

早稲田大学大学院 先進理工学研究科

博士論文概要

論文題目

ハミルトン系カオスの
スローダイナミクスの起源に関する研究
Studies on the Origin of the Slow Dynamics
in Hamiltonian Chaos

申請者

津川	暁
Satoru	TSUGAWA

物理学及応用物理学専攻 統計物理学研究

2013年12月

カオス研究の基礎には、気体分子運動論、乱流統計、雑音・ブラウン運動の大きな流れがある。気体分子運動論では、熱力学の発展を背景に気体の速度分布を考察したボルツマン・マクスウェルらが物理に確率を導入し統計力学を生み出した。乱流統計では、コルモゴロフが乱流のエネルギー輸送の側面を明らかにし、その後いくつもの乱流（カオス）への遷移の描像が見出されてきた。雑音・ブラウン運動は当初は実験的な事実であったものを数学的な舞台に持ちあげたウィーナーや確率微分方程式論を確立した伊藤清などによって発展し、ランダム力学系という新たな分野を開きつつある。これら3つの流れに共通しているのは、予想できないマクロなゆらぎをミクロな描像から説明するという統計力学の精神であり、エルゴード理論がその数学的基盤を担っている。

カオスの数学であるエルゴード理論は、確率測度を保存する系や双曲力学系を基盤に発展してきた。測度可遷性やバーコフのエルゴード定理は相空間平均と長時間平均が一致するという力学系の最も基本的な平均量の情報を与えるが、エルゴード性の十分条件は相関関数の減衰や混合性を含む平衡への漸近過程などの不可逆性の情報を与える。つまり、エルゴード性が成り立つ状況下での平均量のまわりのゆらぎまでもエルゴード定理は捉えている。一方、確率測度を保存しない系（無限測度系）や非双曲力学系では測度可遷性の意味でのエルゴード性は成立しているにもかかわらず、相空間平均と長時間平均が一致しない異常揺らぎが観測されることが知られている。近年の無限エルゴード理論の発展により、この異常揺らぎはバーコフのエルゴード定理を拡張した極限定理（DKA 定理）によって特徴づけられることが明らかになった。また、非双曲力学系のミクロな不安定性（リアプノフ指数）や分布の収束性（大偏差特性）などのエルゴード特性も、確率論、更新理論の発展を背景に確立されてきている。更に、そのゆらぎの性質が熱力学的諸量と対応がつくという熱力学的形式論も多く研究されてきた。

この流れの中で、長く研究者を悩ませているのはハミルトン系カオスの存在である。数学的には一つの不安定性を持つ力学系を扱う場合がほとんどであるが、摂動ハミルトン系では不安定性の強いカオス領域と不安定性の弱いトーラス近傍領域が共存している。軌道はトーラス近傍領域に長時間束縛されるため、一般に不安定性の弱い運動（スローダイナミクス）が生じるが、この局所的なダイナミクスは非双曲力学系の中立不動点の周りのメカニズムによって、部分的に説明されてきた。しかし、スローダイナミクスは相空間上にフラクタル的に分布している島トーラス構造の全てのトーラス近傍で起こりうるため、ハミルトン系カオスの軌道はカオス的軌道と準周期的軌道を不断に繰り返しながら非定常的にカオス領域を運動していくこと（大域的ダイナミクス）が知られている。この非定常的な振る舞いに関するエルゴード理論の観点から見る重要な問題は、これまでにわかってきた確率測度力学系、無限測度力学系のエルゴード特性がハミルトン系カオスの部分領域に共存していることである（多重エルゴード性）。すなわち、従来

のエルゴード理論の枠組みを超えたカオスであると認識されている。

本論文では、ハミルトン系カオスにおける多重エルゴード性に代表される非定常的な振る舞いを引き起こすスローダイナミクスの起源をいくつかの側面から明らかにすることを目的とする。第1章でこれまでの先行研究のまとめと本論文で用いる特性量や考え方を導入する。第2、3章では、フラクタル構造を持たないマッシュルームビリヤードモデルに注目し、棲み分け境界型ハミルトン系においてスローダイナミクスが引き起こされる局所的メカニズムを調べる。第4、5章では、大域的ダイナミクスを定量化するパワースペクトル密度、アラン分散の統計法則について詳しく解析する。第6章ではまとめと展望を述べる。以下に各章の概要を示す。

第1章の前半では、まずカオス研究の歴史について触れ、カオスの数学的基盤をエルゴード理論が担っている点を指摘する。また、エルゴード理論についてカオスを特徴づける技術としての観点から振り返り、これまでに得られているエルゴード定理、エルゴード特性について1次元の理想化された定常-非定常遷移モデル(変形ベルヌイ写像)を使って整理する。さらに、エルゴード特性に現れる諸量が熱力学と類似の構造を持っていることについても指摘する。後半では、従来知られている無限測度系を含むエルゴード特性によっても捉えられないハミルトン系カオスについて問題点を整理し、本論文の目的を述べる。

第2章では、誘電体を挿入したマッシュルームビリヤードを用いて、棲み分け境界型ハミルトン系におけるスローダイナミクスの出現メカニズムを調べる。誘電体の屈折率を連続的に変化させると、最外殻 KAM トーラス近傍の淀み領域が構造変化するが、その相空間構造を上半円領域からの脱出時間分布を用いて厳密に決定した。その結果、最外殻 KAM トーラス近傍に脱出時間分布の無限集積点が生成され、その周りに階層構造が形成されることを発見した。階層構造の形成過程は抽象モデルによって解析でき、無限集積点が出現するのは脱出領域同士が重複する条件(共鳴条件)を満たすときであることを示すことができる。この出現点の理論的評価は数値計算によっても確かめられている。また、無限集積点の両側では2種類の淀み運動が存在するという新しいタイプの淀み構造が存在することを示し、理論的にそのスケーリング法則を導出し、数値計算によっても確かめられた。

第3章では、マッシュルームビリヤード系の最外殻トーラスの回転数をフィボナッチ率で変化させた場合の相空間の微細構造を解析する。回転数が有理数の場合には、最外殻トーラス表面に特異点が存在しその周りに淀み層が形成されるが、フィボナッチ率を無理数に漸近すると淀み層が急激に減少することを示した。回転数が無理数極限になると、いくつかの特異点はカオスの海の中に残り、その特異点の周りに前述した淀み層とは異なる淀み層が形成される。このカオスの海の中の淀み層の相空間面積を理論的に予想し、滞在時間がべき分布に従うことを示

した。この滞在時間のべき分布に起因して、 $r/R > 0.5$ の場合に、最外殻トーラス上の回転数に依らず普遍的にパワースペクトル密度に $|\log \omega|$ スケーリング則が現れる。実際、無理数回転数の場合（例えば代数的無理数や超越無理数）でもパワースペクトル密度は同じスケーリング則を持つ。また、パラメータが $r/R < 0.5$ の場合には、パワースペクトル密度がべき関数的スケーリング則に従うことを新たに発見し、このメカニズムがマッシュルームの茎領域のスローダイナミクスに起因することを予想している。

第4章では、ハミルトン系カオスの大域的ダイナミクスを特徴づけるパワースペクトル密度のマルチフラクタル解析を改良することを試みる。まず、変形ベルヌイ写像を例に従来のマルチフラクタル解析を概説し、時間区分された時系列に対してパワースペクトル密度から情報次元の平均と分散を導出する。情報次元の平均はスローダイナミクスの強さを表わし、分散は軌道の多様性を表わす点を指摘する。この手法を適用して、変形ベルヌイ写像では軌道の多様性が $B=2$ で最も大きくなることがわかる。また、具体例として変形 `cat` 写像、マッシュルームビリヤード、標準写像を系統的に解析した。その結果、変形 `cat` 写像では非線形パラメータ B' が大きくなると、強いスローダイナミクスを持ちながら軌道の多様性を併せ持つ性質があり、マッシュルームビリヤードでは形状パラメータ r/R が小さいときにスローダイナミクスは強くなるが、全てのパラメータ領域で軌道の多様性が少ない性質がある。この手法を元に標準写像を再考すると、強いスローダイナミクスを持ち軌道の多様性を併せ持つ変形 `cat` 写像に類似の大域的構造を持つパラメータ領域が存在することを発見した。

第5章では、ハミルトン系カオスの非定常性を特徴づける特性量であるアラン分散のスケーリング法則を解析する。まずは、アラン分散の理論解析に関する先行研究をまとめ、変形ベルヌイ写像を用いて従来知られているスケーリング法則を整理する。また、アラン分散で計算すべき時間平均をアンサンブル平均で置き換えて近似したアラン分散（EAVAR）によって、スケーリング法則の計算が容易になることを示す。次に、アラン分散に内在する観測関数に相似則があり、観測時間と相関長が一致する領域で2つの異なるスケーリング法則を持つことを理論的に評価する。このスケーリング法則は数値計算によっても確かめられた。また、スケーリング法則は初期分布によって異なるが、この違いはパワースペクトルの収束性（大偏差特性）によって説明できることを示す。

第6章は、本研究で明らかになったことをまとめて、今後の展望を述べる。

早稲田大学 博士 (理学) 学位申請 研究業績書

氏名 津川 暁 印

(2014年 1月 現在)

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者 (申請者含む)
論文○	<u>Satoru Tsugawa</u> and Y. Aizawa, Stagnant Motion in Hamiltonian Dynamics - Mushroom Billiard Case with Smooth Outermost KAM Tori-, <i>J. Phys. Soc. Jpn</i> , 83 , 024002, 2014.
論文	Yoji Aizawa and <u>Satoru Tsugawa</u> , Aftershock Cascade of the 3.11 Earthquake (2011) in Fukushima-Miyagi Area, <i>Complex System Physics NATO Advanced Research Workshop</i> , 2013 (印刷中) .
論文	Yoji Aizawa, Tomohiro Hasumi and <u>Satoru Tsugawa</u> , Seismic Statistics : Universality and Interim Report on the 3.11 Earthquake (2011) in Fukushima-Miyagi Area, <i>Nonlinear Phenomena in Complex Systems</i> , No.2, pp.116-130, 2013.
論文○	<u>Satoru Tsugawa</u> and Yoji Aizawa, Stagnant Motion in Chaotic Region of Mushroom Billiard System with Dielectric Medium, <i>J. Phys. Soc. Jpn</i> , 81 , 064004, 2012.
国際会議	<u>Satoru Tsugawa</u> and Yoji Aizawa, Multi-fractal Relation in Seismicity Statistics: Data Analysis of the 3.11 Earthquake (2011), <i>Dynamics Days Europe 2013</i> , Centro de Tecnologia Biomédica, Spain, June 3 - 7, 2013.
国際会議	<u>Satoru Tsugawa</u> and Yoji Aizawa, On the Stickiness Properties of Perturbed Mushroom Billiards, <i>Dynamics of Complex Systems 2012</i> , Hokkaido University, Japan, March 6 - 8, 2012.
国際会議	<u>Satoru Tsugawa</u> and Yoji Aizawa, On the Stickiness Property of Perturbed Mushroom Billiard, <i>Dynamics Days 2012</i> , University of Maryland, Baltimore, USA, January 4 - 7, 2012.
国際会議	<u>Satoru Tsugawa</u> and Yoji Aizawa, Stagnant Motion Can Exist in the Vicinity of the Outermost Torus, <i>The 13th Slovenia-Japan Seminar on Nonlinear Science and Waseda AICS Symposium on Nonlinear and Nonequilibrium Phenomena in Complex Systems</i> , Waseda University, Japan, November 4 - 6, 2010.
国内講演	津川 暁, 相澤洋二, 地震統計を満たす普遍法則の構成, 日本物理学会第 68 回年次大会, 広島大学東広島キャンパス, 2013 年 3 月.
国内講演	津川 暁, 無理数比マッシュルームビリヤードの解析, 非線形・非平衡系シンポジウム, 早稲田大学染谷記念国際会館レセプションルーム, 2013 年 3 月.
国内講演	津川 暁, 相澤洋二, 地震統計におけるマルチフラクタル関係式, 京都大学基礎物理学研究所研究会「摩擦、レオロジー、地震の新展開-異なる階層と舞台をつなぐ-」, 京都大学吉田キャンパス, 2012 年 11 月.

早稲田大学 博士（理学） 学位申請 研究業績書

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者（申請者含む）
国内講演	津川 暁, 相澤洋二, 二次元無限測度を持つ可逆な写像のリアプノフ指数, 日本物理学会第 66 回年次大会, 新潟大学五十嵐キャンパス, 2011 年 3 月.
国内講演	津川 暁, 相澤洋二, マッシュルームビリヤード系の淀み運動と分岐現象, Dynamics of Complex Systems 2011 - 時間発展の非可逆性と予測不可能性の限界に関する諸分野からの提言 -, 北海道大学, 2011 年 3 月.
国内講演	津川 暁, 相澤洋二, 最外殻 KAM トーラスから離れた領域における淀み運動, 首藤研究室セミナー, 首都大学東京, 2010 年 12 月.
国内講演	津川 暁, 相澤洋二, 誘電体マッシュルームビリヤードの解析, 日本物理学会第 65 回年次大会, 岡山大学津島キャンパス, 2010 年 3 月.
国内講演	津川 暁, 新海創也, 相澤洋二, 非双曲ハミルトン系の再帰時間特性, 日本物理学会第 63 回年次大会, 岩手大学上田キャンパス, 2008 年 9 月.
その他(第二著者)	古賀恭平, 津川 暁, 相澤洋二, 確率分岐に伴う無限測度と Multiplicative Noise 効果, 日本物理学会第 67 回年次大会, 関西学院大学西宮上ヶ原キャンパス, 2012 年 3 月.