することにする。

7.4.1　簡単化された面積スペクトル

最初に、[62–64, 66] に基づいて簡単化された面積スペクトルの場合の状態数の数え方について述べる。また、状態数の数え上げに関するその他の有効な方法は [59, 60, 67] などを参照。

$$M(A) := \left\{ (j_1, \cdots, j_n) \;\middle|\; j_i \in \frac{\mathbb{N}}{2},\ \ \sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)} \leqq \frac{A}{8\pi\gamma} \right\} \tag{7.23}$$

によって状態の集合 $M(A)$ を定義しておく。そうしておくと、状態数 $N(A)$ は $M(A)$ の要素数に 1 を加えたものになる。この “1” は 0 要素を含むことを意味している。$N(A)$ の値を求めるために、再帰関係式を導いておかなければならない。$(j_1, \cdots, j_n) \in M(A - a_{1/2})$ を考える。ここで、$a_{1/2}$ は $j = 1/2$ をもつエッジ 1 つのみで面積固有値 (7.21) に寄与する最小面積である。つまり、$a_{1/2} = 8\pi\gamma\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} = 4\pi\gamma\sqrt{3}$ となる。そうすると、$(j_1, \cdots, j_n, \frac{1}{2}) \in M(A)$ となることはすぐにわかる。同様に、任意の固有値 $a_{j_x} (0 < a_{j_x} \leqq A)$ に対して、

$$(j_1, \cdots, j_n) \in M(A - a_{j_x}) \ \Rightarrow\ (j_1, \cdots, j_n, j_x) \in M(A) \tag{7.24}$$

となることがわかる。もし $j_x \neq j_{x'}$ であれば

$$(j_1, \cdots, j_n, j_x) \neq (j_1, \cdots, j_n, j_{x'}) \tag{7.25}$$

から重要な結果:「すべての固有値 $(0 <) a_{j_x} \leqq A$ とすべての要素 $(j_1, \cdots, j_n) \in M(A - a_{j_x})$ を考慮すると、$\{(j_1, \cdots, j_n, j_x)\}$ が $M(A)$ となる。」が得られる。

(7.24) と (7.25) から、再帰関係式として

$$N(A) = \sum_j \theta(A - a_{1/2}) \cdot 2 \left[\frac{2j+1}{2}\right] N(A - 8\pi\gamma\sqrt{j(j+1)}) + 1 \tag{7.26}$$

が得られる。ここで、因子 $2[\frac{2j+1}{2}]$ は与えられた j の磁気量子数 m の自由度によるものである。また、$[\cdots]$ は整数部分を表す。

エントロピーが面積 A に比例するならば、

$$N(A) = Ce^{\frac{\gamma_M}{4\gamma}A} \tag{7.27}$$

という関係になっていなければならない。ここで、C は定数である。実際、[59] において示されている。$A \to \infty$ の時、$S := \ln N(A) = \frac{\gamma_M}{\gamma} \times \frac{A}{4}$ であるため、Bekenstein-Hawking のエントロピー公式となるためには Barbero-Immirzi パラメータは $\gamma = \gamma_M$ で与えられなければならない。(7.26) に (7.27) を代入し、$A \to \infty$ の極限を取ると、

$$1 = \sum_{j=Z/2} 2 \left[\frac{2j+1}{2} \right] \exp(-2\pi\gamma_M \sqrt{j(j+1)}) \tag{7.28}$$

という γ_M に対する方程式が得られる [64]。この方程式は数値的に解くしかない。

[59, 60] でなされているような m の自由度の数え上げを求めるように拡張するために以下のような状態の集合 $M'(A)$ を考える。

$$M'(A) := \left\{ (m_1, \cdots, m_n) \;\middle|\; m_i \in \frac{\mathbb{N}}{2},\; \sum_i \sqrt{|m_i|(|m_i|+1)} \leqq \frac{A}{8\pi\gamma} \right\} \tag{7.29}$$

これは、$|m_i| = j_i$ のみを考えており、$m_i = -j_i + 1, \cdots, j_i - 1$ の自由度は余分であるように思われるかもしれない。ポイントは m の自由度のみを数えるということである。例えば、$(j = j_i, m = -j_i + 1)$ と $(j = j_i - 1, m = -j_i + 1)$ はこの数え方では区別することはできない。なぜなら、$m_i = |j_i - 1|$ の自由度は $j = j_i - 1$ に含まれているからである。それゆえ、[59, 60] のように m の自由度を数えるなら、因子 $2[\frac{2j+1}{2}]$ は 2 に置き換えられる。

条件 (7.20) を考慮する場合、

$$\begin{aligned} A = 4\pi\gamma k &\geq 8\pi\gamma \sum_i \sqrt{j_i(j_i+1)} \\ &\geq 8\pi\gamma \sum_i \sqrt{|m_i|(|m_i|+1)} \\ &> 8\pi\gamma \sum_i |m_i| \geq 8\pi\gamma |\sum_i m_i| \\ &= 4\pi\gamma k|n'| \end{aligned} \tag{7.30}$$

となることは大変重要である。これより、$n' = 0$ と

$$\text{(v)} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i = 0 \tag{7.31}$$

が得られる。[58] の方法に従い、状態数の数え上げにおいてこの条件を含めることができる。これは Barbero-Immirzi パラメータの値に影響を与えることはないが、Planck スケールのブラックホールを考える時には重要となる。

7.4.2 一般的な面積スペクトル

次に、状態数の数え上げにおいて一般的な面積スペクトル (7.9) を考える。この場合、$\boldsymbol{j}_i := (j_i^u, j_i^d, j_i^t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ という記法を用い、与えられた面積 A に対する状態の集合

$M(A)$ を以下のように定義する。

$$M(A) := \Bigg\{ (\boldsymbol{j}_1, \cdots, \boldsymbol{j}_n) \ \Bigg| \ j_i^u, j_i^d, j_i^t \in \left\{0, \frac{\mathbb{N}}{2}\right\}, \ \boldsymbol{j}_i \neq \boldsymbol{0}, \ (j_i^u, j_i^d, j_i^t) \text{ satisfy (7.7) and (7.8)}, \\ \text{and } \sum_i \sqrt{2j_i^u(j_i^u+1) + 2j_i^d(j_i^d+1) - j_i^t(j_i^t+1)} \leqq \frac{A}{4\pi\gamma} \Bigg\} \tag{7.32}$$

そうすると、状態数 $N(A)$ は $M(A)$ の要素数に 1 を加えたものになる。ここで、j^u スピンに関係する磁気量子数 m の自由度のみを数えることにする。このことはエンタングルメントエントロピー (レビュー論文は [68] などが参考になるであろう。[69]) やホログラフィ原理 (例えば [70] を見よ。) の観点から見ると妥当である。LQG でのエンタングルメントエントロピーの議論については [71, 72] でも行われている。以下、状態数を数え上げを行っていく。まず、問題を簡単にするため $j^t \in \{0, \mathbb{N}\}$ の場合を考え、その場合の状態数を $N(A)_{\text{even}}$ と書くことにする。この場合、条件 (7.7) より $j^u + j^d := n \in \mathbb{N}$ が得られる。n を固定すると、j^u、j^d、j^t の可能な値は以下のようにリストアップできる。条件 (7.8) を満足するため、$0 \leqq s \leqq n$ の時 $s \in 0, \mathbb{N}$ に対して、$(j^u, j^d) = (\frac{n}{2} \pm \frac{s}{2}, \frac{n}{2} \mp \frac{s}{2})$ となることがわかる。各 s に対して、(7.8) を満足するには j^t の可能な値は $j^t = s, s+1, \cdots, n$ となる。(j^u, j^d, j^t) の可能な組み合わせは以下の模式図のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
(j^u, j^d) &= (n, 0) && \rightarrow \quad j^t = n \\
&\ \vdots && \qquad\ \vdots \\
&= \left(\frac{n}{2} + \frac{s}{2}, \frac{n}{2} - \frac{s}{2}\right) && \rightarrow \quad\ = s, s+1, \cdots, n \\
&\ \vdots && \qquad\ \vdots \\
&= \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) && \rightarrow \quad\ = 1, 2, \cdots, n \\
&= \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) && \rightarrow \quad\ = 0, 1, \cdots, n \\
&= \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}, \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) && \rightarrow \quad\ = 1, 2, \cdots, n \\
&\ \vdots && \qquad\ \vdots \\
&= \left(\frac{n}{2} - \frac{s}{2}, \frac{n}{2} + \frac{s}{2}\right) && \rightarrow \quad\ = s, s+1, \cdots, n \\
&\ \vdots && \qquad\ \vdots \\
&= (0, n) && \rightarrow \quad\ = n.
\end{aligned}$$

§.7.4.1 と同様の議論によって、面積演算子の任意の固有値 a_x に対して、

$$(\boldsymbol{j}_1, \cdots, \boldsymbol{j}_n) \in M(A - a_x)_{\text{even}} \Rightarrow (\boldsymbol{j}_1, \cdots, \boldsymbol{j}_n, \boldsymbol{j}_x) \in M(A)_{\text{even}} \tag{7.33}$$

となることがわかり、これは (7.24) に対応する。ここで、a_x は

$$a_x := 4\pi\gamma\sqrt{2j_x^u(j_x^u+1) + 2j_x^d(j_x^d+1) - j_x^t(j_x^t+1)} \qquad (0 < a_x \leqq A)$$

で与えられる。また、(7.25) に対応する

$$(\boldsymbol{j}_1, \cdots, \boldsymbol{j}_n, \boldsymbol{j}_x) \neq (\boldsymbol{j}_1, \cdots, \boldsymbol{j}_n, \boldsymbol{j}_{x'}) \ \text{ if } \ \boldsymbol{j}_x \neq \boldsymbol{j}_{x'} \tag{7.34}$$

も得られる。それゆえ、§.7.4.1 の場合のように全ての固有値 $0 < a_x \leqq A$ と全ての要素 $(\boldsymbol{j}_1, \cdots, \boldsymbol{j}_n) \in N(A-x)_{\text{even}}$ を考慮することによって、$\{(\boldsymbol{j}_1, \cdots, \boldsymbol{j}_n, \boldsymbol{j}_x)\}$ が $M(A)_{\text{even}}$ を与えることがわかる。

$j^u = \frac{n}{2} + \frac{s}{2}, j^d = \frac{n}{2} - \frac{s}{2}, j^t = t \ (n, s, t \in \mathbb{N})$ の記法を用いると、

$$\begin{aligned} a_x(n,s,t) &= 4\pi\gamma\sqrt{n^2 + 2n + s^2 - t(t+1)} \\ N(A)_{\text{even}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=s}^{n} 2(n+1)\theta(A-4\pi\gamma)N(A-a_x(n,s,t))_{\text{even}}\right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=0}^{n}(n+1)\theta(A-4\pi\gamma)N(A-a_x(n,s=0,t))_{\text{even}}\right] + 1 \end{aligned} \tag{7.35}$$

が得られる。ここで、$s \neq 0$ での $N(A-x(n,s,t))_{\text{even}}$ の前の因子 $2(n+1)$ $[= (n+s+1) + (n-s+1)]$ はそれぞれ $\left(j^u, j^d\right) = \left(\frac{n}{2} + \frac{s}{2}, \frac{n}{2} - \frac{s}{2}\right)$、$\left(\frac{n}{2} - \frac{s}{2}, \frac{n}{2} + \frac{s}{2}\right)$ に対応するスピンの磁気量子数 m の自由度に由来する。同様に、第二項の因子が $(n+1)$ で与えられることがわかる。階段関数 $\theta(A-4\pi\gamma)$ は最小面積 $a_x(1,0,1) = 4\pi\gamma$ に由来している。

同様に、$j^t = n + \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ の場合を数え、対応する状態数を $N(A)_{\text{odd}}$ と書くことにする。この場合、(j^u, j^d, j^t) の可能な組み合わせは以下の模式図のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} (j^u, j^d) &= \left(n + \frac{1}{2}, 0\right) && \rightarrow \ j^t = n + \frac{1}{2} \\ &\vdots && \quad \vdots \\ &= \left(\frac{n}{2} + \frac{s}{2} + \frac{1}{2}, \frac{n}{2} - \frac{s}{2}\right) && \rightarrow \ = s + \frac{1}{2}, \cdots, n + \frac{1}{2} \\ &\vdots && \quad \vdots \\ &= \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) && \rightarrow \ = \frac{3}{2}, \cdots, n + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) && \rightarrow \ = \frac{1}{2}, \cdots, n + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) && \rightarrow \ = \frac{1}{2}, \cdots, n + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}, \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) && \rightarrow \ = \frac{3}{2}, \cdots, n + \frac{1}{2} \\ &\vdots && \quad \vdots \\ &= \left(\frac{n}{2} - \frac{s}{2}, \frac{n}{2} + \frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) && \rightarrow \ = s + \frac{1}{2}, \cdots, n + \frac{1}{2} \\ &\vdots && \quad \vdots \\ &= \left(0, n + \frac{1}{2}\right) && \rightarrow \ = n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$j^u = \frac{n}{2} + \frac{s}{2} + \frac{1}{2}$, $j^d = \frac{n}{2} - \frac{s}{2}$, $j^t = t + \frac{1}{2}$ $(n, s, t \in \mathbb{N})$ の記法を用いると、面積固有値は $a_y(n,s,t) := 4\pi\gamma\sqrt{n^2+s^2+3n+s+\frac{3}{4}-t(t+2)}$ と書かれる。結果として、

$$N(A)_{\rm odd} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=s}^{n}(2n+3)\theta(A-2\pi\gamma\sqrt{3})N(A-a_y(n,s,t))_{\rm odd} \tag{7.36}$$

が得られる。因子 $(2n+3)$ $[=(n+s+2)+(n-s+1)]$ はそれぞれ、$(j^u, j^d) = (\frac{n}{2}+\frac{s}{2}+\frac{1}{2}, \frac{n}{2}-\frac{s}{2})$ と $(\frac{n}{2}-\frac{s}{2}, \frac{n}{2}+\frac{s}{2}+\frac{1}{2})$ に対応するスピンの磁気量子数 m の自由度に由来する。階段関数 $\theta(A-2\pi\gamma\sqrt{3})$ は最小面積 $a_y(0,0,0) = 2\pi\gamma\sqrt{3}$ に由来する。上の 2 つの結果をまとめると、状態数 $N(A)$ は以下の再帰関係式

$$\begin{aligned} N(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=s}^{n}2(n+1)\theta(A-4\pi\gamma)N(A-a_x(n,s,t)) + \sum_{t=0}^{n}(n+1)\theta(A-4\pi\gamma)N(A-a_x(n,s=0,t))\right] \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=s}^{n}(2n+3)\theta(A-2\pi\gamma\sqrt{3})N(A-a_y(n,s,t)) + 1 \end{aligned} \tag{7.37}$$

によって与えられることがわかる。

$A\to\infty$ に対して、(7.27) を再帰関係式 (7.37) に代入することによって γ_M に対する方程式 (7.21) を一般化した一般的な面積スペクトルに対する方程式が

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=s}^{n}2(n+1)\theta(A-4\pi\gamma)\exp\left[-\frac{\gamma_M a_x(n,s,t)}{4\gamma}\right] + \sum_{t=0}^{n}(n+1)\theta(A-4\pi\gamma)\exp\left[-\frac{\gamma_M a_x(n,s=0,t)}{4\gamma}\right]\right\} \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=s}^{n}(2n+3)\theta(A-2\pi\gamma\sqrt{3})\exp\left[-\frac{\gamma_M a_y(n,s,t)}{4\gamma}\right] \end{aligned} \tag{7.38}$$

として得られる。付録 D に関係式 (7.27) を示してある。

もし、ブラックホールのエントロピーが Bekenstein-Hawking 公式 $S := \ln N(A) = A/4$ を満足するならば、Barbero-Immirzi パラメータを $\gamma = \gamma_M$ として決定することできる。ここで、γ_M は方程式 (7.38) によって与えられ、数値的に解くと $\gamma_M = 0.9284\cdots$ が得られる。

もし、j^u に対応する m 自由度を数えるならば、方程式 (7.38) は

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=s}^{n}2\theta(A-4\pi\gamma)\exp(-\gamma_M x(n,s,t)/4\gamma) + \sum_{t=0}^{n}\theta(A-4\pi\gamma)\exp(-\gamma_M x(n,s=0,t)/4\gamma)\right] \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=s}^{n}2\theta(A-2\pi\gamma\sqrt{3})\exp\left(-\gamma_M y(n,s,t)/4\gamma\right) \end{aligned} \tag{7.39}$$

に置き換わられる。もし、$S := \ln N(A) = A/4$ を課すならば、$\gamma = \gamma_M = 0.7274\cdots$ を得る。

この場合において、条件 (7.20) も考えた場合一般に $n' = 0$ を得ることは出来ない。従って、この場合 ([58]) の方法を拡張することは難しい。しかしながら、極限 $A\to\infty$、つまり $k\to\infty$ を考えているので $n' \neq 0$ の場合は Barbero-Immirzi パラメータに影響を与えないことは自然であるように思われる。

7.5 まとめと議論

本章において、一般化された面積スペクトルを用いて、Barbero-Immirzi パラメータを調節することでエントロピー公式 $S = A/4$ が導出されることを示した。得られた Barbero-Immirzi パラメータの値は $\gamma = 0.9284\cdots$ と $= 0.7274\cdots$ であり、先行研究 [3, 44, 45] において得られていた値とは異なるものであった。しかし、本章の重要性は、γ の新しい値を提案しているのではなく、半古典的なアプローチから離れ面積スペクトルが地平線面積を表しているかどうかを注意しなければならないという指摘をしたことにある。LQG において面積スペクトルによって地平線面積を記述することが出来るかどうかを議論することは自然なことである。面積スペクトルが正しいかどうかの多くの可能な試験があるであろう。例えば、LQG においてブラックホール熱力学は未だ確立されておらず、もっとも重要な話題の一つである。ブラックホールの蒸発過程が一般化された面積スペクトルによって記述されるであろうというアイディアがある [73]。それゆえ、ブラックホールの熱力学の一般化された第二法則を作ることが出来るかどうかがどの面積スペクトルが適切であるかを決める指針の 1 つになるかもしれない。また、小さいブラックホールのスペクトルを考えることも重要である [67]。この場合、条件 (7.20) を考慮することが大変重要であり、今後の課題の 1 つである。

しかしながら、これらの問題はブラックホールを量子重力理論によって記述することが困難であるための半古典的描像のために生じていると思われる。この困難を回避する面白いアイディアの 1 つに地平線を空間的無限遠にいる観測者が認識できる境界として定義するという議論がある [74]。同様のアイディアはすでにブラックホールのエントロピーでの議論に用いられている [71]。近年、孤立地平線を時空の境界として扱わず、LQG の演算子を用いて孤立地平線の条件を量子化しようとする試みが行われている [75]。この議論はまだ完全ではないが、地平線は時空の境界ではないというアイディアを調べることは重要である。[73] においてもダイナミカルな状況を考えることで (7.9) を用いて地平線の面積を表そうする議論がなされている。

状態数の正しい数え上げが要請されるため、量子重力理論においてブラックホールの状態を定義しなければならないことに注意しておく。ここでは地平線のトポロジーを考慮に入れていないが、簡単化された面積スペクトルでの議論 [76] のようにトポロジーの効果は量子重力理論において重要であろう。近年 LQG の枠組みで議論されている共変的エントロピーバウンド [77] の議論 [76] も重要であるかもしれない。もちろん、Barbero-Immirzi パラメータの本当の値を見つけなければならない。宇宙論 [46] やブラックホールの準固有振動 [47–49] のようないくつかの独立した議論において、Barbero-Immirzi パラメータを決定することが必要である。この意味において、フラックス・面積演算子の固有値は地平線面積のように重要であるかもしれない [79]。多くの独立な方法において LQG を検証することは理論の聖杯となりうるだろう。

第 8 章

ループ量子宇宙論における初期特異点の解析

8.1 イントロダクション

ループ量子宇宙論 (Loop Quantum Cosmology[LQC]) [82] は LQG によって動機付けされた量子化されたミニスーパースペース模型である。伝統的な量子宇宙論 (レビュー論文として例えば [83] を参照。) において、対称性を課された模型は通常の Schrödinger 表現によって量子化され、量子化された Hamiltonian 拘束条件は Wheeler-DeWitt(WDW) の微分方程式を与えるが、LQC では Schrödinger 表現とはユニタリー同値でない所謂ポリマー粒子表現 [84] 用い、微分方程式ではなく 2 階差分方程式を得る。特に、Bojowald は以下の 2 つの側面においてビッグバン特異点が存在しないことを示した [80]。1 つ目に、スケール因子の逆ベキの演算子のスペクトルが上から押さえられ、2 つ目に、宇宙の波動関数が古典理論で特異点になっている点を越えて一意的に拡張することができることである。初期特異点回避は最初に平坦な一様等方模型で示されたが、その後平坦でない場合や非等方な場合へ一般化された [82]。しかしこのことが非一様な場合に一般かできるかどうかは未だわかっていない ([85, 86] など参照)。近年、ビッグバウンス (Big bounce)(大反跳) の存在がスケール因子の時間発展を内部時間に対して解析している様々な状況において示されている [87–95]。文献 [80] による初期特異点回避の議論はビッグバウンスとは幾分か異なるが、ビッグバウンスの議論において重要な役割を演じることができる。実際、 [80] での議論は初期特異点近傍の差分方程式の性質に注目したものである。

本章では、宇宙項が存在する場合で文献 [80] での意味で量子化の不定性に対して初期特異点を議論した [96]。[36, 97] で示されているように量子化の不定性とは関係なくスケール因子の逆ベキが上から押さえられているために、波動関数を初期特異点を越えて一意的に拡張できるかどうかをのみを議論した。基本ホロノミーに対するエッジの座標長さに対応する離散化のパラメータ λ の選び方と Hamiltonian 拘束条件の演算子順序について焦点を当てた。これらの問題に取り組むために、宇宙模型を宇宙項を含む平坦な一様等方模型に限定した。まず、 [80] のように定数 λ の場合を解析した。この選び方は宇宙が各時間ステップで等面積量子によって大きくなるもので、初期特異点が回避されるかどうかは Hamiltonian 拘束条件の演算子順序に強く依存することがわかった。しかし、この離散化では体積が大きい極限で得られた波動関数の物理的解釈においてシリアスな問題に出くわすことがわかった。体積が大きい極限にお

いて LQC での差分方程式から得られる波動関数の振る舞いが WDW 方程式から得られた波動関数の振る舞いとは一致しないことが問題点である。離散化の効果は Planck スケールの物理で優勢となるが、宇宙が大きくなった時その効果は消えるべきであるので、体積が大きい場合での LQC の離散的波動関数が WDW 方程式に対する解である滑らかな波動関数と対応しなければならない。もし宇宙が等体積量子によって大きくなるように λ が変化するように選ぶ [88] ならば、この問題が解決され、この離散化でも初期特異点回避するかどうかが Hamiltonian 拘束条件の演算子順序に強く依存することがわかった。lattice refinement scheme と呼ばれる λ の選び方 ([98–102]) をすることができるが、本章では宇宙の面積が定数によって離散化されたり、宇宙の体積が定数によって離散化されるような最も自然な 2 つの離散化の選び方のみを考えることにする。Nelson と Sakellariadou [98, 99] によって物質場がある場合離散化の選び方が体積と大きい極限がどのように関係しているのかについてすでに詳細に議論されており、物質場がなく宇宙項を持つ本章の結果と矛盾がないことがわかった。体積が大きい極限を含む LQC の安定性の議論 [100, 101, 103–105] や差分方程式から WDW 方程式を得るための演算子順序の役割が [106] において議論されている。

8.2 ループ量子宇宙論

8.2.1 Hamiltonian 拘束条件

この章では一様等方平坦時空に注目する。古典論ではそのような時空に対する線素は平坦な Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 計量

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right) \tag{8.1}$$

によって与えられる。ここで $a(t)$ はスケール因子とよばれる。ここで、体積積分による発散を防ぐために 3 次元空間上のセル $\mathcal{V}$ を導入する [107]。その場合、重力の Hamiltonian 拘束条件は

$$C_{\mathrm{grav}} = \frac{1}{16\pi G\gamma^2}\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3x\left(-\frac{1}{\sqrt{|\det E_i^a|}}\epsilon_{ijk}F_{ab}^{i}E^{aj}E^{bk} + 2\gamma^2\sqrt{|\det E_i^a|\Lambda}\right) \tag{8.2}$$

と書かれる [108]。ここで、G, Λ、ϵ_{ijk}、$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k$ はそれぞれ重力定数、宇宙定数、Levi-Civita シンボル、接続 A_a^i の曲率を表している。宇宙定数は未知の効果に生成されるものであるかもしれないが、簡単のため通常用いられるように Hamiltonian の中に含めてある。基本セル $\mathcal{V}$ において、時間依存する基準平坦計量 $\bar{q}_{ab}$ とそれに関連する正規直交三脚場 $\{\bar{e}_i^a\}$ と余三脚場 $\{\bar{\omega}_a^i\}$ を定義する。平坦な TRW 宇宙では、接続 A_a^i と密度 1 の三脚場 E_i^a は

$$A_a^i = cV_0^{-(1/3)}\bar{\omega}_a^i, \quad E_i^a = pV_0^{-(2/3)}\sqrt{\bar{q}}\bar{e}_i^a \tag{8.3}$$

によって与えられる。ここで $\bar{q}$ は $\bar{q}_{ab}$ の行列式であり、$c = V_0^{1/3}\mathrm{sgn}(p)\gamma \mathrm{d}a/\mathrm{d}t$、$|p| = V_0^{2/3}a^2$、$V_0 = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3x\sqrt{\bar{q}}$ である。V_0 は基準計量に対する基準セルの体積である。言い換えると、$|p|$ は基準セルの物理的面積に比例し、c は p の共役運動量である。c と p の間の Poisson 括弧式は $\{c, p\} = 8\pi G\gamma/3$ となる。そして、$\bar{e}_i^a$ に平行なエッジに沿ったホロノミー $h_i^{(\lambda)}$ は

$$h_i^{(\lambda)} = e^{\lambda c\tau_i} \tag{8.4}$$

によって与えられる。ここで λ はエッジの座標長さであり、$\{\tau_i\}$ は $SU(2)$Lie 群の Lie 代数である。フラックス $\mathcal{E}_\mathcal{S}$ は単純に $\mathcal{E}_\mathcal{S} = pV_0^{-2/3}A_\mathcal{S}$ によって与えられる。ここで $A_\mathcal{S}$ は面 $\mathcal{S}$ の面積である [107]。Hamiltonian 拘束演算子を定義する際に、$SU(2)$ 値のホロノミーのトレースを取るため既約表現の選び方に不定性があることを注意しておく [104, 109, 110]。ここで、簡単のためスピン $J = 1/2$ を取ることにする。そうするとホロノミーは

$$h_i^{(\lambda)} = \cos(\lambda c/2)\,\mathbb{I} + 2\sin(\lambda c/2)\,\tau_i \tag{8.5}$$

となる。ここで $\mathbb{I}$ は単位 2×2 行列であり、$\{\tau_i\}$ は Pauli 行列と $2i\tau_i = \sigma_i$ を通して関係している。

Hamiltonian 拘束条件をループ量子重力理論のようにフラックス p とホロノミー $h_k^{(\lambda)}$ で書き直してみよう。拘束条件 (8.2) の最初の項の三脚場部分は

$$\epsilon_{ijk}\tau^i \frac{E^{aj}E^{bk}}{\sqrt{|\det E_i^a|}} = -\frac{2\mathrm{sgn}(p)}{8\pi G\gamma\lambda V_0^{\frac{1}{3}}}\bar{\epsilon}^{abc}\bar{\omega}_c^i\left(h_i^{(\lambda)}\left\{\left(h_i^{(\lambda)}\right)^{-1}, V\right\}\right) \tag{8.6}$$

となる [?]。ここで、$\bar{\epsilon}^{abc}$ は Levi-Civita シンボル、V は体積、$\{\bullet,\bullet\}$ は Poisson 括弧式を表す。曲率 F_{ab}^i に対してはゲージ理論での通常の処方箋を用いることにする。2 つの三脚場ベクトル $\bar{e}_i^a$ と $\bar{e}_j^b$ による座標長さが λ である正方形 $\square_{ij}$ のループ α を考える。そうすると、曲率の ab 成分は

$$\tau_i F_{ab}^i = \lim_{\mathrm{Area}\to 0}\left(\frac{h_\alpha^{(\lambda)}{}_{ij} - \delta_{ij}}{\lambda^2 V_0^{\frac{2}{3}}}\right)\bar{\omega}_a^i\bar{\omega}_b^j \tag{8.7}$$

によって与えられる。ここで $\alpha = \square_{ij}$ に沿うホロノミー $h_\alpha^{(\lambda)}{}_{ij}$ は 4 つのエッジの沿ったホロノミーの積

$$h_\alpha^{(\lambda)}{}_{ij} = h_i^{(\lambda)}h_j^{(\lambda)}\left(h_i^{(\lambda)}\right)^{-1}\left(h_j^{(\lambda)}\right)^{-1} \tag{8.8}$$

である。式 (8.6)、(8.7)、(8.8) を式. (8.2) に代入すると、C_{grav} は

$$C_{\mathrm{grav}} = \frac{1}{16\pi G\gamma^2}\left(-\frac{4\mathrm{sgn}(p)}{8\pi\lambda^3 G\gamma}\sum_{ijk}\epsilon^{ijk}\mathrm{Tr}\left[h_i^{(\lambda)}h_j^{(\lambda)}\left(h_i^{(\lambda)}\right)^{-1}\left(h_j^{(\lambda)}\right)^{-1}h_k^{(\lambda)}\left\{\left(h_k^{(\lambda)}\right)^{-1}, V\right\}\right] + 2\gamma^2\Lambda V\right) \tag{8.9}$$

と書かれる [108]。ここで関係式

$$\tau_i\tau_j = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\tau^k - \frac{1}{4}\delta_{ij}\mathbb{I} \tag{8.10}$$

を用いた。

この Hamiltonian を量子化するために、$h_i^{(\lambda)}$ と p を対応する演算子に置き換えなければならない。運動学での Hilbert 空間は $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}} = L^2(\mathbb{R}_{\mathrm{Bohr}}, \mathrm{d}\mu_{\mathrm{Bohr}})$ によって定義されている。ここで $\mathbb{R}_{\mathrm{Bohr}}$ は実数の Bohr コンパクト化であり、$\mathrm{d}\mu_{\mathrm{Bohr}}$ はその上での Haar 測度である [3, 81, 84, 87, 88]。運動学的 Hilbert 空間に対する正規直交基底は $\widehat{p}$ の固有状態 $\{|\mu\rangle\}$ の集合によって与えられ、正規直交関係式 $\langle\mu_1|\mu_2\rangle = \delta_{\mu_1\mu_2}$ を満足する。状態 $|\mu\rangle$ への三脚場演算子 $\widehat{p}$ の作用は

$$\widehat{p}|\mu\rangle = \frac{8\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2}{6}\mu|\mu\rangle \tag{8.11}$$

によって与えられる。ここで $l_{\rm Pl} := \sqrt{G}$ は Planck 長である。つまり、$\widehat{p}$ の固有値は無次元パラメータ μ でラベルされる。状態 $\{|\mu\rangle\}$ は体積演算子 $\widehat{V} = \widehat{|p|^{3/2}}$ の固有状態でもある。

$$\widehat{V}|\mu\rangle = \widehat{|p|^{3/2}}|\mu\rangle = V_\mu|\mu\rangle. \tag{8.12}$$

ここで V_μ は

$$V_\mu = \left(\frac{8\pi\gamma l_{\rm Pl}^2}{6}|\mu|\right)^{3/2} \tag{8.13}$$

である。式 (8.4) と (8.9) を用いて Poisson 括弧式を交換子に置き換え、冗長な計算を行うと

$$\widehat{C}_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi l_{\rm Pl}^2\gamma^2}\left(\frac{96i\,({\rm sgn}(p))}{8\pi\gamma l_{\rm Pl}^2}\widehat{\frac{1}{\lambda^3}}\sin^2\widehat{\frac{\lambda c}{2}\cos^2}\frac{\lambda c}{2}\left[\sin\frac{\lambda c}{2}V\cos\widehat{\frac{\lambda c}{2} - \cos}\frac{\lambda c}{2}V\sin\frac{\lambda c}{2}\right] + 2\gamma^2\Lambda\widehat{V}\right) \tag{8.14}$$

となる [108]。ここで演算子順序は簡単のため固定している。演算子順序の不定性は後で議論する。一般に λ 自体演算子であることに注意する。LQC において極限 $\lambda \to 0$ を取る必要がないことに注意し、この物理的動機について後で議論する。

8.2.2　離散化の不定性

LQG において [1–3, 81]、幾何学は面積や体積演算子によって量子化され、スピンネットワーク状態がそれら演算子の固有状態になっている。スピンネットワーク状態 $|{\rm S}\rangle$ は ${\rm S} = (\Gamma, j_l, i_n)$ によって与えられる。ここで Γ は 3 次元空間に埋め込まれたエッジと頂点の向きづけられたグラフ、j_l はエッジのスピンであり、i_n は頂点の intertwiner である。2 次元面 $\mathcal{S}$ に対する面積演算子 $\widehat{\mathbf{A}}(\mathcal{S})$ を定義するために、$\mathcal{S}$ を $\cup_n\mathcal{S}_n = \mathcal{S}$ となるように N 個の小さい 2 次元面 $\{\mathcal{S}_n\}$ に分割する。十分大きな N に対して $\mathcal{S}_n$ にスピンネットワーク $|{\rm S}\rangle$ のグラフ Γ と 2 回以上交わることがない分割 $\{\mathcal{S}_n\}$ がある。n での和は $\mathcal{S}$ と Γ の交点での和になり、十分大きい N では N とは独立となる。そうすると面積演算子の作用は

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathcal{S})|{\rm S}\rangle = 4\pi\gamma l_{\rm Pl}^2\sum_i\sqrt{2j_i^u(j_i^u+1) + 2j_i^d(j_i^d+1) - j_i^t(j_i^t+1)}|{\rm S}\rangle \tag{8.15}$$

となる [111]。ここで $\{i\}$ はグラフ Γ と 2 次元面 $\mathcal{S}$ との交点をラベルし、添字 u、d、t はそれぞれ $\mathcal{S}$ に対してエッジが上向き、下向き、接しているかを表し、正の半整数 j_i^u、j_i^d、j_i^t は i によってラベルされているエッジのスピンである。したがって、最小面積 $\Delta = 2\sqrt{3}\pi\gamma l_{\rm Pl}^2$ が現れる。3 次元体積 $\mathcal{R}$ に対する体積演算子 $\widehat{V}$ も同様の方法をとる。3 次元体積 $\mathcal{R}$ を座標体積 ϵ^3 の立方体 $\{\mathcal{R}_n\}$ に分割し、十分小さい ϵ に対して 2 個以上の頂点を含む立方体はないであろう。体積演算子は頂点に対してのみ非自明な作用をし、もはや ϵ に値に依らないであろう。そうすると、スピンネットワーク状態は体積演算子の固有状態であり、その固有値は 3 次元体積 $\mathcal{R}$ に含まれて、少なくとも 4 価である頂点による和によって与えられる。同様に、頂点でのみ非自明な作用をする量子化された Hamiltonian を定義することができる。したがって、十分小さい ϵ に対して量子化された Hamiltonian は ϵ に依らないであろう。

しかしながら、LQC において離散化のパラメータ λ を非零な有限の値のまま扱う。実際、c に対応する演算子はないので、LQC の現在の定式化においてもそうせざるを得ない。一方、物理的な結果は λ の

選択に依存するように思われる。この観点から LQC の定式化において離散化のパラメータ λ に対して非零の有限の値をどのように選ぶのかということについて第一原理はない。我々はおそらく LQC の離散化のパラメータ λ(と他の量子化の不定性) を LQC が LQG で持っているべき特徴を示すように決めるべきであろう。

どのように λ が非零であり続けるのかをみるために、関係式

$$\widehat{|p|}h_i^{(\lambda)} = \frac{8\pi}{6}\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2|\lambda|h_i^{(\lambda)} \tag{8.16}$$

を考える。$|p|$ は基本セルの物理的な面積であることに注意する。Hamiltonian にある曲率は正方形 $\square_{ij}$ に沿ったホロノミー ${h_\alpha^{(\lambda)}}_{ij}$ を思い起こさせるので、この正方形の各エッジがそれに沿うホロノミーが LQG の最小面積 Δ と交わるように量子化されると仮定しよう。このことは λ をオーダー 1 の量である定数 μ_0 と選ばせることになる。この選択は参考文献 [80, 87, 92, 107] で採用されている。この要請を満足する μ_0 の値は正確に $3\sqrt{3}/2$ である。Hamiltonian に現れる基本演算子は $\exp\widehat{(i\mu_0 c}/2)$ であり、この $|\mu\rangle$ への作用は

$$\widehat{e^{i\mu_0 c/2}}|\mu\rangle = |\mu+\mu_0\rangle \tag{8.17}$$

となる。このことは Hamiltonian 拘束条件に現れる状態に対する $\widehat{\mu}$ の固有値は定区間で区切られている。式 (8.17) で見られるように演算子 $\exp\widehat{(i\mu_0 c}/2)$ は状態 $|\mu\rangle$ がベクトル $\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$ に沿うパラメータ長さが λ_0 によって引きずっている。そうして式 (8.17) を

$$\widehat{e^{i\mu_0 c/2}}|\mu\rangle = e^{\mu_0(\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu)}|\mu\rangle \tag{8.18}$$

のように書き換えることができる。我々は λ のこの選択を "等面積離散化" と呼ぶことにする。

しかしながら、この選択は唯一の可能性ではない [88]。Hamiltonian にある曲率は正方形 $\square_{ij}$ に沿うホロノミー ${h_\alpha^{(\lambda)}}_{ij}$ を思い起こさせるので、この正方形の面積が LQG での最小面積 Δ であるように仮定することも合理的である。このことは λ を

$$\bar{\mu}^2|p| = \Delta \tag{8.19}$$

を満たすような関数 $\lambda = \bar{\mu}(p)$ であるような選択を取るということである。これはパラメータ λ の別の選択を与える。この場合、式 (8.11) から $\bar{\mu}$ が

$$\bar{\mu}^2|\mu| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{8.20}$$

のように μ に依存することがわかる。式 (8.18) と同様にして、演算子 $\exp(i\bar{\mu}c/2)$ を

$$\widehat{e^{i\mu_0 c/2}}|\mu\rangle = e^{\bar{\mu}(\mathrm{d}/\mathrm{d}\mu)}|\mu\rangle \tag{8.21}$$

のように書き換えることができる。もし

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{\bar{\mu}}\mathrm{d}\mu \tag{8.22}$$

を満足するような変数 v を導入すると、式 (8.21) の左辺を

$$e^{\bar{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}}|\mu\rangle = e^{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}}|\mu\rangle \tag{8.23}$$

と書き換えることができる。このことは波動関数の v 表現を採用なら Hamiltonian の作用が簡単になることを意味する。式 (8.20) を用いた式 (8.22) の具体的な積分は

$$v = \mathrm{sgn}(\mu) K |\mu|^{\frac{3}{2}} \tag{8.24}$$

を与える。ここで $K = 2\sqrt{2}/(3\sqrt{3\sqrt{3}})$ である。v が体積 V に比例することに注意しておく。この選択は参考文献 [88] で採用されている。この場合、Hamiltonian 拘束条件の作用をみるために体積演算子 $\widehat{V}$ の固有状態 $|v\rangle$ を用いた方が便利である。固有状態 $|v\rangle$ は

$$\widehat{V}|v\rangle = V_v |v\rangle \tag{8.25}$$

を満足し、

$$V_v = \left(\frac{8\pi}{6}\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2\right)^{3/2} \frac{|v|}{K} \tag{8.26}$$

である。Hamiltonian の現れる基本演算子は $\widehat{e^{i\bar{\mu}c/2}}$ であり、$|v\rangle$ への作用は

$$\widehat{e^{i\bar{\mu}c/2}}|v\rangle = |v+1\rangle \tag{8.27}$$

によって与えられる。結果として、Hamiltonian 拘束条件は固有値が等間隔である体積固有状態を用いることとなる。言い換えれば、体積演算子のスペクトルは体積において等間隔で分布している。したがって、この離散化を “等体積離散化” とよぶことにする。$\lambda = \bar{\mu}(p)$ が p に依存しているために、λ は量子論において演算子として扱われるべきであることを注意しておく。

8.3　等面積離散化

8.3.1　特異点回避と演算子順序

まず、等面積離散化に焦点を当てる。ホロノミー演算子は $|\mu\rangle$ へ

$$\widehat{h_k^{(\mu_0)}}|\mu\rangle = \frac{1}{2}(|\mu+\mu_0\rangle + |\mu-\mu_0\rangle)\mathbb{I} + \frac{1}{i}(|\mu+\mu_0\rangle - |\mu-\mu_0\rangle)\tau_k \tag{8.28}$$

のように作用する。この量子化の時でさえ、演算子順序の多くの可能性がある。記法を簡単にするために、

$$\widehat{F} = \sin^2\widehat{\frac{\mu_0 c}{2}\cos^2}\frac{\mu_0 c}{2}, \quad \widehat{EE} = \sin\frac{\mu_0 c}{2}V\cos\widehat{\frac{\mu_0 c}{2} - \cos}\frac{\mu_0 c}{2}V\sin\frac{\mu_0 c}{2} \tag{8.29}$$

とおこう。ここで F と EE は正方形のホロノミー $h_{\alpha ij}$ (8.8) と式 (8.6) の Poisson 括弧式 $h_i\left\{(h_i)^{-1}, V\right\}$ に関係する。簡単のため、今後 $\widehat{F}$ と $\widehat{EE}$ を構成する演算子の演算子順序は固定すると、Hamiltonian 拘束演算子の演算子順序には 2 つの可能性 $\widehat{F}\widehat{EE}$ か $\widehat{EE}\widehat{F}$ がある。まず、参考文献 [80] で採用されている演算子順序

$$\widehat{C}_{\mathrm{grav}} = \frac{1}{16\pi l_{\mathrm{Pl}}^2\gamma^2}\left(\frac{96i\,(\mathrm{sgn}(p))}{8\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2\mu_0^3}\widehat{F}\widehat{EE} + 2\gamma^2\Lambda\widehat{V}\right) \tag{8.30}$$

を考える。状態 $|\Psi\rangle$ への演算子の作用は差分方程式を与える。つまり、$\langle\mu|\widehat{C}_{\mathrm{grav}}|\Psi\rangle = 0$ は

$$|V_{\mu+5\mu_0} - V_{\mu+3\mu_0}|\,\Psi(\mu+4\mu_0) - \left(2\,|V_{\mu+\mu_0} - V_{\mu-\mu_0}| - \frac{16\pi\gamma^3 l_{\mathrm{Pl}}^2\mu_0^3}{3}\Lambda V_\mu\right)\Psi(\mu) + |V_{\mu-3\mu_0} - V_{\mu-5\mu_0}|\,\Psi(\mu-4\mu_0) = 0 \tag{8.31}$$

を与える。ここで $\Psi(\mu) = \langle\mu|\Psi\rangle$ である。もし、三脚場の係数 p を内部時間として解釈するなら、我々は差分方程式 (8.31) を離散的時間に対する発展方程式として見なすことができる。

ここで運動学的 Hilbert 空間の超選択則について述べることにする。式 (8.31) を見ればわかるように、運動学的 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}}$ の基底 $\{|\mu\rangle : \mu = \epsilon + 4n\mu_0, n \in \mathbb{Z}\}$ によって張られる固定されたパラメータ $\epsilon \in [0, 4\mu_0)$ での部分空間 $\mathcal{H}_\epsilon$ は Hamiltonian 拘束条件の作用に対して閉じている。もっと正確に、運動学的 Hilbert 空間は Hamiltonian 拘束条件の作用に対するセクターへ

$$\mathcal{H}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{grav}} = \bigoplus_{\epsilon\in[0,4\mu_0)} \mathcal{H}_\epsilon$$

のように自然と分解される。我々はこの分解を超選択則とよび、これらの部分空間を超選択則セクターとよぶことにする。LQC での超選択則は各セクターに対して ϵ を固定し、そのセクター $\mathcal{H}_\epsilon$ で議論することができる。

式 (8.31) によって与えられる系での特異点の議論を行う。$\epsilon \neq 0$ での $\mathcal{H}_\epsilon$ に対して、ある 2 つの初期データ $\Psi(\epsilon+4N\mu_0)$ と $\Psi(\epsilon+4(N+1)\mu_0)(\epsilon \in (0, 4\mu_0))$ と自然数 N が与えられると、$n = \pm1, \pm2, \cdots$ に対して、$\Psi(4n\mu_0)$ の値がただ一つに決定される。$\mathcal{H}_0$ に対して、差分方程式 (8.31) において $\mu = 0$ と $\pm4\mu_0$ に対して $\Psi(0)$ の項が消えることがわかる。このため、ある 2 つの初期値 $\Psi(4N\mu_0)$ と $\Psi(4(N+1)\mu_0)$ が与えられると、差分方程式 (8.31) は $n = 1, 2, \cdots$ に対しては $\Psi(4n\mu_0)$ が生成されるが、$\Psi(8\mu_0)$ と $\Psi(4\mu_0)$ からでは $\mu = 4\mu_0$ での式 (8.31) を一般に満たさない。このことは $\Psi(4N\mu_0)$ と $\Psi(4(N+1)\mu_0)$ が拘束されていること意味し、一度これが満足したら $n = \pm1, \pm2, \cdots$ での $\Psi(4n\mu_0)$ の値をただ一つ決定することができる。したがって、系はこの演算子順序では初期特異点を持たないと結論づけることができる。式 (8.31) では $\Psi(0)$ は決定されていないままであるが、$\mu = 0$ を越えて離散的発展を曖昧さなしに決定することができる。つまり、唯一の量子発展は古典理論での初期特異点である $\mu = 0$ で値が未決定にも関わらず影響を与えない。この不定性は参考文献 [80] では $\Psi(0) = 0$ と置かれており、我々の数値計算でもこの値を用いることにする。

上で注意したように、この場合 $\epsilon \neq 0$ のセクターでは初期特異点は存在しないので、$\mu = 0$ での初期特異点があるのかないのか議論するために $\epsilon = 0$ のセクターを選ばなければならない。一方、大きい μ の極限を考えた場合、ϵ の値は $\Psi(\mu)$ の定性的な振る舞いに影響を与えないので、再び $\epsilon = 0$ のセクターに焦点をあてることができる。このことは等体積離散化の場合でも同じである。

次に、演算子順序として

$$\widehat{C}_{\mathrm{grav}} = \frac{1}{16\pi l_{\mathrm{Pl}}^2\gamma^2}\left(\frac{96i\,(\mathrm{sgn}(p))}{8\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2\mu_0^3}\widehat{E}\widehat{E}\widehat{F} + 2\gamma^2\Lambda\widehat{V}\right) \tag{8.32}$$

を考える。そうすると、差分方程式は

$$|-V_{\mu+\mu_0} + V_{\mu-\mu_0}|\left(\Psi(\mu+4\mu_0) - 2\Psi(\mu) + \Psi(\mu-4\mu_0)\right) + \frac{16\pi\gamma^3 l_{\mathrm{Pl}}^2\mu_0^3}{3}\Lambda V_\mu\Psi(\mu) = 0 \tag{8.33}$$

で与えられる。式 (8.33) は $\mu=0$ に対して自明な式になり、$\Psi(4\mu_0)$ と $\Psi(0)$ から $\Psi(-4\mu_0)$ を決定することができないことがわかる。この事実は $\mu>0$ に対するデータ $\Psi(\mu)$ では $\mu=0$ を通過してすべての $\Psi(\mu)$ を決定することが出来ないということを意味している。この意味で、モデルは発展を一意に拡張することができない $\mu=0$ で初期特異点を含んでいる[*1]。このことは特異点回避は Hamiltonian の量子化における演算子順序の選択に依存することを意味している。

8.3.2　大きい体積極限での問題

この章では、差分方程式によって決定される波動関数 $\Psi(\mu)$ の大きい μ での振る舞いをみて、その物理的意味について議論する。離散性の効果は Planck スケールの物理において重要となるが、宇宙が大きくなった時に消えるべきである。LQC において、離散的な波動関数は宇宙の大きさが大きくなったとき滑らかな波動関数によってうまく近似されると期待される。もしこのナイーヴな期待が有効であるなら、その滑らかな波動関数が通常の Schrödinger 表現での系を量子化して得られる WDW 方程式の解によって記述されると考えるのは自然である。WDW 方程式の簡単な導出は補遺 E.1 で与える。

離散的な波動関数 $\Psi(\mu)$ の大きい μ での振る舞いをみるために、差分方程式 (8.31) を数値的に解いてみる。まず、初期値 $\Psi(-4\mu_0)$ と $\Psi(0)$ を選び、そして差分方程式によって $\Psi(4n\mu_0)(n=1,2,...)$ を決定させる。ここで無次元の宇宙定数として $\tilde{\Lambda}=(16\pi/3)\gamma^3 l_{\rm Pl}^2\Lambda$ を用いる。数値計算において、$\tilde{\Lambda}\mu_0^3=0.005$ とおいて初期値を $\Psi(-4\mu_0)=-1$ と $\Psi(0)=0$ のようにおいた。この値には特別な意味がなく、波動関数の描画を目にみえるようにするために選んだ。図 8.1(a) と図 8.1(b) は波動関数 $\Psi(\mu)$ を $\mu=4n\mu_0$ の関数として描画し、図 8.1(c) は $|\Psi(\mu)|$ の対数スケールを描画している。図 8.1(a) が示すように、波動関数 $\Psi(\mu)$ は原点に十分近い点のまわりの減衰する正弦波振動のサンプリングと見なせる。しかしながら、図 8.1(b) から分かるように、$\Psi(\mu)$ は $\mu\simeq 2400\mu_0$ のあたりでその振る舞いを劇的に変え、$\Psi(\mu)$ は各ステップでその符号を変え、その絶対値は $\mu\gtrsim 2400\mu_0$ に対してかなり急に増大する。さらに図 8.1(c) から $|\Psi(\mu)|$ は $\mu\gtrsim 2400\mu_0$ に対して近似的に指数関数のように増加していることがわかる。

この振る舞いは以下の単純な議論から演繹することができる。再帰関係式 (8.31) を考える。$\mu\gg\mu_0$ に対して、

$$\Psi(\mu+4\mu_0)-\left(2-\frac{1}{3}\mu\mu_0^2\tilde{\Lambda}\right)\Psi(\mu)+\Psi(\mu-4\mu_0)=0 \tag{8.34}$$

であり、もし $|\mu\mu_0^2\tilde{\Lambda}/6|\ll 1$ とすると、その解が

$$\Psi(\mu_0+4n\mu_0)\approx An+B \tag{8.35}$$

によって与えられることは容易にわかる。ここで A と B は定数である。しかしながら、$|\mu\mu_0^2\tilde{\Lambda}/6|\gg 1$ では、式 (8.34) の左辺の最後の項を無視することができ、

$$\Psi(\mu+4\mu_0)\approx\left(2-\frac{1}{3}\mu\mu_0^2\tilde{\Lambda}\right)\Psi(\mu) \tag{8.36}$$

[*1] [88] では、理論にフェルミオンがないため波動関数を対称ととれるなら、波動関数はこの演算子順序の時でさえ初期特異点を越えて一意に決定することができることを議論している。これは等体積離散化の場合でも同様である。一方、本論文では興味が一般的な波動関数に対する特異点回避の解析にあるため、対称的な波動関数に制限することはしない。

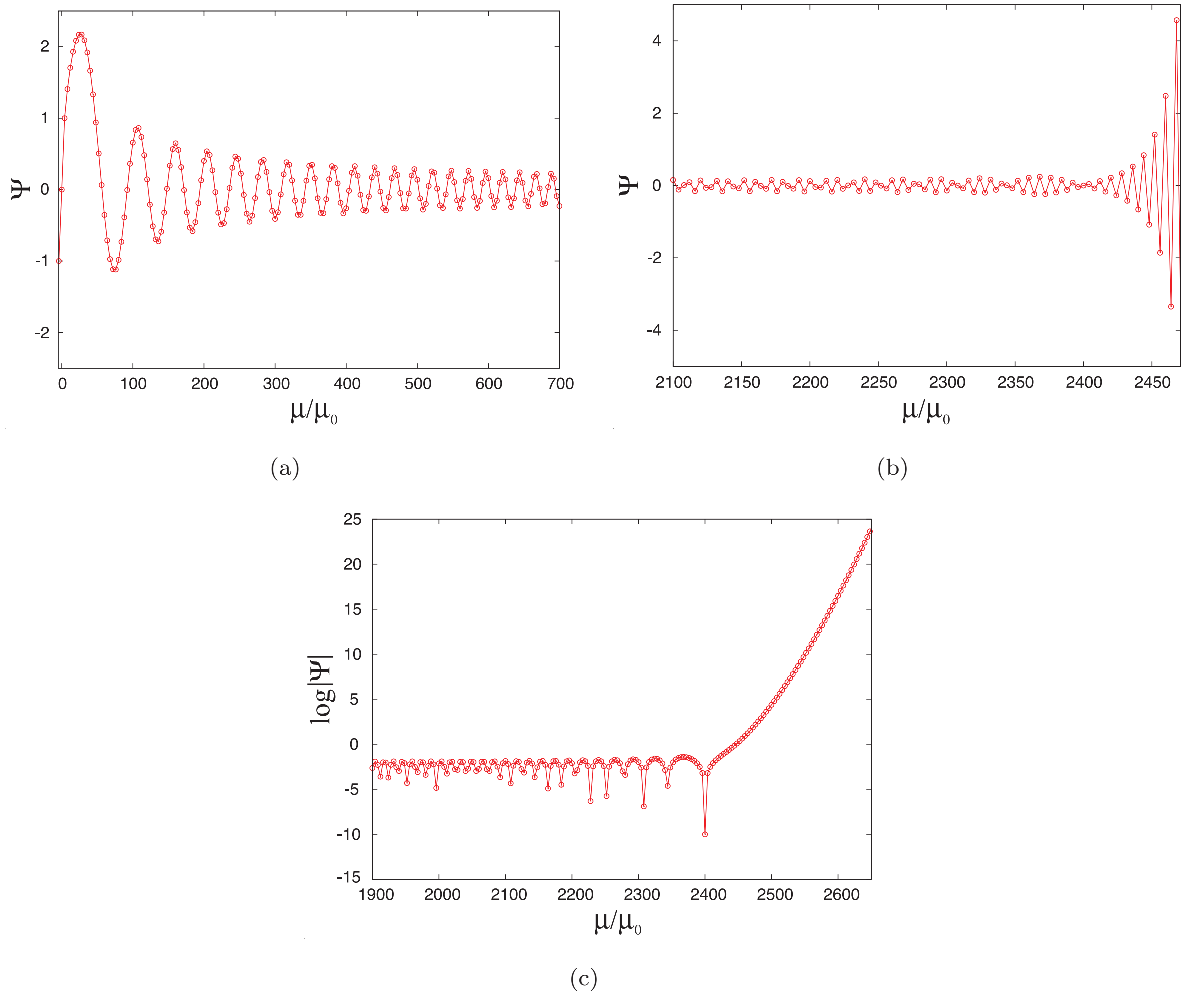


図 8.1　以下の μ の範囲での波動関数 $\Psi(\mu)$ のプロット (a) $0 \leq \mu/\mu_0 \leq 700$、(b) $2100 \leq \mu/\mu_0 \lesssim 2450$、(c) 絶対値の対数プロットである。ここで $\tilde{\Lambda}\mu_0^3 = 0.005$ ととり、初期値として $\Psi(-4\mu_0) = -1$ と $\Psi(0) = 0$ と選んだ。

に対する解を得ることができる。$|\mu\mu_0^2\tilde{\Lambda}/6| \gg 1$ に対して、因子 $(2 - \mu\mu_0^2\tilde{\Lambda}/3)$ は宇宙定数を正にとると負となり、負にとると正になる。それぞれの場合において、その絶対値はその仮定より 1 よりもかなり大きくなる。したがって、$\Psi(\mu)$ は 1 より大きい因子によって各ステップで絶対値が大きくなり、その増加は指数で近似される。後者の場合、大きい体積にも関わらず滑らかな関数と見なすことができないことは明白である。この奇妙な振る舞いは $\tilde{\Lambda} > 0$ の場合 $\mu \simeq 9\mu_0^{-2}\tilde{\Lambda}^{-1}$ に対して、顕著になり、これは数値的な結果である図 8.1 と矛盾しない。

一方、 $\mu \gg \mu_0$ に対して、差分方程式 (8.31) は波動関数は十分ゆっくり変化するという仮定のもとで以下の WDW 方程式によって近似される。(詳細な計算は補遺 E.2)

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\mu^2}\left(\sqrt{\mu}\Psi(\mu)\right) + \frac{\pi\gamma^3 l_{\mathrm{Pl}}^2}{9}\mu^{3/2}\Lambda\Psi(\mu) = 0 \tag{8.37}$$

$\mu \geq 0$ に対する微分方程式 (8.37) の一般解は

$$\Psi(\mu) = \mu^{-\frac{1}{2}} \left[C_1 \mathrm{Ai}\left(-\alpha_1^{\frac{1}{3}}\mu\right) + C_2 \mathrm{Bi}\left(-\alpha_1^{\frac{1}{3}}\mu\right) \right] \tag{8.38}$$

の形をとる。ここで C_1 と C_2 は積分定数であり、Ai と Bi は Airy 関数である。また、$\alpha_1 := (\pi/9)\gamma^3 l_{\mathrm{Pl}}^2 \Lambda$ とおいた。補遺 E.1 にいくつかの演算子順序における WDW 方程式とその一般解を示した。$\alpha_1^{\frac{1}{3}}\mu$ が大きい値の場合、上の関数は減衰する正弦波曲線に漸近する。したがって、宇宙の体積が大きくなった時でさえ、差分方程式 (8.31) の解、つまり図 8.1 に示した解の振る舞いは微分方程式 (8.37) の解 (8.38) の振る舞いとはかなり異なる。これは、離散的な波動関数が離散化の長さぐらいのスケールでは滑らかな関数とはもはや見なすことができないからである。言い換えると、等面積離散化において、宇宙項がある場合、差分方程式の解は大きい μ に対する滑らかな波動関数として見なすことができないということである。我々はこの問題を "体積が大きい極限での問題 (*the large-volume limit problem*)" とよぶ[*2]。

8.4 等体積離散化

8.4.1 体積が大きい極限での問題の解決

この章では等体積離散化を行った場合の体積が大きい極限を考える。この場合、Hamiltinian は

$$C_{\mathrm{grav}} = \frac{1}{16\pi l_{\mathrm{Pl}}^2 \gamma^2} \left(\frac{96i(\mathrm{sgn}(p))}{8\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2} \widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}} \widehat{\sin^2\frac{\bar{\mu}c}{2}\cos^2\frac{\bar{\mu}c}{2}} \left[\widehat{\sin\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right) V \cos\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right) - \cos\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right) V \sin\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)} \right] + 2\gamma^2 \Lambda \widehat{V} \right) \tag{8.39}$$

と書かれる。ここで演算子順序の不定性は無視した。$\bar{\mu}$ は p の関数なので、$1/\bar{\mu}^3$ は量子化において演算子となる。また、等面積離散化の時と同様に

$$\widehat{F} = \widehat{\sin^2\frac{\bar{\mu}c}{2}\cos^2\frac{\bar{\mu}c}{2}}, \quad \widehat{EE} = \widehat{\sin\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right) V \cos\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right) - \cos\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right) V \sin\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)} \tag{8.40}$$

とおいておく。まず、以下の演算子順序について考える。

$$C_{\mathrm{grav}} = \frac{1}{16\pi l_{\mathrm{Pl}}^2 \gamma^2} \left(\frac{96i(\mathrm{sgn}(p))}{8\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2} \widehat{F} \widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}} \widehat{EE} + 2\gamma^2 \Lambda \widehat{V} \right) \tag{8.41}$$

他の演算子順序については次の節で取り扱う。

節 8.2.2 でわかるように、この場合、μ の代わりに新しいラベル v を用いると便利である。式 (8.11)、(8.19)、(8.24) を用い、$\widehat{1/\bar{\mu}^3}$ を $\widehat{V}$ を用いて書き直すと

$$\widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}} = \left(\frac{6}{8\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2} \right)^{3/2} \frac{K\widehat{V}}{\sqrt{3}} \tag{8.42}$$

---

*2 等面積離散化において、この体積が大きい極限での問題を越えた重要な問題がある [87]。例えば、理論はセルの選び方に依存しており、ビッグバウンス (大反跳) はたとえ Planck 密度以下でも任意の密度で生じることができる。この問題は等体積離散化において解決される [102]。

となる。そうすると、Hamiltonian 拘束条件は以下の差分方程式になる。

$$
\begin{aligned}
&|v+4|\,\big||v+3|-|v+5|\big|\,\Phi(v+4)\\
&\quad-\left(2|v|\,\big||v-1|-|v+1|\big|-\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}\gamma^3 l_{\mathrm{Pl}}^2\Lambda|v|\right)\Phi(v)+|v-4|\,\big||v-5|-|v-3|\big|\,\Phi(v-4)=0
\end{aligned}
\tag{8.43}
$$

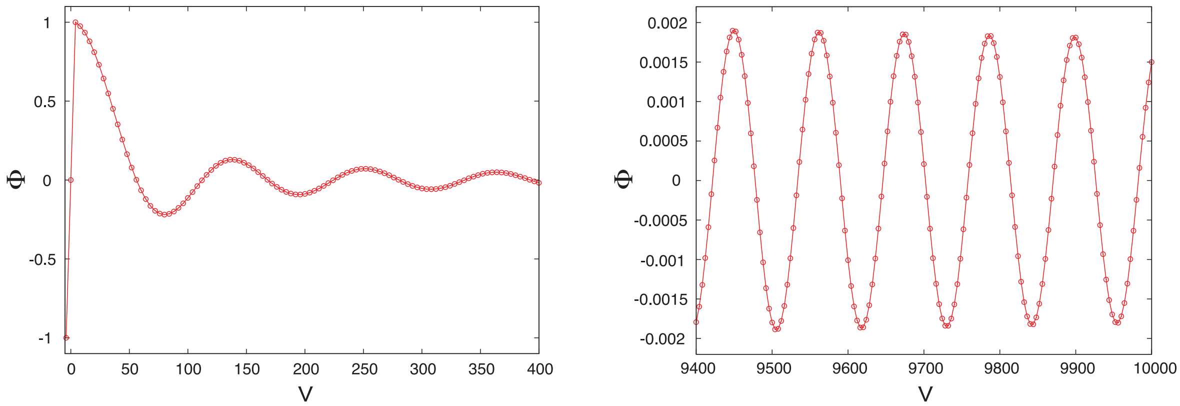
ここで $\Phi(v)=\langle v|\Phi\rangle$ である。上の差分方程式 ($\sqrt{3}\tilde{\Lambda}=0.1$ で初期値 $\Phi(-4)=-1$ と $\Phi(0)=0$) の解を数値的に与える。この値はプロットを見やすくさせるために選んだ。得られた波動関数 $\Phi(v)$ は図 8.2(a)、図 8.2(b) に示した。これらのグラフからわかるように、離散的な波動関数は振動しており、大きい v に対して滑らかな正弦波曲線のサンプリングとして見なすことができる。このことは、等面積離散化における体積が大きい極限の問題が等体積離散化において解決されることを意味する。実際、補遺 E.2 において示されているように、差分方程式 (8.43) は WDW 方程式

$$
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2}\big(|v|\Phi(v)\big)+\frac{4\pi}{81K^2}\gamma^3 l_{\mathrm{Pl}}^2\Lambda|v|\Phi(v)=0 \tag{8.44}
$$

によって近似でき、その一般解は

$$
\Phi(v)=\frac{1}{v}\left(C_1 e^{i\sqrt{\alpha_2}v}+C_2 e^{-i\sqrt{\alpha_2}v}\right) \tag{8.45}
$$

で与えられる。ここで、C_1 と C_2 は積分定数で $\alpha_2=\frac{4\pi}{81K^2}\gamma^3 l_{\mathrm{Pl}}^2\Lambda$ とおいた。図 8.2 で示した波動関数は大きい v で解 (8.45) と十分一致している。



(a)　(b)

図 8.2　以下の範囲での波動関数 $\Phi(v)$ (a) $0\le v\le 400$、(b) $9400\le v\le 10000$。$\sqrt{3}\tilde{\Lambda}=0.1$ で $v=4n$ の関数としてプロットした。また初期値として $\Phi(-4)=-1$、$\Phi(0)=0$ ととった。

体積が大きい極限がこの離散化において解決されることを解析的にも示すことができる。$v\gg 1$ に対して、式 (8.43) を

$$
\Phi(v+4)-2(1-C\tilde{\Lambda})\Phi(v)+\Phi(v-4)=0 \tag{8.46}
$$

によって近似することができる。ここで $C=2/(27K^2)$ である。この再帰的関係に対する特性方程式は

$$
x^2-2(1-C\tilde{\Lambda})x+1=0 \tag{8.47}
$$

であり、その根は

$$x = (1 - C\tilde{\Lambda}) \pm \sqrt{(1 - C\tilde{\Lambda})^2 - 1} \tag{8.48}$$

である。これより、$\Phi(v)$ の大きい v での振る舞いを演繹することができる。$0 < C\tilde{\Lambda} < 2$ に対して、$\Phi(4n)$ はきれいに正弦的に振動する。$C\tilde{\Lambda} < 0$ や $C\tilde{\Lambda} > 2$ に対して、一般に指数的増加によって支配される。$C\tilde{\Lambda} = 0$ に対して、$\Phi(4n) = An + B$ となる。ここで A と B は定数である。$C\tilde{\Lambda} = 2$ に対して、$\Phi(4n+4) + \Phi(4n) = (-1)^n D$ となる。ここで D は定数である。したがって、もし我々の宇宙が現実的なものである $|C\tilde{\Lambda}| \ll 1$ だとすれば、$\Phi(4n)$ は各ステップでとてもゆっくり変化する。そうでなければ角速度 $\sim \sqrt{C\tilde{\Lambda}}$ で振動するか、増加率 $\sim \sqrt{C\tilde{\Lambda}}$ で指数的に増加するかのどちらかになる。このことは、$\Phi(v)$ を体積が大きい極限において滑らかな波動関数と物理的にみなすことができることを意味する。

8.4.2　特異点回避と演算子順序

この節では、等体積離散化での初期特異点回避を議論する。等体積離散化での Hamiltonian 拘束条件の演算子順序の以下の 4 つの場合について議論し、初期特異点回避の存在が演算子順序の選択に依存することを示す。

$$\widehat{C}^{(a)}_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi l_{\rm Pl}^2\gamma^2}\left(\frac{96i(\mathrm{sgn}(p))}{8\pi\gamma l_{\rm Pl}^2}\widehat{F}\widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}}\widehat{EE} + 2\gamma^2\Lambda\widehat{V}\right), \tag{8.49a}$$

$$\widehat{C}^{(b)}_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi l_{\rm Pl}^2\gamma^2}\left(\frac{96i(\mathrm{sgn}(p))}{8\pi\gamma l_{\rm Pl}^2}\widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}}\widehat{F}\widehat{EE} + 2\gamma^2\Lambda\widehat{V}\right), \tag{8.49b}$$

$$\widehat{C}^{(c)}_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi l_{\rm Pl}^2\gamma^2}\left(\frac{96i(\mathrm{sgn}(p))}{8\pi\gamma l_{\rm Pl}^2}\widehat{EE}\widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}}\widehat{F} + 2\gamma^2\Lambda\widehat{V}\right), \tag{8.49c}$$

$$\widehat{C}^{(d)}_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi l_{\rm Pl}^2\gamma^2}\left(\frac{96i(\mathrm{sgn}(p))}{8\pi\gamma l_{\rm Pl}^2}\widehat{EE}\widehat{F}\widehat{\frac{1}{\bar{\mu}^3}} + 2\gamma^2\Lambda\widehat{V}\right). \tag{8.49d}$$

上の 4 つの場合を (a)、(b)、(c)、(d) とよぶことにする。ここで $\widehat{EE}$ と $\widehat{1/\bar{\mu}^3}$ は互いに交換することに注意する。また、異なる演算子順序をとることもできる。例えば、$\widehat{1/\bar{\mu}^3}$ は 2 つに分割し $\widehat{F}$ の両側におくこともできる。後でこの演算子順序については議論する。

上の演算子順序 (a) - (d) の Hamiltonian 拘束条件はそれぞれ以下の差分方程式を与える。

$$|v+4|\,||v+3|-|v+5||\,\Phi(v+4)$$
$$-\left(2|v|\,||v-1|-|v+1||-\frac{128\pi}{81}\gamma^3\frac{l_{\mathrm{Pl}}^2}{K^2}\Lambda|v|\right)\Phi(v)+|v-4|\,||v-5|-|v-3||\,\Phi(v-4)=0, \tag{8.50a}$$
$$|v|\,||v+5|-|v+3||\,\Phi(v+4)$$
$$-\left(2|v|\,||v+1|-|v-1||-\frac{128\pi}{81}\gamma^3\frac{l_{\mathrm{Pl}}^2}{K^2}\Lambda|v|\right)\Phi(v)+|v|\,||v-3|-|v-5||\,\Phi(v-4)=0, \tag{8.50b}$$
$$|v|\,||v+1|-|v-1||\,\Phi(v+4)$$
$$-\left(2|v|\,||v+1|-|v-1||-\frac{128\pi}{81}\gamma^3\frac{l_{\mathrm{Pl}}^2}{K^2}\Lambda|v|\right)\Phi(v)+|v|\,||v+1|-|v-1||\,\Phi(v-4)=0, \tag{8.50c}$$
$$|v+4|\,||v+1|-|v-1||\,\Phi(v+4)$$
$$-\left(2|v|\,||v+1|-|v-1||-\frac{128\pi}{81}\gamma^3\frac{l_{\mathrm{Pl}}^2}{K^2}\Lambda|v|\right)\Phi(v)+|v-4|\,||v+1|-|v-1||\,\Phi(v-4)=0. \tag{8.50d}$$

差分方程式 (8.50a)-(8.50d) を近似することによって得られる WDW 方程式は補遺 E.2 に示している。これらの方程式で $\Phi(0)$ が消えることがわかる。しかしながら、式 (8.50a) においてのみ、$\Phi(4)$ は $\Phi(-4)$ と直接関係付いている。これにより以下のことが言える。すべての $v>0$ に対して $\Phi(v)$ が与えられると仮定すると、上の 4 つの演算子順序のうち (a) のみが $v<0$ に対して $\Phi(v)$ が決定される。他の演算子順序について、差分方程式は $n=-1,-2,-3,...$ に対して $\Phi(4n)$ を決定することができない。この意味で、演算子順序 (a)-(d) のうち (a) のみにおいて初期特異点回避が可能である。したがって、この章で見てきた 6 つのモデルの中で、等体積離散化かつ演算子順序 (a) である場合のみが初期特異点がなく、体積が大きい極限において滑らかな波動関数を持つことができる。演算子順序 (a) において、もし $\Phi(4)$ を固定すると $n=\pm1,\pm2,\cdots$ に対して $\Phi(4n)$ を決定することができる。等面積離散化のように $\Phi(0)$ が決定されてないままであるが、これは $v=0$ を越える唯一の量子発展に影響を与えない。

さらに、初期特異点回避の要請により一般的な演算子順序の規則を見つけることができる。もし $\widehat{EE}$ や $\widehat{1/\bar{\mu}^3}$ に含まれる体積演算子 $\widehat{V}$ やその正ベキの演算子が $\widehat{F}$ の前にあれば、初期特異点が生じる。この事実を以下のように理解できる。簡単のため、古典的に $C=FV=0$ のような拘束条件があるとする。量子論において、拘束条件に対する演算子順序に 2 つの選び方がある。そして状態 $|v\rangle$ への拘束条件演算子 $\widehat{C_1}=\widehat{V}\widehat{F}$ と $\widehat{C_2}=\widehat{F}\widehat{V}$ の作用は

$$\widehat{C_1}|v\rangle=\widehat{V}\widehat{F}|v\rangle=-\frac{1}{16}\big(V_{v+4}|v+4\rangle-2V_v|v\rangle+V_{v-4}|v-4\rangle\big), \tag{8.51}$$
$$\widehat{C_2}|v\rangle=\widehat{F}\widehat{V}|v\rangle=-\frac{V_v}{16}\big(|v+4\rangle-2|v\rangle+|v-4\rangle\big) \tag{8.52}$$

によって与えられる。そうすると、$\widehat{C_1}$ の $\Phi(v)$ に対する拘束条件は

$$V_v\big(\Phi(v+4)-2\Phi(v)+\Phi(v-4)\big)=0 \tag{8.53}$$

となる。また、$\widehat{C_2}$ の $\Phi(v)$ に対する拘束条件は

$$V_{v+4}\Phi(v+4)-2V_v\Phi(v)+V_{v-4}\Phi(v-4)=0 \tag{8.54}$$

となる。式 (8.53) において、それぞれの項において体積演算子の同じ固有値 V_v があり、$v=0$ に対してすべての係数が消える。このため、この場合において $\Phi(4)$ と $\Phi(0)$ から $\Phi(-4)$ を決定することができな

い。よって一意的な発展をしない。一方、式 (8.54) において、左辺は $v=0$ に対してさえ消えない。したがって、$v=0$ を越えて一意的な解を決定することができ、それゆえ特異点は存在しない。

8.5　議論

議論を完全にするために、物質の HamiltonianC_{matter} を議論する必要がある。簡単のため、まず、等体積離散化に焦点をあてる。物質場は $\Phi(v,\phi)$ のように物質場の波動関数の依存性を導入することによって含めることができる。したがって、物質場の存在は議論を大きく変えることはない。例えば、式 (8.50a) を差分方程式の重力項として選ぶ。そして、$\Phi(v,\phi)$ に対して、以下の発展方程式を得る。

$$
\begin{aligned}
&|v+4|\,||v+3|-|v+5||\,\Phi(v+4,\phi)-\left(2|v|\,||v-1|-|v+1||-\frac{128\pi}{81}\gamma^3\frac{l_{\mathrm{Pl}}^2}{K^2}\Lambda|v|\right)\Phi(v,\phi)\\
&\quad+|v-4|\,||v-5|-|v-3||\,\Phi(v-4,\phi)=-48Kl_{\mathrm{Pl}}\sqrt{\pi\gamma^3}\hat{C}_{\mathrm{matter}}\Phi(v,\phi). \qquad (8.55)
\end{aligned}
$$

ここで、拘束条件 $C_{\mathrm{grav}}+C_{\mathrm{matter}}=0$ を用いた。補遺 E.3 において示したように、極めて特別な場合の一般的な物質場に対して、式 (8.55) の右辺は $\Phi(v,\phi)$ に比例しており、$v=0$ の係数が消える。このことは初期特異点回避は一般に物質場に依存しないことを意味する。それは重力の Hamiltonian 拘束条件の演算子順序に依存する。このことは等面積離散化に対しても同様である。

体積が大きい極限において波動関数の滑らかさを回復するかどうかは物質場と同様に離散化の選択に強く依存する。実際に、この問題はすでに Nelson、Sakellariadou [98, 99] によって詳細に調べられている。この文脈において、我々の研究はもし宇宙定数のみが含まれているなら、体積が大きい極限が等面積離散化において問題であるが等体積離散化において問題が解決される。実際には、それぞれの離散化での宇宙定数モデルはパラメータがある特定の値に対応しており、我々の結果はそれらと矛盾していない。一方、両方の離散化に対する有限の差分方程式の解を求め、等面積離散化ではどのような問題があるのか、そして等体積離散化ではどのように解決されるのかを示した。この振る舞いは離散的な hamiltonian 拘束条件の体積が大きい極限をとり、演算子順序の選択がこの極限に影響を与えないことによって説明されるので、体積が大きい極限は演算子順序の選択に対して関係しないことは明らかである。

8.6　まとめ

この章では、LQC の枠組みで宇宙項を持つ一様等方平坦宇宙について議論した。特に、LQC では決めることが難しい演算子順序や離散化において生じる Hamiltonian の量子化における理論的不定性について議論した。LQC の 2 つの重要な特徴、初期特異点の回避と体積が大きい極限に焦点を当てた。初期特異点の回避が演算子順序に強く依存することを示した。それゆえ、初期特異点回避に対する要請は潜在的に演算子順序の不定性をとても小さいものいさせる。一方、離散化の選び方は体積が大きい極限を考えた時に重要になってくる。我々は離散化の 2 つの典型的な場合、等面積離散化、等体積離散化について調べた。そうすると、等面積離散化では体積が大きい極限で連続な波動関数になるという波動関数の物理的な解釈においてシリアスな問題が生じ、等体積離散化ではそれが解決されることを示した。この結果のみからこれらの不定性を決めることは出来ないことははっきりしている。しかしながら、定性的であって

も完全な LQG の物理的意味合いを演繹することができるならば、ミニスーパースペース模型での完全な LQG の現象論的な実現として LQC の不定性を決定することができるであろう。

第 9 章

結論

本論文では、ループ量子重力理論で知られている面積固有値の表式を用いたブラックホールのエントロピーの導出を一般化、及びループ量子宇宙論を用いた初期特異点の回避の可能性について議論した。

第 7 章では、LQG でのブラックホールのエントロピーの導出の議論を行った。これまでは LQG を用いてブラックホール時空そのものを取り扱う研究はされていない。実際に行われている方法は、ブラックホールの地平線を時空の内部境界と捉える古典的な描像を用い、地平線の自由度を計算することによりエントロピーを求める方法である。また、ブラックホールの地平線を定める境界面を量子化する際に、古典的計算により簡単化した変数を用いて量子化を行っているため、先に量子化を行った時空に演算子化された地平線条件を課す場合と同じ結果を得ることができるかは自明ではない。さらに、量子状態であるスピンネットワークのエッジと 2 次元地平線面との関係として、(i) エッジが 2 次元面を貫いている場合と (ii) エッジが 2 次元面上にも存在する場合、つまりグラフの頂点が地平線上に存在する場合があるが、これまでの研究においては (i) のみ考慮されている。その理由として、地平線は量子的に見ると揺らいでいるため地平線上にはエッジは存在しないとする (i) の場合のみを考えている。その結果、面積固有値の表式を簡単化し、その表式でブラックホールの地平線の面積を表しエントロピーを導出している。また別の方法として、ブラックホールの内側は存在しないとし、(ii) の場合および (i) の場合のうち、地平線の内側にはエッジがない場合を考え、面積固有値を簡単化したエントロピーの導出法が行われてきた。しかしそれらの結果は一致しておらず、どちらが正しいのか、またはどちらも正しくないのか未だにわかっていない。よって、第 7 章ではこれまでの場合を含む一般的な場合でのブラックホールのエントロピーの導出の議論を行った。さらに LQG には Immirzi パラメータとよばれる 1 つの自由パラメータが含まれるが、導出されたエントロピーを古典的な Bekenstein-Hawking の関係式に一致させることで決定することができる。その結果、我々の研究において得られたこのパラメータの値はそれまでの研究において得られたものとは異なる値となる。そこでの計算によるとブラックホールの地平線を形成する量子状態として地平線上にエッジがある状態の状態数が一番多く、その結果、ブラックホールの地平線は、今までのような古典的直感と反し、地平線上にもエッジが存在し、頂点も含まれる状態によって構成されているという解釈をする必要があることになる。これは地平線の境界条件を古典的な解析から課すことの危険性を表しており、LQG の従来のアプローチに警鐘を与えるものである。

第 8 章では、対称性を課した時空に LQG の量子化の方法を使って量子宇宙論を展開する理論であるループ量子宇宙論を用いた初期特異点の回避の可能性についての議論を行った。これまでループ量子宇宙

論の研究においてホロノミーを考える際に離散化が等面積で与えられる方法と等体積で与えられる方法の 2 つが提案されており、共に初期特異点が回避されている。また、量子論で問題になってくるハミルトニアン演算子の演算子順序についての議論も限られた場合が計算されているのみでどのようにするべきなのかといった系統的な議論はなされていない。そこで、第 8 章では平坦な一様等方宇宙モデルにおいてホロノミーの取り方と演算子順序について宇宙が大きくなった時の波動関数の振る舞いと初期特異点での演算子順序による波動関数の振る舞いの違いに着目して系統的な解析を行った。その結果、ホロノミーの取り方として等体積離散化になる方法が良く、三脚場演算子を右に置く演算子順序をとるべきであることを示した。LQG ではホロノミーの取り方は一般的に与えられているが、演算子順序についてはわかっていない。本研究により、取るべき演算子順序についての示唆が得られたが、その他の宇宙モデル等においても同様の結果を得ることができ、本章の結果の普遍性が示されるならば、量子重力理論完成への大きな一歩となるだろう。

以上の結果より、LQG を用いたブラックホールの地平線の新たな量子的描像を明らかにし、頂点やエッジにより地平線が構成されていることがわかった。そのような量子状態はこれまでの研究では簡単化のため無視していたため、従来のアプローチの見直しを行う必要があることがわかった。またループ量子宇宙論を用いた特異点回避の可能性の議論では演算子順序により回避するかどうかが決まることがわかり、演算子順序の取り方を一意に定めるための示唆を与えた。今後の課題としてこれらの結果の普遍性を様々なモデル等で検証したい。

謝辞

前田恵一教授には卒論時のテーマ決めから大変迷惑をお掛けしたにもかかわらず、最後まで指導していただきありがとうございます。また研究に関する多くの議論や考察など大変お世話になりました。ここに感謝の意を表します。また日本大学の玉置孝至氏には修士の時から大変お世話になりました。論文執筆が遅く体調も崩しがちでご迷惑をかけることもありましたが、辛抱強く指導して下さってどうもありがとうございました。また原田知広准教授、島野誠大氏、雨宮史年氏にはゼミで様々な議論をすることができ、大変成長することができました。特に島野誠大氏と雨宮史年氏がいなければ今の私はいなかったと思います。2 人に大変感謝致します。最後になりましたが、研究室内でお世話になりました前田研究室の皆様に感謝したいと思います。

付録 A

物理定数と Planck スケール

基本的な 3 つの物理定数：

$$
\begin{aligned}
\text{光速 } c &\approx 3.00 \times 10^{10}[cm\ s^{-1}], \\
\text{重力定数 } G &\approx 6.67 \times 10^{-8}[cm^3 g^{-1} s^{-2}], \\
\text{プランク定数 } \hbar &\approx 1.05 \times 10^{-27}[erg \cdot sec] \approx 6.58 \times 10^{-16}[eV\ sec]
\end{aligned}
$$

これらから作られる Planck スケールは

$$
\begin{aligned}
\text{Planck 長} \quad & l_P = (G\hbar/c^3)^{1/2} \approx 1.6 \times 10^{-33}[cm], \\
\text{Planck 時間} \quad & t_P = l_P/c = (G\hbar/c^5)^{1/2} \approx 5.4 \times 10^{-44}[sec], \\
\text{Planck 質量} \quad & m_P = (\hbar c/G)^{1/2} \approx 2.2 \times 10^{-5}[g], \\
\text{Planck エネルギー} \quad & E_P = m_P \cdot c^2 = (\hbar c^5/G)^{1/2} \approx 2.2 \times 10^{16}[erg] \approx 1.3 \times 10^{19}[Gev], \\
\text{Planck 質量密度} \quad & \rho_P = l_P^{-2} c^2/G \approx 5.2 \times 10^{93}[g \cdot cm^{-3}], \\
\text{Planck 温度} \quad & T_P = E_P/k = l_P c^4/GK \approx 1.4 \times 10^{32}[K]
\end{aligned}
$$

である。

erg(エルグ) は CGS 単位系でのエネルギーの単位である。今エネルギーは $[E] = [L^2 T^{-2} M]$ で与えられるので、$1erg = 10^{-2\times 2-3}J = 10^{-7}J$ の関係にある。

dyn(ダイン) は CGS 単位系での力の単位である。今力は $[F] = LT^{-2}M$ で与えられるので、$1dyn = 10^{-2-3}N = 10^{-5}N$ の関係にある。

$$
\begin{aligned}
\text{ボルツマン定数 } k_B &\approx 1.38 \times 10^{-16}[erg/K] \\
\text{温度ケルビン (kelvin)} 1K &\approx 1eV \approx 11,604K \approx 10^4 K \\
\text{電子ボルト } 1eV &\approx 1.602 \times 10^{-19} J \approx 1.783 \times 10^{-36} kg \\
\text{素電荷 } e &\approx 4.80 \times 10^{-10}[esu] \\
\text{電子質量 } m_e &\approx 9.11 \times 10^{-28}[g] \\
m_e c^2 &\approx 0.511[MeV] \\
\text{陽子質量 } m_p &\approx 1.67 \times 10^{-24}[g] \\
m_p c^2 &\approx 938[MeV] \\
\text{中性子質量 } m_n c^2 &\approx 939[MeV]
\end{aligned}
$$

付録 B

量子重力理論の歴史

B.1　3 つの主な流れ

量子重力理論における研究の明らかな特性は、量子重力理論の研究は 3 つの主な流れに分けることができる。この 3 つの流れの相対的な重要性は変化しており、重要な交わりや 3 つの間の関係性も指摘されており、3 つの流れが合流するような研究は未だなされていない。それにもかかわらず、この 3 つの流れは 80 年を越えて独特な個性を保ってきた。3 つの主な流れはしばしば "共変的"("covariant")、"正準的"("canonical")、"歴史の足し合わせ"("sum over histories") と呼ばれており、これらの名前は誤解を招きやすく、よく混乱させられる。正確な定義によって特徴づけることはできないが、それぞれには注目すべき方法論的な一致があり、研究の発展の論理に目立った一貫性はある。この付録は [2] を参考にまとめたものである。

共変的アプローチ　平坦な Minkowski 時空や他の背景計量空間上の計量の揺らぎの場の量子論として理論を構築させる試み。この研究は 30 年代に Rosenfeld、Fierz、Pauli によって始まった。一般相対性理論の Feynman 規則は 60 年代に DeWitt と Feynman によって苦労して発見された。t'Hooft と Veltman、Deser と Van Nieuwenhuizen、その他のグループらは 70 年代初頭に繰り込み不可能性の確固たる証拠を発見した。そして、繰り込み可能であったり、有限の摂動展開を与える一般相対性理論の拡張に対する研究が始まった。高階微分理論や超重力理論を経てこの分野の研究は 80 年代後半でうまく弦理論へ収束している。

正準的アプローチ　固定されている計量なしで Hilbert 空間が完全な計量や計量の関数に対応する演算子の表現を持っている量子論を構築する試み。このアプローチは 50 年代に Bergmann、Dirac によって始まった。一般相対性理論の正準構造を明らかにすることはとても大変であることがわかった。Bergmann と彼のグループ、Dirac、Peres、Arnowit・Deser・Misner らは 50 年代後半や 60 年代初頭にやるべきことを明らかにした。量子論形式的な方程式は 60 年代中期に Wheeler と Dewitt によって書き下されたがうまく定義されていないことがわかった。同じ方程式のうまく定義されたヴァージョンは 80 年代後半において初めてうまく見つかり、それがループ量子重力理論である。

歴史の足し合わせ　理論を定義するために Feynman の汎関数積分量子化のあるヴァージョンを用いる試

み。70 年代で導入された Hawking の Euclid 量子重力理論、離散的 (格子的な模型や posets など) アプローチの多くやスピンフォーム (spin foam) 模型などはこのアプローチに属する。

その他のアプローチ　もちろんその他のアイディアもある。

- ツイスター理論 (Twistor theory) は正確に物理学というより数学に有益な結果をもたらしているが、未だ活発に発展している。
- 非可換幾何学は Connes やその共同研究者によって Planck スケールの幾何学を記述するための鍵となる数学的道具として提案され、大変驚くべき結果を得ている。
- Finkelstein、Sorkin、その他の研究者らは興味がそそられる独立な道を追求している。
- 重力によって引き起こされる量子状態の収縮の Penrose のアイディアは近年実験可能であり新しい流れになりそうである。
- ...

しかしながら、今までこれらの代替理論が大きなスケールの研究に発展しているものはない。

B.2　5 つの時代

歴史的に見て量子重力理論の研究の発展は簡単にいって 5 つの時代に分けることができる。

The Prehistory:1930-1959　研究の 3 つの流れの基本的なアイディアはとても早く、30 年代においてすでに現れていた。50 年代の終わりまでに 3 つの研究プログラムははっきりと定式化された。

The Classical Age:1960-1969　60 年代は 3 つのプログラムのうち 2 つ (共変的アプローチ、正準的アプローチ) にかなりの発展があった。この 10 年間の終わりで、2 つのプログラムは理論の基本的な構築がなされた。一方では重力場に対する Feynman 規則、もう一方では Wheeler-DeWitt 方程式が得られた。これらの美しい結果を得るために、素晴らしい量の技術的な作業や想像力が必要であると分かった。60 年代は輝かしい新しい世界を約束をして幕を閉じた。

The Middle Ages:1970-1983　70 年代はすぐに 60 年代の希望が失望させられた。Wheeler-DeWitt 方程式は純粋に場の理論的計算に対して悪すぎる定義であった。そして一般相対性理論の繰り込み不可能性に対する証明が積み重なってきた。両方の流れは共につまずきの石が見つかった。

1974 年に、Steven Hawking はブラックホールの輻射を導いた。そして Wheeler-DeWitt 方程式を扱おうとするために、歴史の足し合わせのヴァージョンを “Euclid”(Riemann) 幾何学の足し合わせとして発展させた。宇宙の波動関数のアイディアという刺激があり、そのアプローチはトポロジー変化を考え計算させる方法を明らかにした。しかし、場の理論の量に対して Euclid 汎関数積分は Wheeler-DeWit 方程式のように計算の道具を弱めてしまうことが分かった。

共変的なアプローチでは、一般相対性理論の繰り込み不可能性に対する主な反応は理論を修正させることである。強い希望は後に失望させられたが超重力理論や一般相対性理論に対する高階微分作用の広範囲に及ぶ研究を動機づけさせた。量子重力理論の景観は暗くなってしまった。

The Renaissance:1984-1994　80 年代中期に光明が見いだされた。共変的なアプローチでは、無限大を取り除くための一般相対性理論の修正の様々な試みは弦理論へと統合していった。摂動論的な弦理論は量子重力理論の散乱振幅に対する計算可能な摂動論の長い研究が最終的にうまくやり遂げた。確

かに、時空の次元が 4 次元なく高次元であることや年々発見されることが期待されているが未だに見つかっていない超対称的な粒子の導入のような支払うべき代償がある。しかし、有限の摂動展開の結果がただ世界が我々の理論とは異なるように見えることを主張するために放棄されることが良いことである。

正準的なアプローチにも光明が見いだされた。Wheeler-DeWitt 方程式後の 20 年間でループ量子重力理論は具体的な計算を実行するために十分うまく定義された理論を最終的に与えた。完全で現実的な理論から離れ、散乱振幅を計算することができないが、物理的な期待値が計算できる厳密に定義され非摂動論的で一般共変的であり背景独立な場の量子論を持つ刺激は強い。

Nowadays:1995-　弦理論とループ量子重力理論は 90 年代中期にそれらが物理的結果を得始めるまで共に強力に成長してきた。Bekenstein-Hawking 公式は両方のアプローチで事実上同時に導かれた。ループ量子重力理論は最初の Planck スケールの量的物理的予言 (面積や体積の固有値のスペクトル) の計算を示した。

その間に歴史の足し合わせのアプローチは死んでいない。Euclid 積分の困難さにも関わらず、そのまま参考にしているアイディアを用い、離散的な格子的なアプローチからトポロジー理論の “状態和” の定式化までの研究のいくつかの流れの発展を導いた。最終的には、“状態和” の定式化はスピンフォームの定式化を動機付け、ループ量子重力理論から歴史の Feynman の足し合わせを形成した。

その間その他のアイディアは弦理論と交わる中でも注目すべき非可換幾何学を発達させた。

20 世紀は重力の量子論に対する 2 つのうまく定義された競争相手 (弦理論とループ量子重力理論) で幕を閉じた。それと同様に、非可換幾何学から一般相対性理論の光的面の定式化を導いたり弦とループを統合する試みのための興味深い新しいアイディアがある。そして、とても楽観的な注意をしておく。Planck スケールの測定を研究に取り入れられるかもしれない可能性を研究する “量子重力現象論”(“quantum gravity phenomenology”) の誕生がある。したがって、最終的にどの理論的仮説が正しいのかを知ることになるだろう。

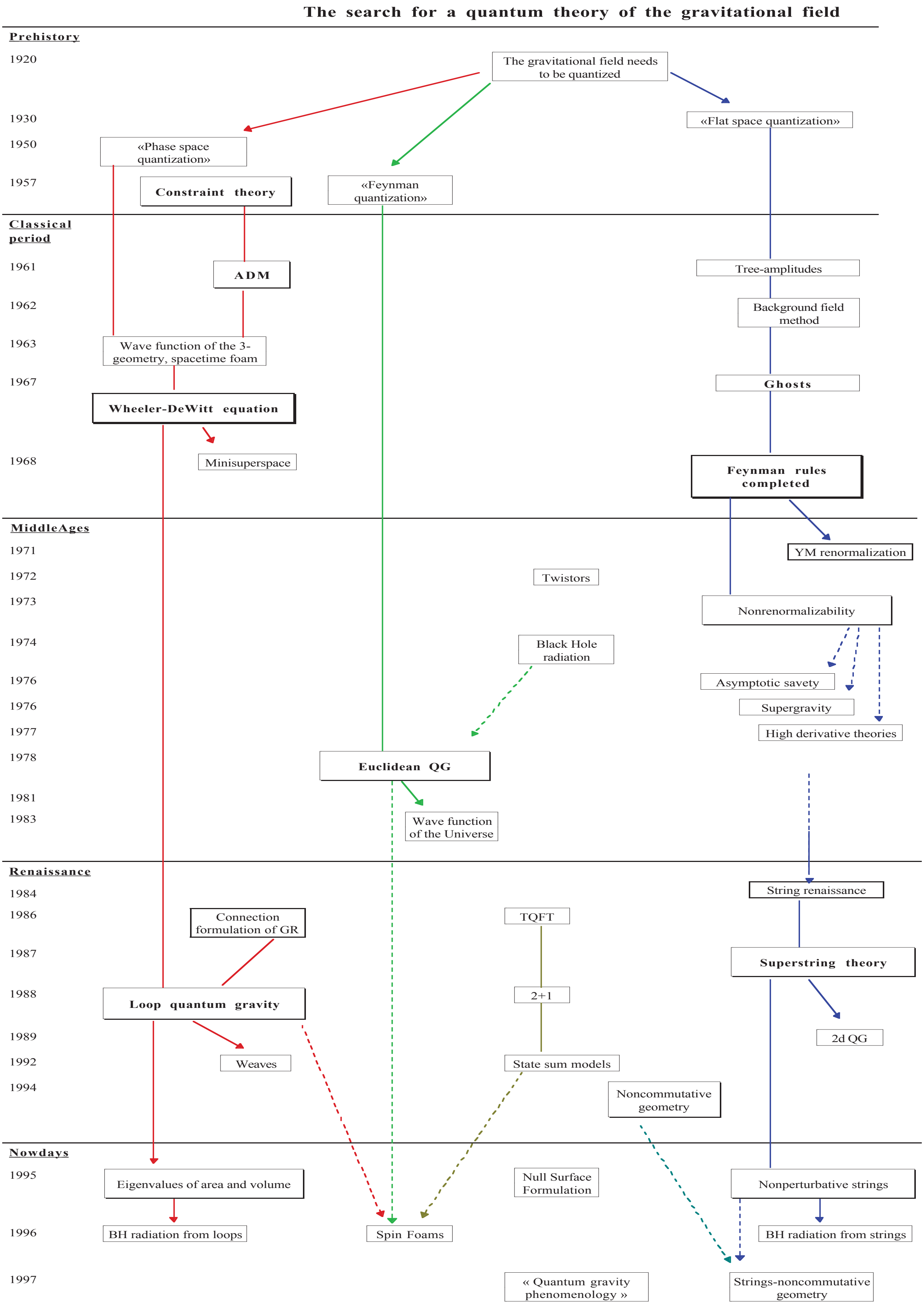


図 B.1 重力場の量子論に対する研究 ([2] より引用)

付録 C

三脚場とスピン接続を用いた場合の作用の候補としてのスカラー項

三脚場やスピン接続を用いた作用の候補の項となるスカラー量をまとめる。

1. Hilbert-Palatini $\mathcal{L}_{HP}(e,\omega) := \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl}R^{ij} \wedge e^k \wedge e^l$
   この Lagrangian から従う変分方程式は Einstein 方程式と等価である。スピン接続に対する方程式は捩率が零となり、三脚場に対する方程式は Ricci テンソルが零になる。Hilbert-Palatini 作用は計量による Einstein-Hilbert 作用と古典的に等価である。
2. Cosmological constant $\mathcal{L}_\Lambda(e) := \frac{\Lambda}{4!}\epsilon_{ijkl}e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^l$
   この項は体積に比例しており、通常の宇宙項である。
3. Euler Invariant $\mathcal{L}_E(\omega) := \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl}R^{ij} \wedge R^{kl}$
   この 4 形式はトポロジー不変量となる。具体的には
   $$\mathcal{L}_E(\omega) = -\mathrm{d}\left\{\frac{1}{2}\epsilon^i{}_{jmn}\omega^{mn} \wedge \left(\mathrm{d}\omega^j{}_i + \frac{2}{3}\omega^j{}_k \wedge \omega^k{}_i\right)\right\}$$
   である。
4. Pontryagin Invariant $\mathcal{L}_P(\omega) := R^{ij} \wedge R^{ij}$
   この項もトポロジー不変量となる。具体的には
   $$\mathcal{L}_P(\omega) = -\mathrm{d}\left\{\omega^i{}_j \wedge \left(\mathrm{d}\omega^j{}_i + \frac{2}{3}\omega^j{}_k \wedge \omega^k{}_i\right)\right\}$$
   である。この中括弧は Chern-Simons 3 形式である。
5. Nieh-Yan Invariant $\mathcal{L}_{NY}(e,\omega) := T^i \wedge T_i - R^{ij} \wedge e^i \wedge e^j$
   この項もトポロジー不変量となる。もし捩率が零であれば、この項も零になる。具体的には
   $$\mathcal{L}_{NY}(e,\omega) = -\mathrm{d}\left\{e_i \wedge T^i\right\}$$
   である。

付録 D

ブラックエントロピーの導出での補足

D.1　Laplace 変換による状態数の求め方

$N(A)$ の Laplace 変換を

$$P(L) := \int_0^\infty N(a)e^{-La}\mathrm{d}a$$

によって導入する。ここで、$a = A/4\pi\gamma$ である。(7.37) を a 上で 0 から ∞ まで積分すると、

$$P(L) = \frac{1}{L\left(1 - G(L)\right)}$$

が得られる。ここで、

$$G(L) := \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=s}^{n}2(n+1)\mathrm{e}^{-L\tilde{a}_x(n,s,t)} + \sum_{t=0}^{n}(n+1)\mathrm{e}^{-L\tilde{a}_x(n,s=0,t)}\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\sum_{t=s}^{n}(2n+3)\mathrm{e}^{-L\tilde{a}_y(n,s,t)}$$

であり、$\tilde{a}_x(n,s,t) = a_x(n,s,t)/4\pi\gamma$、$\tilde{a}_y(n,s,t) = a_y(n,s,t)/4\pi\gamma$ と置いている。$N(a)$ を求めるために、$P(L)$ の逆 Laplace 変換をしなければならない。ここで、$N(a)$ は $P(L)$ の極によって決定されるというよく知られている事実を用いると、

$$N(a) = \sum_{L_i,\mathrm{Re}(L_i)>0}\mathrm{res}_{L_i}e^{L_i a} + \text{subleading terms}$$

が得られる。これは 7.4 節で用いている (7.27) の形である。よって、$G(L_i) - 1 = 0$ を満たす零点 L_i を求めることにする。

唯一の実の零点は

$$L_0 = 2.91673\cdots =: \tilde{\gamma}_M$$

によって与えられる。この零点の近くでは、関数 $P(L)$ は

$$P(L) \approx \frac{C_M}{L - \tilde{\gamma}_M}$$

のように振る舞う。ここで、

$$C_M = -\frac{1}{\tilde{\gamma}_M G'(\tilde{\gamma}_M)} = 0.215979\cdots$$

である。大きい a に対する振る舞いのうち最も寄与する部分は

$$N(a) = C_M e^{\tilde{\gamma}_M a} = C_M e^{\frac{\gamma_M}{4\gamma} A} \tag{D.1}$$

によって与えられる。ここで、$\gamma_M = \tilde{\gamma}_M/\pi(= 0.9284\cdots)$ である。

全ての複素零点 $L_i(i = 1, 2, \cdots)$、つまり $P(L_i)$ の複素極が $\tilde{\gamma}_M$ よりも小さい実部を持つことは以下のように簡単に示すことができる。$G(L_i)$ は極で 1 とならなければならないため、$G(L_i)$ の実部に注目する。$L_i := L_i^{(1)} + iL_i^{(2)}$ と定義すると $\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{-L_i\tilde{a}_x}\right] = \mathrm{e}^{-L_i^{(1)}\tilde{a}_x} \cos\left(L_i^{(2)}\tilde{a}_x\right)$ となることがわかる。$G(L_i) = 1$, $L_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ を満足するためには $\tilde{\gamma}_M$ より小さくなければならない。

数値的に $\mathrm{Re}[L_i] > 2$、$|\mathrm{Im}[L_i]| < 100$ の範囲で求めた $P(L)$ の極の値を表 D.1 に示す。主に寄与する部分 (D.1) と比較して、$N(a)$ に寄与する複素零点は指数関数的に小さい。

i	$\mathrm{Re}[L_i]$	$\mathrm{Im}[L_i]$
0	$2.917\cdots$	0
1	$2.113\cdots$	$\pm\ 14.05\cdots$
2	$2.200\cdots$	$\pm\ 22.51\cdots$
3	$2.184\cdots$	$\pm\ 28.87\cdots$
4	$2.113\cdots$	$\pm\ 36.23\cdots$
5	$2.257\cdots$	$\pm\ 43.76\cdots$
6	$2.392\cdots$	$\pm\ 57.56\cdots$
7	$2.230\cdots$	$\pm\ 71.86\cdots$
8	$2.118\cdots$	$\pm\ 75.48\cdots$
9	$2.222\cdots$	$\pm\ 80.41\cdots$
10	$2.226\cdots$	$\pm\ 87.25\cdots$
11	$2.579\cdots$	$\pm\ 94.43\cdots$

表 D.1　$P(L)$ の極。$\mathrm{Re}[L_i] > 2$、$|\mathrm{Im}[L_i]| < 100$ の範囲の極の値を示している。

付録 E

ループ量子宇宙論の議論の補足

E.1 Wheeler-De Witt 方程式と一般解

ここで、宇宙定数のある平坦な FRW 宇宙の WDW 理論についてまとめておく。接続ー三脚場変数 c、p を用いると、Poisson 括弧式は

$$\{c, p\} = \frac{8\pi G\gamma}{3} \tag{E.1}$$

となり、Hamiltonian 拘束条件は

$$C_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi\gamma^2 G}\left(-6c^2\sqrt{|p|} + 2\gamma^2\Lambda|p|^{\frac{3}{2}}\right) = 0 \tag{E.2}$$

となる。

この系を量子化するために、Dirac の方法を WDW 理論において適用する。つまり、Poisson 括弧式 (E.1) を正準変数に対応する演算子の交換関係に置き換え、

$$[\widehat{c}, \widehat{p}] = \frac{8i\pi l_{\text{Pl}}^2\gamma}{3} \tag{E.3}$$

とすることであり、古典的拘束条件 (E.2) は物理的量子状態に対する拘束条件 $\widehat{C}_{\text{grav}}\Psi = 0$ となる。この量子拘束条件は WDW 方程式とよばれる。ここで、Hamiltonian 拘束条件に対する演算子順序に以下のような 3 つの場合がある。

$$\widehat{C}^{(1)}_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi\gamma^2 l_{\text{Pl}}^2}\left(-6\widehat{c}^2\sqrt{|\widehat{p}|} + 2\gamma^2\Lambda|\widehat{p}|^{\frac{3}{2}}\right), \tag{E.4a}$$

$$\widehat{C}^{(2)}_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi\gamma^2 l_{\text{Pl}}^2}\left(-6\sqrt{|\widehat{p}|}\widehat{c}^2 + 2\gamma^2\Lambda|\widehat{p}|^{\frac{3}{2}}\right), \tag{E.4b}$$

$$\widehat{C}^{(3)}_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi\gamma^2 l_{\text{Pl}}^2}\left(-6\widehat{c}\sqrt{|\widehat{p}|}\widehat{c} + 2\gamma^2\Lambda|\widehat{p}|^{\frac{3}{2}}\right). \tag{E.4c}$$

ここで通常の Schrödinger 表現を用いると、$\widehat{p}$ と $\widehat{c}$ はそれぞれ乗法と微分法となり

$$\widehat{p}\Psi = p\Psi, \quad \widehat{c}\Psi = \frac{8i\pi l_{\text{Pl}}^2\gamma}{3}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}p} \tag{E.5}$$

となる。これより量子拘束条件 (E.4a)-(E.4c) は対応する WDW 方程式

$$\widehat{C}^{(1)}_{\rm grav}\Psi^{(1)} = \frac{8\pi l_{\rm Pl}^2}{3}\left(\sqrt{|p|}\frac{{\rm d}^2\Psi^{(1)}}{{\rm d}p^2} + \frac{{\rm sgn}(p)}{\sqrt{|p|}}\frac{{\rm d}\Psi^{(1)}}{{\rm d}p} - \frac{1}{4}|p|^{-\frac{3}{2}}\Psi^{(1)}\right) + \frac{\Lambda}{8\pi l_{\rm Pl}^2}|p|^{\frac{3}{2}}\Psi^{(1)} = 0, \tag{E.6a}$$

$$\widehat{C}^{(2)}_{\rm grav}\Psi^{(2)} = \frac{8\pi l_{\rm Pl}^2}{3}\sqrt{|p|}\frac{{\rm d}^2\Psi^{(2)}}{{\rm d}p^2} + \frac{\Lambda}{8\pi l_{\rm Pl}^2}|p|^{\frac{3}{2}}\Psi^{(2)} = 0, \tag{E.6b}$$

$$\widehat{C}^{(3)}_{\rm grav}\Psi^{(3)} = \frac{8\pi l_{\rm Pl}^2}{3}\left(\sqrt{|p|}\frac{{\rm d}^2\Psi^{(3)}}{{\rm d}p^2} + \frac{{\rm sgn}(p)}{2\sqrt{|p|}}\frac{{\rm d}\Psi^{(3)}}{{\rm d}p}\right) + \frac{\Lambda}{8\pi l_{\rm Pl}^2}|p|^{\frac{3}{2}}\Psi^{(3)} = 0 \tag{E.6c}$$

となる。$p \geq 0$ に対する WDW 方程式 (E.6a)-(E.6c) の一般解は

$$\Psi^{(1)} = p^{-\frac{1}{2}}\left[C_1{\rm Ai}\left(-\alpha_3^{\frac{1}{3}}p\right) + C_2{\rm Bi}\left(-\alpha_3^{\frac{1}{3}}p\right)\right], \tag{E.7a}$$

$$\Psi^{(2)} = C_1{\rm Ai}\left(-\alpha_3^{\frac{1}{3}}p\right) + C_2{\rm Bi}\left(-\alpha_3^{\frac{1}{3}}p\right), \tag{E.7b}$$

$$\Psi^{(3)} = p^{\frac{1}{4}}\left[C_1{\rm J}_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha_3}p^{\frac{3}{2}}\right) + C_2{\rm J}_{\frac{1}{6}}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha_3}p^{\frac{3}{2}}\right)\right], \tag{E.7c}$$

となる。ここで C_1 と C_2 は積分定数であり、Ai と Bi は Airy 関数である。また、$\alpha_3 := 3\Lambda/(8\pi l_{\rm Pl}^2)^2$ とした。

E.2　差分方程式の大きい体積極限

$\langle\mu|\widehat{C}_{\rm grav}|\Psi\rangle$ の体積の大きい極限を考えよう。そうすると WDW 方程式と対応することが示すことができる。まず、等面積離散化の演算子順序 (8.30) と (8.32) を考える。演算子順序 (8.30) は

$$\begin{aligned}\langle\mu|\widehat{C}_{\rm grav}|\Psi\rangle = \frac{1}{16\pi^2 l_{\rm Pl}^2\gamma^2}\frac{3}{8\pi\gamma l_{\rm Pl}^2\mu_0^3}\Big[&|V_{\mu+5\mu_0} - V_{\mu+3\mu_0}|\,\Psi(\mu+4\mu_0)\\ &- \left(2\,|V_{\mu+\mu_0} - V_{\mu-\mu_0}| - \frac{16\pi\gamma^3 l_{\rm Pl}^2\mu_0^3}{3}\Lambda V_\mu\right)\Psi(\mu) + |V_{\mu-3\mu_0} - V_{\mu-5\mu_0}|\,\Psi(\mu-4\mu_0)\Big]\end{aligned} \tag{E.8}$$

となる。

$\mu \gg \mu_0$ に対して、μ_0 のまわりで $(V_{\mu+L\mu_0} - V_{\mu+M\mu_0})$ を展開することができる。

$$\begin{aligned}V_{\mu+L\mu_0} - V_{\mu+M\mu_0} = \left(\frac{8\pi\gamma l_{\rm Pl}^2}{6}\right)^{3/2}\mu^{3/2}\Bigg\{&\frac{3}{2}(L-M)\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{3}{8}(L^2-M^2)\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2\\ &-\frac{1}{16}(L^3-M^3)\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^3 + O\left(\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^4\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{E.9}$$

式 (E.9) を式 (E.8) に代入すると、

$$\begin{aligned}\langle\mu|\widehat{C}_{\rm grav}|\Psi\rangle = \frac{1}{16\pi^2 l_{\rm Pl}^2\gamma^2}\frac{3}{8\pi\gamma l_{\rm Pl}^2\mu_0^3}\left(\frac{8\pi\gamma l_{\rm Pl}^2}{6}\right)^{3/2}\mu^{3/2}\Bigg[&3\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)\{\Psi(\mu+4\mu_0) - 2\Psi(\mu) + \Psi(\mu-4\mu_0)\}\\ &+6\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^2\{\Psi(\mu+4\mu_0) - \Psi(\mu-4\mu_0)\} - \frac{1}{8}\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^3\{\Psi(\mu+4\mu_0) - 2\Psi(\mu) + \Psi(\mu-4\mu_0)\}\\ &-6\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^3\{\Psi(\mu+4\mu_0) + \Psi(\mu-4\mu_0)\} + \frac{16\pi\gamma^3 l_{\rm Pl}^2\mu_0^3}{3}\Lambda\Psi(\mu) + O\left(\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^4\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{E.10}$$

を得る。波動関数が十分ゆっくり変化し、μ のまわりで波動関数 $\Psi(\mu \pm 4\mu_0)$ が展開できるとすると、

$$\Psi(\mu \pm 4\mu_0) = \Psi(\mu) \pm \frac{\mathrm{d}\Psi(\mu)}{\mathrm{d}\mu}(4\mu_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\Psi(\mu)}{\mathrm{d}\mu^2}(16\mu_0^2) \pm \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^3\Psi(\mu)}{\mathrm{d}\mu^3}(64\mu_0^3) + O\left(\mu_0^4\frac{\mathrm{d}^4\Psi(\mu)}{\mathrm{d}\mu^4}\right) \tag{E.11}$$

となる。式 (E.11) を式 (E.10) に代入すると

$$\langle\mu|\widehat{C}_{\mathrm{grav}}|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi^3\gamma^3}l_{\mathrm{Pl}}}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\mu^2}\big(\sqrt{\mu}\Psi(\mu)\big) + \frac{\pi\gamma^3 l_{\mathrm{Pl}}^2}{9}\mu^{3/2}\Lambda\Psi(\mu) + O(\mu_0)\right] \tag{E.12a}$$

を得る。$\mu \propto p$ のため、この方程式は補遺 E.1 のように単なる WDW 方程式である。同様に、演算子順序 (8.32) における $\langle\mu|\widehat{C}_{\mathrm{grav}}|\Psi\rangle$ の体積が大きい極限を考えると、WDW 方程式

$$\langle\mu|\widehat{C}_{\mathrm{grav}}|\Psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi^3\gamma^3}l_{\mathrm{Pl}}}\left[\sqrt{\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\mu^2}\Psi(\mu) + \frac{\pi\gamma^3 l_{\mathrm{Pl}}^2}{9}\mu^{3/2}\Lambda\Psi(\mu) + O(\mu_0)\right] \tag{E.12b}$$

を得る。

次に等体積離散化での演算子順序 (8.50a) - (8.50d) に対する $\langle v|\widehat{C}_{\mathrm{grav}}|\Psi\rangle$ の体積が大きい極限を計算しよう。これを実行するために $|v| \gg 1$ であり $\Phi(v)$ が十分ゆっくり変化するとする。そうすると、演算子順序 (8.50a) - (8.50d) から以下のような WDW 方程式が得られる。

$$\frac{27}{8l_{\mathrm{Pl}}\gamma^{3/2}}\sqrt{\frac{8}{6\pi}}K\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2}\left(|v|\Phi(v)\right) + \frac{4\pi}{81}\gamma^3\frac{l_{\mathrm{Pl}}^2}{K^2}\Lambda|v|\Phi(v) + O\left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi(v)}{\mathrm{d}v^3}\right)\right], \tag{E.13a}$$

$$\frac{27}{8l_{\mathrm{Pl}}\gamma^{3/2}}\sqrt{\frac{8}{6\pi}}K\left[|v|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2}\Phi(v) + \frac{4\pi}{81}\gamma^3\frac{l_{\mathrm{Pl}}^2}{K^2}\Lambda|v|\Phi(v) + O\left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi(v)}{\mathrm{d}v^3}\right)\right], \tag{E.13b}$$

$$\frac{27}{8l_{\mathrm{Pl}}\gamma^{3/2}}\sqrt{\frac{8}{6\pi}}K\left[|v|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2}\Phi(v) + \frac{4\pi}{81}\gamma^3\frac{l_{\mathrm{Pl}}^2}{K^2}\Lambda|v|\Phi(v) + O\left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi(v)}{\mathrm{d}v^3}\right)\right], \tag{E.13c}$$

$$\frac{27}{8l_{\mathrm{Pl}}\gamma^{3/2}}\sqrt{\frac{8}{6\pi}}K\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2}\left(|v|\Phi(v)\right) + \frac{4\pi}{81}\gamma^3\frac{l_{\mathrm{Pl}}^2}{K^2}\Lambda|v|\Phi(v) + O\left(\frac{\mathrm{d}^3\Phi(v)}{\mathrm{d}v^3}\right)\right]. \tag{E.13d}$$

E.3　物質の Hamiltonian 拘束条件

物質の Hamiltonian 演算子について考えてみよう。物質の Hamiltonian 拘束条件が任意の物質場 ϕ に対して $a^r\epsilon(a,\phi)$ によって書かれるとしよう。ここで r は点数であり、$\epsilon(a,\phi)$ は物質場とスケール因子の関数であり、$\epsilon(a,\phi)$ が非零であり $a \to 0$ で有限となる。

まず、$r < 0$ の場合を考えよう。古典的には物質の Hamiltonian はスケール因子の逆ベキのため $a \to 0$ で発散する。LQG において、そのような発散は Thiemann の処方箋 [97] によって正則化される。それは物質の hamiltonian 拘束条件に $1^m = \left(\det e_a^i/\sqrt{|\det E|}\right)^m$ をかけることである。ここで m は体積因子の正ベキを得るように選ばれる。同様に、LQC においてもスケール因子の逆ベキを正則化させる。古典的 Poisson 括弧式は

$$\left\{c, V^{\frac{2l}{3}}\right\} = \mathrm{sgn}(p)\frac{8\pi\gamma Gl}{3}|p|^{l-1} \tag{E.14}$$

となる [110]。ここで、$V=|p|^{3/2}$ とし、l は LQG での m と同様な不定パラメータである。もし $0<l<1$ と選ぶなら、右辺は p の逆ベキとなるが左辺は体積の正ベキを含んだものになる。この性質を用いると、スケール因子の逆数 a^{-1} は

$$a^{-1}=\frac{V_0^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{|p|}}=\left(\frac{3\mathrm{sgn}(p)}{8\pi\gamma Gl}\left\{c,V^{\frac{2l}{3}}\right\}\right)^{\frac{1}{2(1-l)}}V_0^{\frac{1}{3}} \tag{E.15}$$

のように書き換えられる。ここで $|p|=V_0^{2/3}a^2$ を用いた。そして物質の Hamiltonian は

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{matter}}=a^r\epsilon(a,\phi)&=\left[\frac{1}{\sqrt{|p|}}\right]^{-r}V_0^{-\frac{r}{3}}\epsilon(a,\phi)\\ &=\left[\frac{3\mathrm{sgn}(p)}{8\pi\gamma Gl}\left\{c,V^{\frac{2l}{3}}\right\}\right]^{-\frac{r}{2(1-l)}}V_0^{-\frac{r}{3}}\epsilon(a,\phi) \end{aligned} \tag{E.16}$$

となる。この古典的な公式はホロノミーを用いて正確に以下のように表される。

$$C_{\mathrm{matter}}=\left[\frac{\mathrm{sgn}(p)}{4\pi\gamma Gl\bar{\mu}}\mathrm{Tr}\left(\sum_i\tau^ih_i^{(\bar{\mu})}\left\{h_i^{(\bar{\mu})-1},V^{\frac{2l}{3}}\right\}\right)\right]^{-\frac{r}{2(1-l)}}V_0^{-\frac{r}{3}}\epsilon(a,\phi). \tag{E.17}$$

この Hamiltonian を Poisson 括弧式 $\{\bullet,\bullet\}$ を $-i[\bullet,\bullet]$ で置き換えることによって量子化することができる。$G=l_{\mathrm{Pl}}^2$ と式 (8.42) を用いると、少しの計算ののち

$$\widehat{C}_{\mathrm{matter}}=\left[-\frac{3i(\mathrm{sgn}(p))}{4\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2l}\left(\frac{6}{8\pi l_{\mathrm{Pl}}^2\gamma}\right)^{1/2}\left(\frac{K\widehat{V}}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sin\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)V^{\frac{2l}{3}}\widehat{\cos\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)-\cos}\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)V^{\frac{2l}{3}}\sin\left(\frac{\bar{\mu}c}{2}\right)\right)\right]^{-\frac{r}{2(1-l)}}V_0^{-\frac{r}{3}} \tag{E.18}$$

を得る。そして、物質の Hamiltonian 演算子は $|v\rangle$ に

$$\widehat{C}_{\mathrm{matter}}|v\rangle=\left[\frac{3\mathrm{sgn}(p)}{8\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2l}\left(\frac{6}{8\pi l_{\mathrm{Pl}}^2\gamma}\right)^{1/2}\left(\frac{KV_v}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(V_{v+1}^{\frac{2l}{3}}-V_{v-1}^{\frac{2l}{3}}\right)\right]^{-\frac{r}{2(1-l)}}V_0^{-\frac{r}{3}}\epsilon_0(a,\phi)|v\rangle \tag{E.19}$$

のように作用する。ここで $V_v=\left(8\pi\gamma l_{\mathrm{Pl}}^2/6\right)^{3/2}|v|/K$、$\epsilon_0(a,\phi)$ は $\widehat{\epsilon(a,\phi)}$ の固有値である。それゆえ、$|v\rangle$ は $\widehat{C}_{\mathrm{matter}}$ の固有状態であり、$v=0$ の対するその固有値は消える。よって、これを式 (8.55) に代入することによって物質の Hamiltonian 演算子の固有値は $v=0$ に対して消えるので、$\Phi(0,\phi)$ を除いて $\Phi(v,\phi)$ の係数を一意的に決定することができる。結果として、物質の Hamiltonian 演算子は $r<0$ に対する特異点の存在、非存在に影響を与えない。

次に、$r=0$ の場合を考える。この場合、物質の Hamiltonian は $C_{\mathrm{matter}}=\epsilon(a,\phi)$ で与えられる。したがって、物質の Hamiltonian 演算子は状態 $|v\rangle$ に

$$\widehat{C}_{\mathrm{matter}}|v\rangle=\epsilon_0(a,\phi)|v\rangle \tag{E.20}$$

のように作用する。そして、$|v\rangle$ は $\widehat{C}_{\mathrm{matter}}$ の固有状態となるが、この場合 $v=0$ に対してさえその固有値は消えない。これを式 (8.55) に代入すると、この方程式から $\Phi(0,\phi)$ を一意的に決定することが出来ないことがわかり、したがって、$v=0$ を越えて一意的な波動関数 $\Phi(v,\phi)$ を得ることができない。それゆ

え、この場合において、物質場がなしでは初期特異点は存在しないが、物質場の存在のため初期特異点が現れる。

最後に $r > 0$ に対して物質の Hamiltonian は $C_{\mathrm{matter}} = V^{r/3}\epsilon(a,\phi)$ となる。したがって、物質の Hamltonina 演算子は状態 $|v\rangle$ に

$$\widehat{C}_{\mathrm{matter}}|v\rangle = V_v^{\frac{r}{3}}\epsilon_0(a,\phi)|v\rangle \tag{E.21}$$

のように作用する。それゆえ、$|v\rangle$ は $\widehat{C}_{\mathrm{matter}}$ の固有状態となり、その固有値は $v = 0$ に対して消える。$r < 0$ の場合と同様 j に、物質の Hamiltonian は特異点の存在、非存在に影響を与えない。

参考文献

[1] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Class. Quantum Grav. **21**, R53 (2004).
[2] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
[3] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
[4] R. Penrose, Gen. Rel. Grav. **7**, 31 (1976).
[5] M. Lo, M. Ludvigsen, E. T. Newman and P. Tod, Phys. Rep. **71** 51 (1981).
[6] A. Ashtekar, D. Romano and S. Tate, Phys. Rev. D **40**, 2572 (1989).
[7] T. Jacobson, Class. Quantum Grav. **5**, 923 (1988). ; J. Matschull and H. Nicolai, Nucl. Phys. B **411**, 609 (1994).
[8] J. Baez and J. P. Muniain, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, (World Scientific, Singapore, 1994)
[9] A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Representation theory of analytic holonomy algebras*, in *Knots and Quantum Gravity* edited by Baez, (Oxford University Press, Oxford, 1994).
[10] J. Baez, Lett. Math. Phys. **31**, 213 (1994).
[11] A. Ashtekar and J. Lewandowski, J. Math. Phys. **36** 2170 (1995).
[12] D. Marolf and J. Mourão, Commun. Math. Phys. **170** 583 (1995).
[13] A. Ashtekar and J. Lewandowski, J. Geom. Phys. **17** 191 (1995).
[14] T. Thiemann, J. Math. Phys. **39** 3372 (1998).
[15] De Pietri and C. Rovelli, Phys. Rev. D **54** 2664 (1996).
[16] J. Lewandowski, Class. Quantum Grav. **14** 71 (1997).
[17] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Adv. Theor. Math. Phys. **1** 388 (1997).
[18] T. Thiemann, J. Math. Phys. **39** 3347 (1998).
[19] R. Loll, Nucl. Phys. B **500** 405 (1997).
[20] De Pietri and C. Rovelli, Nucl. Phys. Suppl. **57** 251 (1997).
[21] De Pietri and C. Rovelli, Class. Quantum Grav. **14** 53 (1997).
[22] C. Rovelli and L. Smolin, Nucl. Phys. B **442** 593 (1995); *erratum* **456** 753 (1995).
[23] R. Loll, Class. Quantum Grav. **14** 1725 (1997).
[24] K Kuchăr, *Canonical quantum gravity*, in *General Relativity and Gravitation*, edited by R. J. Gleiser, C. N. Kozamesh and O. M. Moreschi, (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1993).

[25] H. Sahlmann, J. Math. Phys. **52** 012502 (2011), J. Math. Phys. **52** 012502 (2011).
[26] A. Okolów and J. Lewandowski, Class. Quantum Grav. **20** 3543 (2003).
[27] H. Sahlmann and T. Thiemann, gr-qc/0302090; Class. Quantum Grav. **23** 4453 (2006).
[28] J. Lewandowski, A. Okolów, H. Sahlmann and T. Thiemann, Commun. Math. Phys. **267** 703 (2006).
[29] L. Freidel and K. Krasnov, Adv. Theor. Math. Phys. **3** 1289 (1999).
[30] A. Ashtekar, V. Husain, C. Rovelli, J. Samuel and L. Smolon, Class. Quantum Grav. **6** L185 (1989).
[31] A. Ashtekar, R. S. Tate and C. Uggla, Int. J. Phys. D **2** 15 (1993); A. Ashtekar, R. S. Tate and C. Uggla, *Minisuperspaces: symmetries and quantization* , in *Misner Festschrift* edited by B. L. Hu et.al. (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
[32] A. Ashtekar and R. S. Tate, J. Math. Phys. **35** 6434 (1994).
[33] D. Marolf, gr-qc/9508015.
[34] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourão and T. Thiemann, J. Math. Phys. **36** 6456 (1995).
[35] A. Gosh and P. Mitra, Phys. Rev. D **71** 027502 (2005).
[36] T. Thiemann, Phys. Lett. B **380**, 257 (1996).
[37] T. Thiemann, Class. Quantum Grav. **15**, 839 (1998).
[38] T. Thiemann, Class. Quantum Grav. **15**, 1207 (1998).
[39] R. Gambini, J. Lewandowski, D. Marolf and J. Pullin, Int. J. Mod. Phys. D **7** 97 (1998).
[40] J. Lewandowski and D. Marolf, Int. J. Mod. Phys. D **7** 299 (1998).
[41] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **5**, 1239 (1972).
[42] S. W. Hawking, Comm. Math. Phys. **25**, 167 (1972).
[43] A. Strominger and C. Vafa, Phys. Lett. B **379**, 99 (1996); J. M. Maldacena and A. Strominger, Phys. Rev. Lett. **77**, 428 (1996).
[44] C. Rovelli, Phys. Rev. Lett. **77**, 3288 (1996).
[45] A. Ashtekar, J. Baez, A. Corichi, and K. Krasnov, Phys. Rev. Lett. **80**, 904 (1998); A. Ashtekar, J. Baez, and K. Krasnov, Adv. Theor. Math. Phys. **4**, 1 (2000).
[46] M. Bojowald, Living. Rev. Rel. **8**, 11 (2005); A. Ashtekar, T. Pawlowski, P. Singh, Phys. Rev. D **74**, 084003, (2006).
[47] レビューとして例えば以下が参考になる。J. Natario and R. Schiappa, Adv. Theor. Math. Phys. **8**, 1001 (2004).
[48] O. Dreyer, Phys. Rev. Lett. **90**, 081301 (2003); S. Hod, Phys. Rev. Lett. **81**, 4293 (1998).
[49] T. Tamaki and H. Nomura, Phys. Rev. D **70**, 044041 (2004).
[50] T. Tanaka and T. Tamaki, Eur. Phys. J. C **73**, 2314 (2013).
[51] A. Ashtekar, C. Beetle and S. Fairhurst, Class. Quantum Grav. **16** L1 (1999); Class. Quantum Grav. **17** 253 (2000).
[52] J. Lewandowski, Class. Quantum Grav. **17** L53 (2000).

[53] C. Rovelli and L. Smolin, Phys. Rev. D **52**, 5743 (1995).

[54] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Class. Quantum Grav. **14**, A55 (1997).

[55] J. F. Barbero G., Phys. Rev. D **51**, 5507 (1995); G. Immirzi, Nucl. Phys. Proc. Suppl. B **57**, 65 (1997).

[56] A. Ashtekar, A. Corichi, and K. Krasnov, Adv. Theor. Math. Phys. **3**, 419 (1999).

[57] J. Engle, A. Perez, and K. Noui, Phys. Rev. Lett. **105**, 031302 (2010); J. Engle, K. Noui, A. Perez and D. Pranzetti, Phys. Rev. D **82**, 044050 (2010).

[58] J. F. Barbero G. and E.J.S. Villasenor, Class. Quantum Grav. **26**, 035017 (2009).

[59] K. A. Meissner, Class. Quantum Grav. **21**, 5245 (2004).

[60] M. Domagala and J. Lewandowski, Class. Quantum Grav. **21**, 5233 (2004).

[61] A. Alekseev, A. P. Polychronakos, and M. Smedback, Phys. Lett. B **574**, 296 (2003); A. P. Polychronakos, Phys. Rev. D **69**, 044010 (2004).

[62] I.B. Khriplovich, gr-qc/0409031; gr-qc/0411109.

[63] A. Ghosh and P. Mitra, Phys. Lett. B **616**, 114 (2005); Ind. J. Mod. Phys. **80**, 867 (2006); Phys. Rev. D **74**, 064026 (2006).

[64] T. Tamaki and H. Nomura, Phys. Rev. D **72**, 107501 (2005).

[65] H. Sahlmann, Phys. Rev. D **76**, 104050, (2007); H. Sahlmann, Class. Quantum Grav. **25**, 055004 (2008).

[66] T. Tamaki, Class. Quantum Grav. **24**, 3837 (2007).

[67] I. Agulló, J. F. Barbero G., J. Díaz-Polo, E. Fernández-Borja, and E. J. S. Villaseñor, Phys. Rev. Lett. **100**, 211301 (2008); I. Agulló, J. Díaz-Polo, E. Fernández-Borja, Phys. Rev. D **77**, 104024, (2008); J. F. Barbero G. and E. J. S. Villaseñor, Phys. Rev. D **77**, 121502(R), (2008).

[68] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Modern Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[69] L. Bombelli, R. K. Koul, J. Lee, and R. D. Sorkin, Phys. Rev. D **34**, 373 (1986).

[70] 't Hooft, hep-th/0003004.

[71] D. R. Terno, Int. J. Mod. Phys. D **14**, 2307 (2005); E. R. Livine and D. R. Terno, Nucl. Phys. B **741**, 131 (2006).

[72] W. Donnelly, Phys. Rev. D **77**, 104006 (2008).

[73] M. H. Ansari, Nucl. Phys. B **783**, 179 (2007); *ibid.*, **795**, 635 (2008).

[74] K. Krasnov and C. Rovelli, Class. Quantum Grav. **26**, 245009 (2009).

[75] H. Sahlmann, Phys. Rev. D **84**, 044049 (2011).

[76] S. Kloster, J. Brannlund, and A. DeBenedictis, Class. Quantum Grav. **25**, 065008 (2008).

[77] R. Bousso, JHEP **07**, 004 (1999).

[78] A. Ashtekar and E. Wilson-Ewing, Phys. Rev. D **78**, 064047 (2008).

[79] J. F. Barbero G, J. Lewandowski, and E.J.S. Villaseñor, Phys. Rev. D **80**, 044016 (2009).

[80] M. Bojowald, Phys. Rev. Lett. **86**, 5227 (2001).

[81] A. Ashtekar, New J. Phys. **7**, 198 (2005).

[82] M. Bojowald, Living Rev. Relativity **8**, 11 (2005).

[83] J. J. Halliwell, *Introductory Lectures on Quantum Cosmology*, in *Quantum Cosmology and Baby Universes*, edited by S. Coleman, J. B. Hartle, T. Piran, and S. Weinberg (World Scientific, Singapore, 1991); C. Kiefer, *Quantum Gravity* (Clarendon Press, Oxford, 2004); D. H. Coule, Class. Quantum Grav. **22**, R125 (2005).

[84] A. Ashtekar, S. Fairhurst and J. Willis, Class. Quantum Grav. **20**, 1031 (2003).

[85] M. Bojowald, T. Harada and R. Tibrewala, Phys. Rev. D **78**, 064057 (2008).

[86] M. Bojowald, J. D. Reyes, R. Tibrewala, Phys. Rev. D **80**, 084002 (2009).

[87] A. Ashtekar, T. Pawlowski, and P. Singh, Phys. Rev. D **73**, 124038 (2006).

[88] A. Ashtekar, T. Pawlowski, and P. Singh, Phys. Rev. D **74**, 084003 (2006).

[89] A. Ashtekar, A. Corichi and P. Singh, Phys. Rev. D **77**, 024046 (2008).

[90] A. Ashtekar and E. Wilson-Ewing, Phys. Rev. D **79**, 083535 (2009).

[91] A. Ashtekar and E. Wilson-Ewing, Phys. Rev. D **80**, 123532 (2009).

[92] A. Ashtekar, T. Pawlowski, P. Singh and K. Vandersloot, Phys. Rev. D **75**, 024035 (2007).

[93] K. Vandersloot, Phys. Rev. D **75**, 023523 (2007).

[94] L. J. Garay, M. Martin-Benito, G. A. M. Marugan, Phys. Rev. D **82** 044048 (2010).

[95] M. Bojowald, D. Mulryne, W. Nelson and R. Tavakol, Phys. Rev. D **82** 124055 (2010).

[96] T. Tanaka, F. Amemiya, M. Shimano, T. Harada and T. Tamaki, Phys. Rev. D **83**, 104049 (2011)

[97] T. Thiemann, Class. Quantum Grav. **15**, 1281 (1998).

[98] W. Nelson and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D **76**, 044015 (2007).

[99] W. Nelson and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D **76**, 104003 (2007).

[100] M. Bojowald, D. Cartin and G. Khanna, Phys. Rev. D **76**, 064018 (2007).

[101] W. Nelson and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D **78**, 024030 (2008).

[102] A. Corichi and P. Singh, Phys. Rev. D **78**, 024034 (2008).

[103] J. Rosen, J. H. Jung and G. Khanna, Class. Quantum Grav. **23**, 7075 (2006).

[104] K. Vandersloot, Phys. Rev. D **71**, 103506 (2005).

[105] W. Nelson and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D **80**, 063521 (2009).

[106] W. Nelson and M. Sakellariadou, Phys. Rev. D **78**, 024006 (2008).

[107] A. Ashtekar, M. Bojowald, and J. Lewandowski, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 233 (2003).

[108] E. Bentivegna, and T. Pawlowski, Phys. Rev. D **77**, 124025 (2008).

[109] M. Bojowald, Class. Quantum Grav. **19**, 5113 (2002).

[110] K. Vandersloot, Ph. D. thesis, Pennsylvania State University, 2006.

[111] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Class. Quantum Grav. **14**, A55 (1997).

[112] K. Noui, A. Perez and K. Vandersloot, Phys. Rev. D **71**, 044025 (2005).

研究業績

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者（申請者含む）
○ 論文	Discretization parameter and operator ordering in loop quantum cosmology with the cosmological constant, Physical Review D 83, 104049, 2011 年 5 月, 田中友、雨宮史年、島野誠大、原田知広、玉置孝至
○ 論文	Area spectrum of horizon and black hole entropy , The European Physical Journal C, 73, 2314, 2013 年 2 月, 田中友、玉置孝至
講演 (国際会議)	Discretization parameter and operator ordering in loop quantum cosmology with the cosmological constant, Spanish Relativity Meeting ERE2010, グラナダ(スペイン), 2010 年 9 月, 田中友、雨宮史年、島野誠大、原田知広、玉置孝至
講演 (国際会議)	Robustness of singularity avoidance in loop quantum cosmology, The 19th Workshop on General Relativity and Gravitation in Japan, 立教大学(東京), 2009 年 12 月, 田中友、雨宮史年、島野誠大、原田知広、玉置孝至
講演 (国際会議)	Black hole entropy for the general area spectrum, Spanish Relativity Meeting ERE2009, ビルバオ(スペイン), 2009 年 9 月, 田中友、玉置孝至
講演 (国際会議)	Black hole entropy for the general area spectrum, Loops’09, 北京(中国), 2009 年 8 月, 田中友、玉置孝至
講演 (国際会議)	Black hole entropy for the general area spectrum, The 18th Workshop on General Relativity and Gravitation in Japan, 広島大学(広島), 2008 年 12 月, 田中友、玉置孝至

研究業績

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
講演 (国際会議)	Black hole entropy from spin-network, The 17th Workshop on General Relativity and Gravitation in Japan, 名古屋大学(愛知), 2007 年 12 月, 田中友、玉置孝至
講演 (国際会議)	Considering boundary conditions for black hole entropy in loop quantum gravity, Quantum Gravity in the Southern Cone IV, プンタデルエステ(ウルグアイ), 2007 年 10 月, 田中友、玉置孝至
講演 (研究会)	ループ量子宇宙論における初期特異点回避について, 第 11 回特異点研究会『特異点と時空、および関連する物理』, 芝浦工業大学(東京), 2010 年 1 月, 田中友、雨宮史年、島野誠大、原田知広、玉置孝至
講演 (研究会)	ループ量子重力理論によるブラックホールエントロピー, 第 10 回特異点研究会『特異点と時空、および関連する物理』, 高エネルギー加速器研究機構(茨城), 2009 年 1 月, 田中友、玉置孝至
講演 (研究会)	Analysis of black hole via Loop Quantum Gravity, 1st Waseda Workshop on Theoretical Astrophysics and Cosmology, 松代(新潟), 2007 年 7 月, 田中友
講演 (学会)	ループ量子宇宙論における初期特異点回避, 日本物理学会 第 65 回年次大会, 岡山大学(岡山), 2010 年 3 月, 田中友、雨宮史年、島野誠大、原田知広、玉置孝至
講演 (学会)	ループ量子重力理論によるブラックホールエントロピーについて, 日本物理学会 2008 年秋季大会, 山形大学(山形), 2008 年 9 月, 田中友、玉置孝至