

ハミルトン系カオスの
スローダイナミクスの起源に関する研究

Studies on the Origin of the Slow Dynamics
in Hamiltonian Chaos

2014年2月

早稲田大学大学院 先進理工学研究科
物理学及応用物理学専攻 統計物理学研究

津川 暁

序

カオス研究の基礎には、気体分子運動論、乱流統計、雑音・ブラウン運動の大きな流れがある。気体分子運動論では、熱力学の発展を背景に、気体の速度分布を考察したボルツマン、マクスウェルらが物理学に確率を導入し、統計力学を生み出した。乱流統計では、コルモゴロフが乱流のエネルギー輸送の側面を明らかにし、その後いくつもの乱流（カオス）への遷移の描像が見出されてきた。雑音・ブラウン運動は、当初は実験的な事実であったものを数学的な舞台に持ちあげたウィーナーや確率微分方程式論を確立した伊藤清などによって発展し、ランダム力学系という新たな分野を開きつつある。これら3つの流れに共通しているのは、予測できないマクロなゆらぎをミクロな描像から説明するという統計力学の精神であり、エルゴード理論がその数学的基盤を担っている。

カオスの数学であるエルゴード理論は、確率測度を保存する系や双曲力学系を基盤に発展してきた。測度可遷性やバーコフのエルゴード定理は相空間平均と長時間平均が一致するという力学系の最も基本的な平均量の情報を与えるが、エルゴード性の十分条件は相関関数の減衰や混合性を含む平衡への漸近過程などの不可逆性の情報を与える。つまり、エルゴード性が成り立つ状況下での平均量のまわりのゆらぎまでもエルゴード定理は捉えている。一方、確率測度を保存しない系（無限測度系）や非双曲力学系では、測度可遷性の意味でのエルゴード性は成立しているにもかかわらず、相空間平均と長時間平均が一致しない異常揺らぎが観測されることが知られている。近年の無限エルゴード理論の発展により、この異常揺らぎはバーコフのエルゴード定理を拡張した極限定理（DKA 定理）によって特徴づけられることが明らかになった。また、非双曲力学系のミクロな不安定性（リアプノフ指数）や分布の収束性（大偏差特性）などのエルゴード特性も、確率論、更新理論の発展を背景に確立されてきている。さらに、そのゆらぎの性質が熱力学的諸量と対応がつくという熱力学的形式論も多く研究されてきた。

この流れの中で、長く研究者を悩ませているのはハミルトン系カオスの存在である。数学的には一つの不安定性を持つ力学系を扱う場合がほとんどだが、摂動ハミルトン系では不安定性の強いカオス領域と不安定性の弱いトーラス近傍領域が共存している。軌道はトーラス近傍領域に長時間束縛されるため、一般に不安定性の弱い運動（スローダイナミクス）が生じるが、この局所的なダイナミクスは非双曲力学系の中立不動点の周りのメカニズムによって、部分的に説明されてきた。しかし、スローダイナミクスは相空間上にフラクタル的に分布している島トーラス構造の全てのトーラス近傍で起こりうるため、ハミルトン系カオスの軌道はカオスの軌道と準周期的軌道を不断に繰り返しながら非定常的にカオス領域を運動していくこと（大域的ダイナミクス）が知られている。この非定常的な振る舞いに関するエルゴード理論の観

点から見る重要な問題は、これまでにわかってきた確率測度力学系、無限測度力学系のエルゴード特性がハミルトン系カオスの部分領域に共存していることである（多重エルゴード性）。すなわち、従来のエルゴード理論の枠組みを超えたカオスであると認識されている。

本論文では、ハミルトン系カオスにおける多重エルゴード性に代表される非定常的な振る舞いを引き起こすスローダイナミクスの起源をいくつかの側面から明らかにすることを目的とする。第1章でこれまでの先行研究のまとめと本論文で用いる特性量や考え方を導入する。第2,3章では、フラクタル構造を持たないマッシュルームビリヤードモデルに注目し、棲み分け境界型ハミルトン系においてスローダイナミクスが引き起こされる局所的メカニズムを調べる。第4,5章では、大域的ダイナミクスを定量化するパワースペクトル密度、アラン分散の統計法則について詳しく解析する。第6章ではまとめと展望を述べる。以下に各章の概要を示す。

第1章の前半では、まずカオス研究の歴史について触れ、カオスの数学的基盤をエルゴード理論が担っている点を指摘する。また、エルゴード理論について、カオスを特徴づける技術としての観点から振り返り、これまでに得られているエルゴード定理、エルゴード特性について1次元の理想化された定常-非定常遷移モデル（変形ベルヌイ写像）を使って整理する。さらに、エルゴード特性に現れる諸量が熱力学と類似の構造を持っていることについても指摘する。後半では、従来知られている無限測度系を含むエルゴード特性によっても捉えられないハミルトン系カオスについて問題点を整理し、本論文の目的を述べる。

第2章では、誘電体を挿入したマッシュルームビリヤードを用いて、棲み分け境界型ハミルトン系におけるスローダイナミクスの出現メカニズムを調べる。誘電体の屈折率を連続的に変化させると、最外殻KAMトーラス近傍の淀み領域の構造が変化するが、その相空間構造を上半円領域からの脱出時間分布を用いて厳密に決定した。その結果、最外殻KAMトーラス近傍に脱出時間分布の無限集積点が生成され、その周りに階層構造が形成されることを発見した。階層構造の形成過程は抽象モデルによって解析でき、無限集積点が出現するのは脱出領域同士が重複する条件（共鳴条件）を満たすときであることを示すことができる。この出現点の理論的評価は数値計算によっても確かめられている。また、無限集積点の両側では2種類の淀み運動が存在するという新しいタイプの淀み構造が存在することを示し、理論的にそのスケーリング法則を導出し、数値計算によっても確かめられた。

第3章では、マッシュルームビリヤード系の最外殻トーラスの回転数をフィボナッチ率で変化させた場合の相空間の微細構造を解析する。回転数が有理数の場合には、最外殻トーラス表面に特異点が存在しその周りに淀み層が形成されるが、フィボナッチ率を無理数に漸近すると淀み層が急激に減少することを示した。回転数が無理数極限になると、いくつかの特異点はカオスの海の中に残り、その特異点の周りに前述した淀み層とは異なる淀み層が形成される。このカオスの海の中の淀み層の相空間面積を理論的に予想し、滞在時間がべき分布に従うことを示した。この滞在時間のべき分布に起因して、ビリヤード形状パラメータ r, R について $r/R \gtrsim 0.5$ の場合に、最外殻トーラス上の回転数に依らず普遍的にパワースペクトル密度に $|\log \omega|$ スケーリング則（周波数 ω ）が現れる。実際、無理数回転数の場合（例えば代数的無理数

や超越無理数)でもパワースペクトル密度は同じスケーリング則を持つ。また、パラメータが $r/R \lesssim 0.5$ の場合には、パワースペクトル密度が $\omega^{-\nu}$ のスケーリング則に従うことを新たに発見し、このメカニズムがマッシュルームの茎領域のスローダイナミクスに起因することを予想している。

第4章では、カオス軌道の大域的ダイナミクスを特徴づけるパワースペクトル密度のマルチフラクタル解析を改良することを試みる。まず、変形ベルヌイ写像を例に従来のマルチフラクタル解析を概説し、時間区分された時系列に対してパワースペクトル密度から情報次元の平均と分散を導出する。情報次元の平均はスローダイナミクスの強さを表わし、分散は軌道の多様性を表わす点を指摘する。この手法を適用して、変形ベルヌイ写像では軌道の多様性が非線形パラメータ B に対し $B = 2$ で最も大きくなることがわかる。また、具体例として変形 cat 写像、マッシュルームビリヤード、標準写像を系統的に解析した。その結果、変形 cat 写像では非線形パラメータ B' が大きくなると、強いスローダイナミクスを持ちながら軌道の多様性を併せ持つことを示し、マッシュルームビリヤードでは形状パラメータ r/R が小さいときにスローダイナミクスは強くなるが、全てのパラメータ領域で軌道の多様性が少ないことを示した。この手法を元に標準写像を再考すると、強いスローダイナミクスを持ち軌道の多様性を併せ持つ変形 cat 写像 ($B' \rightarrow \infty$) に類似の大域的構造を持つパラメータ領域が存在することを発見した。

第5章では、ハミルトン系カオスの非定常性を特徴づける特性量であるアラン分散のスケーリング法則を解析する。まずは、アラン分散の理論解析に関する先行研究をまとめ、変形ベルヌイ写像を用いて従来知られているスケーリング法則を整理する。また、アラン分散で計算すべき時間平均をアンサンブル平均で置き換えて近似したアラン分散によって、スケーリング法則の計算が容易になることを示す。次に、アラン分散に内在する観測関数に相似則があり、観測時間と相関長が一致する領域で2つの異なるスケーリング法則を持つことを理論的に評価した。このスケーリング法則は数値計算によっても確かめられた。また、スケーリング法則は初期分布によって異なるが、この違いはパワースペクトルの収束性(大偏差特性)によって説明できることを示す。

第6章は、本研究で明らかになったことをまとめて、今後の展望を述べる。

目次

第 1 章	背景と目的	1
1.1	カオス研究の 3 つの大きな流れ	1
1.2	カオスの特徴づけとしてのエルゴード理論	5
1.2.1	エルゴード定理	5
1.2.2	エルゴード特性	9
1.2.3	熱力学的形式	12
1.3	ハミルトン系カオス	17
1.3.1	標準写像	17
1.3.2	局所的ダイナミクス	20
1.3.3	大域的ダイナミクス	27
1.3.4	フラクタル構造をもたないハミルトン系の例	31
1.4	本論文の目的	32
第 2 章	誘電体マッシュルームビリヤードの淀み運動	35
2.1	モデル	35
2.2	脱出領域と無限集積点の解析	37
2.2.1	第一脱出領域と再入射領域	37
2.2.2	ポアンカレ写像の逆像	39
2.2.3	第 n 脱出領域	40
2.2.4	脱出領域の無限集積点の出現条件	42
2.2.5	数値計算	45
2.3	淀み運動のメカニズム	47
2.3.1	スケーリング則	47
2.3.2	最外殻 KAM 表面の回転数が無理数の場合	49
2.4	まとめと考察	51
第 3 章	無理数比マッシュルームビリヤード系の淀み領域の評価	53

3.1	モデル	53
3.2	最外殻 KAM 表面の回転数が有理数の場合	55
3.2.1	最外殻 KAM 表面近傍の淀み層	55
3.2.2	最外殻 KAM 表面近傍の淀み層の急激な減少	56
3.3	新しいタイプの淀み層とスケーリング理論	59
3.3.1	不変集合	59
3.3.2	特異点近傍のスケーリング則	61
3.4	パワースペクトル密度の普遍則	63
3.5	まとめと考察	65
第 4 章	カオス軌道の大域的ダイナミクスの特徴づけ	67
4.1	パワースペクトル密度のマルチフラクタル解析	67
4.1.1	時系列の分割方法	68
4.1.2	マルチフラクタル解析	69
4.1.3	情報次元の平均と分散	69
4.2	二次元写像における具体例	70
4.2.1	マッシュルームビリヤード系	70
4.2.2	変形キャット写像	72
4.2.3	標準写像	73
4.3	まとめと考察	74
第 5 章	アラン分散のスケーリング法則	77
5.1	先行研究のまとめ	77
5.1.1	記号列 $\{\sigma_n\}$ のアラン分散	77
5.1.2	アンサンブル平均で近似したアラン分散	78
5.1.3	大偏差原理による評価	80
5.2	理論結果	81
5.2.1	$g^2(N, \tau)$ の振る舞い	81
5.2.2	相似則と 2 つのスケーリング法則	81
5.3	数値結果	82
5.4	パワースペクトル密度の大偏差特性との関係	85
5.5	まとめと考察	86
第 6 章	まとめと展望	89
6.1	まとめ	89

6.2	展望	90
6.2.1	引力散乱ダイナミクスへ	90
6.2.2	非線形性が異なる中立不動点を持つ一様測度を保存する一次元写像の考察	91
6.2.3	非平衡熱力学への関心	92
6.2.4	拡散現象の分類の問題	93
付録 A	変形ベルヌイ写像のエルゴード特性のまとめ	95
付録 B	幾何光学近似	111
付録 C	面積保存性	113
付録 D	第 3 脱出領域と第 4 脱出領域の導出結果	115
付録 E	最外殻トラス近傍の淀み運動を記述する写像の構成	117
	謝辞	125
	研究業績	127

第1章

背景と目的

カオス研究の歴史を紐解くと、「マクロに予測できない運動がなぜ生まれるかを、ミクロの描像から説明する」ことを試みる統計力学の基本精神が3つの大きな研究の流れの中にあることがわかる。まずは、その大きな流れを概観し、その数学的基盤をエルゴード理論が担っている点を指摘する。次に、エルゴード理論をカオスを特徴づける技術としての観点から振り返り、これまでに得られているエルゴード定理が確率測度を保存する力学系及び不安定性の強い双曲的力学系で成立している点をまとめる。一方、不安定性の弱い非双曲力学系においては、一般に非線形性パラメータに応じて平均値が存在する定常力学系から平均値が存在しない非定常力学系に転移が起こることが知られているが、その転移過程に関して定常-非定常遷移モデル（変形ベルヌイ写像）においてほとんどすべてのエルゴード特性が決定されている点をまとめる。また、エルゴード特性に現れる諸量が熱力学と類似の構造を持っていることについて述べる。最後に、カオス力学の多くの性質がわかりつつあるエルゴード理論でさえも捉えられないハミルトン系カオスについて問題点を整理し、本論文の目的を述べる。

1.1 カオス研究の3つの大きな流れ

気体分子運動論

カオス研究の一つの基盤は気体分子運動論である。人類が初めて気体の存在に思いを巡らせたのは古代ギリシャの自然哲学者（紀元前540年頃）であろう。彼らは「世界は何でできているか」と問い、「火」、「水」、「空気」、「土」の四大元素からなると考えた。この中の「火」が生じる原因については長く人々を悩ませた。^{*1}フランシス・ベーコン（1620）は熱運動説（熱の原因は運動によるもの）を信じたが、シュタール（1697）は熱物質説（熱は何らかの物質である）を主張したために論争が巻き起こった。この論争の中でラボアジエ（1777）は金属を燃焼すると質量が増すという実験結果を元に熱物質説を否定し、熱は目に見えないカロリック（熱素）の出入りであると考えた。

カルノー（1824）はカロリック説がまだ受け入れられていた時代に「最も効率よく熱を動力に変えるに

^{*1} 熱学思想については文献 [Yamamoto, 1987] に詳しい歴史の流れがある。

はどうすればよいか」を考え、カルノーの可逆熱サイクルの理論を組み立てた。その後クラウジウスによってエネルギー保存則（熱力学第一法則）は定式化された(1850)が、熱エネルギーと仕事エネルギーを等価とするとカルノーの理論を説明できないため、「熱は温度差をなくする傾向を示し、常に高温物体から低温物体へと移動する」という熱力学第二法則を基本原理に追加した(1854)。

こうした熱力学の進展を背景に、気体の熱運動説を支持したマクスウェル(1860)は「気体中に速度が大きい粒子はどのくらいの割合あるか」を考えた。彼は気体中の多数の粒子の衝突の結果、運動エネルギーが個々の粒子に分配されて定常な速度分布が存在すると仮定し、マクスウェル分布を導いた。同時期にボルツマンは「熱力学第二法則を分子論的に説明できないか」と考え、時間とともに減少する量 H (エントロピー S と $S \simeq -H$ の関係にある) を導入し、「不可逆過程では、エントロピーは必ず増大する」と第二法則を分子論的に再記述した (H 定理, 1872)。この計算過程では2粒子の速度相関がないという分子的混沌(分子的カオス)の仮定を用いる必要があったが、この仮定は分子運動が確率的(統計的)であるとする、物理学に確率を導入した最初の考え方であった [Aizawa, 1996]。

しかし、この推論にはすぐに2つの反論があった ([Ichiyonagi, 1999] を参照)。1つ目はロシュミットによる「時間反転対称的な力学から不可逆過程が導かれるはずがない」とする反論で、 H が減少する過程があれば同様に増加する過程もあるはずだという主張である。2つ目は、ツェルメロによるものでポアンカレの再帰定理^{*2}に基づき、「もともと微視的状态に限りなく近づくことがあるはずである」とする反論で、 H がいったん減少することはあるものの十分長く待っていればもとの H に限りなく近い値に戻るという主張である。^{*3}

この2つのパラドックスに対しボルツマンやギブスは「時間反転対称と再帰性を同時に成立させる理論は何か」を考え、エルゴード仮説「多粒子の位相空間である Γ 空間における状態は、長時間経過するとエネルギー一定の超曲面上の全ての状態点を通過する」と主張した。^{*4} この主張は軌道の長時間の平均がエネルギー超曲面上の観測の空間平均に一致することを主張している。つまり、エルゴード性(「長時間平均」=「空間平均」)を仮定している。このボルツマンの推論は、「どのような条件のときにエルゴード性が成り立つか」を考えるエルゴード理論へと自然に導かれる。

乱流理論

乱流に関する原始的な問いは、おそらく「なぜ気体、液体に乱れが生じるのか」という類の疑問であろう。このことは、16世紀のレオナルド・ダ・ヴィンチが橋の周りの乱流を観察し、主流とその揺らぎの存在や多スケールの渦の存在を描写していたことから推察される。その後、ベルヌーイ(1738)が「空気

^{*2} 有限の相空間でリウヴィルの定理が成り立つとき、ほとんどすべての軌道は初期点の限りなく近くに戻ってくるという定理である。

^{*3} 田崎秀一によれば、1つ目の反論(時間の矢のパラドックス)は、最初から速度分布関数全体を考えれば H 量の増減の議論は回避できて、問題は分布関数のマクスウェル分布への収束に帰着され、2つ目の反論(再帰性のパラドックス)は、分布関数全体を考えれば非再帰であるし、または無限系を考えることで再帰性を回避できるという説明をしている。いずれも、エルゴード仮説に向かう前の根本の問題を指摘しており、大偏差特性と関係した思想であると考えられる。

^{*4} 「全ての状態点を通過する」はポアンカレの再帰定理を考慮し「全ての状態点の近傍を通過する」と後に変更された。

や水は、粘性がない場合、流れが速いほど圧力が下がり、遅いほど上がる」というベルヌーイの定理を発見し、その結果を洗練したオイラーによって流体力学という分野が切り開かれた。

しかし、粘性がない流体の理論は粘性がある流体の結果と合わないことがしばしばあったため、「粘性がある流体の運動方程式は何か」を考える必要があった。この問題は、ナヴィエ (1822) による粘性流体の運動方程式をストークス (1845) が一般化したナヴィエ・ストークス方程式によって解決された。同時にレイノルズ (1883) は「配管内の流体が層流から乱流に遷移する条件は何か」を研究し、慣性と粘性の比である無次元量「レイノルズ数」を定義した。このレイノルズ数により、異なる流れ領域を特徴づけることが可能になった。例えば、理論的にはプラントル (1904) がナヴィエ・ストークス方程式を変形した境界層方程式の粘性依存性を評価し、実験的にはカルマン (1911) があるレイノルズ数領域において流れの中に障害物の後方に交互にできる渦 (カルマン渦列) を発見したことが挙げられる。

こうした理論、実験の両面から乱流のいくつかの側面が明らかになったが、「高レイノルズ数領域で状態を決める量は何か」を研究したコルモゴロフがその後の乱流統計を大きく飛躍させた。当時の実験結果で、乱流は大きなスケールで駆動され、そこからより小さな渦が生成され、粘性により減衰することが知られていた。彼はこれをエネルギースペクトルから説明し、*5 エネルギー注入の波数と粘性散逸の波数の間の慣性領域と呼ばれる領域で、系を特徴づけるのは単位質量のエネルギーの流れ ε と波数 k だけであると考えた。この仮定と次元解析からエネルギースペクトル $E(k) \propto k^{-5/3} \varepsilon^{2/3}$ を導いた (コルモゴロフの 5/3 乗則, 1941) [Chandrasekhar, 1961]。

コルモゴロフは乱流が散逸する際のエネルギー輸送の側面を明らかにしたものの、「なぜマクロに乱れた運動が生じるのか」には答えていない。その答え方の一つは乱流への道筋の描像を得ることであるが、ベナール (1900) とレーリー (1916) によって研究されたレーリー・ベナール対流*6の研究を基礎にいくつかの描像が考えられている [Eckmann, 1981; Bergé et al., 1992]。乱流へと遷移する代表的な道筋としては、レイノルズ数を上げたときに層流 \rightarrow 周期運動 \rightarrow 2重周期運動 $\rightarrow \dots \rightarrow n$ 重周期運動 $\rightarrow \dots \rightarrow$ 乱流と遷移するランダウ・ホップ描像 [Landau and Lifshitz, 1959]、層流 \rightarrow 周期運動 \rightarrow 2重周期運動 \rightarrow 3重周期運動 \rightarrow 乱流と遷移するルエル・ターケンス・ニューハウス描像 [Ruelle and Takens, 1971; Newhouse et al., 1978]、層流 \rightarrow 周期運動 \rightarrow 2重周期運動 \rightarrow 4重周期運動 \rightarrow 8重周期運動 $\rightarrow \dots \rightarrow$ 乱流と遷移するフェイゲンバウム描像 [Feigenbaum, 2013]、ランダム運動の中に比較的長い周期運動が間欠的に繰り返されるとするポモウ・マネビル描像 [Maneville and Pomeau, 1979; Pomeau and Manneville, 1980] などがあり、それぞれについて実験結果に類似する結果が得られている。

いずれにしても、乱流統計の発展を背景に「乱れとはどうやって発生するか」を根本的に考え直す必要があり、気体、液体の揺らぎを発生させるメカニズムを数理的に扱う舞台が必要であると言える。その数学的基盤はエルゴード理論が担っている。

*5 低い波数でエネルギーが注入され、そのエネルギーがより高い波数へと輸送され、最終的に十分高い波数では、乱流のエネルギーは粘性により散逸する。

*6 上下に温度差がある流体で細胞状のパターンを生成する対流のことをいう。

雑音・ブラウン運動

ルクレチウス（紀元前1世紀）は、自然は根源的の微粒子からなると考え、暗い場所に差し込む光の中に無数の埃の微粒子が互いに無関係に動き回っている様子を描写していたと言われている。雑音・ブラウン運動の研究の始まりはそのような「捉えどころのない埃の乱れはなぜ生じるか」を思案したことにあったのかもしれない。

ブラウン運動の発見には、1590年頃のオランダのヤンセン親子が原形を作ったと言われている顕微鏡が欠かせない。レーベンフックは、池の水などの懸濁液の中に見られる極めて微小な粒子を発見間もない顕微鏡を用いて観察したが、当時この微小な奇妙な動きをするものは *little animals* と呼ばれていた。植物学者のブラウン（1827）は花粉を観察中に細かい粒子が不規則に動くのを発見し（ブラウン運動）、当初「花粉の中にある生命の源が、花粉自体を動かしているのではないか」と考えたと言われているが、後に有機物や無機物にも不規則運動が見出され、ブラウン運動が生命現象でないことを報告した。グイは精密な観測を行い、ブラウン運動が浮遊微粒子の液体粒子との1対多の衝突に起因するという考えに至った。彼はさらに「カルノーの原理はマイクロな世界には適用できないのではないか」という、この不規則運動を熱力学的に理解することへの疑念を表明した。グイの疑念に強く影響されたポアンカレは2度にわたり、ブラウン運動とカルノーの原理について言及している。

その後アインシュタイン（1905）によって、ブラウン運動が液体中の微小物体に熱運動する分子が不規則な衝突をすることによって引き起こされる現象であると説明する理論が発表された。アインシュタインの理論の正当性を実験で確認したのはペランだったが、*7ブラウン運動を最初に数学的に定式化したのはウィーナーだった。彼は巨視的なメカニズムがあるにもかかわらずランダムな現象を *continous chaos* と呼んだ。現在盛んに研究されているのはその延長線上の伊藤の公式やノイズが加わったゆらぎの取扱い [Sekimoto, 2004] であり、ランダム力学系と呼ばれるエルゴード理論の新たな分野を開きつつある [Arnold, 2010]。

まとめ

以上3つの切り口で振り返った歴史の流れにおいて、共通した考え方をまとめると、

「マクロに予測できない運動がなぜ生まれるかをマイクロな描像から説明する」

という統計力学の精神が宿っており、その数学的基盤をエルゴード理論が担っていると言える。

*7 彼は運動の経路がワイエルシュトラスが構成した各点で微分不可能な関数と類似な特徴をもつことを指摘している。

1.2 カオスの特徴づけとしてのエルゴード理論

この節では、エルゴード理論を数学としてでなくカオスの特徴づけとして考える。ランダムな時系列の平均値の性質（エルゴード定理）、平均値の周りのゆらぎのダイナミクスの性質（エルゴード特性）に関するこれまでの知識を整理し、その一連の構造が熱力学と類似した構造を持っていること（熱力学的形式）についてもまとめる。

1.2.1 エルゴード定理

エルゴード理論の起源は、古典力学や統計力学における力学系の研究と、時間的に変化する偶然現象の研究にある [Billingsley, 1965; Totoki, 1971]。エルゴード理論は主に保測変換に関する研究であるが、その基本精神は「偶然現象に対して確率をどう定義するか」を考えることにある。

イメージしやすくするために、ランダムな時

系列 X_t が観測された場合を想定する（図 1.1

左）。時系列 X_t を説明するために、空間 M

内の軌道を考え、ある観測関数によって X_t

が観測されているとする。空間 M の部分集

合のなす σ -集合体*8を \mathcal{B} とし、 φ を M から

それ自身の中への変換で、 $A' \in \mathcal{B}$ であれば

$\varphi^{-1}A' = \{x : \varphi x \in A'\} \in \mathcal{B}$ という意味で

可測であるとする。このとき、確率測度を μ

*9とするととき、力学系は組 $(M, \mathcal{B}, \mu, \varphi)$ とし

て定義される。変換 φ を保測変換*10とし、力学系 $(M, \mathcal{B}, \mu, \varphi)$ におけるエルゴード定理を考える。

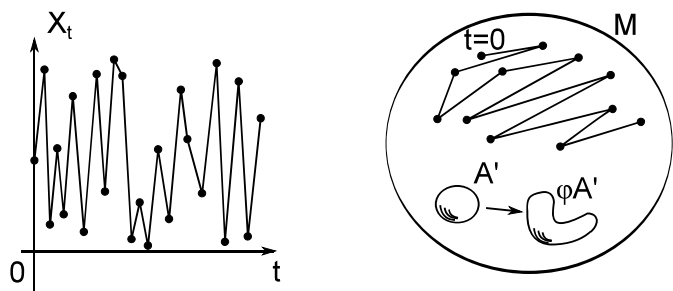


図 1.1 ランダムな時系列（左）と空間 M 内での軌道（右）。集合 A' は変換 φ によって集合 $\varphi A'$ に移る。

測度可遷性

不変集合 I ($\varphi I = I, I \subset M$) の測度について、

$$\mu(I) = 0, \text{ or } 1$$

が成り立つとき、 M は測度可遷性をもつという。

*8 σ -集合体 \mathcal{B} は条件 (i) $M \in \mathcal{B}$, (ii) $A \in \mathcal{B}$, ならば $A^c = M \setminus A \in \mathcal{B}$, (iii) $A, B \in \mathcal{B}$, ならば $A \cup B \in \mathcal{B}$, を満たす。こう定義する理由は、測度を考える際に集合の「大きさ」の概念を導入したいが、例えば集合 \mathbb{R}/\mathbb{Q} の部分集合を考えると不可算個あって加算操作に関して閉じておらず「大きさ」を測れないのため、不可測となる集合を除外する必要があるからである。

*9 確率測度 μ は条件 (i) 各 $A \in \mathcal{B}$ に対し、 $\mu(A) \geq 0$, (ii) $\{A_n; n \geq 1\} \subset \mathcal{B}$ が交わりを持たなければ、 $\mu(\cup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$, (iii) $\mu(M) = 1$ を満たす。

*10 保測変換 φ は条件 (i) φ は M から M への 1 対 1 変換である, (ii) φ も φ^{-1} も可測である, (iii) すべての $A \in \mathcal{B}$ に対し、 $\mu(\varphi^{-1}A) = \mu(A)$ である, を満たす。

観測関数が L_1 関数^{*11}である場合に、相空間内の1点 P を通る1つの軌道 (G 軌道) について Birkhoff の (個別) エルゴード定理が成り立つ。

Birkhoff の (個別) エルゴード定理

点 $x \in M$ に対し、観測関数を $f(x) \in L_1$ とするとき、以下が成り立つ。

1) 長時間平均 $f^*(x)$ が存在する。

$$f^*(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(P, x(t)) dt \in L_1.$$

2) $f^*(x)$ は運動の恒量 (不変関数) である。不変関数は $f^*(\varphi_t x) = f^*(x)$ を満たす。

3) $\langle f \rangle \equiv \int_M f(x) d\mu$ は t に依存しない。

$$\langle f^* \rangle = \langle f \rangle .$$

この定理から、 G 軌道に沿って $t = 0$ から $t = T$ または ∞ までとった時間平均 f^* に対して

$$f^* = \langle f \rangle$$

が成り立つ [Birkhoff, 1931]。^{*12}このとき、変換 φ_t はエルゴード的であるという。変換 φ_t がエルゴード的であるための必要十分条件は

不変関数 f^* が定数である

ことである。

エルゴード性の必要十分条件

$$\text{測度可遷性} \Leftrightarrow f^* \text{ は定数} \Leftrightarrow \text{エルゴード性}.$$

証明は文献 [Totoki, 1971] を参照。Khinchin は測度可遷性に頼らないでエルゴード性を導く方法を考えた。次の Khinchin の定理はエルゴード性の十分条件を与える。

Khinchin の定理

相関関数を

$$R(u) = \frac{\langle f(P, t) f(P, t+u) \rangle}{Df}$$

と定義する。ただし、 $\langle f \rangle \equiv \int_M f(x) d\mu$ 、 $Df = \langle f^2(P) \rangle$ とし、 $\langle f \rangle = 0$ の場合を考える (一般性を失わない)。このとき

$$u \rightarrow \infty \text{ で } R(u) \rightarrow 0 \text{ ならば、} f^* = \langle f \rangle \text{ が成り立つ。}$$

^{*11} L_q 関数とは、有限の積分値 $\int |f(x)|^q dx (< \infty)$ が存在するような関数を指す。

^{*12} ボルツマンは G 軌道がエネルギー超曲面上で閉じていないで、その面上のすべての点を通ると仮定すればよいとしたが、2次元以上の多次元空間を1次元空間と連続的に1対1に対応づけることは不可能なので、ボルツマンの意味でのエルゴード性はありえないことが知られている。

混合性 (Strong mixing)

部分集合を $A, B \subset M$ とするとき

$$\mu(\varphi_t A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad (t \rightarrow \infty)$$

が成り立つとき、変換 φ_t は混合的 (Strong mixing) であるという。

混合性の定義から、以下の4つの性質が導ける。

1) 測度可遷性の十分条件

Strong Mixing \Rightarrow 測度可遷性.

(証明は、 $A = B$ を考えれば $\mu(A) = 0$ or 1 が示せる。)

ここで、文献 [Khinchin, 1949] に習って、ハミルトン系の場合の不可逆性と混合性の関係について考える。ハミルトン系の分布関数の時間発展を記述するリュービル方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = [H, f] = iLf$$

と書ける。ただし、リュービル演算子 L を $f(x, t) = e^{iLt} f(x, 0) \equiv U_t f(x, 0)$ で与える。関数 $f, g \in L_2$ として f と g の内積を $\langle f|g \rangle = \langle U_t f|U_t g \rangle$ と書くことにする。このとき、Strong mixing から不可逆性が導ける。

不可逆性

混合性 (Strong mixing) は関数空間で書き換えると以下の式と等価である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle U_t f|g \rangle = \langle f|1 \rangle \langle 1|g \rangle .$$

このとき、 f を分布密度、 g を任意の観測関数として、内積は $\langle f|g \rangle = \int_M \bar{f} g d\mu$ (\bar{f} は f の共役関数) と表わせて、

$$\langle g \rangle_{(t) \rightarrow} \langle g|1 \rangle \quad (t \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。ただし、 $|1 \rangle$ は平衡分布を表わす。

不可逆性については文献 [Halmos, 1956] の p.36 に記述がある。

2) 弱い混合性 (Weak mixing)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\langle U_t f|g \rangle - \langle f|1 \rangle \langle 1|g \rangle| dt = 0$$

\Leftrightarrow

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^T |\mu(\varphi_n A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

3) Strong mixing の必要条件

$$\text{Strong mixing} \Rightarrow \text{Weak mixing.}$$

4) Khinchin の定理の十分条件

$$\text{Weak mixing} \Rightarrow R(u) \rightarrow 0 \quad (u \rightarrow \infty)$$

例

Strong mixing が厳密に示されている例は K 系や C 系といった双曲的力学系である [Dorfman, 1999]。

K 系: パイこね変換

Lebesgue 空間 (Ω, F, P) 上の保測変換 T に対して、次の 3 条件を満たす可測分割 ξ が存在すれば、 T は K 系と呼ばれる。

$$(a) T\xi \leq \xi, \quad (b) \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^n \xi = \varepsilon, \quad (c) \bigwedge_{-\infty}^{\infty} T^n \xi = \nu.$$

ただし、二つの可測分割 $T\xi$ と ξ において、測度 0 の集合を除いて $T\xi$ が ξ より細かい分割のとき $T\xi$ は ξ の細分である、あるいは ξ は $T\xi$ よりあらいといい、 $T\xi \leq \xi$ と表す。また、可測分割の任意の族 $\{\zeta_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ に対し、次の性質を持つ可測分割 ζ を $\{\zeta_\lambda\}$ の上限と呼び、 $\zeta = \vee_{\lambda \in \Lambda} \zeta_\lambda$ と表す。

- (1) 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し $\zeta_\lambda \leq \zeta$,
- (2) 可測分割 ζ' がすべての $\lambda \in \Lambda$ に対し $\zeta_\lambda \leq \zeta'$ を満たせば、 $\zeta \leq \zeta'$ である。

同様に、次の性質を持つ下限 $\wedge_{\lambda \in \Lambda} \zeta_\lambda$ が可測分割として存在する。

- (1) 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し $\zeta_\lambda \geq \zeta$,
- (2) 可測分割 ζ' がすべての $\lambda \in \Lambda$ に対し $\zeta_\lambda \geq \zeta'$ を満たせば、 $\zeta \geq \zeta'$ である。

パイこね変換は以下の式で定義される K 系の力学系の代表例である。

$$(x', y') = B(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}), & \text{for } x < \frac{1}{2}, \\ (2x - 1, \frac{y+1}{2}), & \text{for } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

C 系: 猫写像

1 を法として合同である写像は下図のように単位正方の端を張り合わせてできるトーラス上の運動と同一視できるので、トーラス上の自己同型写像と呼ばれる。猫写像は以下の式で定義される。

$$(x', y') = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1}.$$

まとめ

エルゴード定理の包含関係は図 1.2 のようになる。重要なポイントは、

「エルゴード性の背後にある十分条件に平衡への漸近のしかた（不可逆性）が隠れている」

ことである。

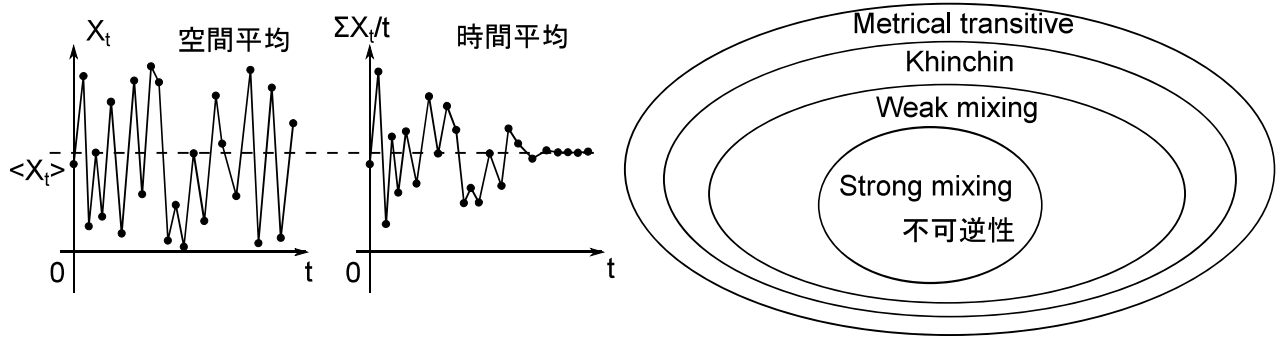


図 1.2 エルゴード定理の包含関係のまとめ。測度可遷性はエルゴード性と等価であり、エルゴード性が成り立つ場合には左図のような空間平均と時間平均は一致する。また、エルゴード性の背後には相関関数の減衰や混合性などの平衡への漸近のしかた（不可逆性）が隠れている。

1.2.2 エルゴード特性

双曲的力学系は Strong mixing を持つ非常に不安定性が強い系であるが、この節では双曲性を破った場合にどのような変更を受けるかについて 1 次元の理想化されたモデル（変形ベルヌイ写像）で得られている結果についてまとめる。変形ベルヌイ写像においてエルゴード特性がほとんどすべての領域で特定されていることを示す。

変形ベルヌイ写像-定常非定常転移モデル-

変形ベルヌイ写像は

$$T_{MB}(x) = x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 2^{B-1}x_n^B, & x_n \in [0, 1/2), \\ x_n - 2^{B-1}(1-x_n)^B, & x_n \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

と表される。このモデルは Pomeau-Manneville によってレイリーベナール対流の間欠性において見出された非双曲一次元写像 [Bergé et al., 1980; Manneville, 1980] を基礎にしている。B = 1 のときは

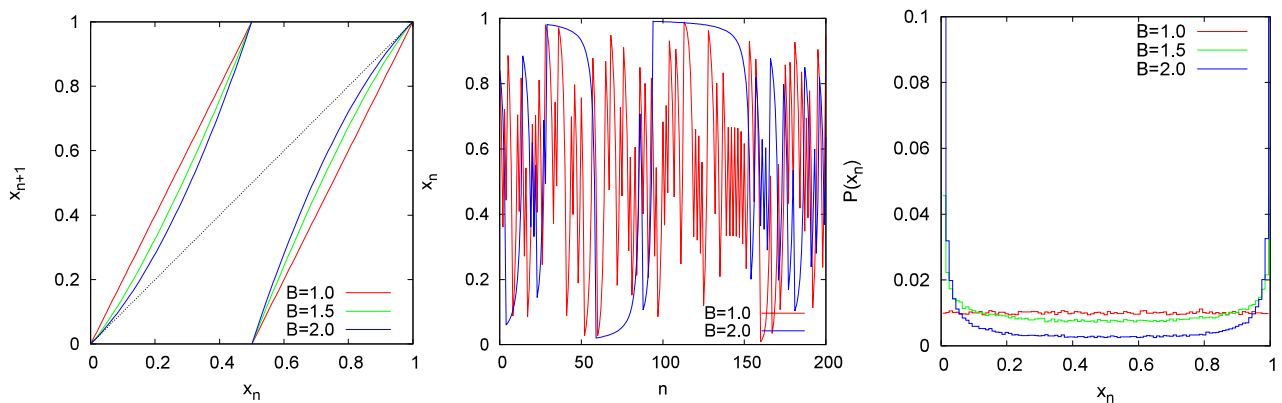


図 1.3 変形ベルヌイ写像のリターンマップ（左）、軌道の様子（中央）、不変測度（右）を示す。B > 1 の場合は x = 0, 1 の近傍に軌道が束縛されることにより、測度が x = 0, 1 に局在する。

Strong mixing が厳密に示されている [Totoki, 1971]。 $B > 1$ では、 $x = 0$ と $x = 1$ にある中立不動点に起因して軌道が $x = 0$ と $x = 1$ 付近に局在する。その結果、不変測度 $\rho(x)$ は近似的に

$$\rho(x) \simeq x^{1-B} + (1-x)^{1-B}$$

で表わされる [Aizawa et al., 1984]。つまり、 $1 < B < 2$ では、有限測度を不変に保ち、 $B > 2$ では規格化できない測度（無限測度）を不変に保つ（図 1.3）。*13 一般に、非双曲力学系において無限測度が出現することはいくつかの具体例で得られている [Thaler, 1980, 1983]。

特徴的なパラメータ領域は粗視化の方法と確率論によって与えられている。変形ベルヌイ写像において記号列

$$\sigma_i = \begin{cases} -1, & x_i \in [0, 1/2), \\ +1, & x_i \in [1/2, 1] \end{cases}$$

によって軌道を粗視化すると、記号列 σ_i はセミマルコフ過程であることが知られている [Aizawa et al., 1984]。*14 粗視化された記号列の一方 (-1 または +1) をとり続ける時間を m とすると確率密度 $P(m)$ は

$$P(m) \sim m^{-\beta} \left(\beta = \frac{B}{B-1} \right)$$

で与えられる*15

このとき、記号列 σ_i の分布極限定理によって変形ベルヌイ写像のパラメータ領域を分類することができる。詳しくは（付録 A 分布極限定理）に記載するが、重要な性質は以下のようにまとめられる。 $1 < B < 1.5$ のとき、 $P(m)$ の平均と分散は存在して、平均への収束速度でリスケールした極限分布はガウス分布に従う。 $1.5 < B < 2$ のとき、 $P(m)$ の平均は存在するが分散は発散して、平均への収束速度でリスケールした極限分布は安定分布に従う。 $2 < B$ のとき、 $P(m)$ の平均と分散は発散して、リターン列でリスケールした分布はミッタクレフラー分布に従う。また、 $B \rightarrow \infty$ の極限は極非定常領域と呼ばれており、1.3 節で解説する。

この4つのパラメータ領域を基礎に、リアプノフ指数、エントロピーといったカオスの不安定性を特徴づける量や、相関関数、パワースペクトルといった初期記憶の失いやすさを特徴づける量のスケールング法則が知られている [Aizawa et al., 1984]。また、平均値への収束の速さの位置依存性（大偏差特性） [Aizawa, 1989a]、ごく稀なイベントが起こる確率（少数の法則） [Aizawa, 1998]、非定常性を特徴づけるアラン分散 [Aizawa and Kohyama, 1983] も理論的に決定されている。この一連の法則は付録 A に示し、表 1.1 にまとめた。

*13 $B < 1$ の場合は $x = 0.5, 1$ に測度が局在することがわかっているが、理論的には未解明なところが多い。

*14 粗視化軌道を考える根拠は Abramov' s reduction theorem によって、元の写像のエントロピーが粗視化した状態における再帰写像のエントロピーと不変測度の乗算で表わされることによる [Abramov, 1966]。

*15 この滞在時間分布が付録 A で定義した脱出時間分布と同じになる理由は一様な再入射メカニズムがあるためである。

表 1.1 変形ベルヌイ写像のエルゴード特性のまとめ。パラメータは $\alpha = \frac{1}{B-1}, \beta = \frac{B}{B-1}$ とする。 δ_{eq} は平衡初期分布に関するものであり、一様初期分布の場合の δ_{uni} は付録 A に示す。

	ガウス領域	非ガウス領域	非定常領域	極非定常領域
(更新解析)				
$P(m) \simeq m^{-\beta}$	$\beta > 3$	$3 > \beta > 2$	$2 > \beta > 1$	$O(\frac{1}{m}(\ln m)^{-\frac{1}{\beta'}-1})$
$\langle \lambda_N \rangle \simeq O(N^{-\gamma})$	$\gamma = 0$	$\gamma = 0$	$\gamma = 2 - \beta$	$O((\ln N)^{-\gamma'(\beta', \phi)})$
$\langle (\lambda_N - \langle \lambda_N \rangle)^2 \rangle$				
$\simeq O(N^{\delta_{\text{eq}}})$	$\delta_{\text{eq}} = -1$	$\delta_{\text{eq}} = 2(B - 2)$	$\delta_{\text{eq}} = \frac{2-B}{B-1}$	
$\langle C_N(\tau) \rangle \simeq$	exponential	$\tau^{-(\beta-2)}$	$\exp[-(\frac{\tau}{N})^{1-\alpha} \cdot y_\alpha]$	
$\langle S(\omega) \rangle \simeq \omega^{-\nu}$	$\nu = 0$	$0 < \nu = 3 - \beta < 1$	$1 < \nu < 2$	$O(\omega^{-2}(-\ln \omega)^{-\frac{1}{\beta'}})$
大偏差原理				
θ	$\theta = 1$	$\theta = 2(2 - B)$	$\theta = 0$	$\theta = 0$
$\Phi(X_N)$	○	○	○	
少数の法則				
$P_N(T)$	exponential	exponential	$T^{-\beta} (T \gg 1)$	
アラン分散				
$\sigma_A^2(N) \simeq$	N^{-1}	$N^{\frac{1}{B-1}-1}$	$N^{\frac{1}{B-1}-1}$	
拡散	normal-	sub-/super-	sub-/super-	log-

まとめ

定常非定常転移を示す変形ベルヌイ写像において、

「粗視化の方法によって、その系がどのくらい強いカオスかを分類することができる」*16

「定常領域、非定常領域のほとんどすべてのエルゴード特性が決定されている」

とすることができる。別の言い方をすると、

「エルゴード定理に隠れている平衡への漸近のしかたを数学の定理とは別の見方で

特徴づける方法（エルゴード特性）が考案されており、そのスケーリング法則が決定されている」

とすることができる。*17

*16 一般にパワースペクトルや相関関数は粗視化の方法によって異なる性質をもつことが知られているため、更新解析が可能である（待ち時間分布が決定できる）程度の粗視化でなければならない。

*17 数学者はエルゴード定理の拡張に関心があり、物理学者はランダム現象の特徴づけに関心がある。本研究では 1. 1 節で触れた統計力学の精神に則って後者の立場をとるが、後者が数学的でないわけではない（付録 A 参照）。

1.2.3 熱力学的形式

この節では、上記で得られたエルゴード特性のいくつかの量を拡張することで熱力学と同じ形式を構成できることを示す。平衡統計力学によって得られる熱力学諸量を単原子古典理想気体を例に挙げて説明し、一般化エントロピー、 q -拡張リアプノフ指数、一般化次元、大偏差特性の中に熱力学と同様の構造が埋め込まれている点を指摘する。

平衡統計力学

体積 V の箱の中に質量 m の単原子分子 N 個からなる理想気体が入っており、温度 T の外界と熱的に接している場合を考える。系のハミルトニアンは、 p_j を粒子 j ($= 1, 2, \dots, N$) の運動量として、次式で表わされる。

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m}.$$

対応するカノニカル分布の確率因子 $e^{-\beta H}$ は、

$$e^{-\beta H} = \exp\left(-\beta \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m}\right) = \prod_{j=1}^N e^{-\beta p_j^2/2m}$$

と表せる。このとき、分配関数の対数 $\ln Z$ 、ヘルムホルツの自由エネルギー F 、内部エネルギー U 、エントロピー S は、

$$\ln Z = N \left(\frac{3}{2} \ln \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} + \ln \frac{V}{N} + 1 \right),$$

$$F = -NkT \left(\frac{3}{2} \ln \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} + \ln \frac{V}{N} + 1 \right), \quad (1.1)$$

$$U = \frac{3}{2}NkT,$$

$$S = Nk \left(\frac{3}{2} \ln \frac{mU}{3\pi\hbar^2 N} + \ln \frac{V}{N} + \frac{5}{2} \right) \quad (1.2)$$

となる [Kubo, 1961; Aizawa, 1996]。パラメータは $V = 22.4$ [m^3], $k = 1.38 \times 10^{-23}$ [$m^2 kgs^{-2} K^{-1}$], $N = 6.02 \times 10^{23}$, $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ [$m^2 kg/s$], $m = 6.67 \times 10^{-27}$ [kg] を用いる。

図 1.4 は温度とヘルムホルツの自由エネルギーの関係を表わしている。左は概念図で系の温度と自由エネルギーが T_0, F_0 であるときに、温度を変化させた場合の自由エネルギーの変化の仕方を表わしている。右は式 (1.1) を計算した結果であり、自由エネルギーは上に凸であり概念図と同様の構造になっている。図 1.5 は内部エネルギーとエントロピーの関係を表わしている。左は概念図で系の内部エネルギーとエントロピーが U_0, S_0 であるときに、内部エネルギーを変化させた場合のエントロピーの変化の仕方を表わしている。右は式 (1.2) を計算した結果であり、エントロピーは上に凸であり、こちらも概念図と同様の構造を持つ。重要な点は、自由エネルギーとエントロピーはルジャンドル変換でつながっていることであ

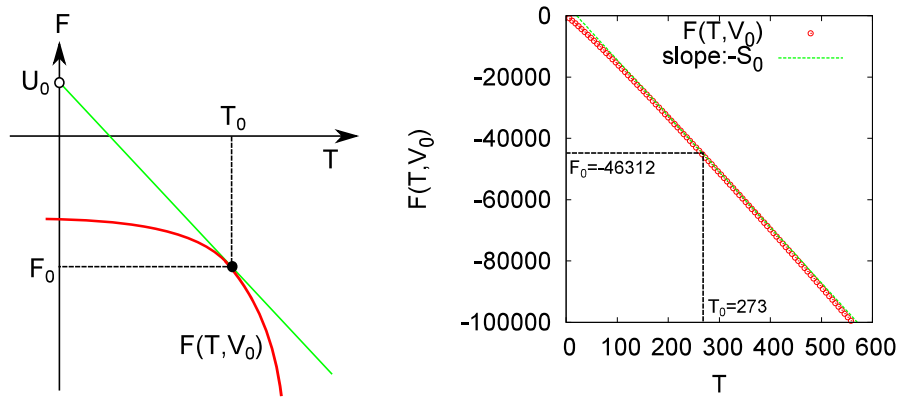


図 1.4 ヘルムホルツ自由エネルギーと温度の関係。左は概念図を、右は式 (1.1) における自由エネルギーを示している。

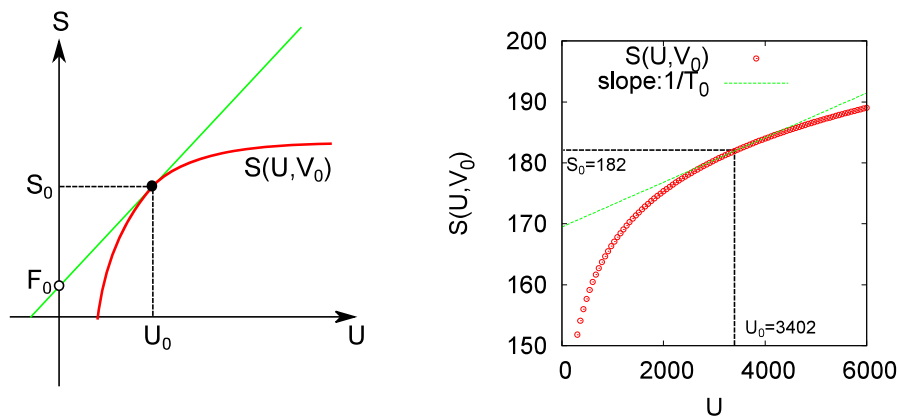


図 1.5 エントロピーと内部エネルギーの関係。左は概念図を、右は式 (1.2) におけるエントロピーを示している。

り、自由エネルギーにおける T_0 での傾きは $-S_0$ であり、エントロピーにおける U_0 での傾きは $1/T_0$ である。この熱力学に現れる普遍的関係は、前述のエルゴード特性のエントロピー、リアプノフ指数及びフラクタル次元を拡張することで見出されている [Badii and Politi, 2001]。

一般化エントロピー

一般化エントロピーはエントロピーの一般化であり、ツァリスの一般化 [Suyari, 2010] とレニィの一般化 [Badii and Politi, 2001] が知られている。基本的な思想はシャノンエントロピーで成立する「エントロピーの加法性」がない非加法的 ($S(X, Y) \neq S(X) + S(Y)$) な場合を系統的に扱うという考え方である。^{*18}一般化エントロピーでは、平衡統計力学における粒子数 N を時間刻み T とみなし、分配関数としてとり得る記号列の確率 $P(s_1, s_2, \dots, s_n)$ の q 乗の関数をとる。図 1.6 左は記号列 (s_1, s_2, \dots, s_n) の概

^{*18} 付録 A で示した A エントロピーは考えるポアンカレ断面の取り方を変える拡張であり、ここで扱う一般化エントロピーはシャノンエントロピーの q 次の拡張である点異なる。

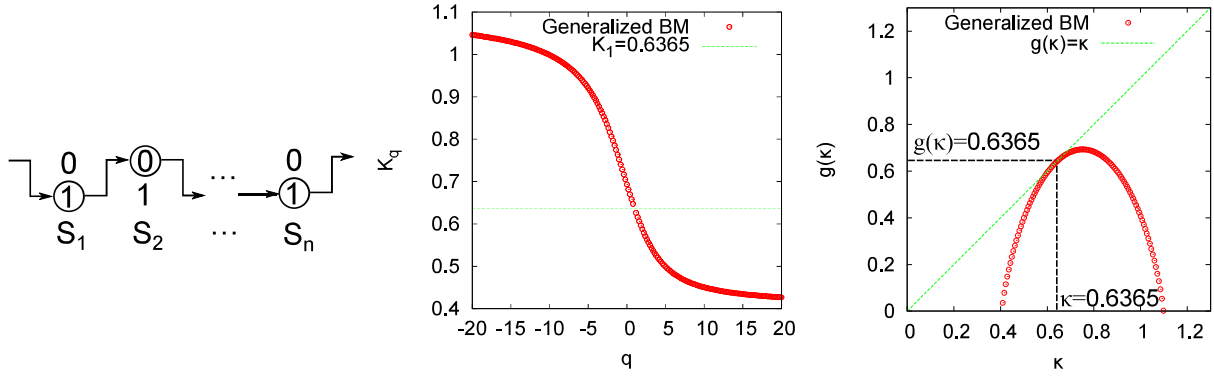


図 1.6 記号列の概念図 (左)、一般化ベルヌイ写像 (1.5) の一般化エントロピー K_q (中央)、エントロピースペクトル $g(\kappa)$ (右) を示す。 $q = 1$ のとき、 K_1 は Kolmogorov-Sinai エントロピーを表わし、エントロピースペクトルにおいて $g(\kappa) = \kappa$ に対応する。

念図を示している。分配関数 $\Gamma(q, n)$ は

$$\Gamma(q, n) = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_n} P^q(s_1 s_2 \dots s_n),$$

であり、一般化エントロピー K_q は

$$K_q = -\frac{1}{q-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Gamma(q, n) \quad (1.3)$$

で定義される。このとき、 K_q のルジャンドル変換であるエントロピースペクトル $g(\kappa)$ は

$$g(\kappa) = q\kappa - (q-1)K_q \quad (1.4)$$

と表わされ、熱力学のエントロピーと対応付けられる。例として、一般化ベルヌイ写像

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{p}x_n, & x_n \in [0, p), \\ \frac{1}{1-p}(x_n - p), & x_n \in [p, 1] \end{cases} \quad (1.5)$$

に対し ($p = 1/3$)、図 1.6 中央と右は式 (1.3)(1.4) によって計算した一般化エントロピー K_q とエントロピースペクトル $g(\kappa)$ を示す。このとき、 K_1 は Kolmogorov-Sinai エントロピーであり、 $q = 1$ に対応する $g(\kappa)$ は $g(\kappa) = \kappa$ を満たす (図 1.6 参照)。

q -リアプノフ指数

q -リアプノフ指数はリアプノフ指数の局所拡大率の q 次の一般化であり、文献 [Takayasu, 1987] に詳しい解説がある。^{*19} q -リアプノフ指数では、平衡統計力学における粒子数 N を時間 n とみなし、分配関数として局所拡大率の q 乗の関数をとる。分配関数 $\Gamma(q, n)$ は

$$\Gamma(q, n) = \sum_n |f'(x_n)|^{-q},$$

^{*19} 文献 [Akimoto, 2010] で議論されている収束する速さで規格化した一般化リアプノフ指数とは異なる。

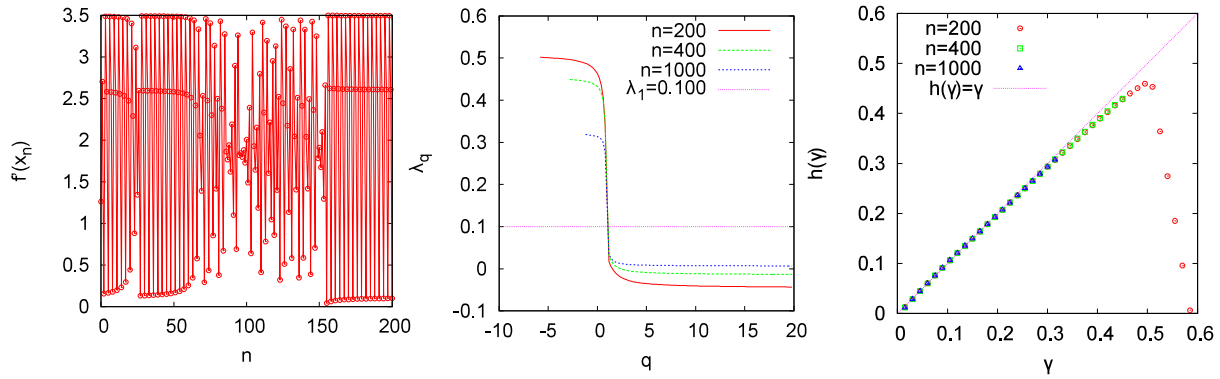


図 1.7 ロジスティック写像 (1.8) の局所拡大率の時系列 $|f'(x_n)|$ (左)、 q -リアプノフ指数 λ_q (中央)、エントロピー関数 $h(\gamma)$ を示す。 $q = 1$ のとき、 λ_1 は通常のリャプノフ指数を表わし、エントロピー関数において $h(\gamma) = \gamma$ に対応する。写像回数を $n = 200, 400, 1000$ と変えた場合でも $h(\gamma)$ の曲線は原点近傍で直線 $h(\gamma) = \gamma$ に接する。

であり、 q -リアプノフ指数は

$$\lambda_q = -\frac{1}{q-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Gamma(q, n) \quad (1.6)$$

と一般化エントロピーと同様に定義される。このとき、 λ_q のルジャンドル変換は

$$h(\gamma) = q\gamma - (q-1)\lambda_q \quad (1.7)$$

と表わされ、熱力学のエントロピーと対応づけられる。図 1.7 は文献 [Sano et al., 1986] で解析されたロジスティック写像

$$L_1(x) = x_{n+1} = ax_n(1-x_n), \quad a = 3.82842 \quad (1.8)$$

における q -リアプノフ指数 (1.6) とエントロピー関数 (1.7) の追試結果を示している。左図は局所拡大率 $f'(x_n)$ の時系列を表わし、中央及び右は $n = 200, 400, 1000$ における q -リアプノフ指数 λ_q とエントロピー関数 $h(\gamma)$ をそれぞれ示している。 $q = 1$ のとき、 λ_1 は通常のリャプノフ指数を表わし、 $q = 1$ に対応する $h(\gamma)$ は $h(\gamma) = \gamma$ を満たす (図 1.7 参照)。ロジスティック写像の場合は $h(\gamma)$ 曲線が原点近傍で接しており、このことは間欠性カオスが $1/f$ パワースペクトルをもつことに対応していると指摘されている [Sano et al., 1986]。

一般化次元

一般化次元は、フラクタル次元のスペクトルを指している。一般化次元では、平衡統計力学における粒子数 N を $\ln(1/\varepsilon)$ (ピンの幅 ε) とみなし、分配関数として確率密度の q 乗の関数をとる。分配関数 $\Gamma(q, n)$ は

$$\Gamma(q, n) = \sum_n P_n^q$$

であり、一般化次元 D_q は

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \Gamma(q, n)}{\ln \varepsilon} \quad (1.9)$$

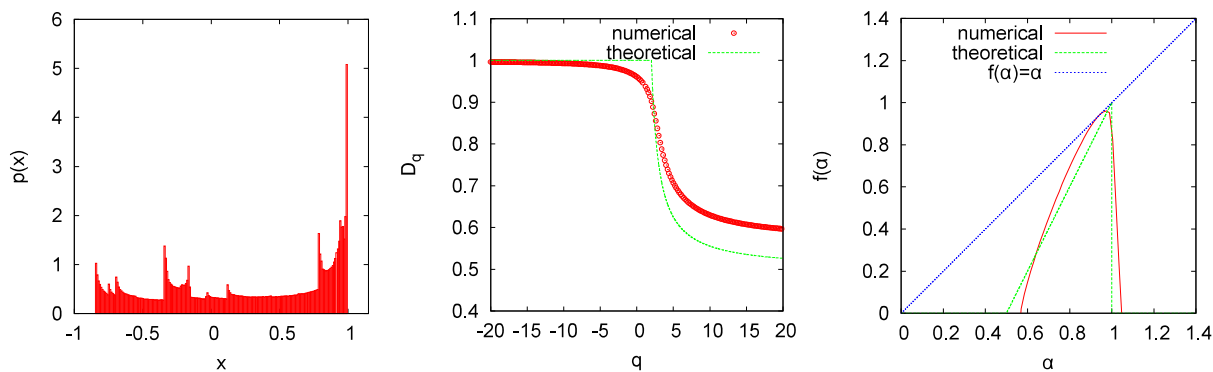


図 1.8 ロジスティック写像 (1.11) の軌道 x_n の確率密度分布 (左) と一般化次元 D_q (中央)、大域的スペクトル $f(\alpha)$ を示す。 $q = 1$ のとき、 D_1 は情報次元を表わし、 $f(\alpha) = \alpha$ に対応する。理論結果は $b = 2$ に対するもので、数値計算は $b = 2$ に漸近すると理論結果に近づくことが予想されている [Grassberger et al., 1988]。

で定義される。このとき、 D_q のルジャンドル変換は

$$f(\alpha) = q\alpha - (q-1)D_q \quad (1.10)$$

と表わされ、熱力学のエントロピーと対応付けられる。図 1.8 はロジスティック写像

$$L_2(x) = x_{n+1} = 1 - bx_n^2, \quad b = 1.85 \quad (1.11)$$

の一般化次元 (1.9) と大域的スペクトル (1.10) を考察した文献 [Grassberger et al., 1988] の追試を示している。理論結果は $b = 2$ に対するものであり、数値計算を $b \rightarrow 2$ とすると理論結果に近づくことされている [Grassberger et al., 1988]。

また、大偏差特性についても熱力学的関係を構成できることが文献 [Fujisaka, 1998] に示されている。マルチフラクタル解析と大偏差特性は考える対象は異なるが、熱力学と同じ構造を見出す考え方は全く同じである。これらに共通する発想の転換の基礎には、時系列の各点をスピンと見立て熱力学のエネルギーに対応する量を構成する試みがある [Ruelle, 2004; Bowen, 2008]。熱力学のエネルギーに対応するものは、一般化エントロピーでは記号列の確率、 q -リアプノフ指数では局所拡大率、一般化次元では確率密度である。大偏差特性では熱力学のエントロピーに対応するものをレート関数 [Fujisaka, 1998] とみなしている。この柔軟な発想の転換により、エルゴード特性量の中にルジャンドル変換で結ばれる自由エネルギーやエントロピーに対応する量を構成できるということは重要である。対応表を表 1.2 にまとめる。

まとめ

以上をまとめると、

「一般化エントロピー、 q -リアプノフ指数、一般化次元、大偏差特性に
熱力学と対応付けられる量を構成することができる」

といえる。

表 1.2 熱力学的形式の対応表

平衡統計力学	一般化エントロピー	q -リアプノフ指数	一般化次元
N (粒子数)	T (時間刻み)	T (時間刻み)	$\ln(1/\varepsilon)$ (ε はビンの幅)
$\beta = 1/kT$ (逆温度)	$q - 1$	$q - 1$	$q - 1$
Z (分配関数)	$\sum_{s_1, s_2, \dots, s_n} P^q(s_1 s_2 \dots s_n)$	$\sum_n f'(x_n) ^{-q}$	$\sum_n P_n^q$
F (自由エネルギー)	K_q	λ_q	D_q
U (内部エネルギー)	κ	γ	α
S (エントロピー)	$g(\kappa) - \kappa$	$h(\gamma) - \gamma$	$f(\alpha) - \alpha$

1.3 ハミルトン系カオス

ここまでランダムな時系列の平均値とその周りのゆらぎの性質を記述するエルゴード理論についてまとめてきた。この節では、エルゴード理論で捉えきれないハミルトン系カオスについて概観する。まずフラクタル相空間構造をもつ一般的なハミルトン系のモデルである標準写像について解説し、局所的ダイナミクスに関する解析的アプローチ、エルゴード論的アプローチ、スケーリング論的アプローチについて述べる。次にその局所ダイナミクスを遷移しながら運動する多重エルゴード運動と呼ばれる大域的ダイナミクスとその評価法をまとめる。最後に、フラクタル構造をもたないハミルトン系であるマッシュルームビリヤード系についてこれまでの結果を整理する。

1.3.1 標準写像

標準写像は以下で表わされる二次元面積保存写像である。

$$T_S(x, y) : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{1}, \\ y_{n+1} = y_n - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n). \end{cases} \quad (1.12)$$

標準写像は周期的に変化する重力中の振り子の運動を記述するものだが [Chirikov, 1979]、振り子の位置に依存した周期的外力を加える系についても考察可能である (図 1.9)。

標準写像の相空間構造は秩序パラメータ K によって大きく変わる。その変化の様子をトーラスの安定性の観点から述べると次のようになる。 $K = 0.0$ のときは、全ての軌道がトーラス上の準周期軌道になる (図 1.10 の最左)。 K が大きくなるといくつかのトーラスは相空間上に残り、いくつかのトーラスは壊れる (例えば $K = 0.5$ の場合、図 1.10 の左から二番目)。このとき、回転数 $\rho \equiv (x_n - x_0)/n$ が有理数近似の収束の遅い無理数であれば x と y が一対一対応する構造を保つような変形を伴いながら残るトーラス (KAM トーラス) が存在し (KAM 理論 (後述))、回転数が有理数であれば x と y が一対一に対応しないトーラス (共鳴トーラス) に変化する。さらにパラメータ K を大きくすると、すべての KAM トー

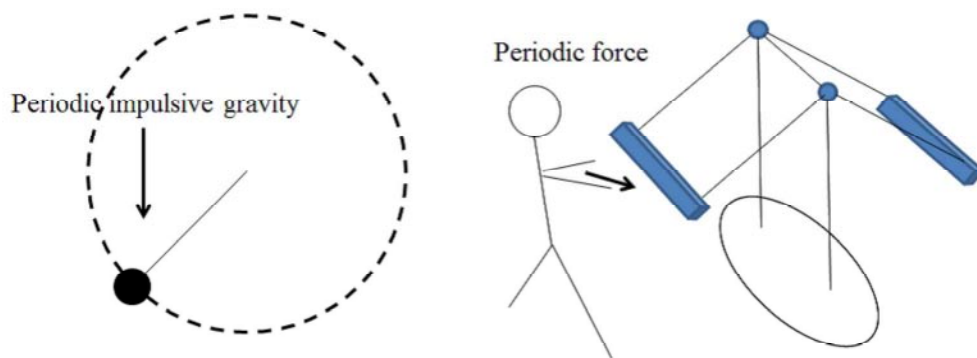


図 1.9 標準写像 (1.12) は周期的に変化する重力中の振り子の運動や位置に依存する周期外力が加わるブランコ（振り子）の運動を記述するモデルである [Chirikov, 1979]。

ラス構造が壊れる臨界パラメータ K_c （後述）が数值的、理論的に予想されており、その最終的に壊れるトーラスは最終 KAM トーラスと呼ばれている（図 1.10 の右から二番目）。KAM トーラスが壊れた後にはトーラスの残骸とでも言うべき測度 0 のカントール集合である普遍集合（カントールラス）が相空間上に分布することが知られている（図 1.10 の最右） [Katok, 1983; MacKay et al., 1984; Mather, 1984]。さらに、カントールラスはリプシッツ連続な曲線上に分布することも数学的に示されている [Katok, 1982; Moser, 1986]。

一方、トーラスの外側（カオス領域）から相空間構造を見ると、一般のハミルトン系ではトーラスとカ

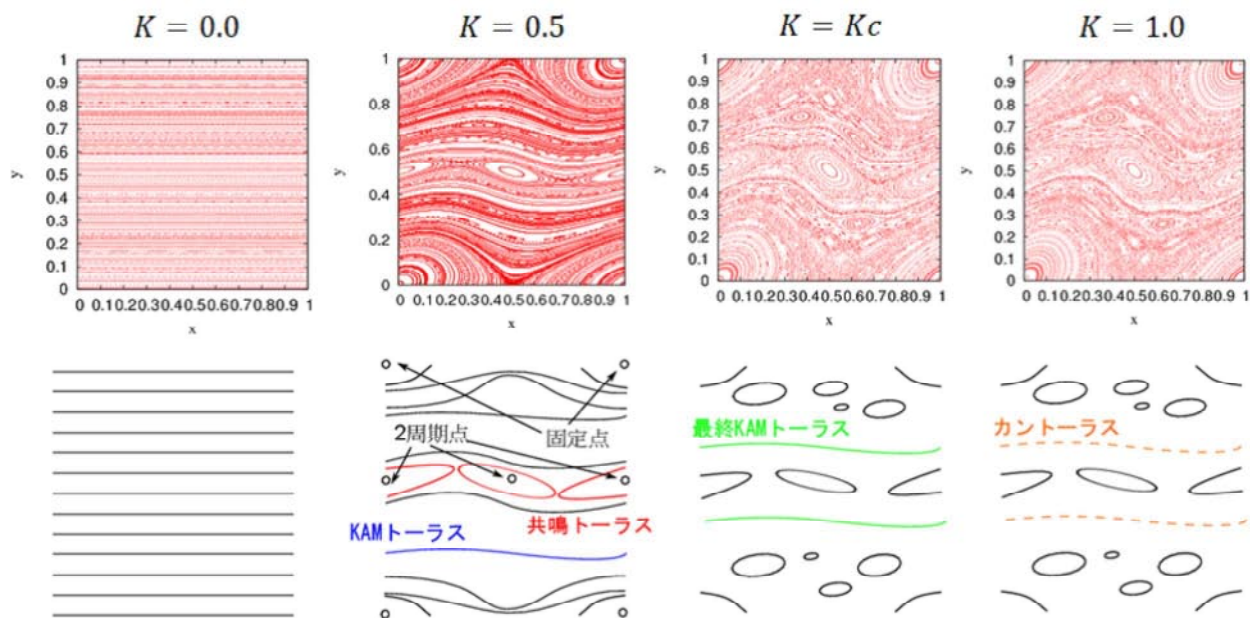


図 1.10 ハミルトン系の相空間の変化。 $K = 0.0$ では、ほとんど全ての軌道はトーラス上の準周期軌道になり、測度 0 で周期点が存在する。 $K = 0.5$ では有理数の回転数をもつ周期軌道が共鳴トーラスに変化し、有理数近似の収束の遅い無理数の回転数をもつ周期軌道は変形を受けた KAM トーラスへと変化する。 $K > K_c$ において全ての KAM トーラスが崩壊し、カントール集合上の不変集合（カントールラス）に変化する。

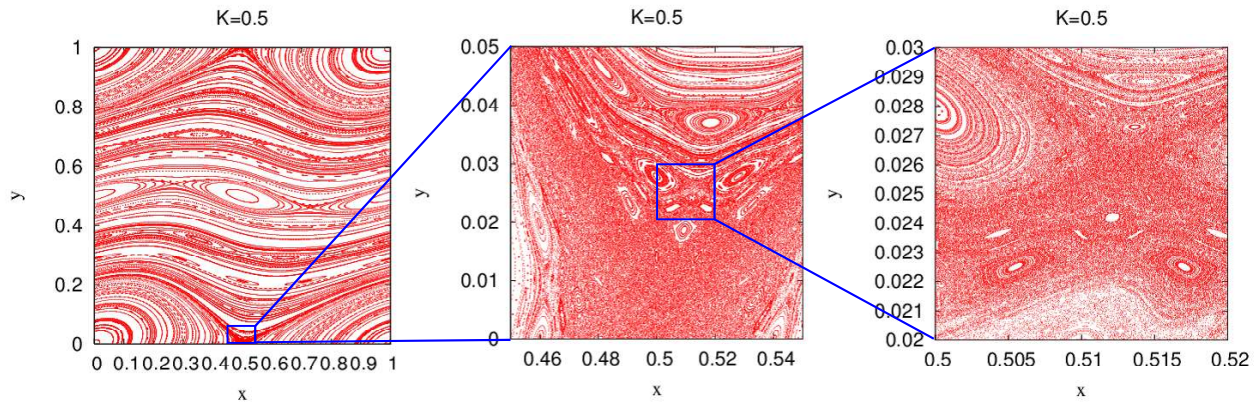


図 1.11 ハミルトン系の相空間における一つのカオス領域の拡大図。どんなに小さい部分領域にもフラクタル島トーラス構造が存在すると考えられている。

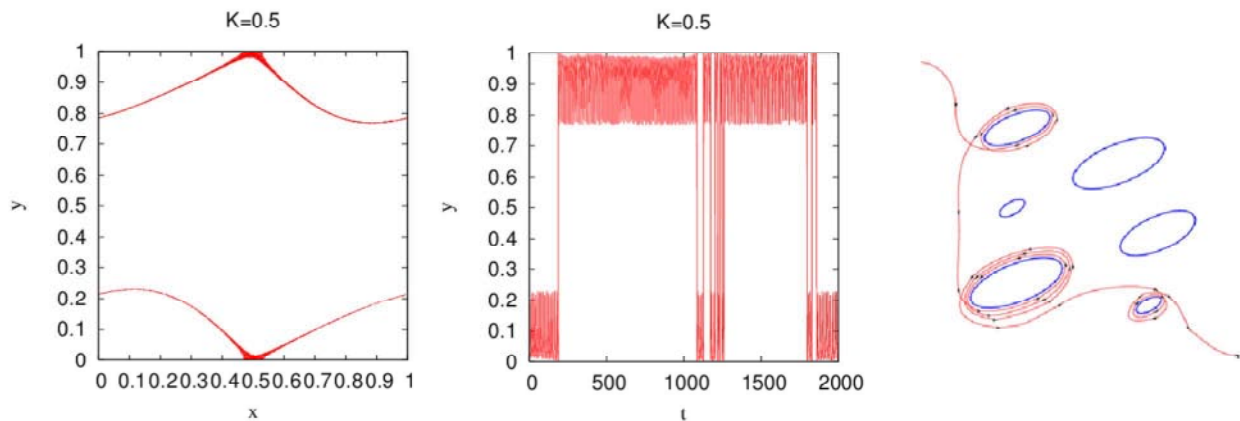


図 1.12 一つのカオス領域（左図）における y 方向の軌道（中央）を示している。右図は軌道がトーラス近傍に長時間滞在しながら遷移していく様子の概念図を示している。

オスの境界を見分けるのが困難であることが知られている。^{*20} 図 1.11 は $K = 0.5$ の場合のある一つのカオス領域の拡大図を示しているが、どんなに細かい分割でカオス領域の境界構造を観測しても無限の階層の超微細構造がフラクタル的に分布していることがわかる。また、このフラクタルは正のルベグ測度をもつ太ったカントール集合であることが確かめられている [Umberger and Farmer, 1985]。

以上のように、一般のハミルトン系の相空間構造はフラクタル島トーラスをもつ微細な空間構造を持っているが、その空間構造に起因して軌道の時間変化も複雑な振る舞いを示す。図 1.12 左は $K = 0.5$ のときのある一つのカオス領域の一本の軌道のみを描いているが、 y の時間発展は図 1.12 中央のように相空間を上下に繰り返し運動することがわかる。これは、軌道が非常に長い時間トーラス近傍に準周期的な運動をしながら滞在し（スローダイナミクス）、あるいはトーラスから遠い場所でカオス的に振る舞う運動をしたりしながら相空間上を経巡るためであると考えられている（図 1.12 右）。スローダイナミクスはフラクタル的階層構造に軌道が束縛されることに起因するといくつかのグループによって提案されている

*20 K がほんのわずかなでも $K \neq 0.0$ の場合には、数値計算でも確認が困難な階層に必ずカオス領域が発生している。

[Greene et al., 1981; MacKay et al., 1984]。この考えに沿ってフラクタル構造にマルコフ性を仮定したモデルによって、島トーラスの分岐構造が明らかにされている [Meiss and Ott, 1986]。トーラス領域に着目して、様々なトーラスの回転数について普遍的なスケーリング法則が存在することも知られている [Aizawa et al., 1989]。一方で、スローダイナミクスがカントーラスに軌道が束縛されることに起因すると考えているグループもあり [Efthymiopoulos et al., 1997]、カントーラスの隙間に回転扉を仮定して相空間内の輸送を考察した研究もある [MacKay et al., 1984]。いずれにしてもスローダイナミクスはトーラス近傍の微細構造におけるダイナミクスが本質的に重要である。

このスローダイナミクスに起因して、カオス領域で相関関数はべき的減衰を示し [Karney, 1983; Chirikov and Shepelyansky, 1984]、 $1/f$ パワースペクトルが出現することが知られている [Kohyama, 1984; Geisel et al., 1987]。また、スローダイナミクスで軌道が束縛されている場合に通常より速い異常拡散が現れることも指摘されている [Ishizaki et al., 1993; Ishizaki and Mori, 1997; Zaslavsky, 2002]。

1.3.2 局所的ダイナミクス

上記で示した局所的なトーラス近傍に長時間滞在するスローダイナミクスの性質を明らかにするために、様々な側面から研究がなされている。トーラスの安定性を数学的に明らかにした KAM 理論とトーラス近傍に軌道が指数的に安定に存在する時間を評価したネコロシェフ定理に代表される解析的アプローチを概観する。また、トーラス近傍ダイナミクスを理想化した次元写像によって解析するエルゴード論的アプローチについても主要な結果について紹介する。最後に、Greene によって切り開かれた繰り込み群の方法と関連するスケーリング論的アプローチを示す。

解析的アプローチ

ポアンカレは自身の懸賞論文の中で制限三体問題について以下の定理を示した [Ito, 1998]。ここで、作用-角変数 (I, θ) と摂動 ε を用いて、方程式

$$\begin{cases} \dot{\theta}_k = \frac{\partial H}{\partial I_k}, & \dot{I}_k = -\frac{\partial H}{\partial \theta_k} \quad (k = 1, \dots, n), \\ H(\theta, I, \mu) = H_0(I) + \varepsilon H_1(\theta, I) + \varepsilon^2 H_2(\theta, I) + \dots \end{cases} \quad (1.13)$$

を考える。

ポアンカレの定理

ハミルトン系 (1.13) において、非摂動項 H_0 が非退化 ($\det(\partial^2 H_0 / \partial I^2) \neq 0$) ならば、一般にベクトル場 X_H には、 H と関数的に独立な第一積分で ε に関して実解析的なものは存在しない。

この定理が「3 体問題は解けない」と言われる根拠であるが、以下ポアンカレ以降に発展してきた正準摂動論を展開し、KAM 理論及び Nekhoroshev 定理の概観へ向かう。

ハミルトン系の正準摂動論の方針は、式 (1.13) のような摂動ハミルトニアンが与えられた場合に、 $\varepsilon \neq 0$ のときの解を求めるために変数 (I, θ) を正準変換によって変数 $(\bar{I}, \bar{\theta})$ として、ハミルトニアン $H(I, \theta)$ を

新しいハミルトニアン $\bar{H}(\bar{I})$ と変形することである。まずは 1 自由度 (I, θ) に話を限って議論を進める。母関数 S を

$$S(\bar{I}, \theta) = \bar{I}\theta + \varepsilon S_1(\bar{I}, \theta) + \varepsilon^2 S_2(\bar{I}, \theta) + \dots$$

と仮定し、 $\bar{H} = \bar{H}_0 + \varepsilon \bar{H}_1 + \dots$ と展開する。このとき

$$I = \bar{I} + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta}, \bar{\theta} = \theta + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \bar{I}}$$

と書けるから、元のハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H(I, \theta) &= H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta) + \dots \\ &= H_0\left(\bar{I} + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right) + \varepsilon H_1\left(\bar{I} + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta}, \bar{\theta} - \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \bar{I}}\right) + \dots \\ &= H_0(\bar{I}) + \varepsilon \left\{ \frac{\partial H_0}{\partial \bar{I}} \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + H_1(\bar{I}, \bar{\theta}) \right\} + O(\varepsilon^2) + \dots \end{aligned}$$

と展開できるので、新しいハミルトニアンについて

$$\begin{cases} \bar{H}_0(\bar{I}) = H_0(\bar{I}), \\ \bar{H}(\bar{I}, \theta) = \omega(\bar{I}) \frac{\partial S_1(\bar{I}, \bar{\theta})}{\partial \theta} + H_1(\bar{I}, \theta) \end{cases}$$

が言える。ただし、 $\omega(\bar{I}) = \frac{\partial H_0(\bar{I})}{\partial \bar{I}}$ である。 $\bar{H}_1(\bar{I}, \bar{\theta})$ を \bar{I} のみの関数にしたいので、

$$\langle H_1 \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\theta} H_1(\bar{I}, \bar{\theta}), \{H_1\} \equiv H_1 - \langle H_1 \rangle$$

を導入すると、

$$\begin{cases} \bar{H}_1 = \langle H_1 \rangle, \\ \omega \frac{\partial S_1}{\partial \theta} = -\{H_1\}. \end{cases}$$

これより、新しいハミルトニアンは

$$H = H_0(\bar{I}) + \varepsilon \langle H_1(\bar{I}, \bar{\theta}) \rangle$$

と書けて、 \bar{I} のみの関数となる。 $\{H_1\}, S_1$ のフーリエ級数展開を考えると

$$\begin{aligned} \{H_1\} &= \sum_{n \neq 0} H_{1n}(\bar{I}) e^{in\bar{\theta}}, \\ S_1 &= \sum_n S_{1n}(\bar{I}) e^{in\bar{\theta}} \end{aligned}$$

であるから、 S_{10} は定数で、 $S_{1n} = \frac{H_{1n}}{in\omega}$ は n が大きい場合に S_1 の収束が良くなる。

しかし、 S の収束性が良いのは 1 自由度の場合であって、一般に n 自由度 $(I_1, \dots, I_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ の場合には母関数は

$$S' = \bar{\mathbf{I}}\bar{\theta} + \varepsilon \sum_{\vec{m}} S_{1m} e^{i\vec{m}\bar{\theta}}$$

となる。つまり、

$$S(\bar{\mathbf{I}}, \bar{\theta}) = \bar{\mathbf{I}}\bar{\theta} + \varepsilon i \sum_{\vec{m} \neq 0} \frac{H_{1\vec{m}}(\bar{\mathbf{I}})}{\vec{m} \cdot \omega(\bar{\mathbf{I}})} e^{i\vec{m}\bar{\theta}}$$

と書ける。右辺第二項は $\vec{m} \cdot \omega(\mathbf{I}) = 0$ となる共鳴条件を満たすとき、摂動 ε がどんな値であってもフーリエ級数は収束しない。この問題は小分母の問題と呼ばれ、後に Kolmogorov がアイデアを与えるまで解析力学の大問題であった。

Kolmogorov のアイデアは、フーリエ級数の成分を逐次近似していくことにより、フーリエ級数が発散しないように数列を構成していくというものであった [Kolmogorov, 1954]。このアイデアは後に連続系において Arnold が証明を与え [Arnold, 1963a,b]、写像系において Moser が証明を与えた [Moser, 1967] ので、KAM 理論と呼ばれている。KAM 理論はハミルトニアンが

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta) + \dots$$

と書ける場合に以下の不変トーラスの存在条件を満たす場合を考える。

不変トーラスの存在条件

i) 非共鳴条件

任意の整数 m, n と定数 $\delta > 0, \alpha > 0$ に対して

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{m}{n} \right| > \frac{\delta}{n^{1+\alpha}} \left(\omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_j} \right).$$

ii) 非退化条件 (ツイスト条件)

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial I_j} \right| \neq 0.$$

ただし、 $\neq 0$ は恒等的に 0 でないことを意味する。

i) 微小摂動

任意の $b > 0$ に対して

$$|H_1| < O \left(\left| \frac{\partial \omega_i}{\partial I_j} \right|^{-b} \right)$$

このとき、KAM 理論は次のことを主張する。

「ハミルトニアンの摂動が小さければ、変形を伴うが
不変に保たれるトーラス (KAM トーラス) が相空間上に大量に残る」

この主張は、図 1.10 の相空間の描像の重要な根拠となっている。この主張の数学的証明には、有理数で近似しにくいような回転数をもつトーラス写像は小さい摂動の下でトーラス写像に一対一に対応するようは共役関数が構成可能であることを述べている [Arnold, 1963a,b]。つまり、小さい摂動の下では、トーラスは変形を伴いながら相空間上に不変集合として残ることがいえる。KAM 定理のツイスト条件を破ったノンツイスト写像は篠原によって研究されており [Shinohara and Aizawa, 1997]、ツイスト条件を破った場合への拡張が課題となっている。

トーラス近傍の軌道のダイナミクスの安定性を議論しているのが、次の Nekhoroshev の定理である。

Nekhoroshev の定理

非摂動ハミルトニアン H_0 が点 I で steep であるとき、 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ に対して、ハミルトニアン (1.13) の全ての軌道 $(I(t), \theta(t))$ が任意の $t \in [0, T(\varepsilon)]$ に対して

$$|I(t) - I(0)| < A(\varepsilon)$$

を満たす ε_0 が存在する。ただし、正定数 a, b を用いて

$$A(\varepsilon) = \varepsilon^b, \quad T(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^a}\right)$$

で表わされる。

H_0 が点 I で steep であるという条件は、 I の勾配 $\nabla \frac{\partial H_0}{\partial I}$ が正であるという意味であるが、詳細な定義は文献 [Nekhoroshev, 1977] の p.28 の定義 4.1.B に記載されている。Nekhoroshev の定理は、軌道が指数的に安定に存在する摂動 ε_0 が存在することを述べている。つまり、どんなに摂動が小さくともトーラス上の軌道でなく指数的に安定であるカオス領域が相空間上に存在しているといえる。この定理を用いて、最外殻トーラス近傍の滞在時間分布が log-Weibull 分布に従うことがいくつかの系で示されている [Aizawa et al., 1989]。また、一般の多次元ハミルトン系においてはカオス領域は相空間のある部分平面に閉じておらず、指数的に安定ではあるが異なる次元の空間に遷移する軌道が存在することも言える。この多次元の大域的運動は Arnold 拡散と呼ばれ、最近でも盛んに研究されている [Froeschle, 1997; Froeschle et al., 2006; Shinkai and Aizawa, 2012]。

エルゴード論的アプローチ

ハミルトン系のスローダイナミクスはフラクタル相空間上を経巡るために、相空間構造の解析が非常に困難であることは上記で示したが、そのスローダイナミクスの本質のみを取り出して次元写像を構成する試みによっていくつかの重要な帰結が得られている。

i) 変形ベルヌイ写像

付録 A にまとめた変形ベルヌイ写像のエルゴード特性は、ハミルトン系のスローダイナミクスのモデルになりうるということが指摘されている [Aizawa et al., 1989]。トーラス近傍の淀み運動の強さを中立不動点近傍の非線形性によってコントロールして、そこでのリアプノフ指数や大偏差特性を議論しようとする立場である。詳細は付録 A にゆずるが、無限測度エルゴード特性の中にパワースペクトルの $\omega^{-\nu}$ スペクトルなどハミルトン系カオスと多くの類似点があることが明らかにされている [Aizawa, 1984]。実際、保存力学系であるピアンキタイプ 9 宇宙膨張率モデルにおいて、無限測度力学系が抽出されており [Aizawa et al., 1997]、ハミルトン系に無限測度力学系が埋め込まれているという考え方の部分的な根拠が徐々に明らかにされてきている。また、無限測度の考察のみならず、従来のエルゴード特性量である A エントロピーやアラン分散のような特徴量を拡張していくべきであることも提案されている [Aizawa and Kohyama, 1984]。

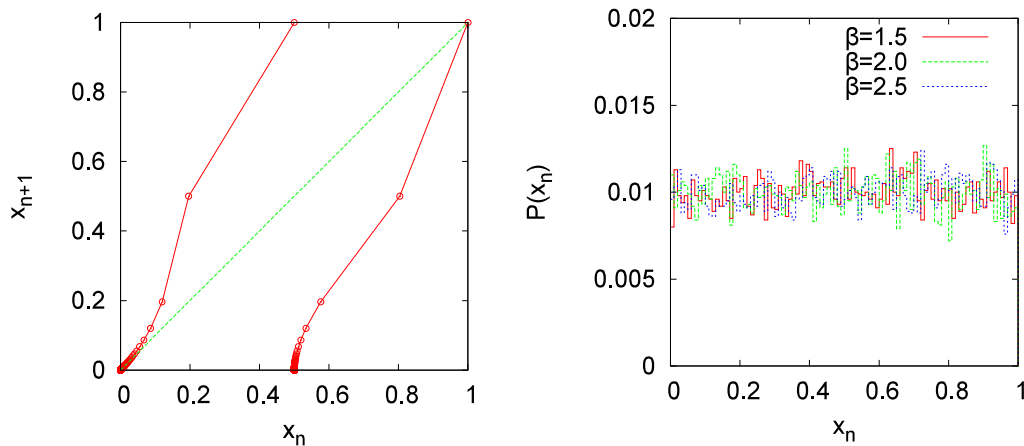


図 1.13 一様測度を不変に保つ非双曲次元写像（左）。右図は非線形パラメータ β を変えても測度 $P(x_n)$ が一様測度を不変に保つ様子を表わしている。

ii) 一様測度を不変に保つ非双曲次元写像

変形ベルヌイ写像ではパワースペクトルに $\omega^{-\nu}$ スペクトルが現れるパラメータ領域をもつことがわかっていて（付録 A パワースペクトル）。しかし、変形ベルヌイ写像は無限測度を不変に保つため、有限測度（エネルギー）を保存するハミルトン系の描像に合わない。そこで考案されたのが、一様測度を不変に保つ区分線形写像である（図 1.13）[Miyaguchi and Aizawa, 2007]。図 1.13 右は非線形パラメータ β を変えた場合でも不変測度 $P(x_n)$ が一様測度を不変に保つ様子を表わしている。この写像は中立不動点で軌道が束縛されるが、一方の再入射領域の微分を意図的に発散させることで全体として一様測度を不変に保つ。すなわち、一般のハミルトン系で予想されているような中立不動点による局所的に安定な機構を抑制する不安定性を兼ね備えている。この写像はスペクトル解析によって、非線形パラメータ β に応じて

$$S(f) \sim \begin{cases} \frac{1}{f^{2-\beta}}, & \text{for } 1 < \beta < 2 \\ |\ln f|, & \text{for } \beta = 2 \\ \text{const}, & \text{for } \beta > 2 \end{cases} \quad (1.14)$$

が得られている [Miyaguchi, 2006]。この結果からわかることは、再入射されるメカニズムがあれば変形ベルヌイ写像の非線形指数 B が定常領域 $1 < B < 2$ であってもパワースペクトルに $S(f) \sim f^{-\nu}$ スペクトルを生じることである。文献 [Miyaguchi, 2006] では、ハミルトン系のスローダイナミクスが次の 2 つの性質を併せ持っていることが指摘されている。（性質 A）カオス軌道がトーラス近傍に長時間束縛される。（性質 B）長時間束縛される領域にカオス軌道が入射することを抑制する。

iii) Nekhoroshev 安定性をもつ非双曲次元写像。

Nekhoroshev の定理によって、微小摂動ハミルトン系において指数的に安定な軌道が存在することが示されたが（図 1.14 右）、指数的な安定性は変形ベルヌイ写像では $B \rightarrow \infty$ のパラメータに相当し、その特性をうまく記述できない。そこで考案されたのが、Nekhoroshev 安定性をもつように非線形性を拡張した次元写像である [Shinkai and Aizawa, 2012]（図 1.14 左）。この写像は無限測度を保つ場合も一様測度を保つ場合も一般化されている [Shinkai, 2012]。この写像の特徴は普遍的にハミルトン系と同様の

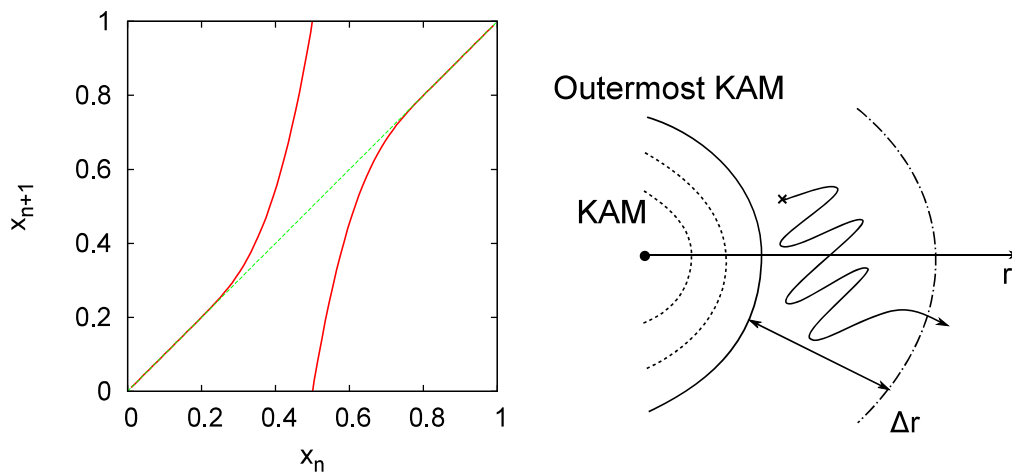


図 1.14 Nekhoroshev 安定性をもつ非双曲次元写像 (左) と最外殻 KAM トーラス近傍から脱出する軌道の概念図 (右) を表わしている。

$1/f$ パワースペクトルが出現することであり、理論的にも数値的にも確かめられている。

スケーリング理論によるアプローチ

フラクタル相空間構造に自己相似性を仮定して、繰り込み群の方法によってフラクタル階層構造の枝分かれ構造を特定する手法が提案されている [Shenker and Kadanoff, 1982; MacKay, 1983; MacKay et al., 1984]。Greene は標準写像の n 回写像後の写像 T^n が繰り込み変換で記述できることを発見し、繰り込み変換によって T^n の留数を計算できることを見出した [Greene, 1979; Lichtenberg and Lieberman, 1992]。また、標準写像は、以下に示す 2 つの写像の合成で書き表わせる。

$$I_1(x, y) = \begin{cases} -x, \\ y - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x, \end{cases} \quad (1.15)$$

$$I_2(x, y) = \begin{cases} y - x, \\ y. \end{cases} \quad (1.16)$$

標準写像は $T_S = I_2 I_1$ と表される。この 2 つの写像によって標準写像では周期点がどの位置にあるかを特定することができる。例えば、図 1.15 のように、回転数 $W = 2584/4181$ のときの $K = 0.5$ と $K_c = 0.9716353$ の場合の周期点の位置を特定できる。Greene はこの周期点の構造に着目して、繰り込み群構造を周期点列を無理数に漸近させる過程を追い、留数の計算によって最終 KAM トーラスが崩壊する臨界値を特定することに成功した [Greene, 1979]。これは従来のトーラス崩壊の臨界値の数値結果 ($K \sim 0.989$) [Chirikov, 1979]、理論結果 ($Kc \sim 4/3$) [Mather, 1984] ($Kc \sim 63/64 \approx 0.9844$) [MacKay and Percival, 1985] の精密化された結果であった。

さらに、最終 KAM 崩壊前後で脱出率という特性量が周期点列に従って異なるスケーリング法則をもつことが示されている [Bensimon and Kadanoff, 1984]。式 (1.15)(1.16) によって特定したフィボナッチ数 q_i の系列の周期点列に対して、その周期点列を含むような領域 R とその補集合 \bar{R} を仮定すると、標準写

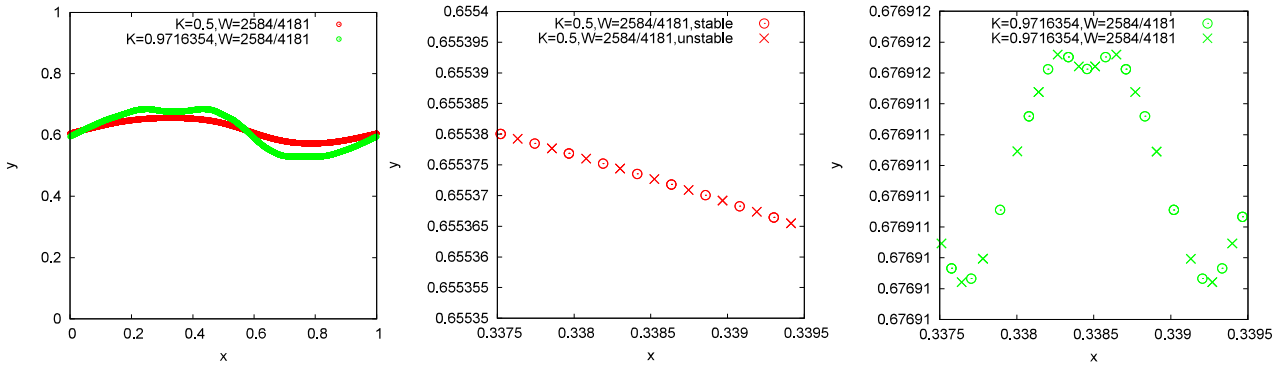


図 1.15 左図は、回転数が $W = 2584/4181$ の場合に $K = 0.5$ 及び $K_c = 0.9716354$ における周期点を表わしている。中央と右の図は左図の拡大図であり、 \circ は安定周期点、 \times は不安定周期点を表わしている。

像 T_S における脱出率 $L(T_S, R)$ は

$$L(T_S, R) = \Omega(TR \cap \bar{R})$$

と定義される。ただし、Lebesgue 測度を Ω とする。このとき、文献 [Bensimon and Kadanoff, 1984] では定数 ν を使った変数 $\xi = q_i |K - K_c|^\nu$ に対して、次のことを確かめた。

$$\begin{aligned} L_-(\xi) &\sim \exp(-\gamma\xi), & \text{for } K \leq K_c, \\ L_+(\xi) &\sim \xi^{d_0}, & \text{for } K > K_c. \end{aligned}$$

ただし、 L_- は $K \leq K_c$ における脱出率、 L_+ は $K > K_c$ における脱出率を表わす。また、 γ は正定数、 d_0 は定数である。この結果は、パラメータ K_c の前後で脱出率のスケージング法則が異なることを示している。Shenker らは無理数回転する写像の共役写像 $u(t)$ を計算し、パラメータ K_c で $u(t)$ のフーリエ成分 $A(\omega)$ が発散する様子を明らかにした (図 1.16) [Shenker and Kadanoff, 1982]。つまり、 $K < K_C$ ではフーリエ級数は収束し、 $K \simeq K_c$ では、発散することを示した。

また、文献 [Aizawa, 1989b] では Nekhoroshev 安定性を満たす場合に拡張されており、トーラス近傍

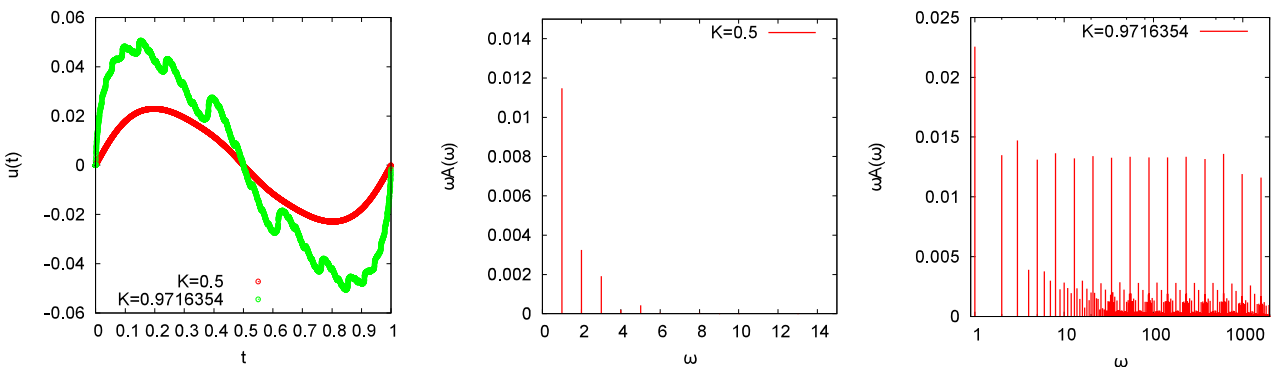


図 1.16 無理数回転する写像の共役写像 $u(t)$ (左図) と、 $K = 0.5$ 及び $K = 0.9716354$ におけるフーリエ成分 $\omega A(\omega)$ の数値結果を示す。 $K = 0.5$ では小さい ω で収束しているのに対し、 $K = 0.9716354$ では ω が大きくなっても収束が悪い。

に滞在する時間 Q について

$$Q \sim \mu^{-\frac{d_0}{2}+1} \exp(\gamma'/\sqrt{\mu}), \quad \text{for } K \leq K_c,$$

$$Q \sim \gamma'^{-d_0}, \quad \text{for } K > K_c.$$

ただし、 $\gamma' = \gamma|K - K_c|^\nu, \Omega \sim \mu$ である。この結果は、最終 KAM トーラス崩壊前後のトーラス近傍軌道の淀み時間のスケーリング法則を述べている。

1.3.3 大域的ダイナミクス

ここまで、トーラス近傍の不安定性の弱い局所的スローダイナミクスへのアプローチを紹介してきた。しかし、カオス領域の一本の軌道はスローダイナミクスを経た後に、大部分のカオス領域で不安定性の強いカオス的ダイナミクスを持っている。つまり、ハミルトン系カオスの軌道はスローダイナミクスとカオス的ダイナミクスの繰り返しで表現されるダイナミクス（大域的ダイナミクス）を持つ（図 1.21 の概念図参照）。以下では、文献 [Aizawa et al., 1989] で切り開かれたハミルトン系カオスの大域的ダイナミクスの定量化の試みを紹介する。

リアプノフ指数の分布

文献 [Aizawa et al., 1989] では、長さ N の時系列を長さ N_1 の小区間に分割し、その分割領域について有限時間リアプノフ指数の分布が計算されている。小区間の有限時間リアプノフ指数は接空間の局所拡

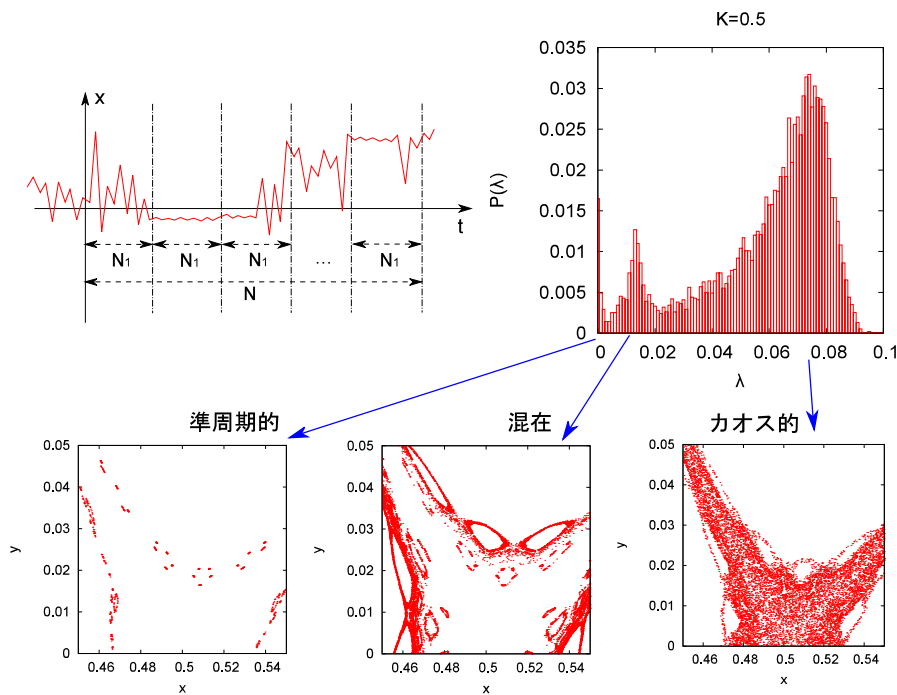


図 1.17 リアプノフ指数の分布。長さ N の時系列を長さ $N_1 (= 10^5)$ の部分領域に分割する（左上）。分布は $\lambda \approx 0$ のピーク（準周期軌道）と $\lambda \approx 0.07$ のピーク（カオス軌道）と中間領域のピーク（混在軌道）の 3 つのピークをもつ。

大率の構造を表わす。分布は図 1.17 右上のようになり、3つのピークが観測される。相空間上の運動と対応付けると、 $\lambda \simeq 0$ のピークは島トーラス近傍の準周期軌道に対応している。一方、 $\lambda \simeq 0.07$ 付近に最大のピークを持ち、このピークはカオス軌道に対応している。中間領域にあるピークはカオス軌道と準周期軌道が混在した軌道である事が予想されている。リアプノフ指数の分布を調べることで、カオス軌道の全体の中の安定な軌道と不安定な軌道の割合を調べることができる。この考え方は第4章で基本的な役割をもつ。文献 [Shinkai and Aizawa, 2012] の結果では、1次元写像において準周期軌道のピーク $\lambda = 0$ とカオス軌道のピークが再現され、 δ -関数と安定分布の重ね合わせであることが示されているが、混在軌道を持つ中間領域は未だ理論的に明らかでない。

パワースペクトル密度の分布

大域的ダイナミクスの別の定量化は上記で述べた分割時系列のパワースペクトルの分布関数を調べるといものである [Aizawa et al., 1989]。一般にハミルトン系の軌道は図 1.18 左のように無数のピークがある針の山のようなスペクトルになることが知られている。これは無数の島トーラスに軌道が束縛されることにより、無数の周波数成分をもつことに由来する。1.2.3 節で導入した次元スペクトルを無数のピークをもつパワースペクトル密度の分布関数に適用して計算する。その結果、大域的スペクトル $f(\alpha)$ は部分領域で異なる曲線を描く。文献 Aizawa et al. [1989] では、 $f(\alpha) = \alpha$ となる点、すなわち、情報次元が分布することから、部分領域に異なるエルゴード的測度が分布していることを示唆している（多重エルゴード性）。このことに関しては、第4章でいくつかの例について詳しく解析する。

図 1.19 は、パワースペクトル密度のある周波数 ($f_c = 1/10$) におけるピークの両側の特異性を計算した結果を示している。そのスケーリング法則は

$$\langle S(f) \rangle \sim \begin{cases} |f - f_c|^{-1.01349} & (f < f_c), \\ |f - f_c|^{-1.05374} & (f > f_c) \end{cases}$$

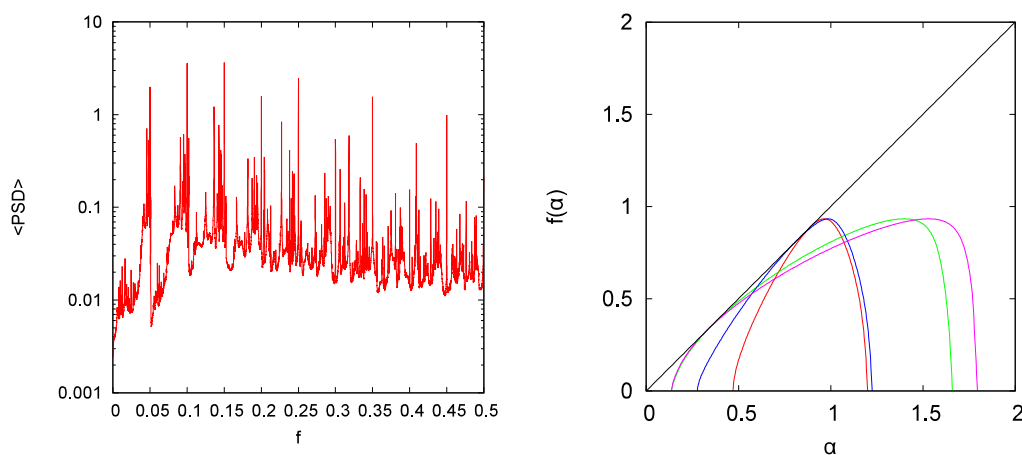


図 1.18 平均パワースペクトル密度の分布 (左) と部分時間領域の大域的スペクトル $f(\alpha)$ (右) を表わしている。大域的スペクトルが部分領域で異なる曲線を描くことから、部分領域には異なるエルゴード的測度が分布していることを示唆している。

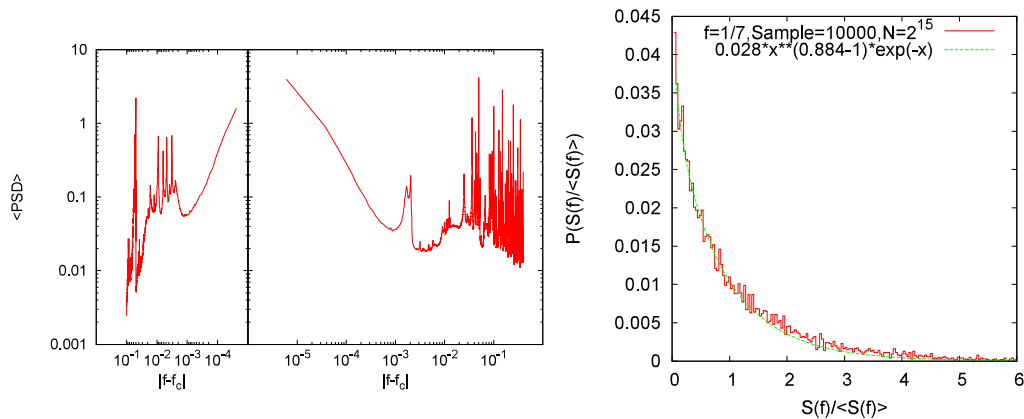


図 1.19 周波数 $f_c = 1/10$ の周りでパワースペクトル密度の特異性は $1/f$ ゆらぎを示す (左)。また、周波数 $f = 1/7$ と固定した場合のパワースペクトル密度の分布関数はガンマ分布に従う [Aizawa et al., 1989]。

が得られている [Aizawa et al., 1989]。このことから、それぞれのピークで $1/f$ ゆらぎが出現していることが示唆される。図 1.20 右は、ある周波数 ($f = 1/7$) におけるパワースペクトル密度の分布関数を示している。この分布はパラメータ η のガンマ分布

$$P(x) = \frac{1}{\Gamma(\eta)} x^{\eta-1} e^{-x},$$

に従うことが数値的に明らかにされている [Aizawa et al., 1989]。

アラン分散

アラン分散は付録 A で導入されたように、クォーツ時計の周波数の非定常性を特徴づける量であった。この考え方を発展させて標準写像の軌道に適用した文献 [Kohyama, 1984] では、パラメータ K に応じて以下のような領域に分類できることが示されている。

- i) 準周期時間領域 ($\sigma_A^2(N) \sim N^{-2}$) .
- ii) 弱い非定常時間領域 ($\sigma_A^2(N) \sim N^0$) .
- iii) 強い非定常時間領域 ($\sigma_A^2(N) \sim N^\gamma, \gamma > 0$) .
- iv) 拡散時間領域 ($\sigma_A^2(N) \sim N^{-1}$) .

文献 [Kohyama, 1984] の結果を同じパラメータで追試することはできなかったが、以上の分類は不安定周期点 $(0, 0.5)$ の周りの軌道について追試した結果 (図 1.20) にも見出される。例えば、 $K = 1.2 \sim 1.4$ の $N \gg 1$ の領域で拡散時間領域 ($\sigma_A^2(N) \sim N^{-1}$) が現れ、 $K = 1.1$ の $1 \leq \log_{10} N \leq 2$ の領域では強い非定常時間領域 ($\sigma_A^2(N) \sim N^\gamma, \gamma > 0$) に属している。 $K = 1.0$ では時間領域ごとにアラン分散の振る舞いが異なることもわかる。これはパラメータ K によって非定常的性質が異なることを意味している。また、アラン分散と全パワースペクトルの収束性と関係していることが分かっているが [Aizawa, 1989a]、第 5 章で詳しく論じる。

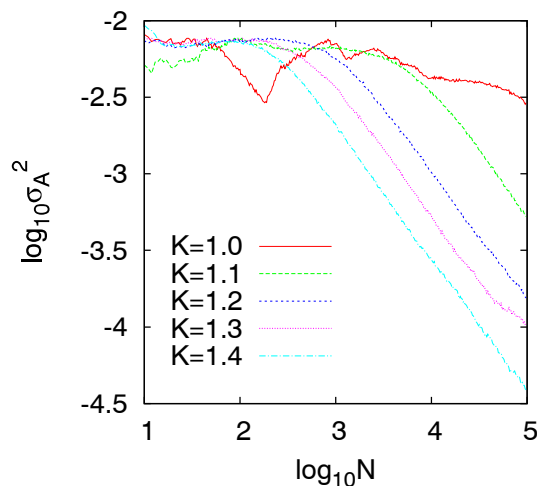


図 1.20 標準写像のアラン分散。 $K = 1.2 \sim 1.4$ では拡散時間領域 ($\sigma_A^2(N) \sim N^{-1}$) が現れ、 $K = 1.1$ の $1 \leq \log_{10} N \leq 2$ の領域では強い非定常時間領域 ($\sigma_A^2(N) \sim N^\gamma, \gamma > 0$) (n^{-1}) が現れる。 $K = 1.0$ では時間領域ごとに振る舞いが異なる。

まとめ

ハミルトン系カオスについて、以下のようにまとめることができる (図 1.21 参照)。

「ハミルトン系カオスはトーラス近傍のスローダイナミクスに起因して、カオスの運動と準周期的運動を繰り返し遷移しながら大域的に運動する。そのスローダイナミクスは、確率測度及び無限測度エルゴード特性を部分的に含んでいることが予想されている。」

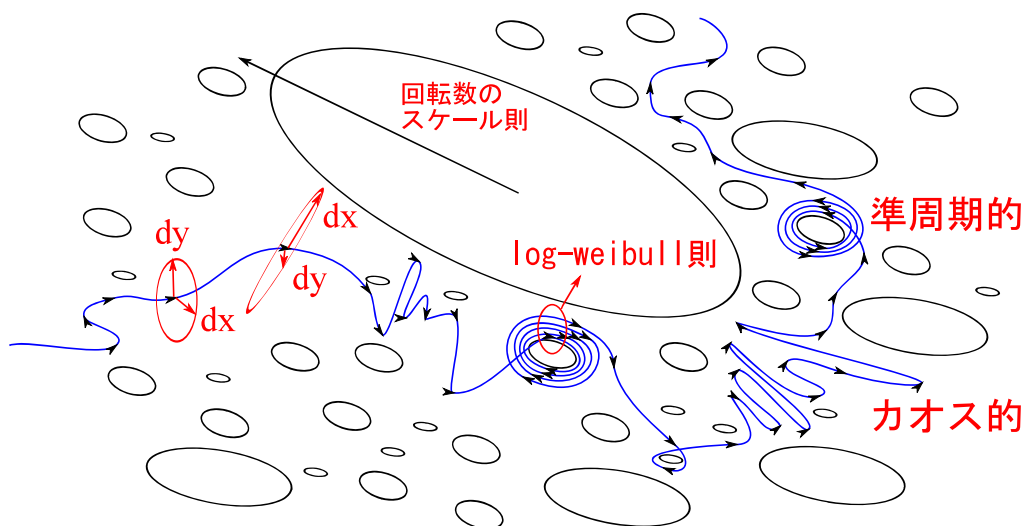


図 1.21 ハミルトン系カオスの大域的ダイナミクスの概念図。

1.3.4 フラクタル構造をもたないハミルトン系の例

マッシュルームビリヤード系

フラクタル空間構造をもつハミルトン系は解析が非常に困難であるが、近年フラクタル構造を持たないビリヤード系が発見された [Bunimovich, 2001, 2003]。ビリヤード系は容器の中を弾性衝突する軌道がカオス的になるか準周期的になるかについて考察するビリヤード問題が基礎にある [Chernov and Markarian, 2006]。フラクタル空間構造を持たず、カオスとトーラスが直線で棲み分ける境界を持つマッシュルームビリヤード系を導入する。マッシュルームビリヤード系は図 1.22 左に示すような半径 R の半円領域と高さ h 幅 $2r$ の長方形の茎領域で構成されるビリヤード台を粒子が弾性衝突を繰り返しながら運動する力学系である。図 1.22 左にはカオス軌道 (赤) とトーラス上の軌道 (青) を示している。図 1.22 中央の赤の領域 ($x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0$) に軌道が衝突する際の位置座標 θ と衝突後の軌道角運動量 L を定義すると、図 1.22 右のようなポアンカレ断面を構成できる。このとき、ビリヤード台の粒子の運動はポアンカレ断面上の点に置き換えることができ、トーラス上の運動はトーラス領域の一部 (青) に、カオス軌道はカオス領域 (赤) にプロットされている。カオス軌道は完全なカオスではなく、最外殻トーラス近傍に長時間滞在するスローダイナミクスを示す。このスローダイナミクスに起因して、トーラス近傍のサブイバル確率 $S(n)$ がべき分布に従うことが知られている。すなわち、

$$S(n) \sim n^{-1}$$

が得られている [Altmann et al., 2005, 2006; Tanaka and Shudo, 2006; Miyaguchi, 2007; Akaishi and Shudo, 2009]。

この評価はトーラス近傍領域からの脱出時間の分布によって評価されている [Miyaguchi, 2007]。脱出時間の定義は上半円に入射した軌道が再び茎領域に出るまでに図 1.22 中央の赤の領域に衝突する回数で

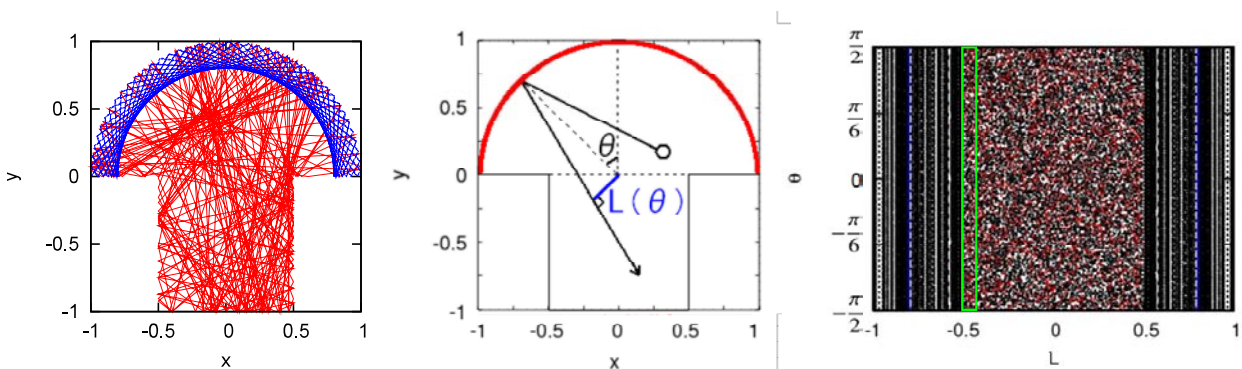


図 1.22 マッシュルームビリヤード系。左図は、カオス軌道 (赤) とトーラス上の軌道 (青) を示している。中央図は、上半円に設定したポアンカレ断面 (赤線) における軌道の位置 θ と軌道角運動量 L を表わしている。右図は相空間 (L, θ) を示しており、カオス領域 (赤) とトーラス領域 (青) が直線で棲み分けられた構造をもつ。また右図の緑で囲われた領域は図 1.23 の右図の領域を示している。

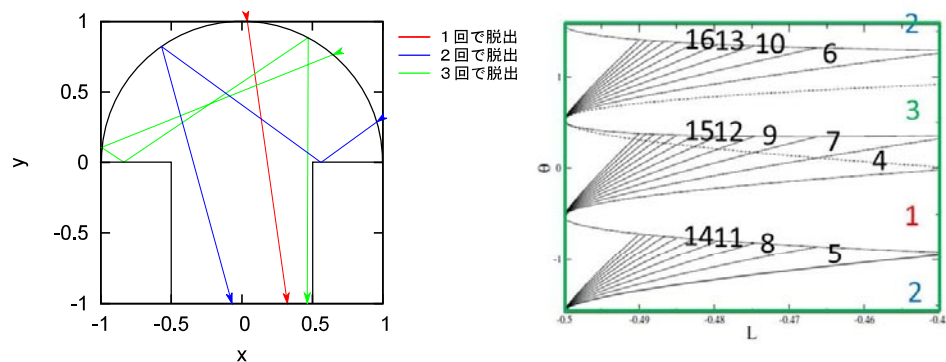


図 1.23 上半円からの脱出の概念図 (左)。上半円を 1 回で脱出する軌道 (赤)、2 回で脱出する軌道 (青)、3 回で脱出する軌道 (緑) をそれぞれ示している。右図は相空間 (L, θ) のカオス領域が脱出時間分布で分割される様子を表わしている。1, 2, 3 回で脱出する領域をそれぞれ赤青緑で色分けしている。

与えられる (図 1.23)。脱出時間分布は幾何学的考察から図右のように表わされ、図の相空間の緑の領域が脱出時間により分割できることを示している。マッシュルームビリヤード系については第 2,3 章で詳しく解析する。

1.4 本論文の目的

上記で概説してきたように、ハミルトン系カオスの全貌を明らかにすることはトーラス近傍のスローダイナミクスのメカニズムを明らかにすることに他ならない。局所スローダイナミクスの性質はいくつかの側面から部分的に明らかにされてはいるものの、フラクタル相空間構造 (1.3.1 節参照) と非定常性を生む無限測度性 (1.3.2 節参照) の関係についてはより踏み込んだ研究が必要である。また、そのような局所スローダイナミクスがリアプノフ指数分布の中間領域のような未解明問題やアラン分散の時間領域の分類問題といった大域的なダイナミクス (1.3.3 節参照) にどのように影響を与えるかについても定量化していく必要がある。

そこで本研究では、局所的ダイナミクスと大域的ダイナミクスの 2 つの大きな目的に分けて議論を展開する。1 つ目の目的は、フラクタル相空間構造を考える上で一つの基盤を与える「不安定周期点の周りの局所スローダイナミクスの性質を明らかにする」ことであり、2 つ目の目的は、ハミルトン系カオスの大域的ダイナミクスを生み出す多重エルゴード性を明らかにするために、「パワースペクトル密度のマルチフラクタル解析とアラン分散についての従来の手法を改良すること」である。以下、各章ごとの具体的な目的と手法について述べる。

第 2 章では、近年注目されているフラクタル構造を持たないハミルトン系であるマッシュルームビリヤード系に摂動を加えることを考える。1.3.4 節で概観したように、マッシュルームビリヤード系のスローダイナミクスは上半円からの脱出時間分布による手法によって、トーラス近傍におけるサバイバル確率のべき則 ($S(n) \sim n^{-1}$) が見出されていた。そこで、トーラス構造を破壊するような屈折を起こす誘電

体を挿入し、「屈折による摂動を加えて、トーラス近傍のスローダイナミクスがどう変化するか」を明らかにする。具体的には、従来得られている上半円からの脱出時間分布の手法を適用し、不安定周期点の周りの構造変化を厳密に決定し、摂動が加わった場合のスローダイナミクスの性質の変化を定量化することを目的とする。

第3章では、第2章の結果の中で課題であった「最外殻トーラスの回転数を無理数に漸近させた場合の相空間構造はどのように変化するか」を明らかにする。モデルは文献 [Miyaguchi, 2007] のマッシュルームビリヤード系の最外殻トーラスの回転数をフィボナッチ系列を用いて有理数比から無理数比に変化させていくモデルを考察する。より具体的な問題は、上述のサバイバル確率のべき則 ($S(n) \sim n^{-1}$) の係数を評価することである。つまり、スローダイナミクスを引き起こす淀み領域の面積を定量的に評価することを目指す。また、マッシュルームビリヤード系にはカオスの海の中に不変集合が形成されることが知られているが [Altmann et al., 2005, 2006]、その不変集合の周りのスローダイナミクスの性質も定量化する。

第4章では、1.3.3節で示したパワースペクトル密度のマルチフラクタル解析を改良することを考える。具体的には、針の山のスペクトルから情報次元の平均値と分散値を計算することで、「カオス軌道の大域的ダイナミクスの中でスローダイナミクスが占める割合はどのくらいあるか」について答えを得ることを目的とする。また、情報次元の平均と分散の意味について考察し、大域的ダイナミクスのそのような情報を抽出できるかを数値計算によって明らかにする。また、この新しい手法を二次元面積保存写像へ適用し、1.3.1節で議論した標準写像とどのような違いがあるかを明らかにする。

第5章では、アラン分散の手法を改良することを考える。ただし、1.3.3節で見たように一般のハミルトン系におけるアラン分散は時間領域ごとにスケーリング法則が異なるため統計的扱いが非常に困難であることがわかっている。そのため、まずは比較的扱いが容易である変形ベルヌイ写像についてのアラン分散を精密化することでハミルトン系の大域的ダイナミクスの定量化へ向かいたい。そこで、考える系を変形ベルヌイ写像に限定し、「アラン分散のスケーリング法則を精密化し、非定常性の特徴づけは可能か」について理論的に明らかにすることを目的とする。具体的には、アラン分散を構成する時間平均をアンサンブル平均に置き換えた近似アラン分散について、観測時間と相関長が等しくなる領域でのスケーリング法則を決定することを目指す。また、文献 [Aizawa, 1989a] で予想されているアラン分散とパワースペクトル密度の収束性の関係についても明らかにする。

第 2 章

誘電体マッシュルームビリヤードの淀み運動

この章では、誘電体を挿入したマッシュルームビリヤードを用いてハミルトン系における淀み運動が出現するメカニズムを調べる。誘電体の屈折率を連続的に変化させると、最外殻 KAM トーラス近傍の淀み領域の構造が変化するため、まず文献で提案されている脱出時間統計を用いて厳密な相空間構造を決定する。その結果、脱出時間分布の無限集積点が最外殻 KAM トーラス近傍に層状の階層構造を形成することが観測されたので、その階層構造を抽象モデルを使って解析する。抽象モデルではトーラス近傍領域から脱出領域を取り除いていく操作を議論しているが、その結果わかることは脱出領域同士が重複する条件（共鳴条件）を満たすときに無限集積点が発生することである。この出現点の理論的評価は数値計算によっても確かめられた。無限集積点の両側では 2 種類の淀み運動が存在するという新しいタイプの淀み構造があり、理論的にそのスケーリング法則を導出し、数値計算によっても確かめた。

2.1 モデル

考える系は、第 1 章で示したマッシュルームビリヤードに誘電体を挿入した系である。誘電体マッシュルームビリヤードは半径 R の半円と長さ $2r$ 、高さ h の長方形領域でできた台に図 2.1 の斜線部に誘電体を挿入することで構成される。誘電体を部分的に挿入するのは、最外殻トーラス近傍の軌道に摂動を加えるためである。真空の屈折率 n_v は $n_v = 1.0$ に固定し、誘電体の屈折率 n_d は $n_d \in [0, \infty)$ の範囲で変化させる。このとき、粒子は光線とみなし、台の壁面では弾性衝突し、誘電体の表面ではエネルギー損失を伴わずにスネルの法則に従って屈折する。

$$n_v \sin \beta = n_d \sin \gamma. \quad (2.1)$$

言い換えると、光線は幾何光学近似（付録 A）が使えるほど充分波長が短く電場振幅の二階微分項を無視できる場合を考える。この近似により、ビリヤード台上の粒子の運動は全エネルギーを保存する光線の運動に置き換えられる。座標系は極座標 (L, θ) とデカルト座標 (x, y) を考え、それぞれの原点は半径 R の

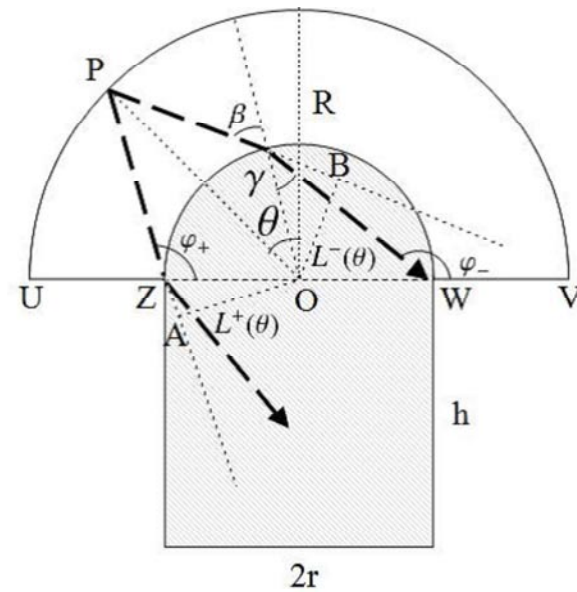


図 2.1 誘電体マッシュルームビリヤードモデル、ビリヤード台は半径 R の半円と幅 $2r$ 高さ h の長方形から構成され、図の斜線部に誘電体を挿入する。

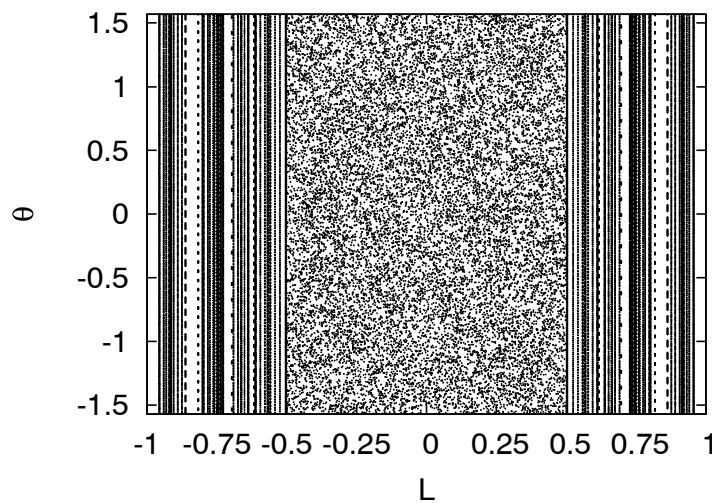


図 2.2 屈折率が $n_d = 1.01$ の場合のポアンカレ断面。カオス領域は領域 $\{-r < L < r\}$ であり、トーラス領域は領域 $\{r < |L|\}$ である。上半円の半径は $R = 1.0$ とし、誘電体の表面は $r = 0.5$ とする。

半円の中心とする。計算を簡単にするため、光線速度を $v = 1$ と固定する。このとき、軌道角運動量 L と半径 R の半円 $[x^2 + y^2 = R^2 (y > 0)]$ に衝突した直後の位置 θ によってポアンカレ断面を構成できる。位置 θ を測る基準軸は半径 R の半円を二分する線分で表わされる (図 2.1)。

屈折率が $n_d = 1$ の場合、このモデルは長方形の茎部分を持つマッシュルームビリヤード系 (第 1 章参照) に完全に一致する [Miyaguchi, 2007]。最外殻トーラスの回転数 ρ_{cri} は

$$\rho_{\text{cri}} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} (\theta_n - \theta_0) = 1/3$$

で表わされ、本章で特に重要なパラメータである。この場合の最外殻トーラス近傍のサバイバル確率分布 $S(T)$ は $S(T) \sim T^{-1}$ に従うことは前章で触れた [Miyaguchi, 2007]。屈折率が $n_d < 1$ の場合、カオス領域は半円領域内に存在する全反射軌道によって部分的にトーラス領域に置き換わる。この全反射の性質により最外殻トーラス近傍に淀み運動は現れない。^{*1}屈折率が $n_d > 1$ の場合、誘電体内部に全反射軌道が存在するが棲み分け境界構造は変化しない。このとき、トーラス近傍でわずかに変化を受けた淀み運動が存在しているのでそのメカニズムを調べるため、以下では屈折率が $n_d > 1$ である場合を解析する。

ポアンカレ写像 $\Phi(L, \theta)$ は陽に次のように書ける。

$$\Phi(L, \theta) = \begin{cases} L' &= \frac{n_d}{n_v} \sqrt{4h^2 + N^2 R^2} \cos(\theta - \arcsin(\frac{L}{R}) + \arcsin(\frac{L}{r}) \\ &\quad - \arcsin(\frac{n_v L}{n_d r}) - \arcsin(\frac{2h}{NR})) + L, \\ \theta' &= \theta - \arcsin(\frac{L}{R}) - \arcsin(\frac{L'}{R}) + \arcsin(\frac{L}{r}) + \arcsin(\frac{L'}{r}) \\ &\quad - \arcsin(\frac{n_v L}{n_d r}) - \arcsin(\frac{n_v L'}{n_d r}). \end{cases}$$

ここで、 N は長方形領域における衝突回数である。この写像のヤコビ行列の行列式は 1 なので、ポアンカレ写像は面積保存性をもつ（面積保存性については付録 B を参照）。図 2.2 は屈折率が $n_d = 1.01$ でパラメータ $R = 1.0, r = 0.5$ の場合のポアンカレ断面を示している。カオス領域は領域 $\{-r < L < r\}$ であり、トーラス領域は領域 $\{r < |L|\}$ である。このとき、カオス軌道は半径 R の上半円に長く滞在する場合があるため、以下の節でそういった長時間の振る舞いを引き起こすメカニズムを調べる。

2.2 脱出領域と無限集積点の解析

2.2.1 第一脱出領域と再入射領域

カオス軌道が上半円に滞在する軌道の性質を調べるためにポアンカレ断面 (L, θ) のカオス領域における脱出時間分布を考える。第 n 脱出領域は上半円に n 回連続して衝突する点 (L, θ) の全体の集合で定義される。ただし、2 つの水平の縁での衝突は除く（図 2.1 の \overline{UZ} と \overline{VW} ）。系は幾何的に対称性を持っているので、相空間を $L < 0$ に制限しても一般性を失わない。第一脱出領域は上半円から長方形領域へ脱出する軌道の臨界軌道角運動量 $L_{\text{esc}}^{\pm}(\theta)$ ($L_{\text{esc}}^+(\theta) > 0, L_{\text{esc}}^-(\theta) < 0$) で計算される。臨界軌道角運動量 $L_{\text{esc}}^{\pm}(\theta)$ は臨界点 Z と W に衝突する軌道の角運動量で定義される（負の角運動量は線分 \overline{OB} の長さでとる）。図 2.1 における角度 φ_+ と φ_- は軌道と線分 \overline{UV} の偏角で定義される。角度 β と γ は真空から誘電体への入射角と屈折角である。このとき、臨界軌道角運動量 $L_{\text{esc}}^{\pm}(\theta)$ はパラメータ $\varphi_{\pm}, \beta, \gamma$ を用いて以下のように書ける。

$$L_{\text{esc}}^+(\theta) = r \sin(\pi - \varphi_+) = \frac{Rr \cos \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta}}, \quad (2.2)$$

$$L_{\text{esc}}^-(\theta) = -r \sin \gamma. \quad (2.3)$$

^{*1} 数値的に淀み層が観測されないという意味であり、理論的に淀み運動は現れるかどうかは明らかではない。

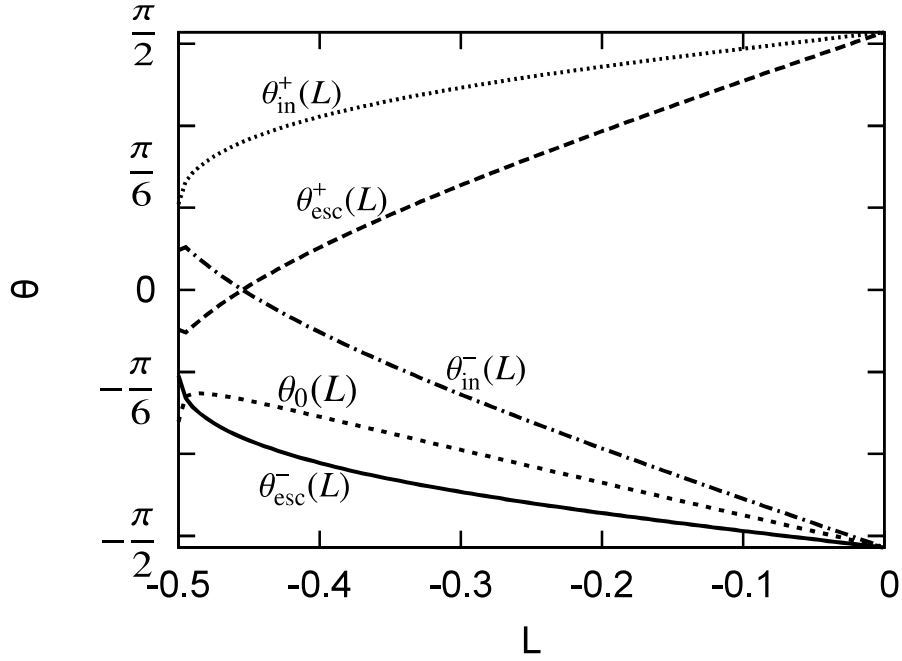


図 2.3 第一脱出領域 $\theta_{\text{esc}}^{\pm}(L)$ と再入射領域 $\theta_{\text{in}}^{\pm}(L)$ 。臨界位置 $\theta_0(L)$ の上下でポアンカレ写像の逆像が異なる。

ここで、 θ, β, γ は以下を満たす。

$$\frac{r}{\sin(\beta - 2\gamma - \theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{R}{\sin\beta}. \quad (2.4)$$

相空間 (L, θ) 内の第一脱出領域 D_1 は以下で特徴づけられる。

$$(L_{\text{esc}}^{\pm}(\theta))^2 > L^2.$$

この不等式を θ について解いた解を $\theta_{\text{esc}}^{\pm}(L)$ とおくと

$$D_1 = \{(L, \theta) | \theta_{\text{esc}}^{-}(L) < \theta < \theta_{\text{esc}}^{+}(L)\} \quad (2.5)$$

となる。一方、長方形領域から上半円に再入射する再入射領域 D_{in} は以下で与えられる。

$$D_{\text{in}} = \{(L, \theta) | \theta_{\text{in}}^{-}(L) < \theta < \theta_{\text{in}}^{+}(L)\} \quad (2.6)$$

ここで $\theta_{\text{in}}^{\pm}(L) = -\theta_{\text{esc}}^{\pm}(L)$ が成り立つ。第一脱出領域の臨界曲線は不等式 (2.5) を式 (2.1)-(2.4) を用いて解くことで得られ、図 2.3 に示されている。

$$\theta_{\text{esc}}^{+}(L) = \arcsin \left\{ \frac{\frac{L^2}{r} \left(a_1 - \frac{2n_v}{n_d} b_1 c_1 \right) + \sqrt{\frac{L^4}{r^2} \left(a_1 - \frac{2n_v}{n_d} b_1 c_1 \right)^2 - R^2 L^2 + R^2 \left\{ a_1 b_1 + \frac{2n_v L^2}{n_d r^2} c_1 \right\}^2}}{R^2} \right\}$$

$$\theta_{\text{esc}}^{-}(L) = \arcsin \left(\frac{-L^2 - \sqrt{L^4 - L^2(R^2 + r^2) + r^2 R^2}}{rR} \right) \quad (2.7)$$

ここで、パラメータ a_1, b_1, c_1 は以下を満たす。

$$a_1 = 1 - \frac{2n_v^2 L^2}{n_d^2 r^2}, \quad b_1 = \sqrt{1 - \frac{L^2}{r^2}}, \quad c_1 = \sqrt{1 - \frac{n_v^2 L^2}{n_d^2 r^2}}.$$

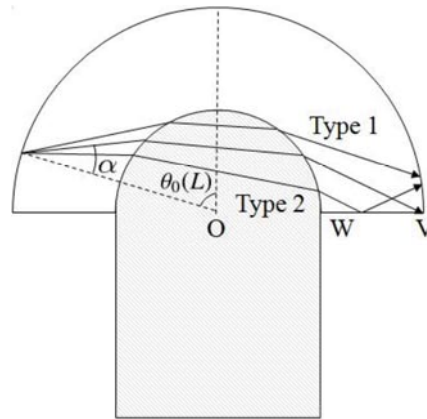


図 2.4 上半円に衝突する 2 つのタイプの運動。タイプ 1 は誘電体通過後に上半円へ直接衝突し、タイプ 2 は誘電体通過後に水平の縁 \overline{VW} に衝突してから上半円へ衝突する。

2.2.2 ポアンカレ写像の逆像

一般の第 n 脱出領域 ($n \geq 2$) を考えるために、ポアンカレ写像の逆像 $\Phi^{-1}(L, \theta)$ を考える。上半円に衝突する光線には 2 つのタイプがある。タイプ 1 は上半円から出発した軌道が、誘電体を通過した後、直接上半円に衝突する運動である。タイプ 2 は上半円から出発した軌道が、誘電体を通過した後、水平の縁 (\overline{UZ} または \overline{VW}) に衝突し、その後上半円に衝突する運動である。この 2 つのタイプは図 2.4 に示されている。2 つのタイプを分ける臨界位置 $L_0(\theta)$ は幾何学的に

$$L_0(\theta) = -R \sin \alpha \quad (2.8)$$

と決定される。このときの角度 α は

$$r \sin \beta = R \sin \alpha \quad (2.9)$$

を満たす。式 (2.1), (2.8), (2.9) を用いて、

$$2\alpha = 2\beta - 2\gamma + \theta_0(L_0) - \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。この式から臨界軌道の相空間上の点 (L_0, θ_0) は

$$\theta_0(L_0) = -2 \arcsin \left| \frac{L_0}{R} \right| + 2 \arcsin \left| \frac{L_0}{r} \right| - 2 \arcsin \left| \frac{n_v L_0}{n_d r} \right| - \frac{\pi}{2} \quad (2.10)$$

を満たす。曲線 $\theta_0(L_0)$ を図 2.3 に示す。 θ 成分の逆像 θ' は

$$\theta' = \begin{cases} \theta + \theta_0(L) + 3\pi/2, & \text{if } \theta < \theta_0(L), \\ \theta + \theta_0(L) + \pi/2, & \text{if } \theta > \theta_0(L) \end{cases} \quad (2.11)$$

であるから、式 (2.10), (2.11) より、ポアンカレ写像の逆像 Φ^{-1} は

$$\Phi^{-1}(L, \theta) = \begin{cases} (L, \theta - 2 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 2 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 2 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| + \pi), & \text{if } \theta < \theta_0(L), \\ (L, \theta - 2 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 2 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 2 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right|), & \text{if } \theta > \theta_0(L) \end{cases}$$

で与えられる。

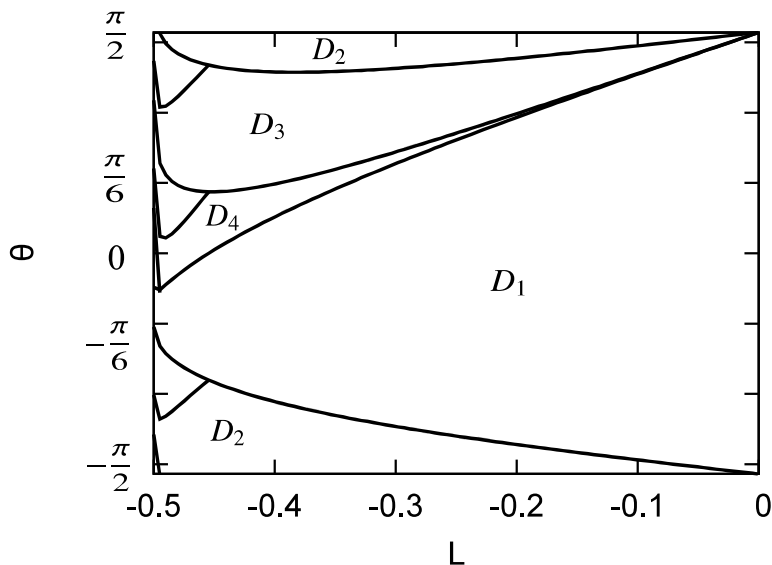


図 2.5 屈折率 $n_d = 1.00012$ における第一脱出領域から第 4 脱出領域。領域 F_i^j は第 i 脱出領域の部分領域を示している。

2.2.3 第 n 脱出領域

第 n 脱出領域はポアンカレ写像の逆像 Φ^{-1} を用いて定義することができる。第一脱出領域はその定義から式 (2.6) で得られた再入射領域の逆像であることがわかる。すなわち、 $D_1 = \Phi^{-1}(D_{\text{in}})$ が成り立つ。同様の考え方で第 2 脱出領域 D_2 は第一脱出領域から再入射領域を差し引いた領域の逆像で与えられる。すなわち、 $D_2 = \Phi^{-1}(D_1 \setminus D_{\text{in}})$ が成り立つ。第 n 脱出領域は帰納的に以下ようになる。

$$D_n = \Phi^{-1}(D_{n-1} \setminus D_{\text{in}}).$$

$n = 2$ の場合、第一脱出領域から再入射領域を差し引いた領域は

$$D_1 \setminus D_{\text{in}} = F_1^1 \cup F_2^1 \cup F_3^1 \cup F_4^1$$

と表される。ただし、 $F_1^1, F_2^1, F_3^1, F_4^1$ は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} F_1^1 &= \left\{ (L, \theta) \mid \theta_{\text{esc}}^-(L) < \theta < \theta_0(L), \tilde{L} < L < 0 \right\}, \\ F_2^1 &= \left\{ (L, \theta) \mid \theta_0(L) < \theta < \theta_{\text{in}}^-(L), L_{\text{in}}^-(0) < L < 0 \right\}, \\ F_3^1 &= \left\{ (L, \theta) \mid \theta_0(L) < \theta < \theta_{\text{esc}}^+(L), \tilde{L} < L < L_{\text{in}}^-(0) \right\}, \\ F_4^1 &= \left\{ (L, \theta) \mid \theta_{\text{esc}}^-(L) < \theta < \theta_{\text{esc}}^+(L), -r < L < \tilde{L} \right\}. \end{aligned}$$

ここで、 \tilde{L} は式 (2.7) と (2.10) によって得られる軌道角運動量であり、以下を満たす。

$$\theta_{\text{esc}}^-(\tilde{L}) = \theta_0(\tilde{L}).$$

第 2 脱出領域は以下のように計算できる。

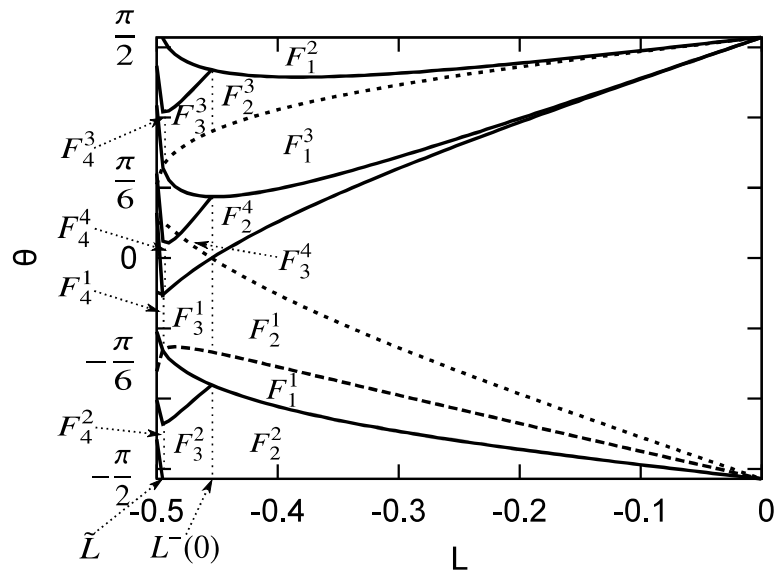


図 2.6 図 2.5 における詳細な分割まで示した脱出領域。

$$D_2 = \Phi^{-1}(D_1 \setminus D_{\text{in}}) = \Phi^{-1}(F_1^1) \cup \Phi^{-1}(F_2^1) \cup \Phi^{-1}(F_3^1) \cup \Phi^{-1}(F_4^1).$$

ここで $\Psi^L(\theta)$ を逆像 $\Phi^{-1}(L, \theta)$ の θ 成分と定義すると、より具体的な形式が得られる。

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(F_1^1) &= \{(L, \theta) | \Psi^L(\theta_{\text{esc}}^-(L)) < \theta < \Psi^L(\theta_0(L)), \tilde{L} < L < 0\} \\ &= \left\{ (L, \theta) \left| \theta_{\text{esc}}^-(L) - 2 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 2 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 2 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| + \pi < \theta < \frac{\pi}{2}, \tilde{L} < L < 0 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(F_2^1) &= \{(L, \theta) | \Psi^L(\theta_0(L)) < \theta < \Psi^L(\theta_{\text{in}}^-(L)), L_{\text{in}}^-(0) < L < 0\} \\ &= \left\{ (L, \theta) \left| -\frac{\pi}{2} < \theta < \theta_{\text{esc}}^-(L), L_{\text{in}}^-(0) < L < 0 \right. \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(F_3^1) &= \{(L, \theta) | \Psi^L(\theta_0(L)) < \theta < \Psi^L(\theta_{\text{esc}}^+(L)), \tilde{L} < L < L_{\text{in}}^-(0)\} \\ &= \left\{ (L, \theta) \left| -\frac{\pi}{2} < \theta < \theta_{\text{esc}}^+(L) - 2 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 2 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| \right. \\ &\quad \left. - 2 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right|, \tilde{L} < L < L_{\text{in}}^-(0) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(F_4^1) &= \{(L, \theta) | \Psi^L(\theta_{\text{esc}}^-(L)) < \theta < \Psi^L(\theta_{\text{esc}}^+(L)), -r < L < \tilde{L}\} \\ &= \left\{ (L, \theta) \left| \theta_{\text{esc}}^-(L) - 2 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 2 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 2 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| < \theta < \theta_{\text{esc}}^+(L) - 2 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| \right. \\ &\quad \left. + 2 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 2 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right|, -r < L < \tilde{L} \right\}. \end{aligned}$$

同様にして、第 n 脱出領域 ($n > 2$) も決定できる。全ての脱出領域を特定するには第 3 脱出領域と第 4 脱出領域の計算が必要であるが煩雑さを避けるため付録 C にまとめる。整数 $k \in \mathbb{N}$ を用いて第 n 脱出領

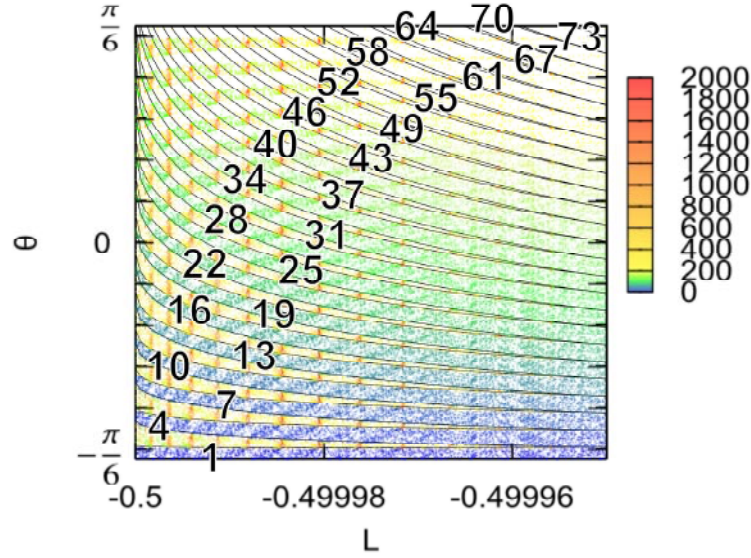


図 2.7 図 2.5 の拡大図 ($n_d = 1.00012$)。色分けプロットは脱出時間を表わしており、実線は式 (2.12)-(2.14) によって計算された理論曲線を表わしている。

域の境界曲線は以下のように計算できる。

$$\theta_{3k+1}^{\pm} = \theta_{\text{esc}}^{\pm}(L) + k\pi - 6k \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 6k \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 6k \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right|, \quad (2.12)$$

$$\theta_{3k+2}^{\pm} = \theta_{\text{esc}}^{\pm}(L) + k\pi - 2(3k+1) \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 2(3k+1) \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 2(3k+1) \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right|, \quad (2.13)$$

$$\theta_{3k}^{\pm} = \theta_{\text{esc}}^{\pm}(L) + k\pi - 2(3k-1) \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 2(3k-1) \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 2(3k-1) \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right|. \quad (2.14)$$

図 2.5 は理論的に求められた脱出領域を $n \leq 4$ まで描いたものを示している。図 2.6 は詳細な分割まで示した脱出領域を示している。図 2.7 は図 2.5 を最外殻 KAM トーラス近傍領域 ($-r < L < -r + 5 \cdot 10^{-5}$, $-\pi/6 < \theta < \pi/6$) に制限して拡大した図であり、色分けプロットで脱出時間を示し、実線で式 (2.12)-(2.14) を示している。図 2.7 において理論曲線は数値計算によって得た脱出時間の境界とよく一致していることがわかる。また、高次の脱出領域 D_k ($k > n$) は第 n 脱出領域と第 $(n+1)$ 脱出領域の境界に層状の階層構造を持っていることもわかる。次節では抽象モデルを用いてこの階層構造を考察する。

2.2.4 脱出領域の無限集積点の出現条件

図 2.7 における複雑な階層構造の端点には、無限個の脱出領域の集積点が存在する。この節では、集積点の存在条件または出現条件を導出する。領域 A_ε を $A_\varepsilon = \{(L, \theta) | -r \leq L \leq -r + \varepsilon, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$ で定義する。ここで、 ε は最外殻トーラスとの距離を表わす小さいパラメータである。領域面積 A_ε の面積を S とする。この節の基本的考え方は、トーラス近傍領域 A_ε から少ない脱出領域を取り除いていけば集積点構造が残るはずであるという想定に基づいている。具体的には除去演算子を用いる。除去演算

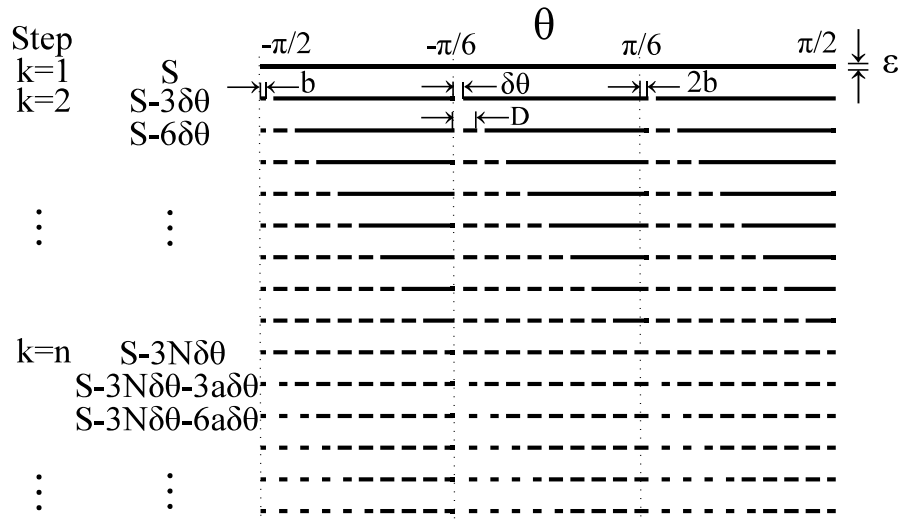


図 2.8 除去演算子の概念図。一番上の黒の領域は領域 A_ε であり、除去演算子は領域 A_ε から 3 つずつ脱出領域を取り除く。

子は図 2.8 のように各ステップで 3 つの脱出領域を領域 A_ε から取り除く単純な演算子である。演算子の第一ステップでは領域 A_ε から第 1 から第 3 までの脱出領域までを取り除く。第二ステップでは残った領域から第 4 から第 6 までの脱出領域を同様の方法で取り除く。第 n ステップでは、第 $(3n - 2)$ から第 $3n$ までの脱出領域を取り除く。除去する領域 $\delta\theta_n (= D_n \cap A_\varepsilon)$ は式 (2.12)-(2.14) により、定数になる ($\delta\theta_n = \delta\theta$)。 $L = -r + \varepsilon$ について充分小さい ε に対して近似 $\arcsin(L/R) \rightarrow \pi/6$, $\arcsin(L/r) \rightarrow \pi/2$ が使えるので、 $\delta\theta$ は以下のように計算される。

$$\delta\theta = \theta_{n+1}^\pm - \theta_n^\pm = \arcsin\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_d^2} + \sqrt{\frac{3}{n_d^2} - \frac{3}{n_d^4}}\right) + \frac{\pi}{6}.$$

図 2.8 において記号 b は最外殻上の第 2 脱出領域と $\theta = -\pi/2$ の間の長さを表わし、記号 D は第 $(k + 1)$ と第 k 脱出領域の間の長さを表わす。近似 $|L| \simeq r$ を用いると、

$$b \equiv \theta_2^-(L) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \sim \pi - 2 \arcsin\left(\frac{1}{n_d}\right),$$

$$D \equiv \theta_{3(k+1)+1}^-(L) - \theta_{3k+1}^-(L) \sim 3\pi - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n_d}\right) \quad (= 3b)$$

と計算できる。第 1 ステップで取り除く領域 μ_1 は

$$\mu_1 = \left\{ (L, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} + b < \theta < -\frac{\pi}{2} + b + \delta\theta, -\frac{\pi}{6} < \theta < -\frac{\pi}{6} + \delta\theta, \frac{\pi}{6} + 2b < \theta < \frac{\pi}{6} + 2b + \delta\theta \right\}$$

である。同様にして、第 2 ステップで取り除く領域 μ_2 は

$$\mu_2 = \left\{ (L, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} + b + D < \theta < -\frac{\pi}{2} + b + D + \delta\theta, -\frac{\pi}{6} + D < \theta < -\frac{\pi}{6} + D + \delta\theta, \frac{\pi}{6} + 2b + D < \theta < \frac{\pi}{6} + 2b + D + \delta\theta \right\}$$

である。ここで、図 2.8 に示すように、除去演算子はある第 N ステップまでは脱出領域全体を取り除くが、第 N ステップ以上では、脱出領域の部分領域だけしか取り除かない。すなわち、第 N ステップまで

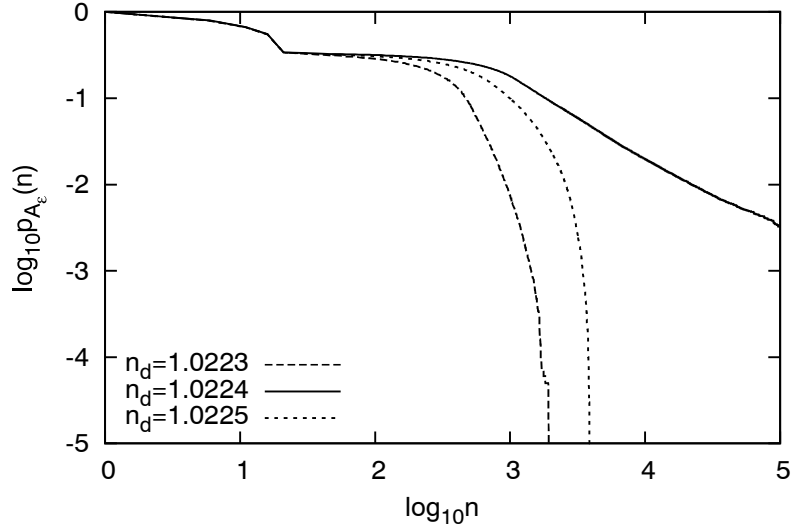


図 2.9 トーラスの ($\epsilon = 10^{-7}$)-近傍領域におけるサバイバル確率。式 (2.16) を満たす屈折率 $n_d(1) \simeq 1.0224$ のとき、べき関数的な減衰が生じている。

は $3\delta\theta$ ずつ減少するが、第 N ステップ以上では $3a\delta\theta$ ずつ減少すると仮定する ($0 \leq a \leq 1$)。領域 (\cdot) の面積を $\lambda(\cdot)$ で表わすと、第 k ステップ後に残っている領域 μ'_k ($k \leq N$) の面積 $\lambda(\mu'_k)$ は

$$\lambda(\mu'_k) = \lambda(A_\epsilon) - \sum_{i=1}^k \lambda(\mu_i) = S - 3k\delta\theta$$

である。 $k > N$ のときは、

$$\begin{aligned} \lambda(\mu'_k) &= \lambda(A_\epsilon) - \sum_{i=1}^N \lambda(\mu_i) - \sum_{i=N+1}^k \lambda(\mu_i) \\ &= S - 3N\delta\theta - 3ka\delta\theta \quad (0 \leq a < 1) \end{aligned}$$

となる。 $k \gg N$ の場合には、取り除かれる領域が既に取り除かれている場合 ($a = 0$) には第 k ステップ後に残っている領域は正の測度を持つ。このとき、条件 $a = 0$ は領域 A_ϵ が第 N ステップまで線形に減少しそれ以上は減少しないので、共鳴条件と呼ぶことにする。条件 $a = 0$ は脱出領域が点 $\theta = -\pi/2 + b$, $-\pi/6$, $\pi/6 + 2b$ のいずれかで重複するとき成立する。故に、共鳴条件は次のように計算される。

$$2(\pi/3 - b) = mD. \quad (2.15)$$

ここで、 m は ($m \geq 1$) を満たす整数である。式 (2.15) より、共鳴条件を満たす屈折率は

$$n_d(m) = \frac{1}{\sin(\frac{9m+4}{18m+12}\pi)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.16)$$

と書ける。この式によって、最外殻トーラス上に脱出領域が無限に集積する点の出現条件がわかる。次節でこの出現条件を数値計算によって確かめる。

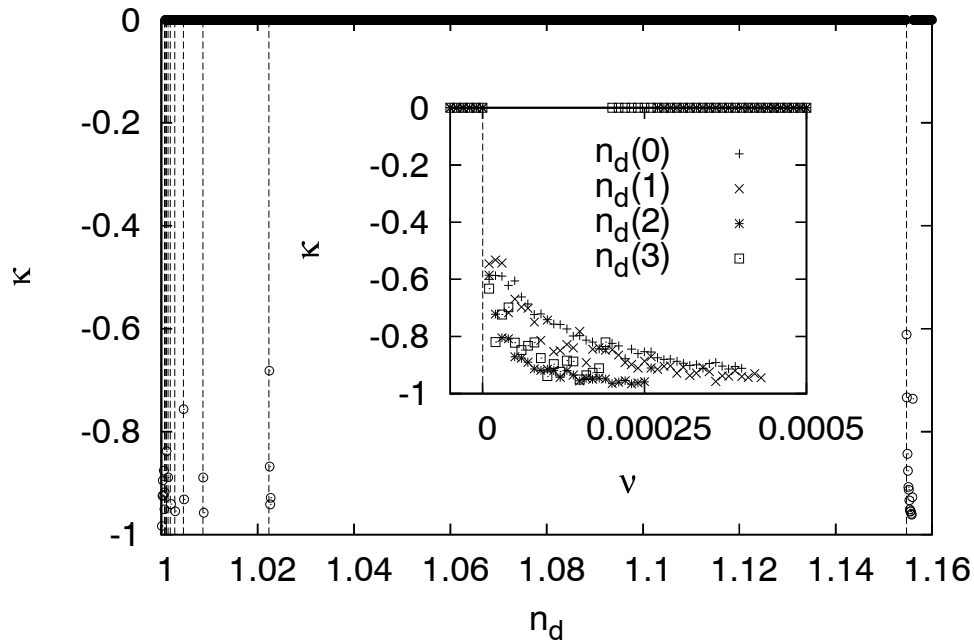


図 2.10 屈折率 n_d を 10^{-4} ずつ変化させた場合のサバイバル確率のスケーリング指数 κ 。式 (2.16) によって与えられる理論値を点線で示している。挿入図は屈折率を $n_d(m) + \nu$ と置いて転移付近を拡大して示しており全ての m で $n_d(m)$ の値から κ の減少が起きている。

2.2.5 数値計算

この節では、脱出時間分布を計算することにより、前節の無限集積点の出現条件を確かめる。サバイバル確率 $p_{A_\varepsilon}(n)$ を

$$p_{A_\varepsilon}(n) = 1 - \sum_{j=1}^n \frac{\lambda((L, \theta) | (L^{(j)}, \theta^{(j)}) \in A_\varepsilon, (L^{(j+1)}, \theta^{(j+1)}) \notin A_\varepsilon, k \leq j)}{\lambda(A_\varepsilon)}$$

と定義する。ここで、 (L_i, θ_i) は i 回写像後の相空間上の点を表わし、 $n = 10^5$ とする。図 2.9 はいくつかの場合のサバイバル確率を示している。屈折率 n_d を 10^{-4} ずつ変化させると、式 (2.16) に対応する屈折率のところでき関数的な減衰が生じている。これは、その屈折率のときに最外殻近傍領域に淀み運動が生じていることを意味する。

写像回数を n とし、べき関数の指数 κ 次のおく。

$$p_{A_\varepsilon}(n) \sim n^\kappa.$$

写像回数が範囲 $n \in [10^4, 10^5]$ にある領域で数値的に指数 κ をフィッティングする。図 2.10 は式 (2.16) を満たす屈折率 $n_d(m)$ において指数 κ が負になることを示している。理論値 $n_d(m)$ の近傍で指数 κ を調べると、図 2.10 の挿入図のように $m = 0, \dots, 3$ のどのパラメータでも $n_d(m) - \nu$ から $n_d(m) + \nu$ の

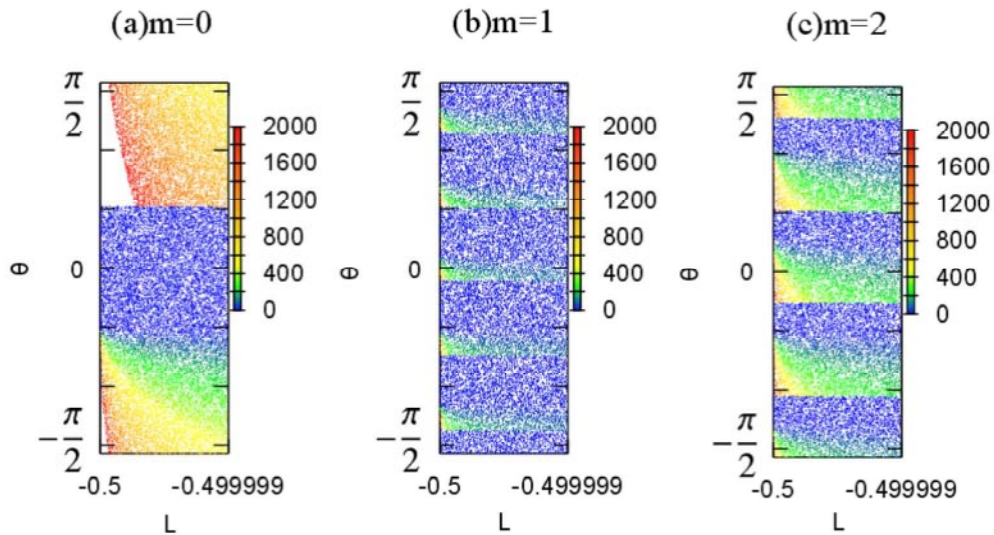


図 2.11 式 (2.16) を満たす屈折率 $n_d(m)$ の場合の脱出時間分布. (a) $m = 0$, (b) $m = 1$, (c) $m = 2$. 最外殻トーラス近傍に脱出時間分布の無限集積点を形成している。

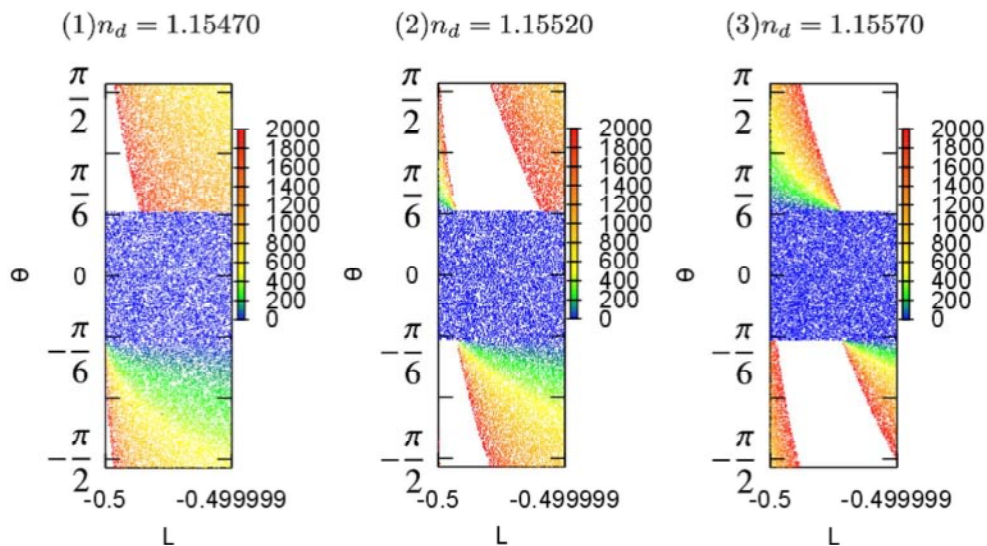


図 2.12 屈折率 $n_d(0) = 1.15470$ 付近の 2 つのみの淀み領域をもつ単純な相空間構造。

間で相転移が起きることがわかる。故に、指数 κ は理論値 $n_d(m)$ から下がり始めることが示されたので、臨界指数 $n_d(m)$ において無限集積点が出現すると結論づけられる。

図 2.11 は 3 つの $n_d(m)$ のときの脱出時間分布を示している。カオス領域とトーラス領域の境界に脱出領域の集積点が出現している。特定の $n_d(m)$ における淀み領域の数を $N_s(m)$ とすると、 m が増加するにつれて $N_s(m)$ は増加する。淀み領域の数 $N_s(m)$ は数値的に

$$N_s(m) = \begin{cases} 3m + 2, & m = 0, 2, 4, \dots, \\ 6m + 4, & m = 1, 3, 5, \dots. \end{cases}$$

と計算される。奇数の m に対して $N_s(m)$ が半数になる理由は偶数の m のときの時計回りと反時計回り

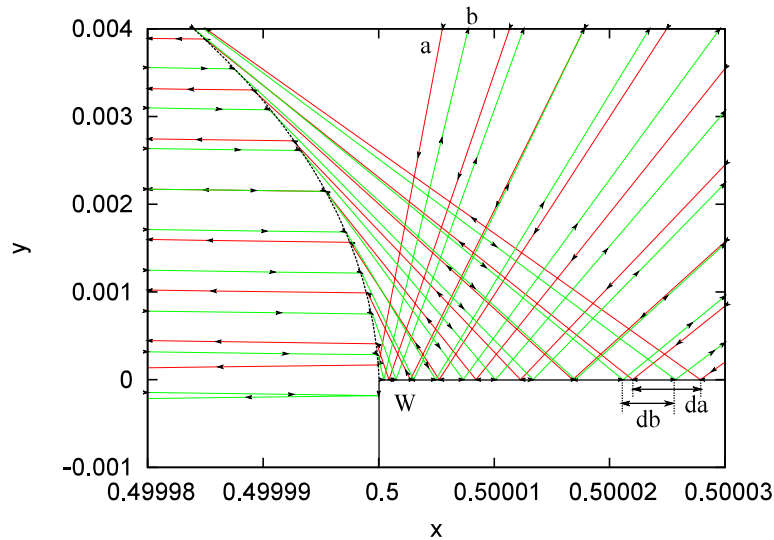


図 2.13 屈折率 $n_d = 1.15570$ の場合の時計回り回転と反時計回り回転の 2 つの淀み軌道 a と b 。臨
界軌道 a と b は上半円で複数回衝突した後に長方形の茎に脱出しようとしている様子を表わしている。
線 \overline{VW} に衝突する際の変異を d_a と d_b で示す。

の軌道が縮退していることに起因する。最外殻トラス上の回転数 $\rho(m)$ は幾何学的に以下のように求められる。

$$\rho(m) = \frac{1}{6m + 4}.$$

明らかに回転数の逆数は淀み領域の数に関係している。

2.3 淀み運動のメカニズム

2.3.1 スケーリング則

前節では、共鳴条件が満たされたときに最外殻トラス近傍に淀み運動が現れることを確かめた。そのようなスローダイナミクスのメカニズムを明らかにするために、2 つの淀み領域のみをもつ単純な構造を解析する。図 2.12 は $n_d(0) = 1.15470$ 付近の屈折率の場合の脱出時間分布を示しており、パラメータ n_d が増加すると L の正の方向に無限集積点が動いていく様子が観測されている。脱出時間の重複は位置 $\theta = \pm\pi/6$ のところで起きている。図 2.13 は時計回りと反時計回りに淀む軌道を示している。赤の軌道である a と緑の軌道である b は上半円で複数回衝突した後に長方形の茎に脱出しようとしている臨界軌道である。また、 d_a と d_b を 2 つの軌道が線 \overline{VW} に衝突する変位とする。軌道 a, b は異なる軌道角運動量を持っている [$L(a) < L(b)$]。この軌道角運動量の違いがあるために誘電体の表面で変位がずれ、変位が $d_a > d_b$ となる。これはある不変集合の周りでは時計回りと反時計回りの 2 種類の軌道が存在することを意味している。つまり、ビリヤード台が対称性を持っているにもかかわらず、カオス領域内の不変集合の周りでは非対称的な淀み構造が生まれることを意味している。

この 2 種類の淀み運動に関するより詳細な情報を得るために、図 2.14 で示した脱出時間分布の理論曲

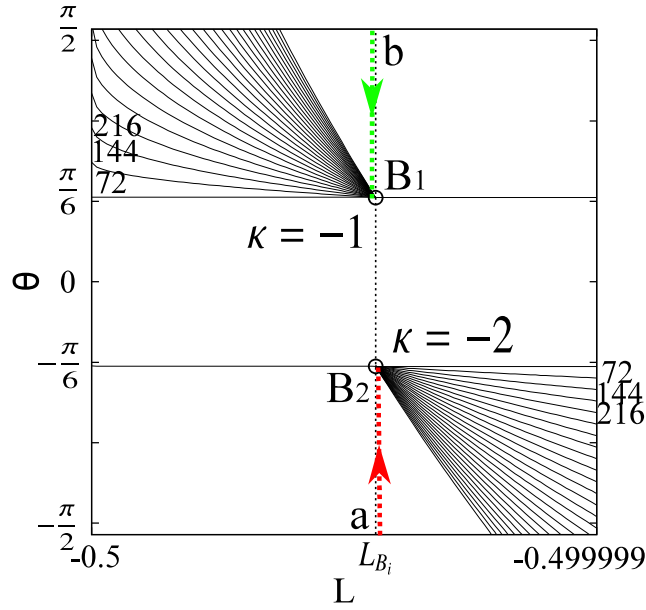


図 2.14 屈折率 $n_d = 1.15570$ の場合の第 n 脱出領域の無限分割。図の数字は脱出時間を表わす。赤線 a 下の集積点 B_2 の右側近傍の臨界軌道を示し、緑線 b は集積点 B_1 の左側近傍の臨界軌道を示している。

線を厳密に解析する。位置 $\pm\pi/6$ に無限の脱出領域の集積点が 2 つあることがわかる。この 2 つの無限集積点を B_i ($i = 1, 2$) とし、対応する軌道角運動量を L_{B_i} とする。点 B_i はカオス領域とトーラス領域の境界に発生し、条件 $-r \leq L_{B_i} \leq L^-(0)$ のもとで消失する。軌道角運動量 L_{B_i} は以下を満たす。

$$\theta_{3n+1}^+(L_{B_i}) = \theta_{3(n+1)+1}^+(L_{B_i}) \quad (i = 1, 2).$$

この関係を用いて座標 (L_{B_i}, θ_{B_i}) は以下を満たす。

$$\begin{aligned} \pi - 6 \arcsin \left| \frac{L_{B_i}}{R} \right| + 6 \arcsin \left| \frac{L_{B_i}}{r} \right| - 6 \arcsin \left| \frac{n_v L_{B_i}}{n_d r} \right| &= 0, \\ \theta_{B_i} &= -\frac{\pi}{6} + 2\pi\rho(0). \end{aligned} \quad (2.17)$$

この式から L_{B_i} が導出されるが、前節で κ が突然 0 に落ち込む位置は $\varepsilon < L_{B_i}$ で決定されることがわかる。テーラー展開 $\arcsin(x + \eta) \simeq \arcsin \eta + \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}(x - \eta)$ (as $x \simeq \eta$) を用いて、充分大きい n を仮定すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \theta_{3n+1}^+(L_{B_i} \pm \varepsilon) &\simeq \theta_{3n+1}^+(L_{B_i}) + 3n \left(\frac{2}{\sqrt{3}}(2\varepsilon + 1) + \frac{\sqrt{n_d + 1}\sqrt{2\varepsilon + n_d} - \sqrt{2}\sqrt{2\varepsilon + 1}}{n_d} \right) \\ &= 3n \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}(2\varepsilon + 1) + 3n \cdot \frac{\sqrt{2}}{n_d} \sqrt{2\varepsilon + 1} + C. \end{aligned} \quad (2.18)$$

式 (2.18) の第 1 項は $L < L_{B_i}$ のとき支配項となり、第 2 項は $L > L_{B_i}$ のとき支配項となる。この式から、上の集積点 B_1 付近の第 $(3n + 1)$ 脱出領域の L 方向の幅は $1/n$ に比例し、下の集積点 B_2 付近の L 方向の幅は $1/n^2$ に比例することが導出される。 n 回目の衝突後に残っている領域あるいは確率 $p(n)$ が

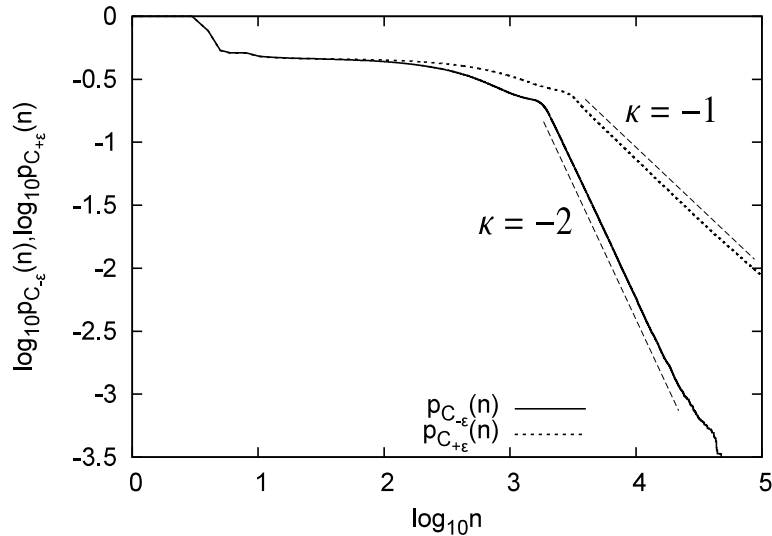


図 2.15 サバイバル確率 $Q_{\pm\epsilon}(n)$ 。脱出時間分布の無限集積点の両側で異なるべき指数をもつ。

$p(n) \sim n^\kappa$ に従うことを意味し、 κ が以下の指数に従う。

$$\begin{aligned} \kappa &= -1 && (\text{点 } B_1 \text{ 近傍}), \\ \kappa &= -2 && (\text{点 } B_2 \text{ 近傍}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

数値計算で調べるために集積点の近傍領域を

$$\begin{aligned} C_{-\epsilon} &= \{(L, \theta) | L_{B_i} - \epsilon \leq L \leq L_{B_i}\}, \\ C_{+\epsilon} &= \{(L, \theta) | L_{B_i} \leq L \leq L_{B_i} + \epsilon\} \end{aligned}$$

と定義する。サバイバル確率 $p_{C_{\pm\epsilon}}(n)$ は

$$p_{C_{\pm\epsilon}}(n) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n \lambda((L, \theta) | (L^{(k)}, \theta^{(k)}) \in C_{\pm\epsilon}, (L^{(j+1)}, \theta^{(j+1)}) \notin C_{\pm\epsilon}, k \leq j)}{\lambda(C_{\pm\epsilon})}$$

で定義される。図 2.15 は領域 $[L_{B_i} - \epsilon, L_{B_i})$ または領域 $(L_{B_i}, L_{B_i} + \epsilon]$ に一様に初期点を分布した場合のサバイバル確率 $p_{C_{\pm\epsilon}}(n)$ を示しており、式 (2.19) が再現されることを表わしている。

ゆえに、無限の脱出領域の集積点の両側に 2 種類の淀み運動が存在するということが示された。屈折率 $n_d(m)$ を変えてもこの議論は成立するので、最外殻 KAM 表面の回転数が有理数の場合にはカオス領域内に 2 つの淀み運動が存在することを説明できる。しかし、回転数が無理数の場合は説明できない。次節では回転数が無理数の場合を解析する。

2.3.2 最外殻 KAM 表面の回転数が無理数の場合

これまでの節では最外殻トーラスの回転数が有理数 ($\rho_{cri} = 1/3$) の場合を解析してきた。この章では、回転数が無理数 ($\rho_{cri} = \text{irrational}$) の場合を考える。フィボナッチ数列を

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n'+1} = F_{n'} + F_{n'-1} \quad (n' \geq 1)$$

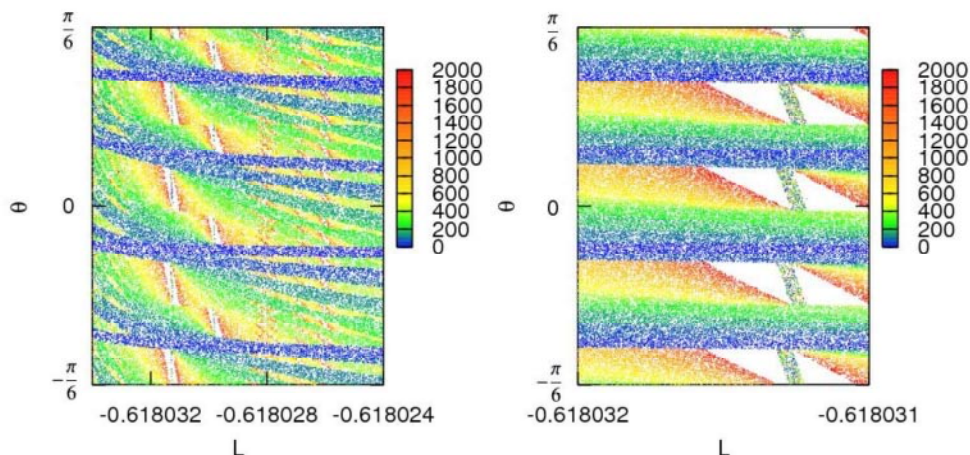


図 2.16 左: $R = 1, r = r_c = (\sqrt{5} - 1)/2$ の場合の相空間構造。右: 左図で複雑な階層構造をもつ部分領域の拡大図。

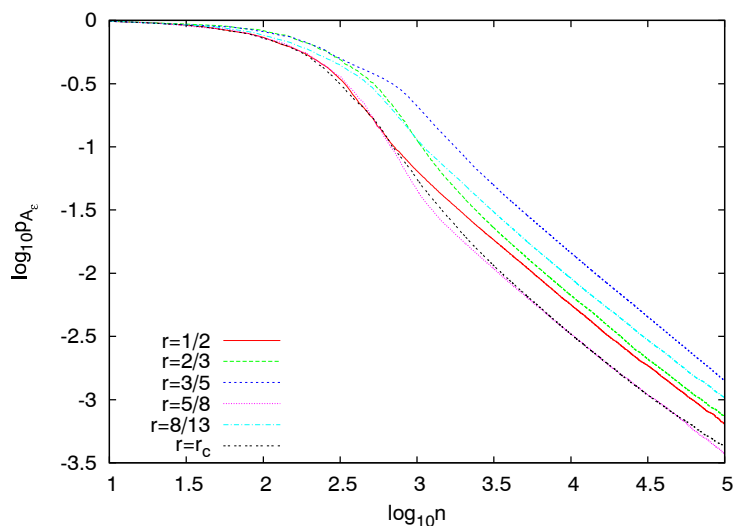


図 2.17 モデルパラメータを $R = 1.0, r = F_n/F_{n+1}$ と変化した場合のサバイバル確率。べき指数は全て $\kappa = -1$ に漸近する。

と定義する。ビリヤードのパラメータを $R = 1.0$ と $r = F_{n'}/F_{n'+1}$ で変化させる。前節までのビリヤード台は $n' = 1$ と同等である。任意の r に対して、相空間がカオス領域 $\{-r < L < r\}$ とトーラス領域 $\{r < |L|\}$ になることがわかっている。図 2.16 は茎の幅が無理数である場合に、すなわち、 $r_c = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n/F_{n+1} = (\sqrt{5} - 1)/2$ である場合に、相空間上に複雑な階層構造が形成されることを示している。この場合は、無理数回転に起因して共鳴条件を計算することが出来ない。このとき無理数回転に起因して無限集積点は存在しないことが予想されるが、最外殻表面近傍でサバイバル確率を計算すると図 2.16 のようにべき関数的長時間の裾を持っている。この問題は第 3 章の無理数マッシュルーム系の解析で部分的に明らかになる。

2.4 まとめと考察

この章では、サバイバル確率 $S(n) \sim n^\kappa, \kappa = -1$ を持つハミルトン系の淀み運動のメカニズムを誘電体マッシュルームビリヤードを用いて解析した。文献 [Miyaguchi, 2007] が提案した脱出時間統計を使うことにより、カオス領域の脱出時間分布を厳密にもとめ、最外殻トーラス近傍で複雑な階層構造を持っていることを明らかにした。この階層構造を抽象モデルによって解析すると、脱出領域同士が重複するような共鳴条件が満たされるときに無限集積点が出現することがわかり、またその共鳴条件を導出した。後半では、無限集積点が出現した後でその両側で異なるスケーリング指数 ($\kappa = -1, -2$) を持つ 2 種類の淀み運動が存在することを示し、理論的にスケーリング則を導出した。理論的に導出できるのは最外殻トーラス表面の回転数が有理数の場合に限られるので、回転数が無理数の場合は計算が困難であることがわかった。この問題は淀み領域の個数と淀み領域の面積の関係に帰着されるため、次章で議論することとする。

この章の結果は、カオス領域の中の淀み運動は最外殻トーラス近傍のみでなく最外殻トーラスから離れた無限集積点で起こりうるというもので、これまで報告されていない新しいカオス軌道の描像を与えている。誘電体ビリヤード系に固有の特徴は淀み運動の指数が $\kappa = -2$ となることであるが、一般の誘電体系に成立する決定的な枠組みはこのモデルからは導出することが難しい。しかし、指数 $\kappa = -2$ の淀み運動はこれまで報告されているマッシュルーム系の淀み運動 [Altmann et al., 2005, 2006; Tanaka and Shudo, 2006; Miyaguchi, 2007; Akaishi and Shudo, 2009] とは異なる種類の淀み運動であることは結論付けられる。誘電体ビリヤードモデルの淀み運動を記述する 1 次元写像の構成は付録 B に記載しており、この章で議論した無限集積点と 1 次元写像の中立不動点の間に明確な関係があることが示されている。

第3章

無理数比マッシュルームビリヤード系の 淀み領域の評価

この章では、マッシュルームビリヤード系の最外殻トーラスの回転数 α をフィボナッチ率 ($\alpha_k = F_{k+2}/F_{k+4}, k \geq 0$) で変化させた場合の相空間の微細構造を解析する。回転数が有理数の場合には、最外殻表面には特異点が存在するが、 k を増加させると淀み層が急激に減少することを示す。一方で、回転数が無理数極限 ($k \rightarrow \infty$) になると、いくつかの特異点はカオスの海の中に残り、その特異点の周りに淀み層が形成される。この淀み層の相空間面積を理論的に予想し、淀み層での滞在時間がべき分布になることを示す。このことに起因して、 $0.5 \lesssim r/R$ の場合に、マッシュルームビリヤード系には最外殻トーラス上の回転数に依らず普遍的にパワースペクトル密度 $|\log \omega|$ ($\omega \ll 1$) が現れる。実際、無理数の α の場合 (例えば代数的無理数や超越無理数) でもパワースペクトル密度は同じスケールリング則を持つ。パラメータが $r/R \lesssim 0.5$ の場合には、パワースペクトル密度は茎部分での淀み運動に起因して $\omega^{-\nu}$ のスケールリング則に従うことを示し、スペクトルの転移を数値的に明らかにする。

3.1 モデル

この章で扱うビリヤード台は図 3.1 のように半径 R の半円 (マッシュルームの帽子領域で以下 $R = 1$ に固定する) と幅 $2r$ 高さ h の長方形の茎で構成される。ポアンカレ写像 $\Phi(L, \theta)$ はビリヤード台の帽子領域のみで構成し、 L と θ は軌道角運動量と上半円に衝突直後の位置を表わす。位置 θ の基準軸は上半円を二分する線分でとる。この章では主に $0.5 \leq r/R \leq 1$ の場合を扱い、ビリヤード台の線対称性から負の軌道角運動量領域 ($L < 0$) のみを考える。図 3.2 はポアンカレ写像の典型的構造を示しており、完全可積分な領域 ($L < -r$) とカオスの海 ($-r < L$) は $r = |\cos(2\pi\alpha)|$ で定義される臨界回転数 α をもつ滑らかな最外殻 KAM トーラスによってはっきりと棲み分けられる [Altmann et al., 2005, 2006; Miyaguchi, 2007]。回転数 α はフィボナッチ率 $\alpha = \alpha_k = F_{k+2}/F_{k+4}$ ($F_0 = 0, F_1 = 1, F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, k \geq 0$) で与えられており、フィボナッチ数 k を増加させたときに相空間幾何構造がどのように変化するかを解析

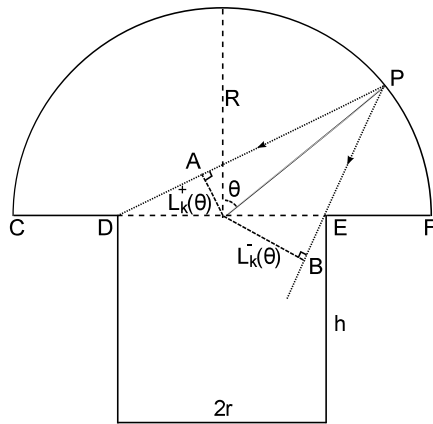


図 3.1 この章で扱うマッシュルームビリヤード。長方形の幅 $2r$ は連続するフィボナッチ率で変化する。第 1 脱出領域の臨界角運動量 $L_k^\pm(\theta)$ も示されている。

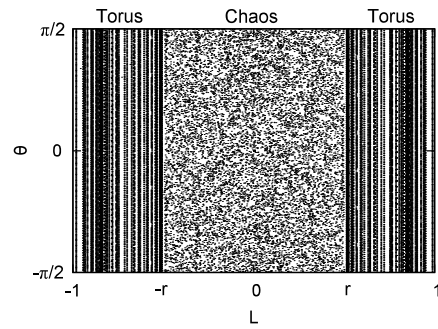


図 3.2 パラメータ $r/R = 0.5$ の場合の相空間 (L, θ) : 完全可積分領域 ($|L| > r$) とカオスの海 ($|L| < r$) は滑らかな最外殻 KAM トーラス ($|L| = r$) によって棲み分けられる。

表 3.1 パラメータ α_k, r_k, N_k の表。(+) は対称的軌道が縮退することを意味する。次節では $k = 5$ の場合を解析する。

k	α_k	r_k	N_k	k	α_k	r_k	N_k
0	1/3	0.5	3	11	233/610	0.73737...	305 ($\times 2$) ⁺
1	2/5	0.809...	5	12	377/987	0.737366...	987
2	3/8	0.707...	2 ($\times 4$) ⁺	13	610/1597	0.737369...	1597
3	5/13	0.748...	13	14	987/2584	0.7373685...	646 ($\times 4$) ⁺
4	8/21	0.733...	21	15	1597/4181	0.7373689...	4181
5	13/34	0.739...	17 ($\times 2$) ⁺	16	2584/6765	0.737368873...	6765
6	21/55	0.736...	55	17	4181/10946	0.737368894...	5473 ($\times 2$) ⁺
7	34/89	0.7376...	89	18	6765/17711	0.737368872...	17711
8	55/144	0.7372...	36 ($\times 4$) ⁺	19	10946/28657	0.737368888...	28657
9	89/233	0.7374...	233	20	17711/46368	0.737368877...	11592 ($\times 4$) ⁺
10	144/377	0.73735...	377	21	28657/75025	0.737368878...	75025

する。ただし、他の系列の無理数の場合では相空間構造が変化することが予想されるが、系列と淀み領域の個数の関係がわかっているならば、以下の解析を同様に行うことができる。フィボナッチ率の場合はその典型例を与える。

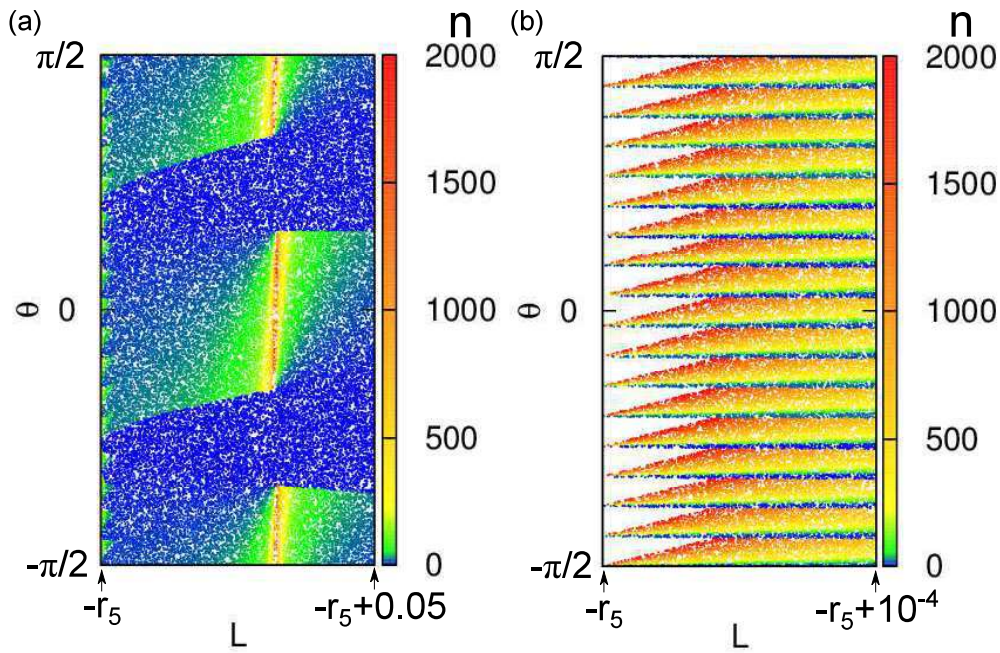


図 3.3 数値計算で得られた淀み層。 $k = 5$ の場合の脱出時間 n の色分けプロットが示されている。(a) カオス領域に形成される大きな淀み領域。(b) 最外殻 KAM トーラス近傍には脱出領域の無限集積点が存在する。

3.2 最外殻 KAM 表面の回転数が有理数の場合

3.2.1 最外殻 KAM 表面近傍の淀み層

$k = 0$ ($\alpha_0 = 1/3, r_0 = 0.5$) の場合、軌道は領域 $\{(L, \theta) \mid |L| < r_0\}$ でカオス的になり、領域 $|L| > r_0$ では準周期的になる。カオスの海では、軌道は上半円に長時間滞在した後に長方形の茎に脱出する。文献 [Miyaguchi, 2007] では、最外殻 KAM トーラス上の $\theta = 0, \pm 2\pi/3$ の位置にある 3 つの特異点近傍に極端に淀む運動が現れることが示されている (図 1.23 の右図を参照)。

$k \neq 0$ の場合は、相空間 (L, θ) の構造はパラメータ α_k に応じて変化する。パラメータ α_k は上半円から長方形の茎に脱出する臨界軌道 (図 3.1 の \overrightarrow{PA} または \overrightarrow{PB}) の回転数を表わす。 k が増加すると、最外殻 KAM 表面上の特異点の数 N_k は以下のように増加する。

$$N_k = \begin{cases} F_{k+4} & (F_{k+4} \text{ is odd number}), \\ F_{k+4}/2 & (F_{k+4} \text{ is multiples of } 2), \\ F_{k+4}/4 & (F_{k+4} \text{ is multiples of } 4). \end{cases}$$

表 3.1 はパラメータ α_k, r_k, N_k を示しており、 $k \rightarrow \infty$ の極限で $\alpha_\infty = 2/(3 + \sqrt{5})$, $r_\infty = |\cos(2\pi\alpha_\infty)| \simeq 0.737 \dots$ となる。重要な点は臨界トーラス上の各々の特異点の周りに多くの淀み領域が生じ、その淀み層の相空間面積は $\alpha = \alpha_\infty$ に近づくにつれて 0 に近づく点である。

図 3.3 は $k = 5$ の場合の最外殻トーラスの ε 近傍領域 $A_\varepsilon = \{(L, \theta) \in [-r_k, -r_k + \varepsilon] \times [-\pi/2, \pi, 2]\}$

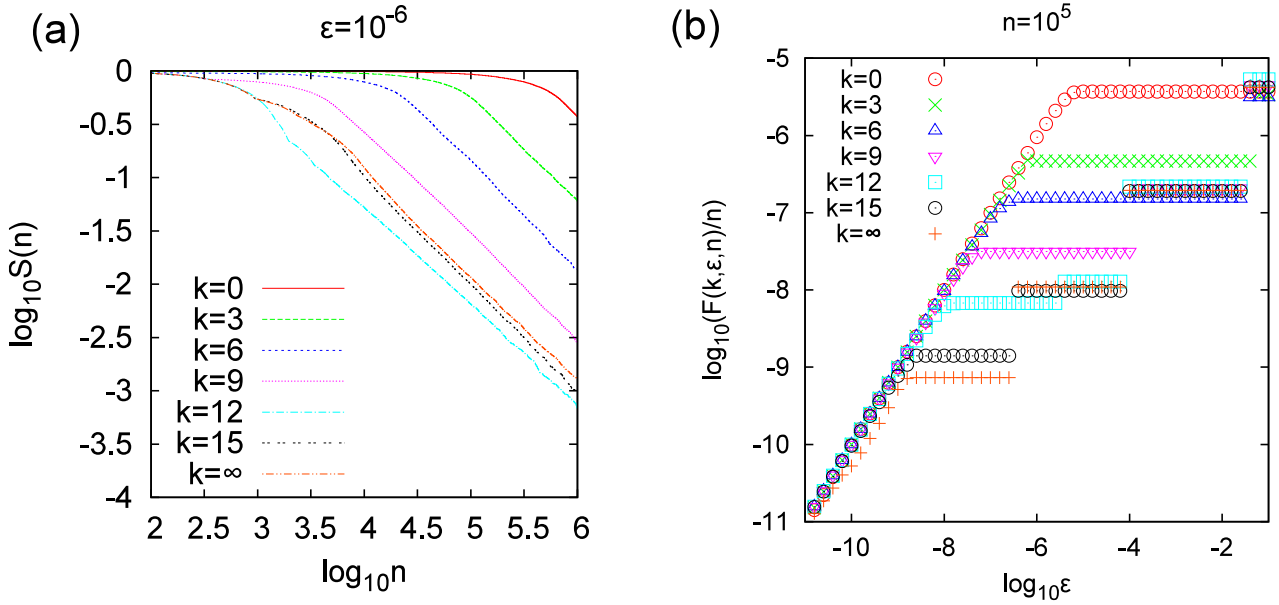


図 3.4 (a) $\varepsilon = 10^{-6}$ の場合、サバイバル時間の確率分布 $S_\varepsilon(n)$ は漸近的に $1/n (n \gg 1)$ に近づく。
 (b) ε が十分小さい時、淀み層の相対面積 $F(k, \varepsilon, n)/n$ は $O(\varepsilon)$ に従う。

からの脱出時間を色分けプロットで示している。図 3.3(a) では、カオス領域に淀み領域が形成されており、図 3.3(b) では、最外殻 KAM トーラス上の特異点近傍に淀み領域が存在することを示している。カオスの海の中の淀み領域の相空間面積は最外殻 KAM 表面近傍の淀み領域よりも大きいように見える。次節でそれぞれの淀み領域の相空間面積を理論的に導出する。

最外殻 KAM 表面の ε -近傍の淀み領域の滞在時間 n のサバイバル確率は以下で定義される。

$$S_\varepsilon(n) \equiv \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu((L, \theta) | (L^{(i)}, \theta^{(i)}) \in A_\varepsilon)}{\mu(A_\varepsilon)}.$$

ここで、 $(L^{(i)}, \theta^{(i)})$ は i 回写像後の点を表わし、 $\mu(\cdot)$ は (\cdot) のルベグ測度を表わす。図 3.4(a) はサバイバル確率が漸的に異なる係数を持つ $1/n (n \gg 1)$ に近づくことを示している。

$$S_\varepsilon(n) \sim \frac{F(k, \varepsilon, n)}{\varepsilon} \frac{1}{n}. \quad (3.1)$$

相空間内の淀み層の相対面積 $F(k, \varepsilon, n)/n$ は図 3.4(b) に示されている。すべての k においてスケールリング則は $O(\varepsilon)$ ($\varepsilon \ll 1$) に従う。

3.2.2 最外殻 KAM 表面近傍の淀み層の急激な減少

最外殻 KAM 表面近傍の式 (3.1) で表わされる淀み層の相空間面積を理論的に導出する。簡単のため、淀み層の数が $N_k = F_{k+4}$ の場合を考えるが、以下の議論は他の場合にも適用可能である。上半円からの第 1 脱出領域 D_1 と上半円への再入射領域 D_{in} は以下のように書ける。

$$D_1 = \{(L, \theta) \in D^- | \theta_1^-(L) < \theta < \theta_1^+(L)\},$$

$$D_{\text{in}} = \{(L, \theta) \in D^- | \theta_{\text{in}}^-(L) < \theta < \theta_{\text{in}}^+(L)\}.$$

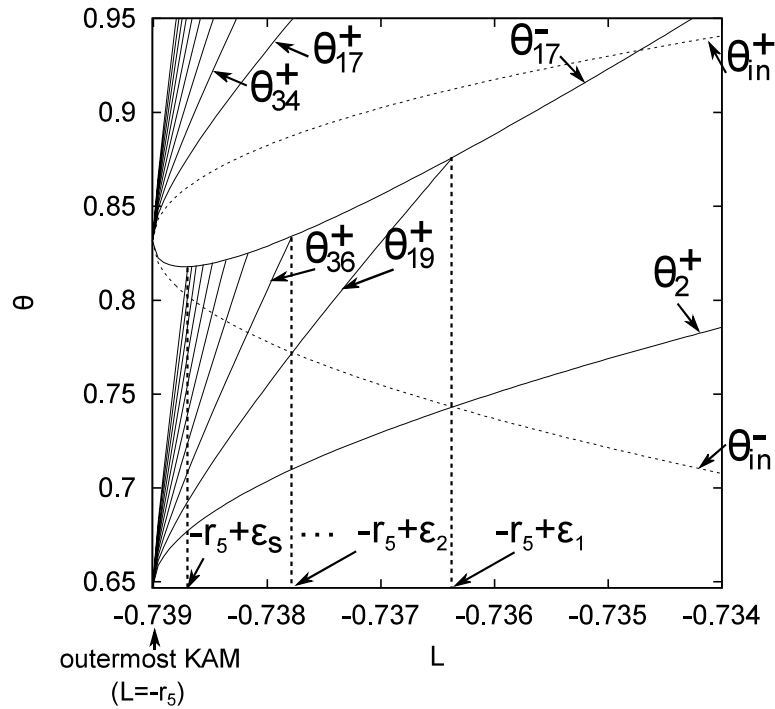


図 3.5 $k = 5$ の場合の相空間構造の部分的拡大図。第 n 脱出領域 $\theta_n^+(L)$ と再入射領域 $\theta_{in}^\pm(L)$ は式 (3.4) によって理論的に決定される。 ϵ_s は s 番目の淀み層の厚みを表わしている。

ただし、 $D^- = \{(L, \theta) \in [-r_k, 0] \times [-\pi/2, \pi, 2]\}$ である。臨界軌道角運動量 $L_k^\pm(\theta)$ は幾何学的に

$$L_1^\pm(\theta) = \frac{\pm r_k R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + r_k^2 \mp 2r_k R \sin \theta}}$$

と決定される。よって、 $\theta_1^\pm(L)$ は

$$\theta_1^\pm(L) = \arcsin \left\{ \frac{-L^2 \pm \sqrt{L^4 - L^2(R^2 + r_k^2) + r_k^2 R^2}}{r_k R} \right\} \quad (3.2)$$

と求まる。ポアンカレ写像の逆像 $\Phi^{-1}(L, \theta)$ は

$$\Phi^{-1}(L, \theta) = \begin{cases} (L, \theta + \pi - 2 \arcsin |\frac{L}{R}|), & \text{if } \theta < \theta_0(L), \\ (L, \theta - 2 \arcsin |\frac{L}{R}|), & \text{if } \theta > \theta_0(L) \end{cases} \quad (3.3)$$

で与えられる。式 (3.2) と (3.3) を使って、再入射領域 $D_{in} = \Phi^{-1}(D_1)$ は以下のようにもとまる。

$$\theta_{in}^\pm(L) = \arcsin \left\{ \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - L^2(R^2 + r_k^2) + r_k^2 R^2}}{r_k R} \right\}.$$

ただし、 $\theta_0(L) = \arcsin(2L^2/R^2 - 1)$ は逆像が帽子領域にあるか、縁 (CD または EF) にあるかを区別する臨界位置である。第 n ($2 \leq n \leq N_k$) 脱出領域 $D_n = \Phi^{-1}(D_{n-1} \setminus D_{in})$ は同様にして

$$D_n = \{(L, \theta) \in D^- | \theta_n^-(L) < \theta < \theta_n^+(L)\} \quad (2 \leq n \leq N_k)$$

で与えられる。ただし、 $\theta_n^\pm(L)$ は以下を満たす。

$$\theta_n^\pm(L) = \begin{cases} \theta_{n-1}^\pm(L) + \pi - 2 \arcsin |\frac{L}{R}|, & \text{if } \theta_{n-1}^\pm < \theta_0(L), \\ \theta_{n-1}^\pm(L) - 2 \arcsin |\frac{L}{R}|, & \text{if } \theta_{n-1}^\pm > \theta_0(L). \end{cases}$$

s を任意の整数 ($s = 0, 1, 2, \dots$) とすると、第 $n (= N_k s + 1)$ 脱出領域 D_n は以下で与えられる。

$$D_n = \{(L, \theta) \in D^- | \theta_n^-(L) < \theta < \theta_n^+(L)\}.$$

ただし、

$$\theta_n^\pm(L) = \theta_{N_k s + 1}^\pm(L) = \theta_1^\pm(L) + M_k \pi - 2N_k s \arcsin \left| \frac{L}{R} \right|.$$

ここで $M_k (= 4F_{k+2} - F_{k+4})$ は領域 $\theta < \theta_0(L)$ に N_k 回写像のうち何回衝突したかを表わす数であり、

$$\frac{M_k}{N_k} \pi = \theta_0(L) - \left(-\frac{\pi}{2}\right). \quad (3.4)$$

で決定される。一般の $n = N_k s + l$ ($2 \leq l \leq N_k$) に対しては次のような式で与えられる。

$$\theta_n^\pm(L) = \theta_{N_k s + l}^\pm(L) = \theta_l^\pm(L) + (4F_{k+2} - F_{k+4})\pi - 2N_k s \arcsin \left| \frac{L}{R} \right|. \quad (3.5)$$

図 3.5 は $k = 5$ の場合に式 (3.5) で与えられるそれぞれの脱出領域の理論曲線を示している。最外殻 KAM 表面には $N_k (= 17)$ 個の特異点が存在するので、17 ブロックずつ脱出領域が分布しているのが確認できる。図 3.5 はそのうちの一つのブロック ($l = 2$) を示している。すなわち、 $\{\theta_2^+, \theta_{19}^+, \theta_{36}^+ \dots\}$ という脱出領域が描かれている。

最外殻 KAM 表面近傍で $L = -r_k + \varepsilon$ におけるテーラー展開を使うと、すなわち $\arcsin(L) \simeq \arcsin(-r_k) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-r_k^2}}$ を仮定すると、式 (3.5) は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \theta_n^\pm(L) &= \theta_{N_k s + l}^\pm(L) \simeq \theta_l^\pm(-r_k) + (4F_{k+2} - F_{k+4})\pi + 2N_k s \left(\arcsin(-r_k) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-r_k^2}} \right) \\ &= \theta_l^\pm(-r_k) + (4F_{k+2} - F_{k+4})\pi + 2N_k s \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2F_{k+2}}{F_{k+4}}\pi + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-r_k^2}} \right) \\ &= \theta_l^\pm(-r_k) + 2N_k s \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-r_k^2}} \quad (L \approx -r_k). \end{aligned} \quad (3.6)$$

一方、長い滞在軌道 ($s \gg 1$) については、第 n 脱出曲線は ε が小さい場合に N_k 周期軌道に近似できる。すなわち、

$$\theta_{N_k s + l}^\pm(L) = \theta_l^\pm(-r_k) + \frac{\pi}{N_k} \quad (s \gg 1). \quad (3.7)$$

式 (3.6) と (3.7) から、最外殻 KAM 表面近傍の淀み層の厚み $\varepsilon_c(k)$ を評価できる。

$$\varepsilon_c(k) \simeq \varepsilon_s \simeq \frac{\pi \sqrt{1-r_k^2}}{2N_k^2 s} \simeq \frac{\pi \sqrt{1-r_k^2}}{2N_k} \frac{1}{n} \quad (s \gg 1). \quad (3.8)$$

図 3.6(a) は写像回数 $n \leq 10^5$ の下で、 $\varepsilon_c(k)$ を数値計算した結果であり、式 (3.8) とよく一致していることがわかる。式 (3.8) は特異点の数 N_k が増加すると、最外殻 KAM 表面近傍では淀み層の厚みが急激に減少していくことを意味する。実際、 $k \rightarrow \infty$ の黄金比トーラスの場合は最外殻 KAM 表面の軌道の淀み運動は完全に消失する。式 (3.1) で定義された相空間面積は

$$F(k, \varepsilon_c, n)/n = \varepsilon_c(k),$$

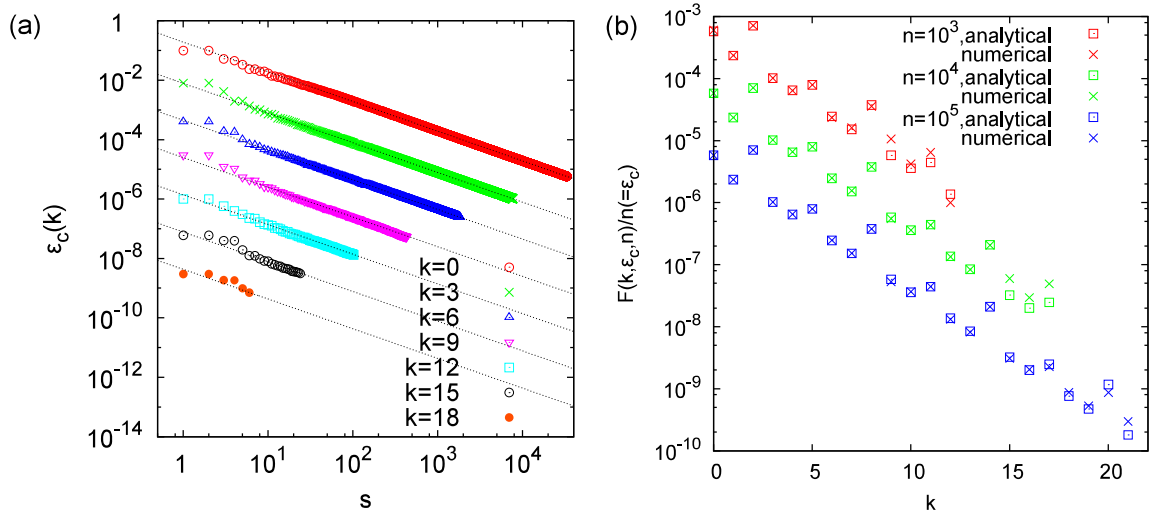


図 3.6 (a) 淀み層の階層 s とその淀み層の厚み ε_s の関係。(b) フィボナッチ数列 k と相空間面積 $F(k, \varepsilon, n)/n$ の関係。

のように淀み層の厚みと等価であるから、

$$S_\varepsilon(k) = \varepsilon_c(k)/\varepsilon \rightarrow 0,$$

を示すことができる。この結果は図 3.6(b) で数値的にも確かめられた。

3.3 新しいタイプの淀み層とスケーリング理論

3.3.1 不変集合

前節では、最外殻 KAM 表面の回転数が無理数に近づく場合に最外殻 KAM 表面の淀み層が急激に薄くなることを示した。しかしながら、回転数が無理数の場合は新しいタイプの淀み層 (最外殻 KAM 表面から離れた位置の特異的周期点に付随する) が形成される。この特異的周期点は新しいタイプのスローダイナミクスを引き起こすことを示す。以下では、無理数回転 α_∞ (黄金比) を持つ $k \rightarrow \infty$ の場合を考え、カオスの海の中の特異点 (L_c, θ_c) を導出する。

まず、特異点の存在条件を決定する。よく知られているように、マッシュルームビリヤードの周期軌道は円ビリヤードの m 次多角形周期軌道で決定される。ゆえに、対応する軌道角運動量 L_c は

$$L_c = L_{m,a} = -\sin\left(\frac{m-2a}{2m}\pi\right). \quad (3.9)$$

ただし、 $m (\geq 3)$ は多角形軌道の周期で、整数 a は頂点を $(a-1)$ 回飛ばして多角形を作るかを定めるパラメータである ($1 \leq a \leq m/2$)。特異点が存在するのは m 次多角形周期軌道が図 3.1 の縁 C と F の両方に衝突する場合である。図 3.7(a) は $(m, a) = (16, 5)$ を満たす m 次多角形軌道の例を示しており、両方の縁 C と F に衝突している。図 3.7(a) で示されたデカルト座標 (x, y) を用いて、特異点 (L_c, θ_c) の存在条件を導出することができる。衝突点 P_j は極角 ψ_j と反射角 φ_j で表見され、以下のように書ける。

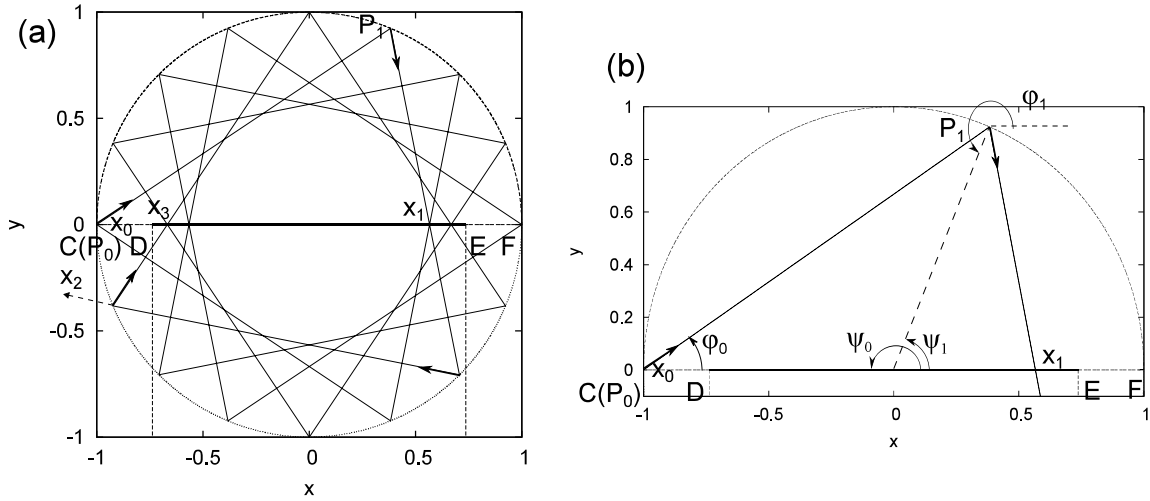


図 3.7 (a) $(m, a) = (16, 5)$ を満たす m -多角形軌道の例。軌道は縁 C と F の両方に衝突する。点 P_j から出発する軌道と $y = 0$ の交点座標 x_j も表示されている。(b) 図 (a) の拡大図。点 P_j の極角 ψ_j と反射角 φ_j が示されている。

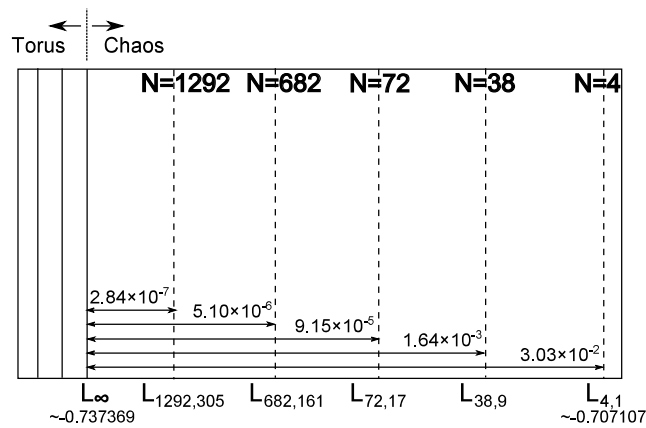


図 3.8 カオスの海の中での式 (3.9) と (3.10) で決まる 5 つの m -多角形軌道 (不変集合) の位置。詳細の座標は表 3.2 を参照。

$$\begin{cases} \psi_{j+1} = \psi_j + \pi - 2 \arcsin(L_{m,a}), \\ \varphi_{j+1} = \varphi_j + \pi - 2 \arcsin(L_{m,a}). \end{cases}$$

ただし、 $\psi_0 = \pi, \varphi_0 = \pi - \arcsin(L_{m,a})$ である。このとき、点 P_j の座標 $(\cos \psi_j, \sin \psi_j)$ は

$$y = \tan \varphi_j (x - \cos \psi_j) + \sin \psi_j.$$

を満たす。 $y = 0$ の場合を考えると座標 x_j と $y_j (= 0)$ は

$$x_j = \cos \psi_j - \frac{\sin \psi_j}{\tan \varphi_j}$$

で与えられる。

最小値 x_{\min} を

$$x_{\min} = \min_j |x_j|$$

表 3.2 カオスの海の中の不変集合の詳細。

m	a	$L_{m,a}(=L_c)$	θ_c
4	1	$-\sin(\pi/4)$	$\theta_1^\pm(L_{4,1}) + k'\pi/4 \pmod{\pi}, k' = 0, 1$
38	9	$-\sin(5\pi/19)$	$\theta_1^\pm(L_{38,9}) + k'7\pi/19 \pmod{\pi}, k' = 0, 1, \dots, 19$
72	17	$-\sin(19\pi/72)$	$\theta_1^\pm(L_{72,17}) + k'19\pi/72 \pmod{\pi}, k' = 0, 1, \dots, 36$
682	161	$-\sin(90\pi/341)$	$\theta_1^\pm(L_{682,161}) + k'90\pi/341 \pmod{\pi}, k' = 0, 1, \dots, 341$
1292	305	$-\sin(341\pi/1292)$	$\theta_1^\pm(L_{1292,305}) + k'341\pi/1292 \pmod{\pi}, k' = 0, 1, \dots, 646$

で定義すると、特異点 (L_c, θ_c) の存在条件は

$$x_{\min} \geq r \quad (= r_\infty) \quad (3.10)$$

で表わされる。この条件を数値計算アルゴリズムで解くと、特異点の座標 (L_c, θ_c) を決定できる。

最終的に次の 5 つの (m, a) の族が得られる。すなわち、 $(4, 1), (38, 9), (72, 17), (682, 161), (1292, 305)$ である。表 3.2 は座標 (L_c, θ_c) の詳細を示しており、図 3.8 は最外殻 KAM 表面からの距離を示している。図 3.8 には N という表記で $L = L_{m,a}$ 上の特異点の数を記している。数値計算の結果では、 $r = r_\infty$ の場合の $(m \leq 1292)$ を満たす 5 つだけを特定できたが、もし式 (3.10) において $r \rightarrow R$ を考えると、より多くの特異点 (L_c, θ_c) が最外殻 KAM 表面近傍に稠密に存在できる可能性がある。

3.3.2 特異点近傍のスケーリング則

特異点 (L_c, θ_c) の近傍のスケーリング法則を前節と同様の方法で理論的に導出する。第 n 脱出領域の境界 θ_n^\pm は

$$\begin{cases} \theta_{2n'}^\pm(L) = \theta_1^\pm(L) + n'\pi + (4n' - 2) \arcsin L & (n = 2n'), \\ \theta_{2n'+1}^\pm(L) = \theta_1^\pm(L) + n'\pi + 4n' \arcsin L & (n = 2n' + 1) \end{cases} \quad (3.11)$$

で与えられる。図 3.9 は $(m, a) = (4, 1)$ のときに、写像回数 $n \leq 20$ に制限した場合に式 (3.11) で与えられる境界曲線 $\theta_n^\pm(L)$ を示している。充分大きい滞在時間 $(n \gg 1)$ において次の近似が成り立つ。

$$\theta_n^\pm(L) \simeq \theta_1^\pm(L) + \frac{n}{2}\pi + 2n \arcsin(L).$$

$L_c = L_{m,a}$ 上の特異的周期点近傍 $L \simeq L_c + \varepsilon$ でテーラー展開を用いて、十分大きい n で、

$$\arcsin L \simeq \arcsin L_{m,a} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - L_{m,a}^2}}$$

が成り立つ。第 n 脱出領域の θ 方向の幅 δ_n は、以下のようにもとまる。

$$\delta_n = \theta_{n+1}^\pm(L) - \theta_n^\pm(L) = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - L_{m,a}^2}}.$$

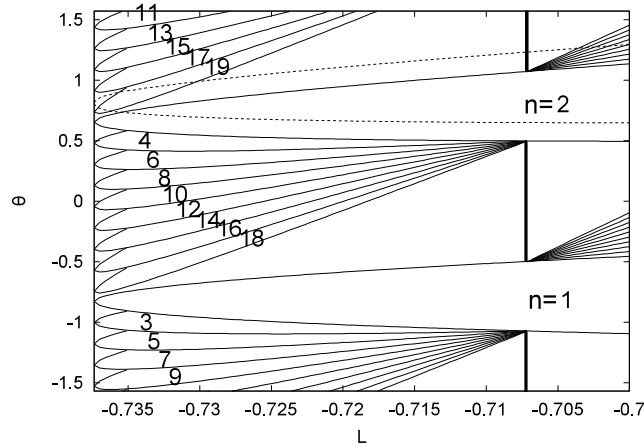


図 3.9 パラメータ $k \rightarrow \infty$ の場合の第 n 脱出領域の理論曲線。実線は $(m, a) = (4, 1)$ を満たす普遍集合を示しており、点線は再入射領域 D_{in} を示している。数字 n は脱出時間を示す。異なる回転方向をもつ淀み層がそれぞれの特異点の両側に非対称に形成される。

このとき、式 (3.4) に対応する周期の条件は

$$|\theta_{Ns+l+1}^{\pm} - \theta_{Ns+l}^{\pm}| \simeq \frac{\pi}{N}$$

となる。ただし、 $n = Ns + 1 (s = 0, 1, 2, \dots)$ である。淀み層の厚み $\varepsilon_c(N)$ は、

$$\varepsilon_c(N) \simeq \varepsilon \frac{\pi \sqrt{1 - L_{m,a}^2}}{2N} \frac{1}{n}$$

で与えられる。ゆえに、 ε -近傍の相対的厚み $\varepsilon_c(N)/\varepsilon$ は $n \rightarrow \infty$ において

$$\varepsilon_c(N)/\varepsilon \simeq \frac{\pi \sqrt{1 - L_{m,a}^2}}{2N} \frac{1}{n}$$

と評価できる。これは滞在時間 n の分布が普遍的に $(1/n)$ に従うことを意味する。

図 3.10 は以下で定義されるサバイバル確率 $\tilde{S}_\varepsilon(n)$ を示している。

$$\tilde{S}_\varepsilon(n) \equiv \frac{\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu((L, \theta) | (L^{(i)}, \theta^{(i)}) \in B_\varepsilon)}{\mu(B_\varepsilon)}.$$

ただし、領域 B_ε を $B_\varepsilon = \{(L, \theta) | L_{m,a} - \varepsilon \leq L \leq L_{m,a} + \varepsilon\}$ ととる。式 (3.1) に対応するサバイバル確率 $\tilde{S}_\varepsilon(n)$ は

$$\tilde{S}_\varepsilon(n) \simeq \frac{\tilde{F}(m, \varepsilon, n)}{\varepsilon} \frac{1}{n} \simeq \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon} \quad (3.12)$$

となる。重要なのは $\lim_{n \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \tilde{F}(m, \varepsilon, n) \rightarrow (\text{定数})$ となる点で、図 3.10 は式 (3.12) による $1/n$ スケーリング則を再現しており、最外殻 KAM 表面の回転数が無理数であってもカオス領域の中に残っている淀み層は有限の測度を持っている。

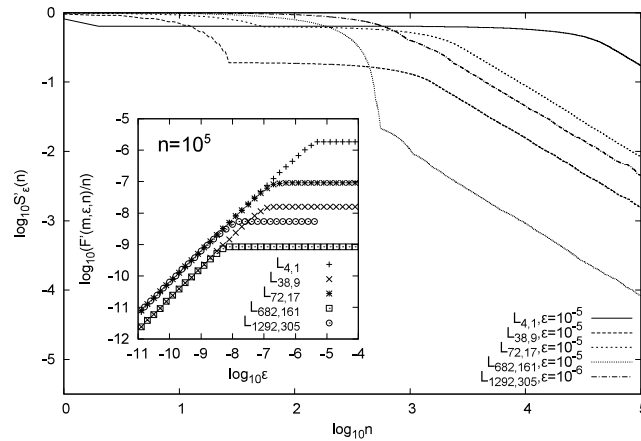


図 3.10 パラメータ ϵ を変えたときの領域 $B_\epsilon = \{(L, \theta) \mid L_{m,a} - \epsilon \leq L \leq L_{m,a} + \epsilon\}$ におけるサブイタル確率 $P_\epsilon(n)$ 。挿入図は淀み層の厚み ϵ と相空間面積 $F'(m, \epsilon, n)/n$ の関係を示している。

3.4 パワースペクトル密度の普遍則

式 (3.12) で得られた滞在時間分布は長時間相関を持つ淀み運動を引き起こす。長時間相関はパワースペクトル密度 (PSD) によって特徴づけられる。写像回数 i に応じて決まる記号力学系を考える。すなわち、 $\{\sigma_i\} = 1$ または 0 をマッシュルームビリヤードの帽子領域にいる場合に $\sigma = 1$ とし、茎の領域にいる場合に $\sigma = 0$ と記号づける。図 3.11 は異なる回転数 α における PSD を示しており、2つのタイプのスローダイナミクスが存在していることがわかる。一つは $0.5 \lesssim r/R$ の場合の $|\log \omega|$ スケーリング、もう一つは $r/R \lesssim 0.5$ の場合の $\omega^{-\gamma}$ スケーリングである。

$$PSD(\omega) \sim \begin{cases} \beta |\log \omega| & (\omega \ll 1) \quad (0.5 \lesssim r/R), \\ \omega^{-\gamma} & (\omega \ll 1) \quad (r/R \lesssim 0.5). \end{cases}$$

表 3.3 は数値計算によって得られたパラメータを示している。記号列 $\{\sigma_i\}$ はこれら 2つの異なる間欠

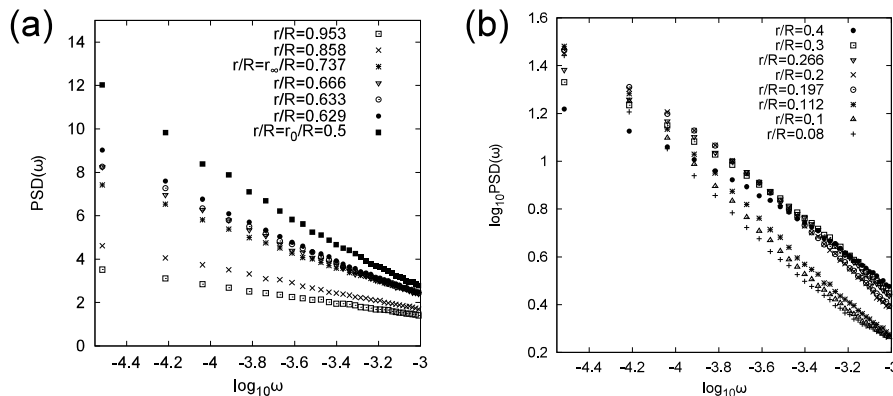


図 3.11 (a) $0.5 \lesssim r/R$ ではパワースペクトル密度は回転数 α に依らず $|\log \omega|$ に従う。(b) $r/R \lesssim 0.5$ ではパワースペクトル密度は回転数 α に依らず $\omega^{-\gamma}$ に従う。

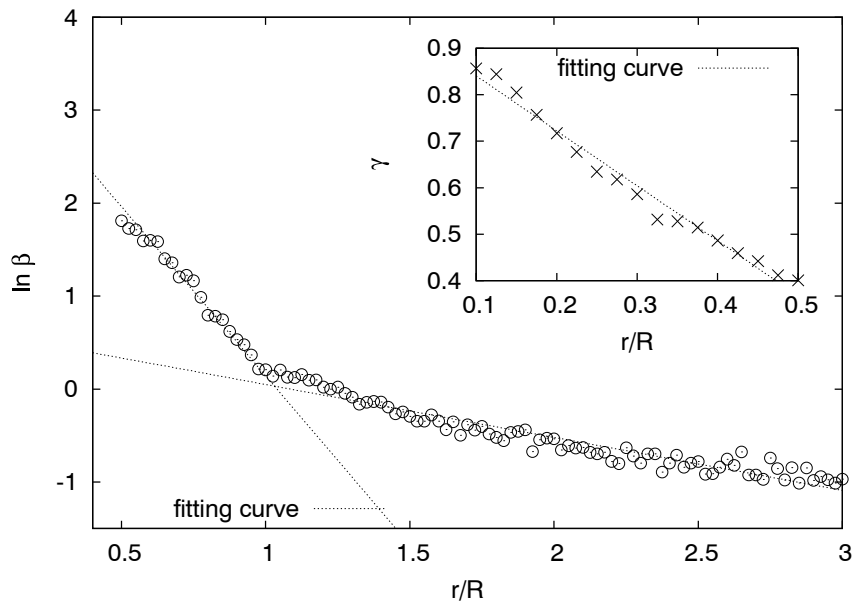


図 3.12 ビリヤード台のパラメータ r/R と PSD のパラメータ β と γ の関係。

表 3.3 数値計算によって決まったパラメータ β と γ 。

r/R	α	β	r/R	α	γ
0.95327044...	$1 - [2, 4, 1, 1, 1, \dot{1}]$	1.371	0.4		0.486
0.95257701...	$1 - [2, 4, 1, 1, 2, \dot{1}]$	1.739	0.3		0.586
0.90268536...	$\pi/2$	1.871	0.26625534...	$\sqrt{2}/2$	0.627
0.85821619...	$\sqrt{2}$	1.952	0.2		0.717
0.73736888...	$\sqrt{5}/2$	3.306	0.19797456...	e	0.718
0.66613092...	$\sqrt{3}/2$	4.149	0.11253919...	$\sqrt{3}$	0.846
0.63325565...	$e/2$	4.289	0.1		0.857
0.62968173...	π	4.630	0.08742573...	$\sqrt{5}$	0.836

的描像を表現している。前者の場合 ($0.5 \lesssim r/R$)、長時間 $\sigma = 1$ の状態が続き短い時間で突発的に $\sigma = 0$ の状態になるが、一方後者の場合 ($r/R \lesssim 0.5$) では長時間の状態と突発的状态が逆になる。図 3.12 は $0.5 \lesssim r/R$ におけるパラメータ β と $r/R \lesssim 0.5$ におけるパラメータ γ を示している。

スケーリング $|\log \omega|$ は区分線形写像のスペクトル解析によって得られている [Miyaguchi and Aizawa, 2007]。ただし、状態 $\sigma = 1$ における滞在時間 n の確率分布 $P(n)$ が $P(n) \sim n^{-2}$ に従う場合を考えている。ゆえに、 $0.5 \lesssim r/R$ の場合のスローダイナミクスは前節で解析した淀み運動に起因していると考えられる。しかし、 $\omega^{-\gamma}$ スペクトルの起源は依然明らかになったわけではない。本章で言えることは、パラメータが $r/R \lesssim 0.5$ の場合には、茎領域から上半円領域への再入射メカニズムが強い間欠性に強く影響し

ているということである。さらに、パラメータ $r/R \simeq 0.5$ は、PSD の漸近形である

$$PSD(\omega) = A|\log \omega| + B\omega^{-\gamma} (\omega \ll 1)$$

の第 1 項と第 2 項を区別する現象論的な転移点であると言える。本章は $r/R \leq 1$ の場合だけ扱ったが、 $1 < r/R$ を含めた場合を再入射過程を含めてより詳しく解析する必要がある。

3.5 まとめと考察

ハミルトン系の淀み運動の起源の一つとして不変 KAM トーラス近傍の淀み運動が考えられている。この仮説はカオスとトーラスの境界が棲み分け境界の場合でさえ、最外殻 KAM トーラスの回転数 α が有理数の場合には部分的に確かめられた。しかし、回転数 α が無理数になるとカオスとトーラスの淀み層は完全に消失するため、上記の仮説は次のように変更されなければならない。つまり、カオスの海の中で最外殻 KAM 表面から遠い（とても遠くではない）場所にいくつかの特異的周期点の族が存在し、その特異点の周りに明確なスケールリング法則を持つ淀み層が分布していると言える。また、マッシュルームビリヤードのパラメータが $0.5 \lesssim r/R \leq 1$ である場合、滞在時間分布のスケールリング則によってパワースペクトル密度 ($\propto |\log \omega|$) の普遍則を導いた。さらに、マッシュルームビリヤードの $r/R \lesssim 0.5$ の場合に $\omega^{-\gamma}$ -スペクトルをもつ従来報告されていない異なるタイプのスローダイナミクスが普遍的に存在することを発見した。

第4章

カオス軌道の大域的ダイナミクスの特徴づけ

第1章では、ハミルトン系カオスの多重エルゴード性が熱力学的形式によっても完全な説明は与えられないことを示した。その本質的問題は、一本の軌道の部分領域がスローダイナミクスを含む異なるエルゴード的測度を有していることであり、異なるエルゴード的測度を定量化する必要がある。そこでまずは、変形ベルヌイ写像を例に文献 [Aizawa et al., 1989] で扱われているパワースペクトル密度の次元に関するマルチフラクタル解析を復習し、情報次元の平均と分散を定義できることを示す。情報次元の平均は“スローダイナミクスの強さ”を定量化し、分散は“軌道の多様性”を定量化でき、変形ベルヌイ写像の軌道の多様性は $B = 2$ で最大となる。一方、面積保存写像の例ではマッシュルームビリヤード系においてスローダイナミクスが大域的ダイナミクスに反映しない性質を示し、変形キャット写像では大域的なダイナミクスに反映する結果となった。これは淀み領域への再入射メカニズムが関係していると考えられる。また、変形キャット写像 ($B' \gg 1$) と標準写像 ($0 < K < 1$) で類似の構造が見出されることを発見した。

4.1 パワースペクトル密度のマルチフラクタル解析

この節では、時系列の分割方法を示し、分割された部分領域でのパワースペクトル密度のマルチフラクタル解析を行う。変形ベルヌイ写像を例に、情報次元の平均は“スローダイナミクスの強さ”を表わし、分散は“軌道の多様性”を表わしていることを示す。

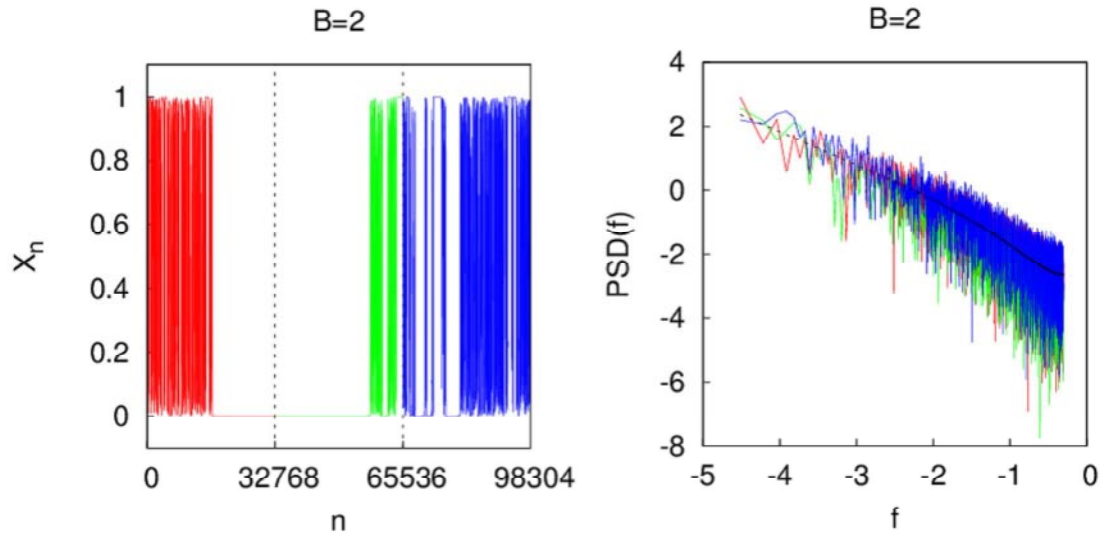


図 4.1 左図は変形ベルヌイ写像 ($B = 2$) の時系列を $N_1 = 2^{15}$ の時間領域に分割する方法を示している。時系列は時間領域 $[0, 2^{15}]$ (赤)、時間領域 $[2^{15}, 2 \cdot 2^{15}]$ (緑)、時間領域 $[2 \cdot 2^{15}, 3 \cdot 2^{15}]$ (青) に分割される。右図はそれぞれの時間領域のパワースペクトル密度を示しており、黒の点線は分割数 10^4 の場合の平均パワースペクトルを表わしている。

4.1.1 時系列の分割方法

第 1 章及び付録 A で、変形ベルヌイ写像のパワースペクトル密度のスケーリング法則を導入した。変形ベルヌイ写像の平均パワースペクトル密度は

$$\langle S(f) \rangle = \begin{cases} f^0 & (B < 1.5), \\ f^{\beta-3} & (1.5 < B < 2), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\tau}{N}\right)^{1-\alpha} y_{\alpha}\right] e^{-i\omega\tau} d\tau & (2 < B) \end{cases} \quad (4.1)$$

で表わされる。ただし、 y_{α} は指数 α のミッタクレフラー分布に従う確率変数である。この節では、平均パワースペクトルの周りのゆらぎを観測することを試みる。手法は、第 1 章で概説した一本の時系列を分割する方法を用いる。変形ベルヌイ写像の例えば $B = 2$ の場合に、 N ステップまである一本の軌道を M 個の N_1 ステップの領域 I_j ($j = 0, 1, 2, \dots, M-1$) に分割する。図 4.1 左には $N_1 = 2^{15}$ で分割した最初の 3 つの時間領域を色分けしてプロットしており、各時間領域の 3 つの部分軌道はそれぞれ異なるエルゴード的測度上を運動しているとみなすことができる。この 3 つの部分領域でパワースペクトルの分布関数を計算すると、図 4.1 右のようになる。黒の点線は $M = 10^4$ の場合の平均パワースペクトルを表わしている。

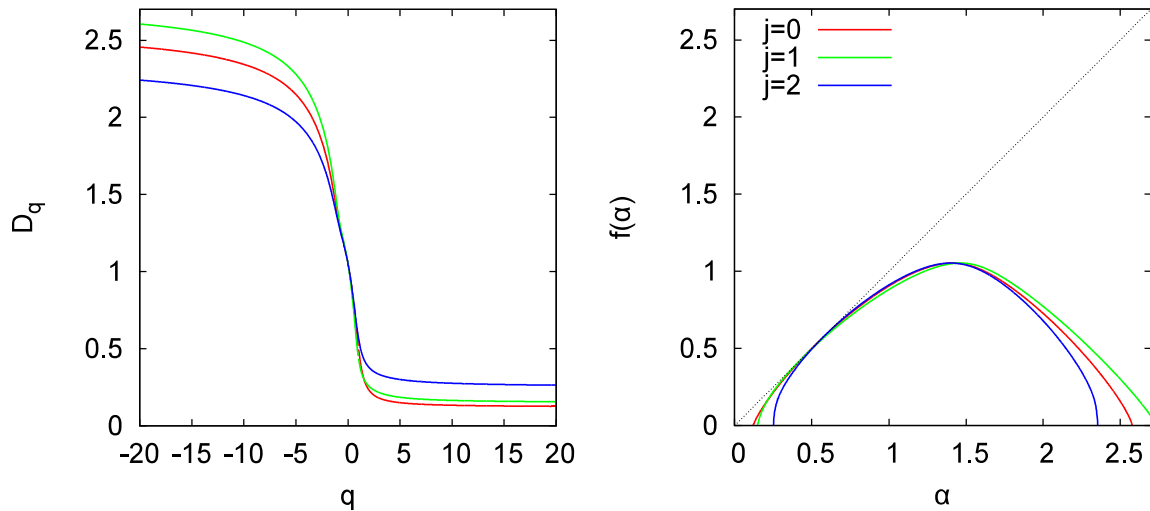


図 4.2 図 4.1 における 3 つの時間領域での次元スペクトル D_q (左) と大域的スペクトル $f(\alpha)$ (右) を表わしている。

4.1.2 マルチフラクタル解析

上記で定義した部分領域 I_j のパワースペクトル密度の分布関数 $P(S(f))$ に対して、一般化次元を考える。分布関数 $P(S(f))$ を ε のビンごとに $P_i(S(f))$ ($i = 1, 2, \dots, L$) と名付けると、分配関数は $Z = \sum_{i=1}^L P_i(S(f))^q$ と書ける。このとき、一般化次元は

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln Z}{\ln \varepsilon} \quad (4.2)$$

と定義される。大域的スペクトルは

$$f_\alpha = \min_q [q\alpha(q) - (q-1)D_q] \quad (4.3)$$

で表わされる (第 1 章を参照)。図 4.2 には、3 つの色分けされた部分領域 I_j に対応する一般化次元 D_q と大域的スペクトル f_α が示されている。 $q = 1$ のとき、一般化次元は情報次元 D_1 を与え、大域的スペクトルは $f_\alpha = \alpha$ に接する点になる。情報次元 D_1 は確率の重みを含めたフラクタル次元を定義しており、 D_1 が大きければ一様な確率を意味し、 D_1 が小さければ特異性を持つ確率を意味する。

4.1.3 情報次元の平均と分散

部分領域のエルゴード的測度を情報次元の分布関数で定量化することを考える。図 4.3 左は、部分領域 I_j に対し情報次元 D_1 を計算した際の分布関数を示している。

特徴的なパラメータ $B = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ について説明すると以下のようなになる。 $B = 1.0$ では、 $D_1 \simeq 1.0$ 付近に局在しており、平均パワースペクトルのまわりのゆらぎが一様な確率で起きていることを意味している。 $B = 1.5$ では、 $D_1 \simeq 0.9$ 付近で $B = 1.0$ と比べてわずかに広がって局在しており、平

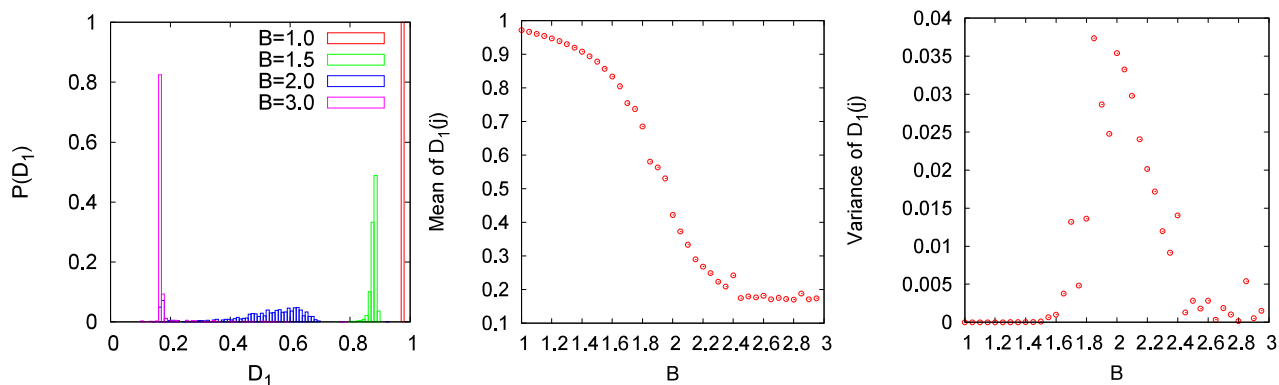


図 4.3 変形ベルヌイ写像の非線形パラメータ B を変えたときの情報次元の分布関数（左）と情報次元の平均値と分散値の B 依存性（中央と右）を示している。

均パワースペクトルのまわりのゆらぎが部分的に特異性を持つことを意味している。変形ベルヌイ写像の場合、特異性は $f \simeq 0$ 付近の長時間の振る舞いであり、中立不動点近傍のスローダイナミクスの振る舞いであることがわかる。 $B = 2.0$ では、 D_1 は広がりを持って分布しており、スローダイナミクスを持つ部分領域やカオス的ダイナミクスを持つ部分領域が混在していることを意味している。 $B = 2.5$ では、 $D_1 \simeq 0.2$ 付近に局在しており、スローダイナミクスの部分領域が多数を占めていることを意味している。

以上をまとめると、情報次元 D_1 の平均は“スローダイナミクスの強さ”を表わしており、平均が小さいほどスローダイナミクスの効果が強いといえる。図 4.3 中央では、非線形パラメータ B が增大すると、 D_1 の平均は減少しており、スローダイナミクスの効果が強くなる。また、情報次元 D_1 の分散は“軌道の多様性”を表わしており、分散が大きいほど多様な部分領域を持つといえる。図 4.3 右では、 $B = 2$ でピークを持っており最大の多様性を示す。これは、 $B = 1$ 付近ではカオス的ダイナミクスが支配的で多様性がなく、 $B = \infty$ ではスローダイナミクスが支配的で多様性がないことを意味している。

4.2 二次元写像における具体例

この節では、上記で導入したパワースペクトル密度のマルチフラクタル解析を二次元写像の 3 つの具体例に適用する。

4.2.1 マッシュルームビリヤード系

第 3 章で扱ったマッシュルームビリヤード系を考える。この系のパラメータは茎領域の幅 r/R であり、パワースペクトル密度のスケーリング法則が

$$PSD(f) \sim \begin{cases} \beta |\log f| & (f \ll 1) \text{ (} r/R \geq 0.5 \text{)}, \\ f^{-\gamma} & (f \ll 1) \text{ (} r/R < 0.5 \text{)} \end{cases}$$

で表わされることを示した。ここでは、パワースペクトル密度のスローダイナミクスの性質を取り出すために、第 3 章で計算したパラメータ依存性を再考察する。図 4.4 は、パラメータ r/R を変えたときのパ

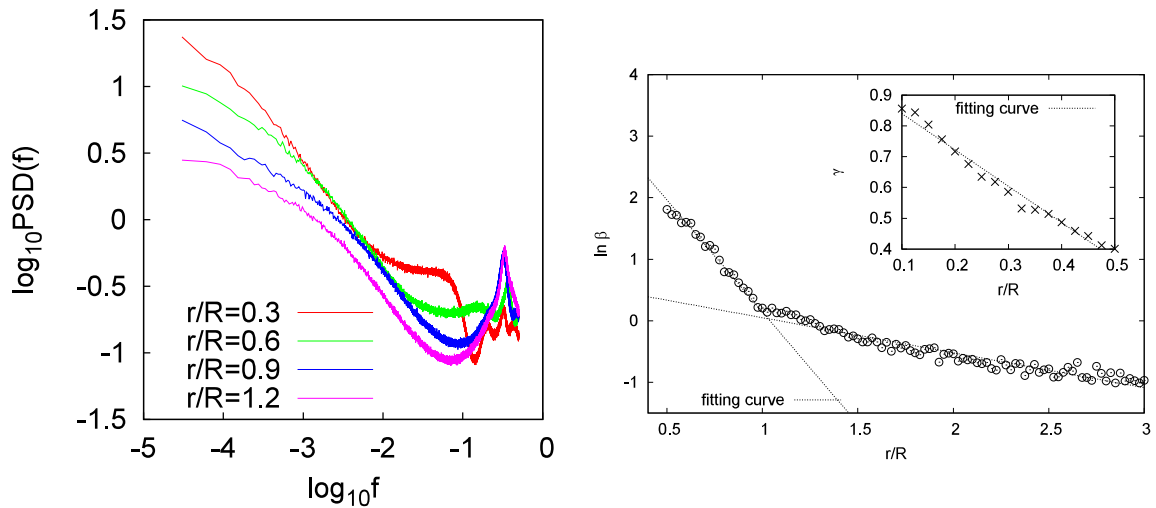


図 4.4 マッシュルームビリヤード系のパワースペクトル密度 (左) とスケーリング指数 β, γ のパラメータ r/R 依存性 (右)。

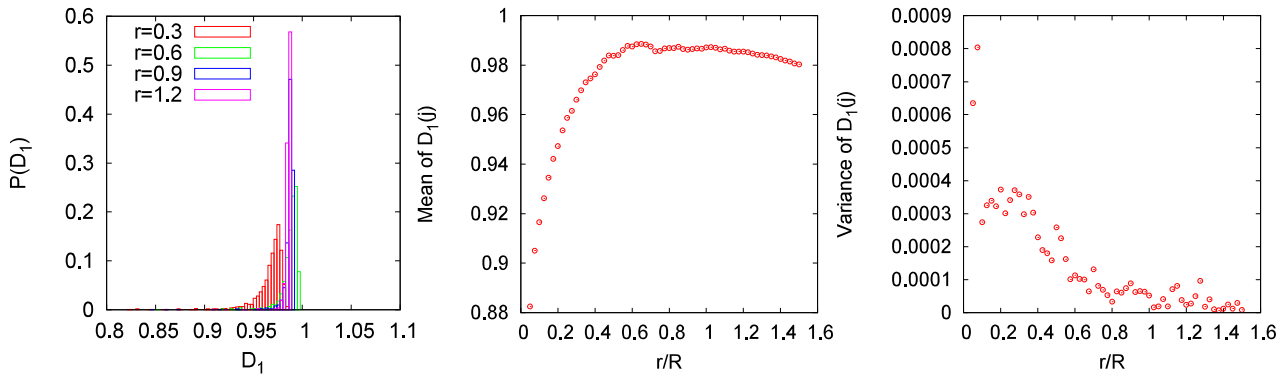


図 4.5 マッシュルームビリヤード系のパラメータ r/R を変えたときの情報次元の分布関数 (左) と情報次元の平均値と分散値の r/R 依存性 (中央と右) を示している。

ワースペクトル密度の $\log\text{-}\log$ プロットとスケーリング指数 β, γ を示している。パラメータ r/R が 0 に近づくとき、 $\langle \text{PSD}(f) \rangle \sim f^{-1}$ に近づき、茎領域での非常に遅い運動が観測されることは第 3 章で考察した。

ここでは、カオス軌道の大域的ダイナミクスを情報次元を使って定量化する。図 4.5 左は、部分領域 I_j に対し計算した情報次元 D_1 の分布関数を示している。情報次元 D_1 の平均と分散を変形ベルヌイ写像の場合と比べると、 $r/R \rightarrow +0$ の領域と $B \rightarrow 1.5 - 0$ 付近の値が類似していることがわかる。つまり、第 3 章で議論したマッシュルームビリヤード系のスローダイナミクスは、大域的なダイナミクスに反映されていない。この理由は上半円への再入射メカニズムにあると考えられる [Miyaguchi, 2007]。

4.2.2 変形キャット写像

変形キャット写像はハミルトン系の文脈でも文献 [Aizawa et al., 1989] により提案された 1 点のみ非双曲な二次元面積保存写像であり、文献 [Miyaguchi and Aizawa, 2007] による面積保存写像と同様の構造を持っている。変形キャット写像は

$$T_{MC}(x, y) = \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n^{B'} \pmod{1}, \\ y_{n+1} = x_n + y_n + y_n^{B'} \pmod{1} \end{cases}$$

で定義される。この写像は原点 $(0, 0)$ のみ非双曲的であり、原点の不安定多様体と原点の安定多様体が接している構造をもち、 $B' \rightarrow \infty$ で非常に遅いスローダイナミクスを持つことが知られている文献 [Aizawa et al., 1989]。マッシュルームビリヤード系とは異なりトラス構造は持たないが、一点を境に不動点とカオス領域を棲み分けている構造は類似している。この非双曲性に起因して原点の δ -近傍領域 $\{(x, y) \in [0, \delta) \times [0, \delta)\}$ における再帰時間分布は $P(n) \simeq n^{-\frac{4}{B'-1}-2}$ であることが示されている [Artuso et al., 2008]。

変形キャット写像に対して平均パワースペクトル密度を計算すると、図 4.6 のように $B' \gg 1$ において

$$\langle S(f) \rangle \simeq \begin{cases} f^{-\nu'} & (f < f_c), \\ f^{-2} & (f_c < f) \end{cases}$$

と表される。ただし、 $\nu' \ll 2$ である。このようにパワースペクトルの転移が起こる理由は y 方向で起きているスローダイナミクスが x 方向のダイナミクスの影響を受けて不安定性の強い領域に遷移させられることによるものと考えられるが、理論的には未だ説明されていない。ここでは、パワースペクトルの転移が起こる f_c を数値的に評価することで $B' \rightarrow \infty$ で $\langle S(f) \rangle \sim f^{-2}$ に従うと近似的に認めて考えることとする (図 4.6)。

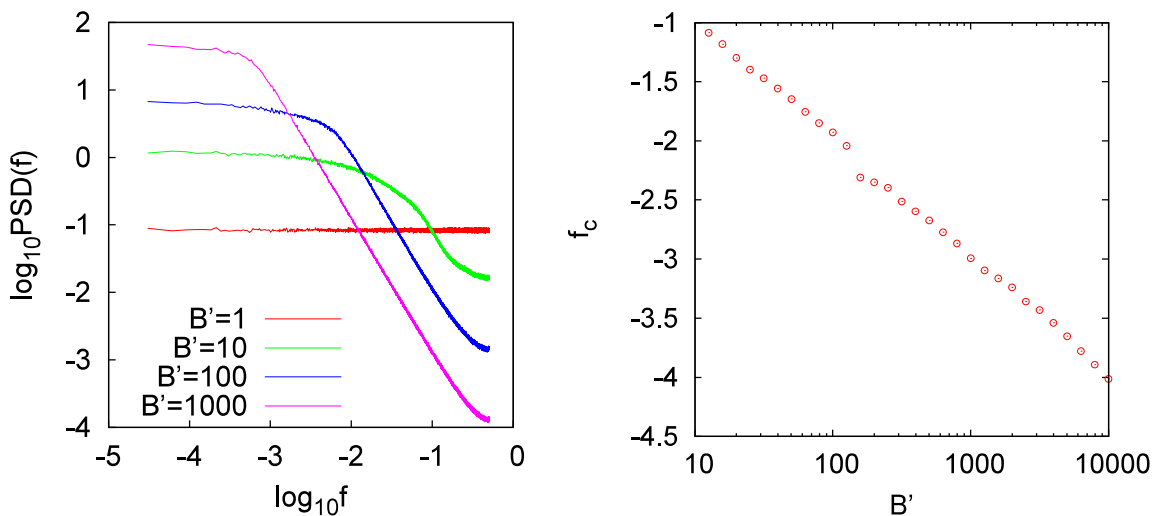


図 4.6 変形猫写像のパワースペクトル密度 (左) とスケーリング法則の転移周波数 f_c のパラメータ B' 依存性 (右)。

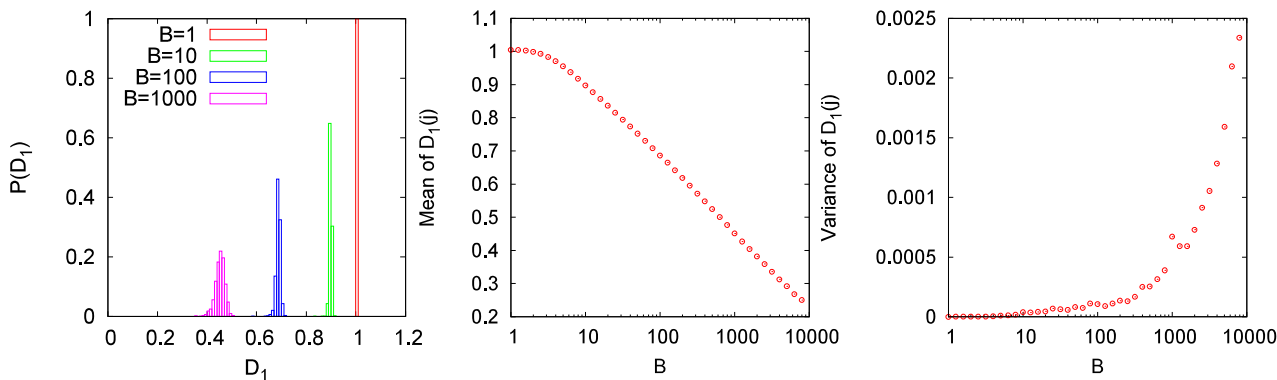


図 4.7 変形キャット写像のパラメータ B' を変えたときの情報次元の分布関数（左）と情報次元の平均値と分散値の B' 依存性（中央と右）を示している。

図 4.7 左は、情報次元 D_1 の分布を表わしている。図 4.7 中央は、 $B' \rightarrow \infty$ で情報次元の平均が小さくなることを示しており、図 4.7 右は分散が大きくなることを示している。つまり、変形キャット写像では非線形パラメータ B' が増大すると軌道の多様性が増大する。類似した構造を持つマッシュルームビリヤード系とは異なり、原点近傍のスローダイナミクスが大域的ダイナミクスに反映されている。この理由は、原点近傍に再入射する領域がマッシュルームビリヤード系と比べて多く分布していることが考えられるが、この仮説を確かめるには再入射領域の大きさを評価する必要がある。

4.2.3 標準写像

標準写像 (1.12) におけるパワースペクトル密度は無数のピークを持つ構造があり、その特異性はおおよそ $1/f$ スペクトルであることを第 1 章で示した。以下では不安定周期点 $(x, y) = (0.5, 0)$ 近傍の軌道に関する部分領域のパワースペクトル密度を考える。長時間相関を調べるために、最も長い周期 ($f \simeq 0$ 付近) のスケーリング法則を

$$S(f) \sim f^{-\nu}, \quad \nu \ll 1 \tag{4.4}$$

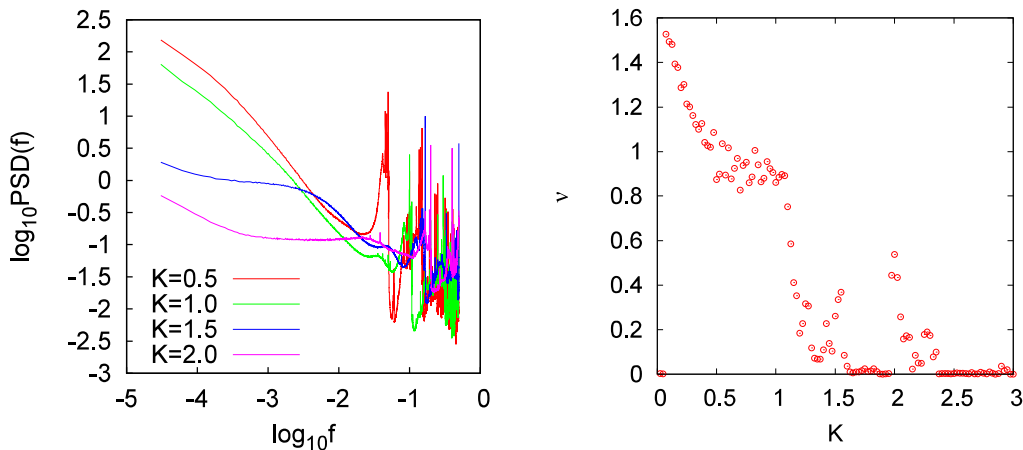


図 4.8 標準写像のパワースペクトル密度（左）とスケーリング指数 ν のパラメータ K 依存性（右）。

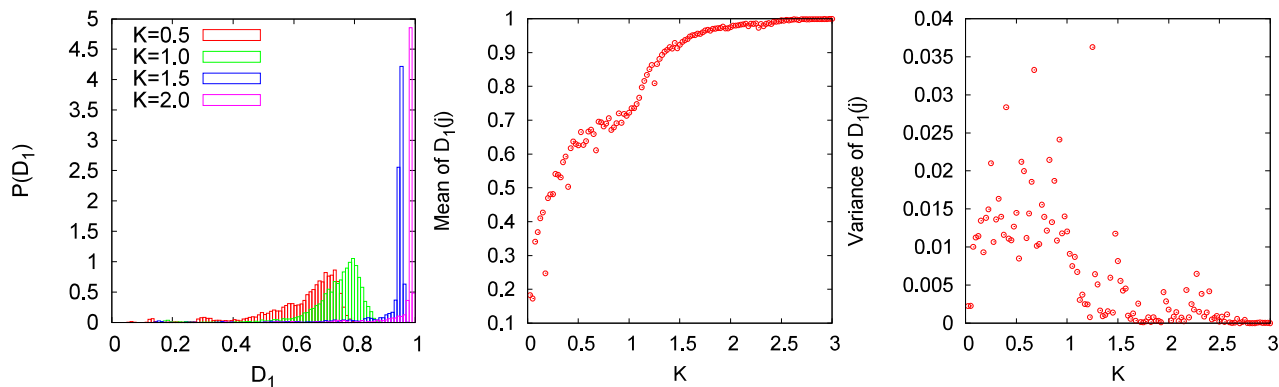


図 4.9 標準写像のパラメータ K を変えたときの情報次元の分布関数 (左) と情報次元の平均値と分散値の K 依存性 (中央と右) を示している。

と仮定した場合のパラメータ K 依存性を調べた。

図 4.8 はパラメータ K を変化させた場合のスケーリング指数 ν が示されている。 $K \simeq 0$ では、不安定周期点 $(0.5, 0)$ 近傍のダイナミクスは極めて準周期的運動に近い運動をするために ν は限りなく小さい。 K が或る程度 0 より大きくなると、トーラス近傍の準周期的運動とカオス運動を交互に繰り返すために ν は大きい値をとる。 $K \simeq 1$ 付近をより K が大きくなるとスローダイナミクスの効果が弱くなり ν は小さくなるが、ある特徴的パラメータ ($K=1.5, 2.0, 2.3$) の付近で急激に ν が大きくなることが観測された。つまり、この特徴的パラメータにおいてスローダイナミクスの効果が大きくなる。これは、不安定周期点 $(0.5, 0)$ 近傍から始まる軌道の固有の性質であることが考えられる。

部分領域の情報次元の分布関数は図 4.9 左の図のように表わされる。情報次元の平均値は K が小さくなるほど小さくなる (スローダイナミクスは強くなる) ことから、上記の長時間相関の描像と一致すると言える。また、このスローダイナミクスはカオス軌道の大的ダイナミクスにも反映されており、 $0 < K < 1$ の領域で情報次元の分散値は大きくなる。これは、トーラス近傍への再入射領域がカオス領域の中に多く存在していることを意味している。 $K = 1.5, 3.0, 2.3$ 付近の特徴的パラメータにおいても、上記で確認したスローダイナミクスの効果が大きくなる描像と一致している。

4.3 まとめと考察

一本の軌道の部分領域に関するパワースペクトル密度の分布関数についてマルチフラクタル解析を行った。情報次元の平均は“スローダイナミクスの強さ”を定量化し、分散は“軌道の多様性”を定量化する。変形ベルヌイ写像では、情報次元の分散は $B = 2$ でピークを持つことから、 $B = 2$ で最も軌道の多様性があることを発見した。この結果は、記号列のアルゴリズム的複雑さを定量化するレンペルジップ複雑度が $B = 2$ でピークを持つこととも関係していると考えられる [Shinkai and Aizawa, 2006]。

マッシュルームピリヤード系では、スローダイナミクスは大的ダイナミクスに反映されていない。これは、第 3 章で議論した非常に遅い淀み層における運動が茎領域を含むカオス軌道全体に影響をあまり与

えないことを意味する。この結果は、上半円への再入射領域の面積と茎領域への再入射領域の面積のパラメータ r/R 依存性を調べることで部分的に解決されることが考えられ、今後の課題とする。また、マッシュルームビリヤード系のダイナミクスの完全な解明は、上半円領域及び茎領域のスローダイナミクスを認めた上で、どちらが支配的かあるいは両者の拮抗を議論しなければならない。

一方、変形キャット写像では、マッシュルームビリヤード系と異なり原点近傍のスローダイナミクスは大域的ダイナミクスに反映している。これはパラメータ B' の増大とともに原点近傍への再入射領域が増大することを意味しているが、定量的な評価をすべきであると考えている。標準写像では、 $0 < K < 1$ の領域でスローダイナミクスが大域的ダイナミクスに反映している。これは、トーラス近傍への再入射領域がカオス領域の中に多く存在していることを意味している。この特徴は非双曲面積保存写像である変形キャット写像の $B' \rightarrow \infty$ の場合と類似しているが、標準写像においては変形キャット写像ほど構造が単純ではないので、トーラス近傍への再入射領域をどのように判定するかが大きな課題である。

第5章

アラン分散のスケーリング法則

クォーツ時計内の原子周波数標準の評価法であったアラン分散は、変形ベルヌイ写像の非定常性を特徴づける（付録 A）。その一方で、ハミルトン系カオスにおいては異なるスケーリング領域を持っていることを示した（第 1 章）。この章では、さらにアラン分散のスケーリング法則を精密化するために、アラン分散を構成する観測時間と相関長との関係を明らかにする。また、スケーリング法則を扱い易くするために、時間平均をアンサンブル平均で近似したアラン分散を考える。近似アラン分散に内在する相似則によって、観測時間と相関長が等しくなる臨界点近傍で異なるスケーリング法則を持つことを理論的に予想し、数値的にも確かめた。また、近似アラン分散の初期分布依存性はパワースペクトル密度の大偏差特性と明確な関係があることを示す。

5.1 先行研究のまとめ

アラン分散にはフラクショナルノイズによる評価 [Mandelbrot and Ness, 1968; Aizawa and Kohyama, 1983] と、大偏差理論による評価 [Aizawa, 1989a; Tanaka and Aizawa, 1993] が報告されている。この節ではこれまでに得られている結果を整理し、近似アラン分散を導入する。

5.1.1 記号列 $\{\sigma_n\}$ のアラン分散

変形ベルヌイ写像の記号列 σ_n を同じ長さ N の部分領域に分割することを考える。各部分領域を順番に $k \in \mathbb{N}$ と番号づけると、アラン分散 $\sigma_A^2(N)$ は

$$\sigma_A^2(N) \equiv \frac{1}{2} \left\langle \{X_{k+1}(N) - X_k(N)\}^2 \right\rangle_k, \quad (5.1)$$

で与えられる。ただし、 $X_k(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{kN+i}$ とする。記号 $\langle \cdot \rangle_k$ は k による平均操作を表わしている。部分領域の長さ N が大きいときに、以下のスケーリングが成り立つことが知られている。

$$\sigma_A^2(N) \sim O(N^{-\gamma}). \quad (5.2)$$

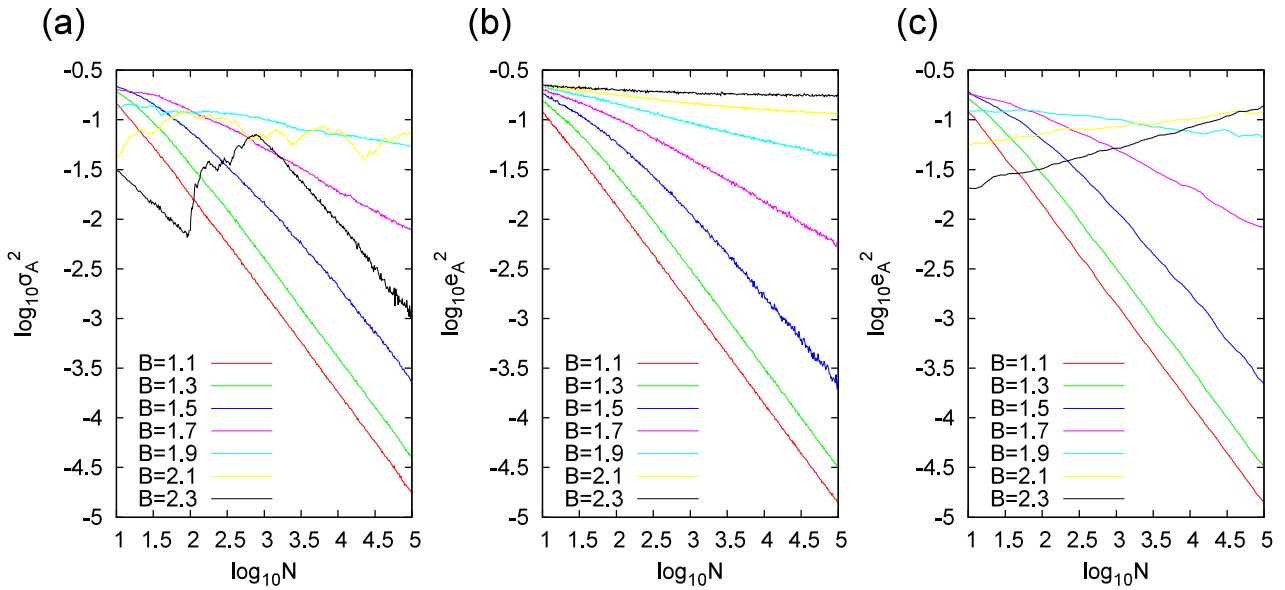


図 5.1 対数-対数プロット：(a) 部分領域の長さ N とアラン分散 σ_A^2 の関係、(b) 部分領域の長さ N と一様初期分布に対する EAVAR e_A^2 の関係、(c) 部分領域の長さ N と平衡分布に対する EAVAR e_A^2 の関係。

図 5.1(a) はこのスケーリング法則が $1 < B < 2$ の定常領域で成り立っていることを示している。スケーリング指数 γ はアラン分散とフラクショナルノイズの統計法則の類似性から次のように決定されることが知られている [Mandelbrot and Ness, 1968; Aizawa and Kohyama, 1983] (図 2)。

$$\gamma = \begin{cases} 1 & (1 \leq B < 3/2), \\ \beta - 2 & (3/2 \leq B < 2). \end{cases} \quad (5.3)$$

文献 [Tanaka and Aizawa, 1993] ではこの評価の厳密な理論は未解明であると言及されているが、定常領域では数値計算では非常に良く一致する (図 5.2)。非定常領域では、定義通りのアラン分散は明確なスケーリング法則が得られない (図 5.1 の $B = 2.1, 2.3$ の場合は揺らぎが大きい)。

5.1.2 アンサンブル平均で近似したアラン分散

アラン分散は、部分領域の時間平均をとったものを前後で差を取っていき、部分領域の番号 k で平均する操作を行っている。すなわち、部分時間平均量の差の時間平均をとっていることに対応している。前節で非定常領域のスケーリング法則が正確に得られないのは、この時間平均操作によるものである。そこで、非定常領域でも明確なスケーリング法則をもつようにアラン分散の時間平均をアンサンブル平均で近似することを考える。ただし、ここでは考える系のエルゴード性を仮定している。アンサンブル平均で近似したアラン分散 e_A^2 を以下で定義する。

$$\sigma_A^2(N) \simeq \frac{1}{2} \left\langle \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma_{i+N}) \right\}^2 \right\rangle_E \equiv e_A^2, \quad (5.4)$$

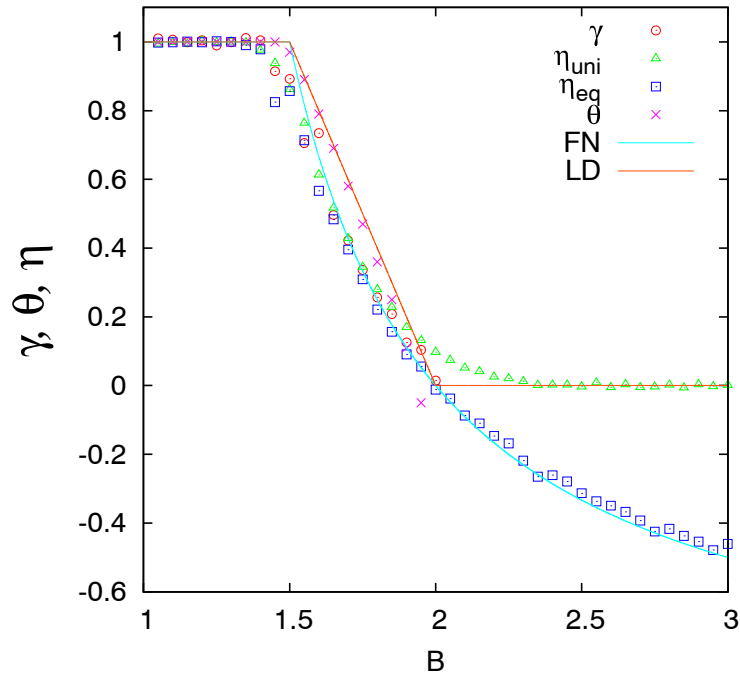


図 5.2 スケーリング指数 γ, θ, η を示している。実線はフラクショナルノイズ (FN) との対応から導かれた理論曲線であり、点線は大偏差原理 (LD) から求められた理論曲線を表わしている。

ただし、記号 $\langle \cdot \rangle_E$ は初期値 σ_1 分布によるアンサンブル平均を表わす。図 5.1(b)(c) は初期分布が異なる場合の e_A^2 のスケーリング法則を示している。部分領域の長さ N が大きいところで、非定常領域においても以下のスケーリング法則を満たす。

$$e_A^2(N) \sim O(N^{-\eta}). \quad (5.5)$$

ここで、指数 η_{uni} を一様初期分布に対する指数 η とし、指数 η_{eq} を平衡初期分布に対する指数と定義する。指数 η_{uni} と η_{eq} は数値計算によって

$$\eta_{\text{uni}} = \begin{cases} 1, & (1 \leq B < 3/2), \\ \beta - 2 & (3/2 \leq B < 2), \\ 0, & (2 \leq B), \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\eta_{\text{eq}} = \begin{cases} 1, & (1 \leq B < 3/2), \\ \beta - 2 & (3/2 \leq B) \end{cases} \quad (5.7)$$

であることが確認されている (図 5.2)。*1

*1 文献 [Tanaka and Aizawa, 1993] には定常領域 ($1 < B < 2$) におけるスケーリング法則は得られているが、非定常領域のスケーリング法則を本研究で追加して記載している。

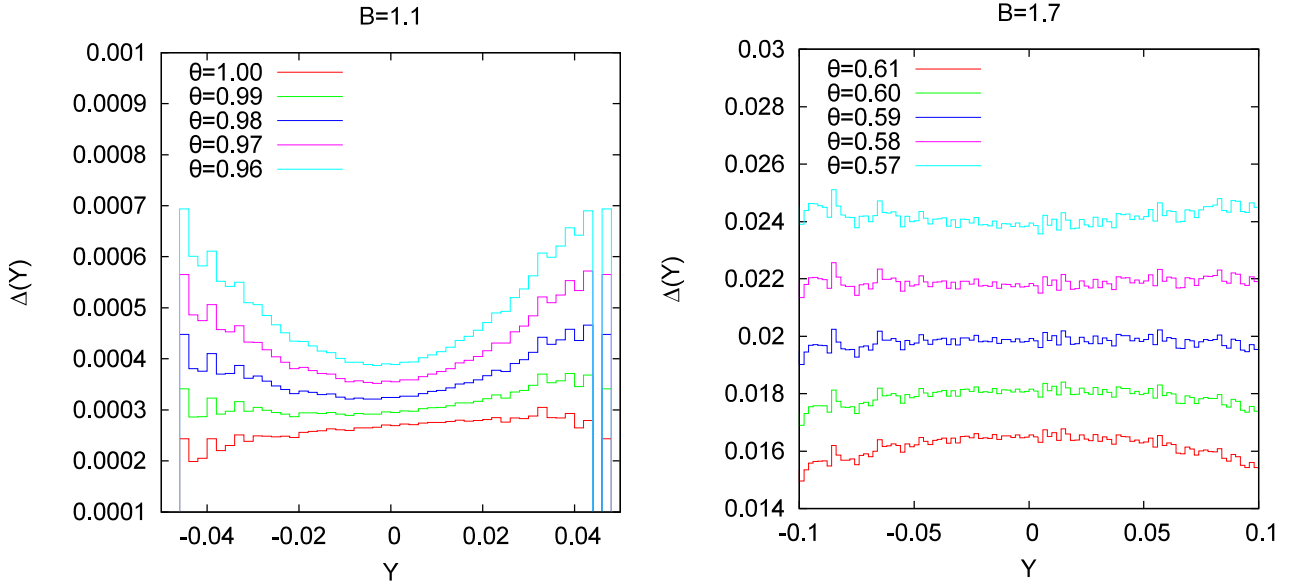


図 5.3 エントロピー関数との差を表わす $\Delta(Y)$ を表わしている。 $\Delta(Y)$ が $Y = 0$ 近傍で最も変化が少ないパラメータ θ を決定することができる。例えば、 $B = 1.1$ のときは $\theta = 0$ であり、 $B = 1.7$ のときは $\theta \simeq 0.58$ のように決まる。

5.1.3 大偏差原理による評価

部分和 $Y = (1/N) \sum_{i=1}^N \sigma_i$ の確率密度関数を $P_N(Y)$ と定義すると、 $P_N(Y)$ に対して以下の極限が存在するとき大偏差原理を満たすという。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{N^\theta} \ln P_N(Y) = \Phi(Y), \quad (5.8)$$

ただし、 θ はスケーリング指数であり、 $\Phi(Y)$ はエントロピー関数と呼ばれる特性量である。指数 θ は文献 [Aizawa, 1989a; Tanaka and Aizawa, 1993] で決定されており、

$$\theta = \begin{cases} 1 & (1 \leq B < 3/2), \\ 2(2 - B) & (3/2 \leq B < 2), \\ 0 & (2 \leq B) \end{cases} \quad (5.9)$$

である。この節での関心はスケーリング指数 θ の結果であるので、エントロピー関数 $\Phi(Y)$ の形状は文献 [Aizawa, 1989a; Tanaka and Aizawa, 1993] に詳細はゆずる。定常領域 ($B < 2$) では、 σ_{i+N} の時間平均 $(1/N) \sum_{i=1}^N \sigma_{i+N}$ と σ_i の時間平均 $(1/N) \sum_{i=1}^N \sigma_i$ の相関が小さければ、スケーリング指数 θ は指数 γ と関係していることが示されている [Aizawa, 1989a; Tanaka and Aizawa, 1993]。すなわち、

$$\begin{aligned} \sigma_A^2(N) &\propto (Y - \langle Y \rangle)^2 \sim O(N^{-\theta}), \\ \gamma &\simeq \theta \quad (B < 2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

スケーリング指数 θ を調べるために、以下の量を計算する。

$$\Delta(Y) \equiv -\frac{1}{N^\theta} \ln P_N(Y) - \Phi(Y). \quad (5.11)$$

密度 $P_N(Y)$ の収束速度は位置 Y に依存するが、式 (15) の左辺は $N \rightarrow \infty$ において全ての Y でエントロピー関数 $\Phi(Y)$ に収束する。このとき、最適なスケーリング指数 θ を次の関係を満足する指数とみなすことができる。

$$\Delta(Y) = \text{const.} \quad (5.12)$$

図 5.3 は θ を変化させたときの $\Delta(Y)$ を表わしており、この図から θ を決定することができる。この θ の決定方法は先行研究 [Tanaka and Aizawa, 1993] と異なるものであるが、妥当な評価法であると考えている。

5.2 理論結果

以下では、近似アラン分散 e_A^2 を考える。近似アラン分散の構成要素を調べるために $g(N, \tau)$ を以下のように定義する。

$$\sigma_A^2 \simeq e_A^2 = \lim_{\tau \rightarrow N} \frac{1}{2N^2} \left\langle \left\{ \sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma_{i+\tau}) \right\}^2 \right\rangle_E \equiv \lim_{\tau \rightarrow N} \frac{1}{2N^2} \langle g^2(N, \tau) \rangle_E. \quad (5.13)$$

つまり、 $g(N, \tau) \equiv \sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma_{i+\tau})$ と定義する。

5.2.1 $g^2(N, \tau)$ の振る舞い

変形ベルヌイ写像の初期分布を一様分布または平衡分布として用意した場合の $g^2(N, \tau)$ のアンサンブル平均 $\langle g^2(N, \tau) \rangle_E$ を計算すると、それぞれ図 5.4 と図 5.5 のようになる。図 5.4 は $B = 1.6$ においてアンサンブル平均 $\langle g^2(N, \tau) \rangle_E$ のスケーリング法則が観測時間 N と相関長 τ が等しい臨界点で変化していることを示している。図 5.5 においても同様に $B = 1.6$ で観測時間 N と相関長 τ が等しい臨界点で変化し、さらにその後一定のべき則に従っていく様子を示している。この臨界点での変化は、一様初期分布と平衡初期分布とそれぞれ非定常領域 ($B > 2$) でも起こることが確認されている。以下では、観測時間 N と相関長 τ が等しい ($N \simeq \tau$) におけるスケーリング法則を理論的に決定する。

5.2.2 相似則と 2 つのスケーリング法則

観測時間 N と相関長 τ が等しくなる臨界点近傍でのスケーリング法則を明らかにするために、2 軌道相関関数 $\tilde{g}(N, \tau)$ を以下のように定義する。

$$\tilde{g}(N, \tau) \equiv \frac{\langle g^2(N, \tau) \rangle_E}{\langle g^2(N, N) \rangle_E}. \quad (5.14)$$

もし $N \approx \tau$ であれば、以下の関係式

$$g(N, \tau) = g(\tau, N). \quad (5.15)$$

を満たすことがわかり、これは相似則と呼ばれている。この関係は関数 $g(N, \tau)$ には 2 つの隠れたスケーリング法則が存在していることを示唆している。すなわち、スケーリング指数 x, y を用いて

$$g(N, \tau) \simeq \frac{1}{2}(N^x \tau^y + N^y \tau^x) \quad (5.16)$$

であることが予想される。このとき、2 軌道相関関数は、

$$\tilde{g}(N, \tau) \simeq \begin{cases} \left(\frac{\tau}{N}\right)^{2x} & (\tau < N), \\ \left(\frac{\tau}{N}\right)^{2y} & (\tau > N) \end{cases} \quad (5.17)$$

と書きなおすことができる。式 (5.13), (5.14), (5.17) を用いると、アラン分散のスケーリング指数 γ は、

$$\gamma = 2 - 2x - 2y \quad (5.18)$$

によって決定されることがわかる。これは、スケーリング指数 γ が内在する 2 つのスケーリング指数 x ($\tau < N$) と y ($N < \tau$) によって決まることを意味する。

5.3 数値結果

式 (5.18) の理論結果を確かめるために $\tilde{g}(N, \tau)$ の数値計算を行った。図 5.4 は一様初期分布及び平衡初期分布における相関長と観測時間の比 τ/N と観測関数 $\tilde{g}(N, \tau)$ の関係を対数-対数プロットで示している。スケーリング法則が臨界点 ($N \simeq \tau$) の両側で異なっていることがわかる。

図 5.4 から近似的にスケーリング指数 x ($\tau < N$) と y ($\tau > N$) を求めることができる。図 5.4 は一様初期分布に対するスケーリング指数 $2 - 2x - 2y$ が近似アラン分散のスケーリング指数 η_{uni} とよく合っていることを示している。図 6 中の図は x, y の非線形パラメータ B 依存性を示している。数値結果から $2x = 1, 2y = 1$ ($B < 1.5$) and $2x, 2y = const$ ($B > 2$) であるとおよそ近似すると ($1.5 < B < 2$)

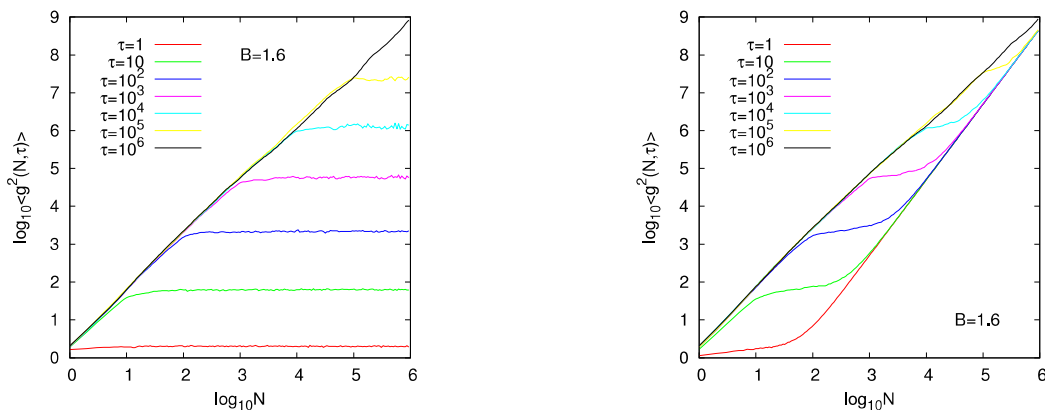


図 5.4 $B = 1.6$ の場合に $\langle g^2(N, \tau) \rangle_E$ を計算した結果を対数-対数プロットで示す。左図は一様初期分布に対するもので、右図は平衡初期分布に対するものである。スケーリング法則は観測時間 N と相関長 τ が等しくなるところで変化していることがわかる。

においてスケーリング関数

$$\begin{cases} 2x = p - \frac{p-1}{2(B-1)}, \\ 2y = 3 - p - \frac{3-p}{2(B-1)} \end{cases} \quad (5.19)$$

が成立すると考えられる。ただし、 p はフィッティングパラメータであり、 $p \simeq 1.80$ と計算された。したがって、数値計算だけからフィッティングした一様初期分布に対するスケーリング関数は

$$2x \simeq \begin{cases} 1 & (1 < B < 1.5), \\ 1.80 - \frac{0.40}{B-1} & (1.5 < B < 2), \\ 1.40 & (2 < B), \end{cases} \quad (5.20)$$

$$2y \simeq \begin{cases} 0 & (1 < B < 1.5), \\ 1.20 - \frac{0.60}{B-1} & (1.5 < B < 2), \\ 0.60 & (2 < B) \end{cases} \quad (5.21)$$

で決定することができる。

図 5.5 は平衡初期分布に対するスケーリング指数 $2 - 2x - 2y$ が近似アラン分散のスケーリング指数 η_{eq} とよく合っていることを示している。図 5.5 の中の図は x, y の非線形パラメータ B 依存性を示している。数値結果から $2x = 1, 2y = 1$ ($B < 1.5$) であるとおよそ近似すると ($1.5 < B$) においてスケーリング関数

$$\begin{cases} 2x = p' - \frac{p'-1}{2(B-1)}, \\ 2y = 3 - p' - \frac{3-p'}{2(B-1)} \end{cases} \quad (5.22)$$

が成立すると考えられる。ただし、 p' はフィッティングパラメータであり、 $p' \simeq 1.45$ と計算された。したがって、数値計算だけからフィッティングした平衡初期分布に対するスケーリング関数は

$$2x \simeq \begin{cases} 1 & (1 < B < 1.5), \\ 1.45 - \frac{0.225}{B-1} & (1.5 < B), \end{cases} \quad (5.23)$$

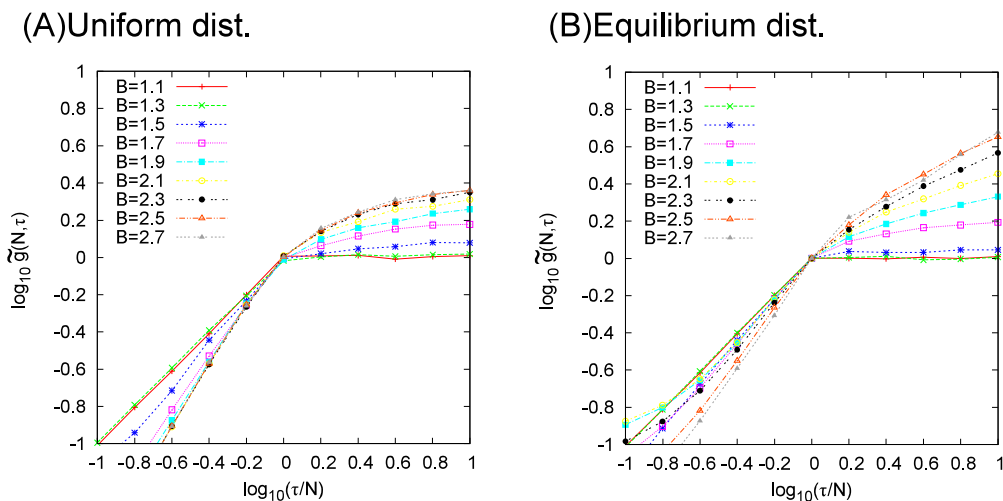


図 5.5 リスケーリングした量 τ/N に対する $\tilde{g}(N, \tau)$ の対数-対数プロットを示す。

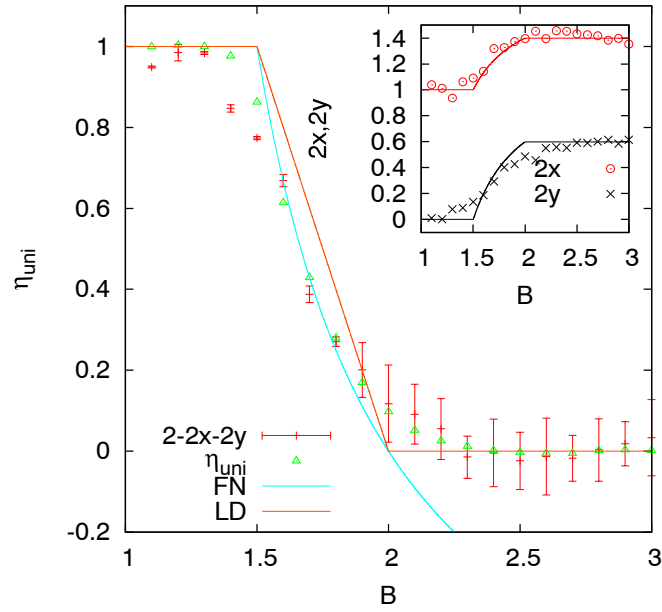


図 5.6 スケーリング指数 η_{uni} と $2-2x-2y$ を表わす。図の中の図は指数 $2x$ と $2y$ がスケーリング関数 (式 (5.19)) で近似できることを示している。

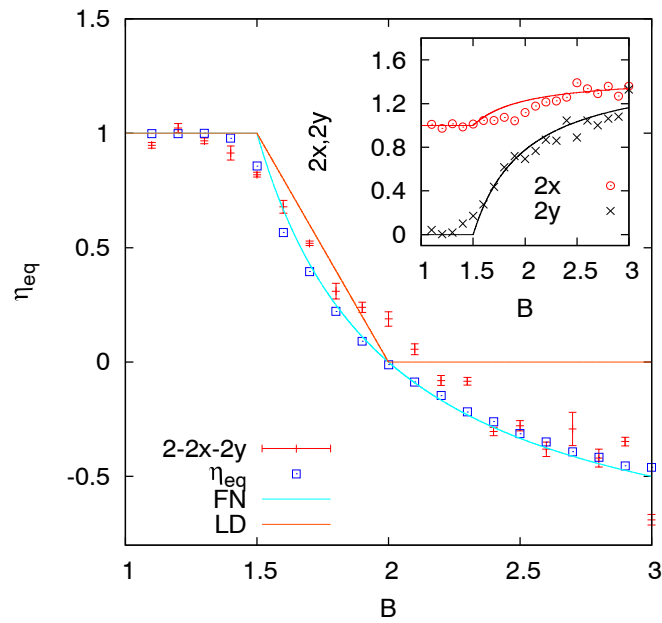


図 5.7 スケーリング指数 η_{eq} と $2-2x-2y$ を表わす。図の中の図は指数 $2x$ と $2y$ がスケーリング関数 (式 (5.22)) で近似されることを示している。

$$2y \simeq \begin{cases} 0 & (1 < B < 1.5), \\ 1.55 - \frac{0.775}{B-1} & (1.5 < B), \end{cases} \quad (5.24)$$

で決定される。

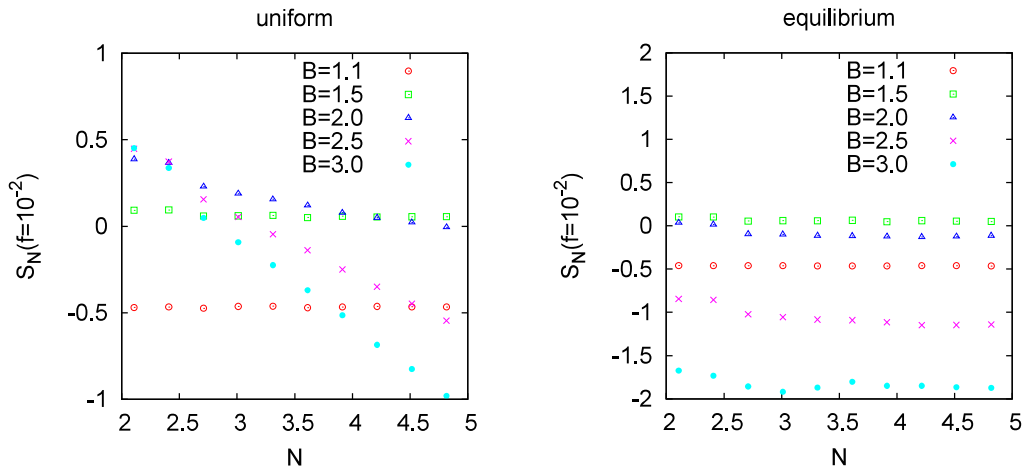


図 5.8 時系列の長さ N に対するパワースペクトル密度 $S_N(f = 10^{-2})$ を表わしている。一様初期分布の場合（左図）と平衡初期分布の場合（右図）でスケーリング法則が異なることを示している。

5.4 パワースペクトル密度の大偏差特性との関係

上記で示したようにアラン分散のスケーリング指数は初期分布による違いがあることがわかる。この初期分布による違いをパワースペクトル密度の収束性（大偏差特性）の観点から考察する。

文献 [Aizawa, 1989a] において長さ N の時系列に対するパワースペクトル密度についてスケーリング形式が

$$S_N(f) \simeq N^{-\gamma'} f^{-\nu} \quad (f \ll 1) \quad (5.25)$$

と表されることが示されている。これは、全パワー $S = \int S(f)df$ によって、 $f^{-\nu}$ スペクトルが頭打ちされることを意味している。文献 [Aizawa, 1989a] ではアラン分散のスケーリング法則のフラクショナルノイズによる評価（式）と大偏差特性による評価（式）の違いが、上記のパワースペクトルの収束性に起因していることが示唆されていた。つまり、アラン分散指数 γ 及び η はパワースペクトル密度の N スケーリング指数 γ' と関係していると考えられる。

図 5.8 には、一様初期分布及び平衡初期分布において $f = 0.01$ に固定した場合のパワースペクトル密度 $S_N(f = 0.01)$ の N スケーリング則を表わしている。一様初期分布の場合は、 B が増加すると $S_N(f = 0.01)$ は減少し、平衡初期分布の場合は、 B が増加しても $S_N(f = 0.01)$ はほとんど減少しない。

このスケーリング法則をより精密に計算するために、一様分布を初期分布に l 回写像した分布を考える。 $l = 0$ のときは、一様分布を表わし、 $l = 10^6$ のときは平衡分布であるとみなすものとする。図 5.9 は l を変えて分布させた場合のスケーリング指数 γ' （左）と η （右）を表わしている。結果はアラン分散のスケーリング指数 η とパワースペクトル密度のスケーリング指数に

$$\eta_{\text{uni}} + \gamma'_{\text{uni}} = \eta_{\text{uni}} + \gamma'_{\text{uni}} = \beta - 2 \quad (5.26)$$

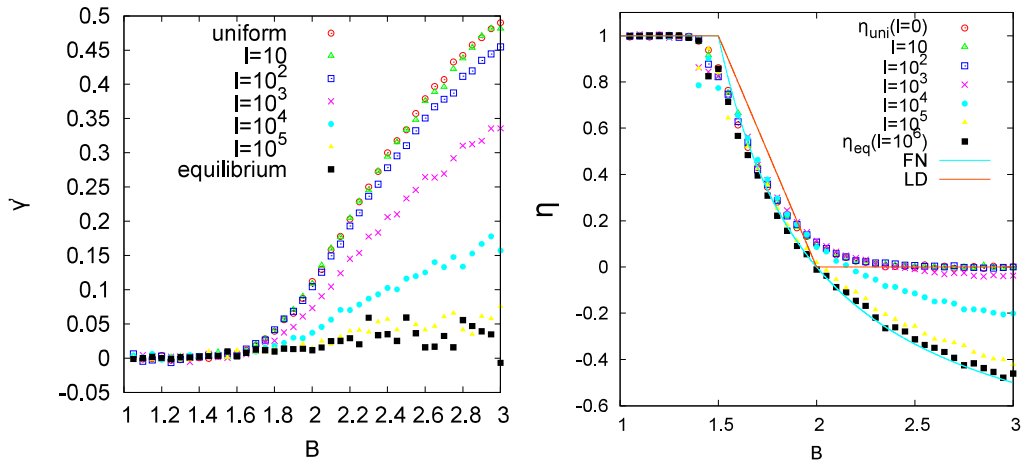


図 5.9 非線形パラメータ B に対するパワースペクトル密度のスケーリング指数 γ' とアラン分散のスケーリング指数 η を表わしている。両者は $\eta + \gamma' = \beta - 2$ の関係で結ばれている。

の関係があると結論付けられる。すなわち、

$$\eta + \gamma' \simeq \gamma + \gamma' = \beta - 2 \quad (5.27)$$

の関係があると言える。

5.5 まとめと考察

アラン分散のスケーリング法則として従来得られている結果をまとめ、時間平均をアンサンブル平均で近似したアラン分散を定義した。近似アラン分散を構成する観測量 $g^2(N, \tau)$ に存在する相似則を用いて、観測時間 N と相関長 τ が等しくなる臨界点の前後でスケーリング法則が異なることを理論的に導いた。その結果、アラン分散のスケーリング指数 γ は $(\tau < N)$ における指数 x と $(\tau > N)$ における指数 y によって $\gamma = 2 - 2x - 2y$ と表されることが理論的に予想され、数値計算によっても確かめられた。

また、文献 [Aizawa, 1989a] によって指摘されていたパワースペクトル密度の収束性との関係を明らかにした。時系列の長さ N に依存するパワースペクトル密度を $S_N(f) \sim N^{-\gamma'} f^{-\nu} (f \ll 1)$ と仮定すると、スケーリング指数の間に $\gamma + \gamma' = \beta - 2$ の関係があることを発見した。この関係は写像回数 l に依存する分布に関して成立していることを確かめた。

本章で明らかになったことを元に、以下の問題点を指摘することができる。アラン分散は 2 つの観測量の重ね合わせで表現されている。1 つは 2 軌道に対する相対拡散 M_n であり、

$$M_n \equiv \left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\sigma_i(x) - \sigma_i(y)) \right)^2 \right\rangle_E \quad (5.28)$$

と表わされる。もう 1 つは長時間平均による平均二乗変位であり、

$$T_N \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{(i+1)t} - x_{it})^2 \quad (5.29)$$

と表される。次の課題は、アラン分散 σ_A^2 が2つの観測量 M_n と T_n とどのように関係しているかを明らかにすることであると考えている。

第6章

まとめと展望

6.1 まとめ

本論文では、ハミルトン系カオスに現れるスローダイナミクスの起源に関して、第2,3章で棲み分け境界型ハミルトン系の局所的ダイナミクスのメカニズムを明らかにし、第4,5章で大域的ダイナミクスの定量化へ向けたパワースペクトルのマルチフラクタル解析とアラン分散の問題を扱った。以下では研究目的であった問いに各章の結果を元に答えていくことを考え、全体のまとめとする。

第2章では、「屈折による摂動が加わったマッシュルームビリヤード系でトーラス近傍ダイナミクスがどう変わるか」という問いに対して、上半円からの脱出領域の厳密な曲線を与え、スローダイナミクスのスケーリング法則を見出すことを試みた。結果として、トーラス近傍に特異点（脱出領域の無限集積点）が出現し、その周りでスローダイナミクスが生成されることを理論と数値計算によって明らかにした。この結果は「トーラス近傍のみでなくカオスの海の中の特異点でスローダイナミクスが起こり得る」という新しい描像を与えている。また、特異点の周りには非対称的な淀み層が形成されており、特異点の両側で異なるスケーリング法則を持つことも示している。これは、「誘電体による屈折によって特異点の周りにスケーリング指数の異なる非対称的淀み層を形成する」ことを示している。

第3章では、「最外殻トーラスの回転数を無理数に漸近させた場合の相空間構造はどのように変化するか」という問いに対して、第2章と同様に脱出領域の厳密曲線によって淀み層の面積を評価することを考えた。結果として、有理数回転のトーラス近傍に存在している淀み層の面積が無理数に近づけると減少していくことを理論と数値計算ともに明らかにした。このとき、トーラス近傍に長時間束縛される軌道がないため、カオス軌道にはスローダイナミクスが起こらないように考えられるが、カオスの海の中に形成された特異点（脱出領域の無限集積点）の周りに淀み運動が生成されていることを確認し、そのスケーリング指数を評価した。つまり、「無理数回転するトーラスの限りなく近傍では淀み層はほとんどなく、スローダイナミクスはカオスの海の中の特異点によって引き起こされる」ということを明らかにした。また、章の後半で上半円と茎領域に対応する記号列に対しパワースペクトル密度を計算し、 $0.5 < r/R < 1$ において $|\log \omega|$ スケーリングを持ち、 $r/R < 0.5$ において $\omega^{-\nu}$ スケーリングを持つことを示している。

この違いは異なるスローダイナミクスが共存することによる、すなわち、「カオス領域に異なる淀み領域が共存している場合にスローダイナミクスが拮抗する」ことを数値計算結果は示唆していると言える。

第4章では、「カオス軌道の大域的ダイナミクスの中でスローダイナミクスが占める割合はどのくらいあるか」という問いに対して、文献 [Aizawa, 1989a] のパワースペクトル密度のマルチフラクタル解析の手法をさらに発展させることを考えた。結果として、パワースペクトル密度のマルチフラクタル解析による情報次元の平均は“スローダイナミクスの強さ”を表わし、分散は“軌道の多様性”を表わすという新しい指標を提案している。この手法によると変形ベルヌイ写像では $B = 2$ で最も軌道の多様性があることがわかった。また、具体例をいくつか計算し、マッシュルームビリヤード系では全てのパラメータ領域でスローダイナミクスは大域的ダイナミクスへの影響が少なく、変形 cat 写像では $B' \rightarrow \infty$ で大域的ダイナミクスへ影響することが明らかになった。これは、「局所的に同じスローダイナミクスの性質を持つ非双曲面積保存二次元写像において大域的ダイナミクスは異なる」ことを意味している。また、「標準写像では、パラメータ ($0 < K < 1$) において変形 cat 写像 ($B' \rightarrow \infty$) と類似の大域的ダイナミクスを持つ」ことが明らかになった。

第5章では、「アラン分散のスケーリング法則を精密化し、非定常性の特徴づけは可能か」という問いに対して、観測時間と相関長が等しい領域に着目し、スケーリング法則を明らかにしようとした。結果として、時間平均をアンサンブル平均で置き換えた近似アラン分散に対し相似則を用いると、観測時間と相関長が等しい領域の両側でスケーリング指数が異なることを理論、数値計算ともに明らかにした。これは「アラン分散に内在する観測量に異なる2つのスケーリング法則が存在する」ことを意味している。また、近似アラン分散とパワースペクトルの大偏差特性のスケーリング指数について初期分布依存性を計算し、スケーリング指数の関係が明らかになった。これはつまり、「アラン分散とパワースペクトル密度の大偏差特性には明確なスケーリング指数の関係がある」ことを意味している。

6.2 展望

6.2.1 引力散乱ダイナミクスへ

第2章で摂動として導入した誘電体を散乱体として見ると、引力散乱体になっていると言える。文献 [Sinai, 1970; Saito et al., 1982] で扱われているような壁に弾性衝突する斥力散乱 (図 6.1 右) とは異なり、誘電体表面で屈折するためにあたかもポテンシャルが低い領域を粒子が進む引力散乱と解釈することができる。第2章で明らかになったのはそのような誘電体 (引力散乱体) を挿入したときに、カオスの海の中の不変集合近傍で非対称的な相空間構造を形成することであった。文献 [Saito et al., 1982] で指摘されているような非同心円ビリヤードにおける斥力散乱の場合の不安定性が、引力散乱の場合にどのように変化するかを非対称的構造の観点から明らかにすることが可能かどうかを考えていく必要がある。

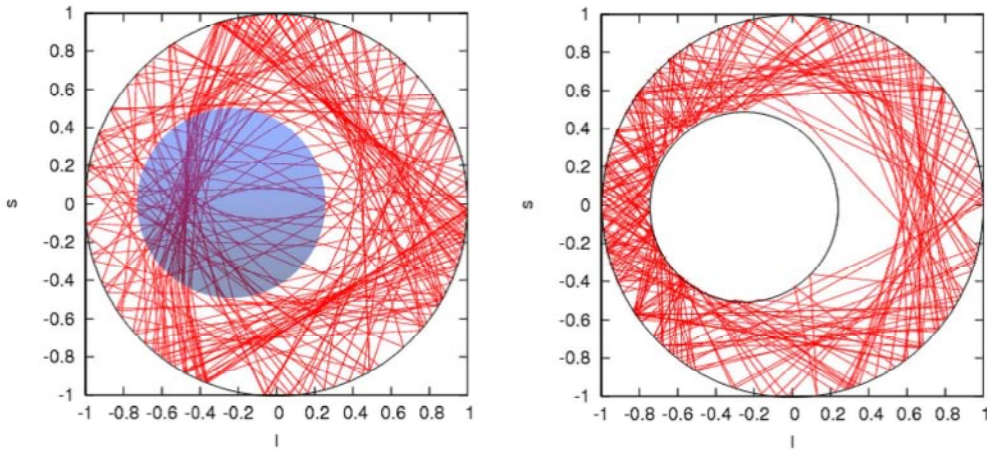


図 6.1 斥力散乱体（弾性体）を挿入した非同心円ビリヤード（右）と引力散乱体を挿入した非同心円ビリヤード（左）。

6.2.2 非線形性が異なる中立不動点を持つ一様測度を保存する一次元写像の考察

第 3 章で明らかになったのは、2 つの淀み領域が共存する場合にパワースペクトル構造が変化していくということであった。これは文献 [Miyaguchi, 2006] によって明らかにされた保存力学系の長時間相関について A: 「カオス軌道がトーラス近傍に長時間束縛される性質」と B: 「長時間束縛される領域にカオス軌道が入射されることを抑制する性質」に加え、3 つ目の視点を与える。すなわち、C: 「長時間束縛される領域が複数ある性質」が反映されてパワースペクトル密度が変化していることが考えられる。この問題を解決するためには異なる非線形性を持つ写像を考察する必要があるが、無限測度を不変に保つ例は知られているが [Shinkai and Aizawa, 2007]、一様測度を不変に保つ例は未だ考えられていない。最も簡単なモデルは、次のような 2 個の中立不動点を持ちその近傍で異なる非線形性 B_1, B_2 を持つ一様測度を保存する 1 次元写像 $T^{(2)}(x)$ が考えられる。

$$T^{(2)}(x) = \begin{cases} G_0(x), & x \in [0, 1/2), \\ G_1(x), & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (6.1)$$

ただし、

$$G_0(x) = \begin{cases} x + (\frac{1}{2} - a_1 + a_0)g_1(\frac{x-a_0}{a_1-a_0}), & x \in [a_0, a_1), \\ \frac{1}{2} \left\{ x - a_1 + (1 - a_2 + a_1)g_2^{-1}(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}) \right\} + \frac{1}{2}, & x \in [a_1, a_2], \\ \frac{1}{2} \left\{ x - a_2 + (1 - a_3 + a_2)g_1^{-1}(\frac{x-a_2}{a_3-a_2}) \right\}, & x \in [a_2, a_3], \end{cases} \quad (6.2)$$

$$G_1(x) = \begin{cases} x + (\frac{1}{2} - a_4 + a_3)g_2(\frac{x-a_3}{a_4-a_3}) + 1/2, & x \in [a_3, a_4), \\ \frac{1}{2} \left\{ x - a_4 + (1 - a_5 + a_4)g_1^{-1}(\frac{x-a_4}{a_5-a_4}) \right\}, & x \in [a_4, a_5], \\ \frac{1}{2} \left\{ x - a_5 + (1 - a_6 + a_5)g_2^{-1}(\frac{x-a_5}{a_6-a_5}) \right\} + \frac{1}{2}, & x \in [a_5, a_6]. \end{cases} \quad (6.3)$$

ただし、 $a_i = i/6$, $g_1(x) = x^{B_1}$, $g_2(x) = x^{B_2}$ である。図 6.2 は $x = 0$ に非線形性 B_1 の中立不動点が存在し、 $x = 1/2$ に非線形性 B_2 の中立不動点が存在する。最も重要な性質は一様測度を不変に保つ点で、

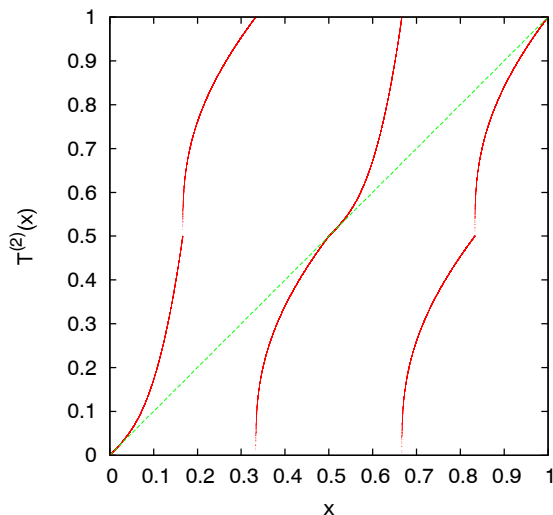


図 6.2 非線形性が異なる中立不動点 ($x = 0, 0.5$) を持つ一次元写像。この写像は一様測度を保存する。

第 2 章で議論した上半円領域と茎領域のスローダイナミクスのような状況を一般化したモデルになっていると言える。この一次元写像の性質をもつ二次元面積保存写像 $T_{AP}^{(2)}$ は

$$T_{AP}^{(2)}(x, y) = \begin{cases} T^{(2)}(x), \\ y + x \end{cases} \quad (6.4)$$

のようにスキュープロダクト系に拡張される。マッシュルームビリヤード系のスローダイナミクスの全貌を知るには、この面積保存写像のエルゴード特性を系統的に解析していく必要があると考えている。

6.2.3 非平衡熱力学への関心

第 4 章でカオス軌道の部分時間領域の多様性を評価する方法をパワースペクトル密度のマルチフラクタル解析によって議論した。この考え方は部分時間領域での熱力学的形式が成立することを念頭に進められた。しかし、熱力学や平衡統計力学ではある状態が平衡状態へ遷移する状況を考えているため、部分時間領域のエルゴード測度に平衡の概念をそのまま適用できるかは疑問が残る。この疑問に向かうためには、非平衡熱力学について知る必要がある [de Groot and Mazur, 1984]。より正確に言えばエントロピー生成の部分時間領域での時間変化の情報について深く知る必要があり、それが部分エルゴード的測度の対応物である。散逸構造論 [Nicolis and Prigogine, 1977] から考え得る問題設定は局所平衡が成り立つ場合のエントロピー生成量の時間変化の議論を局所平衡が成り立たない場合に拡張することが、保存力学系の大域的ダイナミクスの解明にヒントを与えると考えられる。

6.2.4 拡散現象の分類の問題

第5章で議論したアラン分散のスケーリング法則から新しく問題を切り開くことができる。アラン分散は相対拡散 M_n と時間平均操作の組み合わせであることは第5章で考察した。この相対拡散について

$$\begin{aligned}
 M_n &\equiv \left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - y_i) \right)^2 \right\rangle_E \\
 &= \frac{1}{N^2} \left\langle \left(\sum_{i=0}^{N-1} z_i \right)^2 \right\rangle_E \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{i'=0}^{N-1} \langle z_i z_{i'}' \rangle
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

のように変形することができる。ただし、 $z_i (= x_i - y_i)$ は2つの軌道の差に対応する。ここで、

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{i'=0}^{N-1} \langle z_k z_{k'}' \rangle \tag{6.6}$$

は z_i の2軌道相関（相関関数の総和）である。これは一般に部分和 $S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$ の平均二乗変位

$$\langle S_n^2 \rangle = \left\langle \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k \right) \left(\sum_{k'=0}^{n-1} x_{k'}' \right) \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n-1} \langle x_k x_{k'}' \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n-1} C_{k-k'} \tag{6.7}$$

に現れる量である。拡散として見る平均二乗変位は x_n 独立変数ならば

$$\langle S_n^2 \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \langle x_k^2 \rangle \tag{6.8}$$

に帰着される量であるが、相関がある場合は2軌道相関（6.6）が議論されなければならない [Mori and Kuramoto, 2000]。この2軌道相関によって拡散現象（Super-, Normal-, Sub-, spoladic log-diff, log-）を系統的に分類することが可能ではないかと考えている。

付録 A

変形ベルヌイ写像のエルゴード特性のまとめ

ここでは、第 1 章の変形ベルヌイ写像のエルゴード特性が表 1.1 のように得られる根拠となる先行研究の結果についてまとめる。

分布極限定理

エルゴード定理は平均値の性質を表すが、平均値への収束の速さで規格化すると平均値の周りのゆらぎの性質を浮かび上がらせることができる。つまり、平均値へ収束する速さで分布をリスケールするとどの時間領域でも同じ極限分布が得られる (図 A.1)。以下では、変形ベルヌイ写像の軌道 X_n ではなく、記号力学系 σ_n ($\sigma_n = 0$ ($x_n \in [0, 1/2)$) または 1 ($x_n \in [1/2, 1]$)) を独立同分布に従う確率変数とみなして話を進める。^{*1} 確率変数は太文字 (\mathbf{X}_n など) で表わし、期待値を $E(\mathbf{X}_k) = \sum_k \mathbf{X}_k P(\mathbf{X}_k)$, 分散値を $\text{Var}(\mathbf{X}_k) = E(\mathbf{X}_k^2) - E(\mathbf{X}_k)^2$ と定義する。期待値や分散値の詳しい解説は文献 [Feller, 1957] を参照。

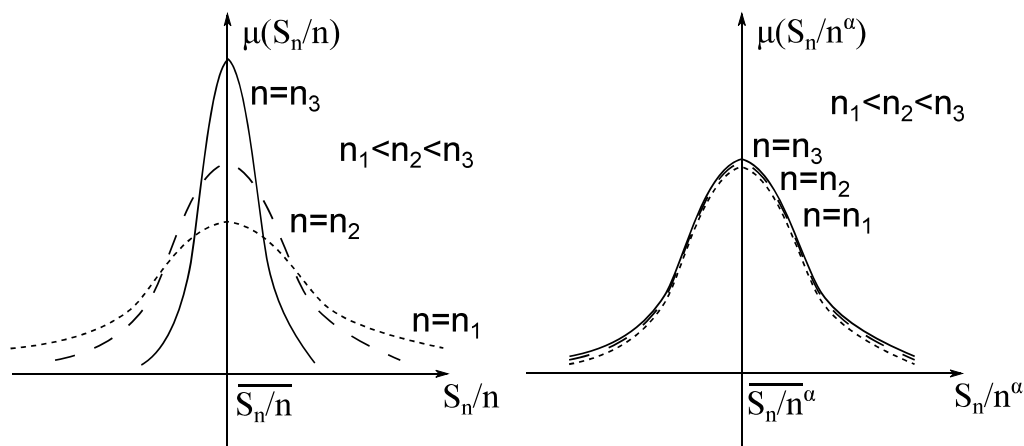


図 A.1 平均値への収束 (左) と収束の速さでリスケールした場合の極限分布 (右) の概念図。

^{*1} 軌道 X_n は独立な確率変数ではないため、中心極限定理に従わないことが知られている (分散が約 2 倍大きい)。 X_n の σ_n での置き換えは力学と確率を同一視することに対応しており、独立性が破れている X_n の極限定理は未解明である。

i) $1 < B < 1.5$ の場合

以下に示す中心極限定理は、平均と分散でリスケールした分布がガウス分布に従うことを示している。

中心極限定理

\mathbf{X}_k を独立同一な確率変数とする。 $\mu = E(\mathbf{X}_k), \sigma^2 = \text{Var}(\mathbf{X}_k)$ が存在すると仮定し、部分和を $\mathbf{S}_n = \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$ とする。このとき、任意の固定した定数 β に対して

$$P \left\{ \frac{\mathbf{S}_n - n\mu}{\sigma n^{\frac{1}{2}}} < \beta \right\} \rightarrow \Phi(\beta) (n \rightarrow \infty) \quad (\text{A.1})$$

が成り立つ。ただし、 $\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$ (ガウス分布) である。

中心極限定理は、極限分布がガウス分布に従う法則として完全でないことがわかっている。完全な定理は分布の吸引領域によって与えられている。

定義：吸引領域

\mathbf{X}_k を独立同一な確率変数で、その共通の分布関数を $F(x)$ とする。このとき、ある定数 a_n と $b_n > 0$ が存在して、部分和 $\mathbf{S}_n = \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$ が漸近的にある分布 $G(x)$ に収束するとき、すなわち、

$$\frac{\mathbf{S}_n}{b_n} - a_n \rightarrow G(x) (n \rightarrow \infty) \quad (\text{A.2})$$

が成り立つとき「分布 F は分布 G の吸引領域に属する」といい、分布 G の吸引領域を $D(G)$ と表す。

中心極限定理は言い換えると、「もし分布 F の分散が有限ならば、 F は分布 Φ の吸引領域に属する」となる。極限分布が正規分布に従う完全な法則は以下のようなになる。

正規分布への極限定理

分布 F がガウス分布の吸引領域に属することは、 $\int_{-x}^x y^2 dF(y)$ が $x \rightarrow \infty$ で緩慢変動することと同等である。

変形ベルヌイ写像において記号力学系 σ_n について部分和 $\mathbf{S}_n = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$ を考えると確率分布

$P \left\{ \frac{\mathbf{S}_n - n\mu}{\sigma n^{\frac{1}{2}}} < \beta \right\}$ はガウス分布に従う (図 1.5 左)。*2

ii) $1.5 < B < 2.0$ の場合

2つの確率変数 \mathbf{U}, \mathbf{V} が同じ分布に従うことを $\mathbf{U} \stackrel{d}{=} \mathbf{V}$ と表わすことにする。 $\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots$ は共通の分布 L をもつ互いに独立な確率変数で、 $\mathbf{S}_n = \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$ とする。

定義：安定分布

分布 L が広義に安定であるとは、各 n に対して $\mathbf{S}_n \stackrel{d}{=} a_n \mathbf{X} + b_n$ となるような定数 $a_n > 0, b_n$ が存在することである。特に $b_n = 0$ のとき、分布 L を狭義に安定であるという。

*2 記号列 σ の部分和はガウス分布に従うが、式 (A.1) のガウス分布そのものではなく、分散がわずかに大きい。この違いは σ の独立性が完全に成立しているわけではないことに関係している。

正規分布は平均と分散によって a_n, b_n が求まるので安定分布である。文献 [Feller, 1966] で以下の安定分布への極限定理が得られている。

安定分布への極限定理

(1) 分布 F が指数 $\alpha \in (0, 2)$ の安定分布の吸引領域に属することは、

$$\frac{1 - F(x)}{1 - F(x) + F(-x)} \rightarrow p, \quad \frac{F(-x)}{1 - F(x) + F(-x)} \rightarrow q \quad (x \rightarrow \infty)$$

を満たす $p + q = 1$ の関係にある $p, q \leq 0$ が存在することと、

$$1 - F(x) + F(-x) \sim \frac{2 - \alpha}{\alpha} x^{-\alpha} h(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

が成り立つことと同等である。ただし、 $h(x)$ は $x \rightarrow \infty$ で緩慢変動する関数である。

(2) 安定分布のみが吸引領域を有している。

安定分布は特性関数 e^ψ , $\psi(\zeta) = -|\zeta|^\alpha \exp(\pm i\pi\gamma/2)$ と書ける。ただし、

$$|\gamma| \leq \begin{cases} \alpha & (0 < \alpha < 1), \\ 2 - \alpha & (1 < \alpha < 2) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

である。これをフーリエ変換して級数展開表示で密度関数を記述できる。

定義：安定分布の密度関数

(1) $1 < \alpha < 2$ のとき、

$$l(x, \alpha, \gamma, c) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\alpha c} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k/\alpha)}{\Gamma(k)} \sin\left(\frac{\pi k}{2\alpha}(\gamma - \alpha)\right) \left(\frac{x}{c}\right)^{k-1} & (x \geq 0), \\ \frac{1}{\pi\alpha c} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k/\alpha)}{\Gamma(k)} \sin\left(\frac{\pi k}{2\alpha}(\gamma + \alpha)\right) \left(-\frac{x}{c}\right)^{k-1} & (x < 0). \end{cases}$$

(2) $0 < \alpha < 1$ のとき、

$$l(x, \alpha, \gamma, c) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi c} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha k)}{\Gamma(k)} \sin\left(\frac{\pi k}{2}(\gamma - \alpha)\right) \left(\frac{x}{c}\right)^{\alpha k-1} & (x \geq 0), \\ \frac{\alpha}{\pi c} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha k)}{\Gamma(k)} \sin\left(\frac{\pi k}{2}(\gamma + \alpha)\right) \left(-\frac{x}{c}\right)^{\alpha k-1} & (x < 0). \end{cases}$$

変形ベルヌイ写像において、観測関数を記号列 σ_n とし、 σ_n が切り替わるまでの待ち時間を T_j とする。長さ N の時系列の中で、 k 回 σ が切り替わる場合を考えると、確率変数 σ_n と確率変数 \mathbf{T}_j は $\sum_{j=0}^{k-1} T_j = S_n = \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n$ の関係がある。ゆえに、確率変数 σ_n の和の分布は確率変数 \mathbf{T}_j の和の分布と同一視してよい。安定分布の吸引域に属する分布の累積分布は $|x| \rightarrow \infty$ において $F(x) \sim O(x^{-\alpha})$ と表され、待ち時間分布（後述）は累積分布で $P(T) \simeq T^{-\frac{1}{B-1}}$ と与えられるので、安定分布の指数は $\alpha = 1/(B-1)$ ($1 < \alpha < 2$) と決まる。 $1.5 < B < 2$ において、確率分布 $P\left\{\frac{S_n}{n} n^{1-\frac{1}{\alpha}} \leq x\right\}$ は累積分布 $L(x; \alpha, \gamma, c)$ の安定分布に従う。密度は $l(n^{1-\frac{1}{\alpha}}x; \alpha, \gamma, c)$ に従う（図 1.5 中央）。

iii) $B > 2$ の場合

Feller は独立同分布に従う確率変数においてある事象 \mathcal{E} が時間 n の間に起こる回数 N'_n の確率分布が、平均と分散が存在しない場合に、 α 次の Mittag-Leffler 分布に従うことを示した [Feller, 1949]。Darling and Kac はこの Feller の考え方をを用いて、0 から出発するマルコフ過程が再び 0 に戻るゼロ・クロッシングポイントまでの時間を事象 \mathcal{E} と捉えることにより、マルコフ過程におけるゼロ・クロッシングが起こる更新回数 N_n の確率分布が、Mittag-Leffler 分布に従うことを示した [Darling and Kac, 1957]。このとき、更新回数 N_n のアンサンブル平均はリターン列 a_n と呼ばれる。空間 X に対し、変換 $T: X \rightarrow X$ がエルゴード的で、保存的*³な写像とし、 \hat{P} を、写像 T のペロンーフロベニウス演算子、 m を T の不変測度とする。このとき、測度 m に関してある数列 a_n が存在し、

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{P}^k f(x) \rightarrow \int f dm, (n \rightarrow \infty) \quad (\text{A.4})$$

が L^1_+ -観測関数 f について成り立つとき、 T は各点双対エルゴード的 (pointwise dual ergodic) と呼ばれる。このとき、以下の定理が成立する [Aaronson, 1997]。

DKA 定理

全ての観測関数 $f \in L^1_+$ の部分和 $S_n(f) = \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$ に対して、各点双対エルゴード的であり、リターン列が $a_n \sim n^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) とふるまうとする。このとき、

$$\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow{d} \int_X f(x) dm \cdot \mathbf{M}_{\alpha, \Gamma(\alpha+1)}(n \rightarrow \infty) \quad (\text{A.5})$$

が成立する。ただし、 $\mathbf{M}_{\alpha, \Gamma(\alpha+1)}$ は平均値 1 に規格化された α 次の Mittag-Leffler 分布に従う確率変数を表す。

Mittag-Leffler 分布はモーメント母関数によって定義される。

定義：Mittag-leffler 分布

指数 α ($0 < \alpha < 1$)、スケールパラメータ c の Mittag-Leffler 分布 $M_{\alpha, c}(x)$ は

$$\int_0^\infty e^{-zx} M_{\alpha, c}(x) dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-cz)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} (= E_\alpha(-cz)) \quad (\text{A.6})$$

のようにラプラス変換を用いて定義される。ただし、定義域は $x \geq 0$ 。

変形ベルヌイ写像の $B \geq 2$ のとき、観測関数 $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i$ において、リターン列 a_n は記号列が切り替わるまでの待ち時間分布で与えられるので、

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{\ln n} & (B = 2.0), \\ n^{\frac{1}{B-1}} & (B > 2.0) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

*³ 遊走集合 U ($\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(U) \cap U = \emptyset$) が存在しないことを“保存的”と呼ぶ。ハミルトン系で出てくる保存的とは異なる。

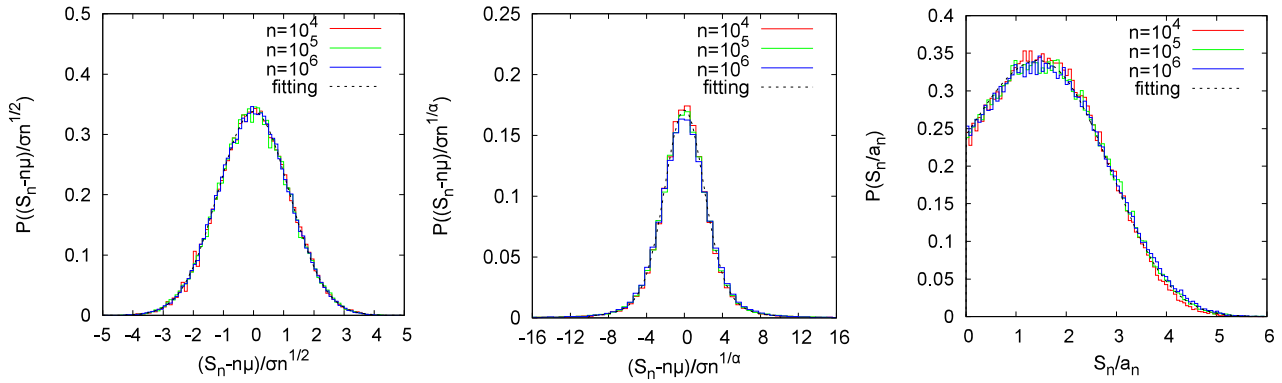


図 A.2 極限分布の数値計算結果。極限分布は $1 < B < 1.5$ においてガウス分布（左）、 $1.5 < B < 2$ において安定分布（中央）、 $2 < B$ においてミッタク・レフラー分布（右）に従う。

で与えられる [Aaronson, 1986; Thaler, 1995]。このとき、確率分布 $P\left\{\frac{S_n}{a_n} \leq x\right\}$ は平均値 $\int_x \sigma(x) dm$ で規格化された α 次の Mittag-Leffler 分布に従う（図 1.5 右）。

再帰時間特性

再帰時間特性として対象とする特徴的時間の定義がいくつかあるので、図 1.6 左の概念図にまとめる。空間 M 内のある領域 A に軌道が入った時点から出るまでの時間を滞在時間または待ち時間と呼び、赤の矢印で描かれている。軌道が領域 A を出てからまた入ってくるまでの時間を再帰時間と呼び、緑の矢印で描かれている。領域 A 内に一様に初期点を分布させたときのある点が領域 A を出るまでの時間を脱出時間または生き残り時間と呼び、青の矢印で描かれている。変形ベルヌイ写像において領域 A を $x \in [0, 0.5)$ としたときの脱出時間、すなわち、領域 $[0, 0.5)$ に一様に初期点を分布したときに領域 $[0, 0.5)$ を脱出するまでの時間の密度分布を $P(m)$ とすると、

$$P(m) = \{C + (B - 1)m\}^{-\beta} \tag{A.8}$$

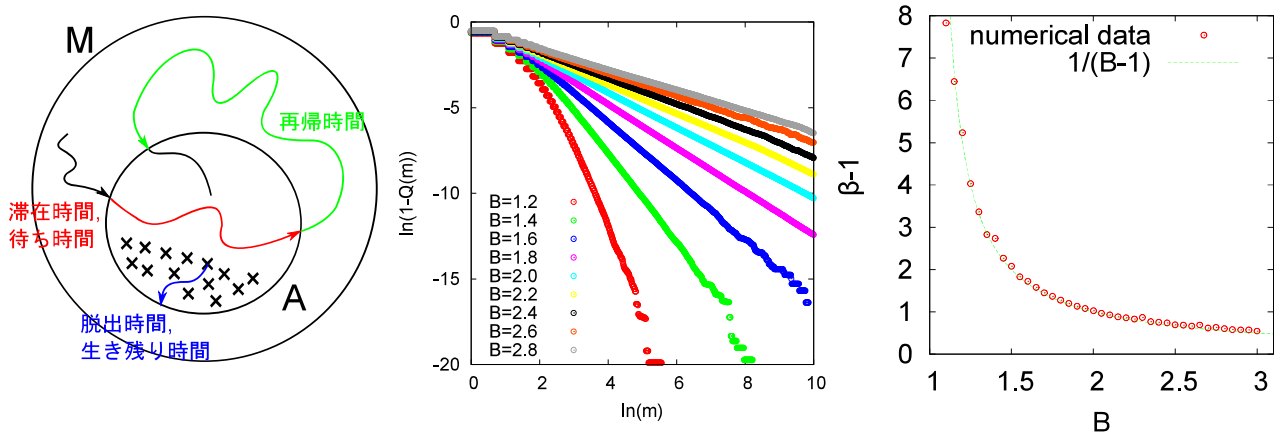


図 A.3 再帰時間特性の概念図（左）、変形ベルヌイ写像の領域 $x \in [0, 1/2)$ における脱出時間分布（中央）、指数 β の B 依存性（右）。

と表される。ただし、 C は積分定数。この導出は文献 [Aizawa et al., 1984] で変形ベルヌイ写像の連続近似と領域 $[0, 0.5)$ に一様に再入射することを仮定して得られており、文献 [Shinkai and Aizawa, 2012] により、中立不動点をもつ任意の写像に一般化されている。累積分布は

$$Q(m) \simeq 1 - m^{-\frac{1}{B-1}} \quad (\text{A.9})$$

と表わされ、図 1.6 中央と右のように数值計算でも確かめられている。

リアプノフ指数

多次元を含むリアプノフ指数の数值計算は 2 通り仕方があり、文献 [Benettin et al., 1980; Eckmann and Ruelle, 1985] によるグラムシュミットの直交化法によってある時間間隔で規格直交化をとっていき、指数を求める方法と [Shimada and Nagashima, 1979] による体積リアプノフ指数を計算し、大きい指数から順に求めていく方法である。ここでは、Benettin の方法 [Benettin et al., 1980] による連続系のリアプノフ指数の計算を考える。軌道 $x(t)$ が写像 T^t によって駆動される場合を考える。接写像を dT^t とし接ベクトルを $z(t)$ とすると、初期値 x_0 (接ベクトル z_0) から出発する軌道の接ベクトルは $z(t) = dT^t_{x_0}$ と書ける。図 1.7 左の下方には軌道 $x(t)$ が書かれており、初期値 x_0 の場所での接ベクトル z_0 は時間経過と共に上方に伸びていく。このとき、ある時間間隔 s でグラムシュミットの規格直交化 (1 次元では規格化のみ) をして、点線で表すような z_0 と同じ長さの接ベクトルに戻す。すなわち、初期時刻から時刻 s までの伸び率は α_1 となり、時刻 s から時刻 $2s$ までの伸び率は α_2 で計算され、さらに続いていく。従って、Benettin の方法では、2 つの軌道を考えるのではなく 1 つの軌道とそのそばに時刻 s の度に引き戻したいわば疑似軌道を考えることに相当する。このとき、 n ステップ後の接ベクトルの局所拡大率の全ての積は

$$|z(ns)| = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \quad (\text{A.10})$$

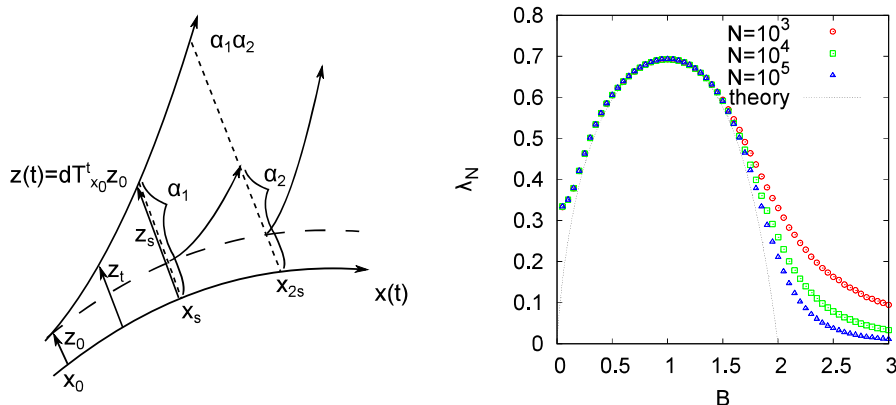


図 A.4 リアプノフ指数の概念図 (左) と、有限リアプノフ指数の B 依存性 (右)。

である。この $|z(ns)|$ が指数的に増大することを仮定すると、すなわち、 $|z(ns)| \sim e^{\lambda t}$ を仮定すると、リアプノフ指数は

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ns} \sum_{k=1}^n \ln \alpha_k \quad (\text{A.11})$$

で定義される。

変形ベルヌイ写像のリアプノフ指数の理論評価は、エルゴード性を仮定して各点での局所拡大率（写像の微分値）を不変測度によって平均したもので与えられる。

$$\lambda = 2 \int_0^{1/2} \ln |T'_{MB}(x)| \rho(x) dx. \quad (\text{A.12})$$

$1 < B < 2$ の場合、

$$\lambda = \ln(B+1) - \frac{(2-B)(B-1)}{3-B} - \frac{2(B-1)^2}{3-B} \int_0^1 \frac{dx}{1+Bx^{B-1}} \quad (\text{A.13})$$

と計算され、図 1.7 右の実線で示している。実際の数値計算は、有限時間までしか計算できないために収束の途中である有限時間リアプノフ指数を計算していることになるが、図 1.7 右のように写像回数を大きくすると、理論線に近づいていくことがわかる。ただし、 $B=0$ 近傍ではリアプノフ指数は有限値になるが、この点について未だ理論的に明らかでない。

リアプノフ指数の平均値の B 依存性の理論評価は、式 (A.7) におけるリターン列及び更新解析で与えられることが知られている [Cox, 1962; Akimoto and Aizawa, 2007]。 $\langle \lambda_N \rangle \sim O(N^{-\gamma})$ を仮定すると、

$$\gamma = \begin{cases} 0 & (1 < B \leq 2), \\ 2 - \beta & (B > 2) \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

が得られている。この理論結果の数値計算は図 A.5 に示されており、 $B \simeq 2$ 付近で理論より小さく B が大きいところで理論より大きい値をとるが、写像回数を増やすと理論値に近づくことが計算されている [Akimoto and Aizawa, 2005; Shinkai and Aizawa, 2006]。

リアプノフ指数の分散値の B 依存性の理論評価は、更新解析 [Akimoto and Aizawa, 2005] と大偏差理論 [Tanaka and Aizawa, 1993] の 2 つが知られている。一様初期分布の場合の分散値を $\langle (\lambda_N - \langle \lambda_N \rangle)^2 \rangle$

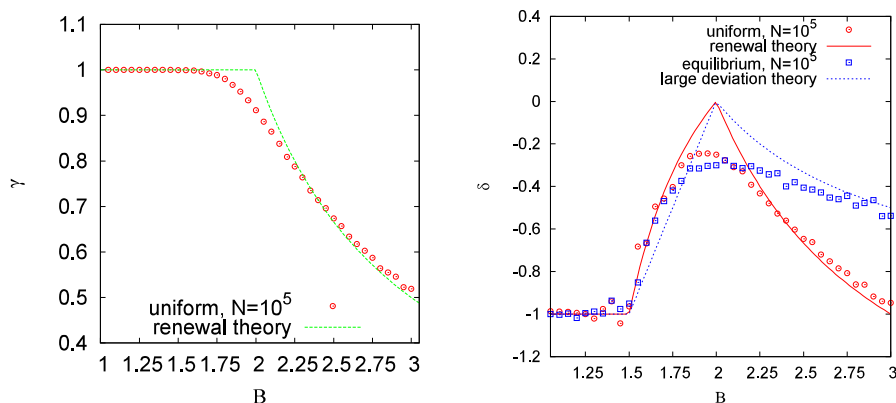


図 A.5 リアプノフ指数の平均値のスケーリング指数 γ (左) と分散値のスケーリング指数 δ (右)。

$\lambda_N > 1)^2 \sim N^{\delta_{\text{uni}}}$ と仮定し、平衡初期分布の場合の分散値を $(\lambda_N - \langle \lambda_N \rangle)^2 \sim N^{\delta_{\text{eq}}}$ と仮定すると、

$$\delta_{\text{uni}} = \begin{cases} -1 & (1 < B < 1.5), \\ \frac{B-2}{B-1} & (1.5 < B \leq 2), \\ \frac{4-2B}{B-1} & (B > 2), \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

$$\delta_{\text{eq}} = \begin{cases} -1 & (1 < B < 1.5), \\ 2(B-2) & (1.5 < B \leq 2), \\ \frac{2-B}{B-1} & (B > 2) \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

が得られている。

KS エントロピー

統計力学におけるエントロピーは、ボルツマンが不可逆過程に対し時間と共に増加する量として導入したものであるが、Shannon によって情報理論にエントロピーの概念が用いられた。その後、エルゴード理論における同型問題において Bernoulli 変換 $B(1/2, 1/2)$ と Bernoulli 変換 $B(1/3, 1/3, 1/3)$ が同型であるかに対し Kolmogorov が不変量（保測変換のエントロピー）を創案してこの問題を否定的に解いた。つまり、Bernoulli 変換 $B(1/2, 1/2)$ と Bernoulli 変換 $B(1/3, 1/3, 1/3)$ は異なるエントロピーを持つことを示した。

測度空間 (Ω, \mathcal{F}, P) と可測分割 ξ に対し、点 ω を含む ξ の元を $A(\omega)$ で表わすとき、

$$P(\omega; \xi) = P(A(\omega)) \quad (\text{A.17})$$

とおく。このとき、分割のエントロピー $H(\xi)$ を

$$H(\xi) = - \int_{\Omega} \ln P(\omega; \xi) dP \quad (\text{A.18})$$

で定義する。可測分割 ξ の元で正測度をもつものを a_1, a_2, \dots, a_N とすると分割のエントロピー $H(\xi)$ は

$$H(\xi) = \begin{cases} - \sum_{i=1}^N P(a_i) \ln P(a_i) & P(\cup_i a_i) = 1, \\ +\infty & P(\cup_i a_i) < 1 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

である。図 A.6 左に分割のエントロピーの概念図を示しており、情報理論の観点からは空間を a_i に分割したときの情報量 $\ln P(a_i)$ の空間平均を考えることに対応する。

測度空間で考えられる分割のエントロピーは写像 T を含む力学系 $(\Omega, \mathcal{F}, P, T)$ についても考えられる。分割 ξ によって生成される有限部分集合体を \mathcal{A} とすると、分割 ξ の写像 T に関するエントロピーは

$$\begin{aligned} h(\mathcal{A}, T) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\vee_{k=0}^{n-1} T^{-k} \mathcal{A}) \\ &= - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i_1 \cdots i_N} P(i_1, \dots, i_N) \ln P(i_1, \dots, i_N) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

で表わされる。ただし、 $P(i_1, \dots, i_N)$ は筒集合 (i_1, \dots, i_N) をとる確率を表わす（図 A.6 中央）。情報理論の観点から述べると、情報量 $\ln P(i_1, \dots, i_N)$ の時間平均を考えることに対応する。

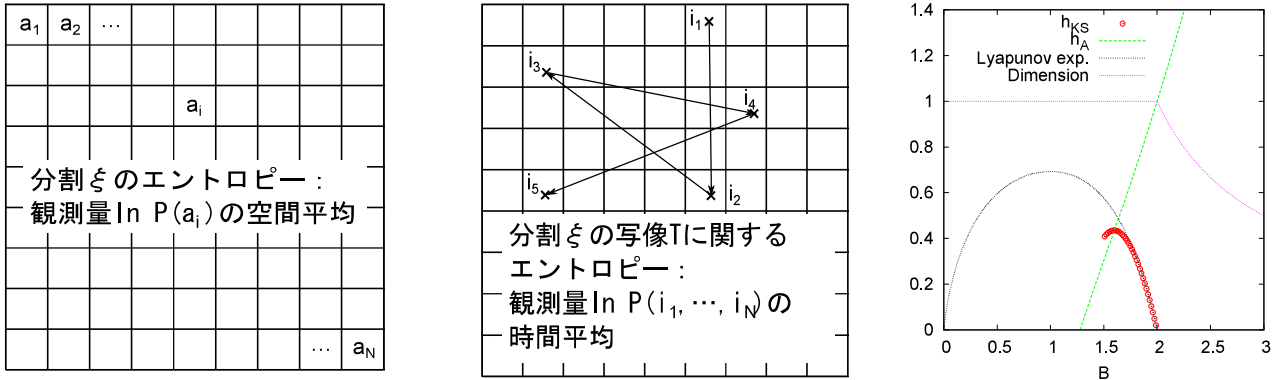


図 A.6 分割のエントロピーの概念図 (左) と、写像に関する分割のエントロピーの概念図 (中央) を示す。右図は Kolmogorov-Sinai エントロピー h_{KS} (赤)、拡張されたエントロピー h_A (緑)、リアプノフ指数 (黒点線)、非定常カオスの次元 (桃) の B 依存性をそれぞれ示している。

Kolmogorov と Sinai は、Kolmogorov-Sinai (KS) エントロピーを $h_{KS}(T) = \sup_{\mathcal{A}} h(\mathcal{A}, T)$ と定義して次のことを示した。

Kolmogorov-Sinai の定理

もし写像 T が逆をもち、 $\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n \mathcal{A} = \mathcal{F}$ であれば、

$$h_{KS}(T) = h(\mathcal{A}, T). \tag{A.21}$$

Kolmogorov-Sinai の定理によって、KS エントロピー $h_{KS}(T)$ は

$$h_{KS}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(i_1, \dots, i_N) \tag{A.22}$$

と表される。 $H(i_1, \dots, i_N)$ は $-\ln P(i_1, \dots, i_N)$ の平均値なので

$$h_{KS}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left\{ -\frac{1}{n} \ln P(i_1, \dots, i_N) \right\}. \tag{A.23}$$

を意味する。ただし、 $E \{ \}$ はアンサンブル平均を表わす。KS エントロピーの計算には次の Shannon-McMillan-Breiman の定理が必要である。

Shannon-McMillan-Breiman の定理

T がエルゴード的ならば、

$$h_{KS}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \ln P(i_1, \dots, i_N) \right\} \tag{A.24}$$

この定理の証明には式 (A.23) におけるアンサンブル平均がエルゴード性の成立によって $h_{KS}(T)$ に収束することを利用する。

変形ベルヌイ写像の記号列 $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$ の KS エントロピーは待ち時間分布 $P(m)$ を用いて評価することができる。言い換えると、上述で展開してきた筒集合 $(i_1, \dots, i_N) = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ をとる確率は

待ち時間分布 $P(m)$ で与えられる。このとき、記号列 $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$ の KS エントロピーは

$$\begin{aligned} h_{KS} &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln P(m_1) + \ln P(m_2) + \dots + \ln P(m_N)}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} \\ &= - \langle \ln P(m) \rangle / \langle m \rangle . \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

ただし、 m_k は式 (A.8) に従う確率変数である。連続近似 $\sum_k \rightarrow \int dk$ を用いると、

$$h_{KS} = (\beta - 2) \left[\frac{\beta}{(\beta - 2)^2} - \frac{1}{\beta - 2} \ln(\beta - 1) \right] \quad (B \leq 2) \quad (\text{A.26})$$

が導かれる (図 A.6 右)。 $B \leq 2$ を考える理由は、 $\langle m \rangle$ が存在する領域を考えるため $B > 2$ の場合 $\langle m \rangle$ は発散する。

A エントロピーと非定常カオスの次元

KS エントロピーの $\langle m \rangle$ が発散する場合を特徴づけるために、エントロピーの概念は次のように拡張されている [Aizawa et al., 1984; Aizawa and Kohyama, 1984]。

$$h_A(\alpha) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \ln P(m_k) / \left(\sum_{k=1}^N m_k \right)^\alpha . \quad (\text{A.27})$$

文献 [Aizawa and Kohyama, 1984] では、このエントロピーの拡張は Sequence エントロピー [Walters, 1975] と呼ばれているが、A エントロピー [Arnold, 1967] と関係していると指摘されている。式 (A.27) の分子は N に比例し、待ち時間分布 $P(m)$ は安定分布の吸引域に属するため分母は $O(N^{\alpha/(\beta-1)})$ に比例する ($\beta - 1 = 1/(B - 1)$)。ゆえに α は

$$\alpha = D \equiv \frac{1}{B - 1} \quad (\text{A.28})$$

である。ただし、 D を非定常カオスの次元と定義する。次元 D によって KS エントロピーで捉えられない非定常領域 $B > 2$ の性質を特徴づけることができる。文献では変形ベルヌイ写像の中立不動点近傍に摂動 ε を加えた (下駄をはかせた) 写像について、

$$h_A(D) = \tilde{h}_A(D) \cdot [\ln \varepsilon^{-1}]^{-1} \quad (B \leq 2) \quad (\text{A.29})$$

が得られている [Aizawa et al., 1984] (図 A.6 右)。ただし、 $\tilde{h}_A(D) = (B - 1)^2 [1 + \frac{1}{B} \ln(B - 1)]$ である。

相関関数

軌道 x_t に対し、アンサンブル平均による相関関数は

$$C(\tau) = \langle x_0 x_\tau \rangle_E \quad (\text{A.30})$$

で定義される。時間平均による相関関数は

$$C(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} x_t x_{t+\tau} \quad (\text{A.31})$$

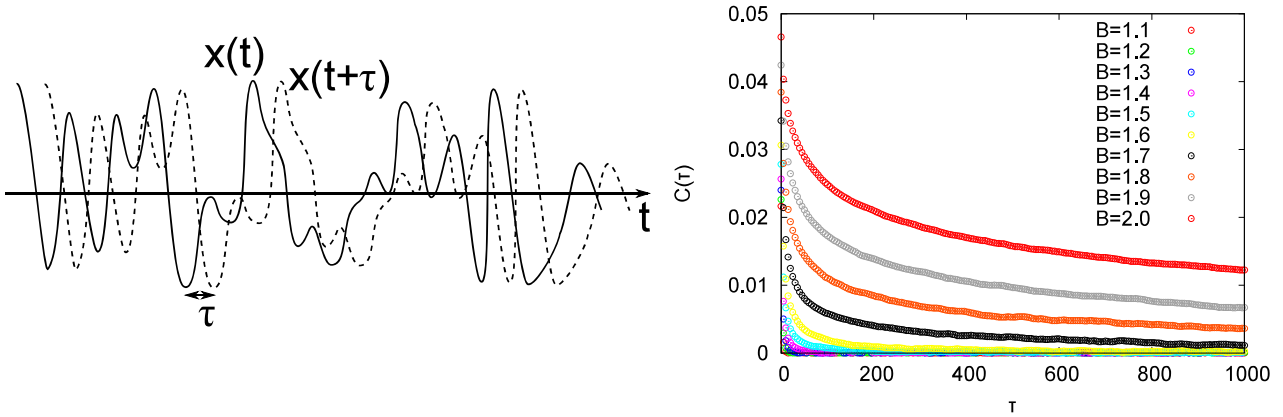


図 A.7 相関関数の概念図 (左) と B を変えたときの相関関数の振る舞い (右)。

で定義される (図 A.7 左)。以下、変形ベルヌイ写像の不変測度が規格化される場合 ($1 < B < 2$) を考え、2つの定義を同一視する。また、記号列 σ が切り替わる事象 \mathcal{E} を更新とみなし、事象 \mathcal{E} の更新過程を考える。記号列 σ_t に対するアンサンブル平均による相関関数は、更新回数 N_t と待ち時間の部分 $S_n = T_1 + T_n$ を用いて

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r Pr(N_t = r) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \{Pr(S_r < t) - Pr(S_{r+1} < t)\} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

と表される [Akimoto and Aizawa, 2007]。更新解析な重要なポイントは更新回数の確率変数 N_t を待ち時間の確率変数 S_r に置き換えることにある [Cox, 1962]。 S_r の確率密度分布を $k_r(x)$ とおき、最初の更新までの待ち時間の確率密度分布を $f_1(x)$ としその後の待ち時間の確率密度分布を $f(x)$ すると、 $k_r(x)$ のラプラス変換は

$$k_r^*(s) = f_1^*(s) \{f^*(s)\}^{r-1} \quad (\text{A.33})$$

と表される。ただし、 $f_1^*(x), f^*(x)$ はそれぞれ $f_1(x), f(x)$ のラプラス変換である。また、式 (A.8) より $f(x) \sim x^{-\beta}$ であることが言える。このとき、相関関数のラプラス変換は

$$C^*(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r f_1^*(s) \{f^*(s)\}^{r-1} \quad (\text{A.34})$$

で表わされる。このラプラス変換をタウバー型定理 [Cox, 1962] を用いて元の空間に戻すことで、平衡更新過程における相関関数は

$$C(\tau) \simeq \begin{cases} \text{exponential} & (1.0 < B < 1.5), \\ \tau^{2-\beta} & (1.5 < B < 2) \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

が得られている文献。

非常領域 $B > 2$ においては指数 α のミッタクレフラー分布に従う確率変数 y_α を用いて

$$C(\tau) \sim \exp\left[-\left(\frac{\tau}{N}\right)^{1-\alpha} \cdot y_\alpha\right] \quad (\text{A.36})$$

と表されることが予想されている。

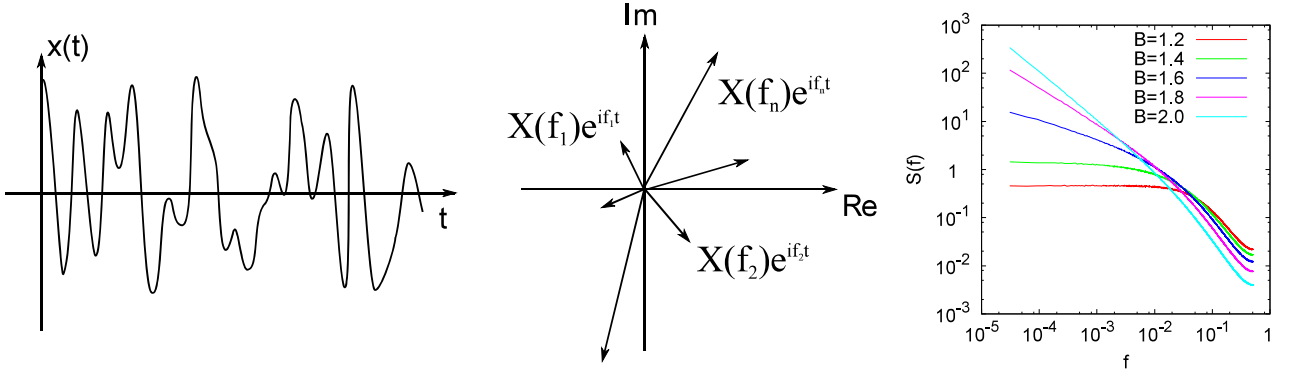


図 A.8 時系列 (左) のフーリエ成分の概念図 (中央) と、 B を変えたときのパワースペクトル密度の振る舞い (右) を示している。

パワースペクトル

長さ N の時系列 $x(t)$ のパワースペクトル密度はフーリエ成分 $X(f_n)$ の絶対値によって、

$$S(f) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|X(f)|^2}{N} \quad (\text{A.37})$$

と定義される。重要な Wiener-Khinchin の公式によって相関関数のフーリエ変換と結びつく [Hino, 1977]。相関関数の式から、パワースペクトル密度は

$$S(f) \simeq \begin{cases} f^0 & (1.0 < B < 1.5), \\ f^{\beta-3} & (1.5 < B < 2), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\frac{\tau}{N})^{1-\alpha} y_\alpha] e^{-i f \tau} d\tau & (2 < B) \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

と導かれている [Aizawa, 1984]。ただし、 $2 < B$ の場合は相関関数から考えうる予想である。

大偏差特性

大偏差特性の数学的取扱いは文献 [Ellis, 1985; Deuschel and Stroock, 1989] に系統的に分類されている。記号列 $\sigma_j = -1$ ($x_j \in [0, 1/2)$), $\sigma_j = +1$ ($x_j \in [1/2, 1]$) を用いて部分和 $Z_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma_k$ を定義する。本質的な点是不変測度の対称性から -1 をとる回数と $+1$ をとる回数が同等であると考え、 ± 1 をとる回数 (確率変数) を待ち時間 (確率変数) に置き換えることである [Aizawa, 1989a]。結果のみ記述すると、 Z_N の分布関数とレート関数 $\Phi(t)$ について以下が成り立つ。

$$P(Z_n = t) = \frac{2}{|1-t|^2} \cdot \frac{1}{2\pi s} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{P}_W(s) \frac{\partial \hat{P}_W(-s\zeta)}{\partial \zeta} \cdot d\zeta \quad \left(s = \frac{1-t}{1+t} \right) \quad (\text{A.39})$$

$$\simeq e^{-N^\theta \Phi(t)}. \quad (\text{A.40})$$

ただし、 $\hat{P}_W(\zeta)$ は待ち時間分布 $P_W(t) \simeq t^{-\beta}$ のフーリエ変換であり、

$$\begin{aligned} \hat{P}_W(\zeta) &= \mathcal{F} \cdot P_W(t) \\ &= \begin{cases} 1 + i \frac{\alpha}{\alpha+2} \zeta - \frac{\alpha}{2(\alpha-2)} \zeta^2 + O(\zeta^3) & (1 < B < 1.5), \\ 1 + i \frac{\alpha}{\alpha-1} \zeta + \frac{\Gamma(2-\delta)}{\delta-1} |\zeta|^\alpha e^{\mp \frac{i\pi\alpha}{2}} + O(\zeta^2) & (1.5 < B < 2), \\ 1 - \Gamma(1-\alpha) |\zeta|^\alpha e^{\mp \frac{i\pi\alpha}{2}} - i \frac{\alpha}{1-\alpha} \zeta + O(\zeta^2) & (2 < B) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

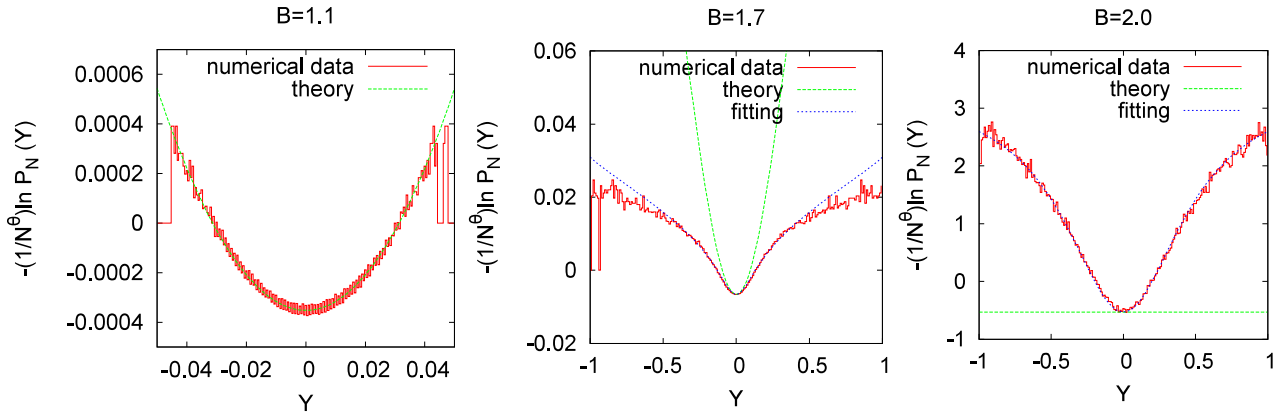


図 A.9 レイト関数の数値計算結果。 B の値に応じてレイト関数の理論曲線（緑）が決まり、 $Y \ll 1$ の領域で数値計算（赤）と一致していることが確認できる。青線は比較的広い範囲でフィッティングした曲線を表わしている。

で表わされる。ただし、 $\alpha = 1/(B-1)$ とする。このとき、 B の値によって以下のように分類される。

i) $1 < B < 1.5$ のとき

$$\theta = 1, \quad (\text{A.42})$$

$$\Phi(t) = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad (\text{A.43})$$

ii) $1.5 < B < 2$ のとき

$$\theta = 2(2-B), \quad (\text{A.44})$$

$$\Phi(t) = \frac{t^2}{\{(1+t)^{2\alpha} + (1-t)^{2\alpha} + 2(1-t^2)^\alpha \cos(\pi\alpha)\}^{1/\alpha}} \quad (\text{A.45})$$

ii) $2 < B$ のとき

$$\theta = 0, \quad (\text{A.46})$$

$$P(Z_N = t) = \frac{2 \sin \pi\alpha}{\pi} \cdot \frac{(1-t^2)^{\alpha-1}}{(1+t)^\alpha + (1-t)^\alpha + 2(1-t^2)^\alpha \cos(\pi\alpha)}, \quad (\text{A.47})$$

と表され、 $1 < B \leq 2$ においては数値計算によっても確かめられている（図 A.9）。

少数の法則

少数の法則は文献によって理論的に明らかにされている。記号列 $\sigma_j = -1$ ($x_j \in [0, 1/2)$), $\sigma_j = +1$ ($x_j \in [1/2, 1]$) について、図 A.10 の上図のように、 -1 が $n_1 = N$ 回続く事象 A が起きた後にもう一度事象 A が起きる確率を考える。 -1 の待ち時間を n とし、 $+1$ の待ち時間を m とすると、事象 A が再び起こるまでの待ち時間は

$$T = \sum_{i=1}^k m_i + \sum_{i=1}^k n_i \quad (\text{A.48})$$

で与えられる。このとき、確率分布 $P(T)$ は

$$P(T) = \sum_{i=1}^k \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} p_{n_i} p_{m_i} \delta \left(T - \sum m_i - \sum n_i \right) \right\} p_N \quad (\text{A.49})$$

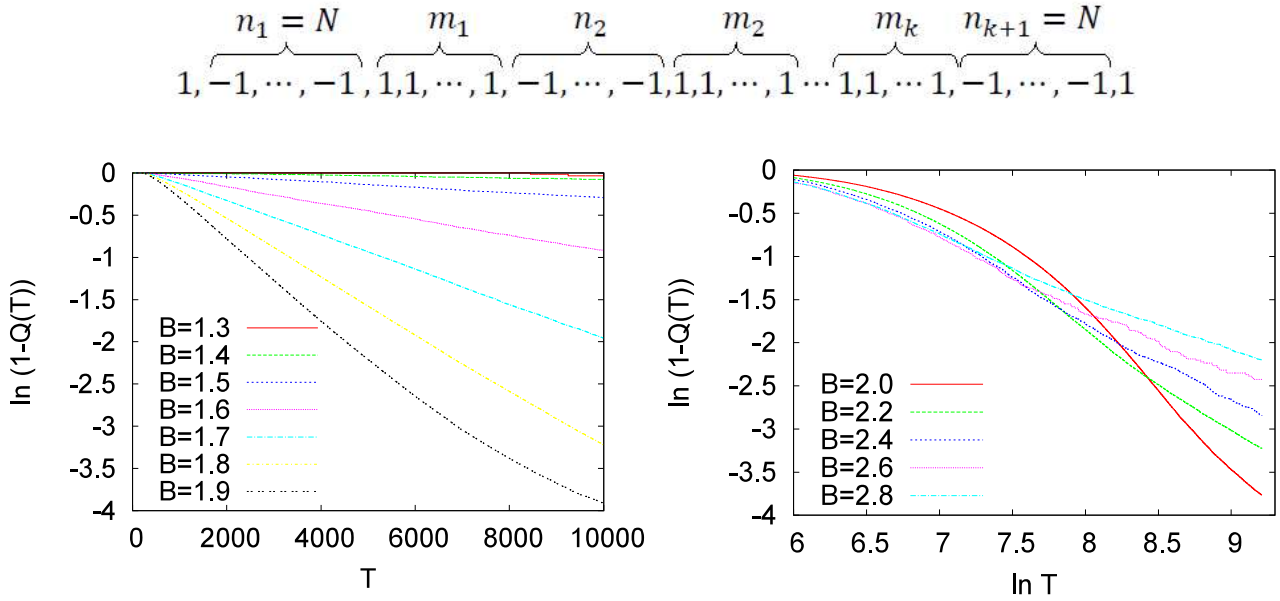


図 A.10 少数の法則は記号列 ($\sigma_n = \pm 1$) において、 -1 が N 回続く事象が再び起こる (上図) までの再帰時間確率を与えている。再帰時間分布は $1 < B < 2$ では指数関数 $\exp[-T/ \langle T \rangle]$ で表わされ、 $2 < B$ ではべき関数 $(T/b_N)^{-\frac{B}{B-1}}$ で表わされており、数値計算でも確かめられた。

で表わされる。ラプラス変換 \hat{P}_λ は

$$\hat{P}(\lambda) = \frac{1}{1 + e^{\lambda N} p_N^{-1} (\hat{p}_\lambda^{-1} - \hat{p}_\lambda)} \quad (\text{A.50})$$

である。このとき、 B の値に応じて以下のようにまとめられる。

i) $1 < B < 2$ の場合

平均再帰時間は $\langle T \rangle = -(\frac{\partial \hat{p}_\lambda}{\partial \lambda})_{\lambda=0}$ で表わされ、 $N \rightarrow \infty$ または $B \rightarrow 2$ の場合に $\hat{P}(T/ \langle T \rangle) = \frac{1}{1+\lambda}$ となる。よって、

$$P(T/ \langle T \rangle) \simeq \exp[-T/ \langle T \rangle] \quad (\text{A.51})$$

で表わされる。

ii) $2 < B$ の場合

平均再帰時間は $\langle T \rangle = \infty$ で表わされるから、その系列を $\langle T \rangle \simeq b_N$ とおくと、 $N \rightarrow \infty$ の場合に $\hat{P}(T/b_N) = \frac{1}{1+\lambda^{\frac{1}{B-1}}}$, ($b_N \rightarrow N^B$) となる。よって、

$$P(T/b_N) \simeq (T/b_N)^{-\frac{B}{B-1}} \quad (\text{A.52})$$

で表わされる。この統計法則は少数の現象を規定する法則であるため、少数の法則と呼ばれている [Aizawa et al., 1997]。

アラン分散

アラン分散はクォーツ時計の振動モデル

$$V(t) = [V_0 + \varepsilon] \sin[2\pi\nu_0 t + \phi(t)] \quad (\text{A.53})$$

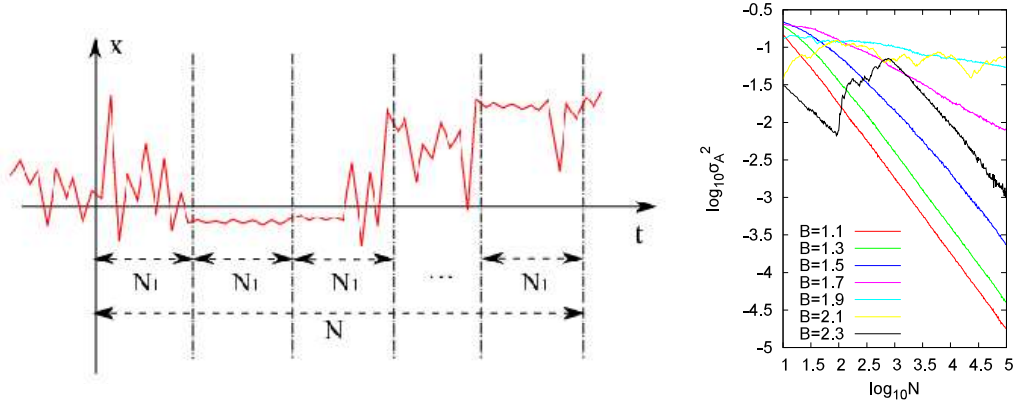


図 A.11 時系列の分割 (左) とアラン分散のスケーリング法則の B 依存性。

において研究された [Allan, 1966]。このとき、 ε は振幅の揺らぎを、 $\phi(t)$ は位相の揺らぎを表わしている。このとき、変数を $y(t) = \frac{\dot{\phi}}{2\pi\nu_0}$ と $\dot{\phi}(t) = \frac{d\phi}{dt}$ と置いて、平均量

$$y_k \equiv \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt \quad (\text{A.54})$$

を定義すると、アラン分散は

$$\sigma_y^2(N) \equiv \frac{1}{2} \langle (y_{k+1} - y_k)^2 \rangle_k \quad (\text{A.55})$$

で与えられる。アランらはパワースペクトル $S(\omega) \sim \omega^{-1}$ のとき、アラン分散が $\sigma_y^2(\tau) \sim \tau^0$ と表されることを発見した [Allan, 1966]。変形ベルヌイ写像のアラン分散については $\sigma_A(N) \sim N^{-\gamma}$ を仮定すると、

$$\gamma = \begin{cases} 1 & (1 \leq B < 3/2), \\ \beta - 2 & (3/2 \leq B < 2) \end{cases} \quad (\text{A.56})$$

が知られている [Mandelbrot and Ness, 1968; Aizawa and Kohyama, 1983]。ハミルトン系カオスのアラン分散については第 1 章のハミルトン系の項目に、アラン分散の詳細な統計法則は第 5 章に解説する。

付録 B

幾何光学近似

誘電体の誘電率 $\varepsilon(\vec{r})$ の変化が電場の空間変化よりゆっくり変化する場合に幾何光学近似を用いて粒子を光線とみなせることを示す [Sasagawa, 1991]。Maxwell 方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

と媒質の関係式

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

を考える。屈折率 n 、位相速度 c は以下のように空間依存性を持つ。透磁率 μ の空間依存性は考えず、真空中の値と同じ値 $\mu = \mu_0$ とすると、

$$\begin{cases} \varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\vec{r}), \\ n(\vec{r}) = \sqrt{\varepsilon_r(\vec{r})}, \\ c(\vec{r}) = \frac{c_0}{n(\vec{r})} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

が成り立つ。(B.3) を (B.1) に代入し、電場 E をスカラー場 $\Psi(\vec{r}, t)$ とみなすと、波動方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c(\vec{r})^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{B.4})$$

が得られる。角振動数を ω とすると、解は

$$\Psi(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) e^{i\{\phi(\vec{r}) - \omega t\}} \quad (\text{B.5})$$

である。ここで、電場振幅 $a(\vec{r})$ とアイコナル $\phi(\vec{r})$ は実関数とする。(B.5) を (B.4) に代入すると、

$$\left(\nabla^2 a(\vec{r}) - a(\vec{r}) (\nabla \phi(\vec{r}))^2 + \frac{\omega^2}{c(\vec{r})^2} a(\vec{r}) \right) + i (2 \nabla a(\vec{r}) \cdot \nabla \phi(\vec{r}) + a(\vec{r}) \nabla^2 \phi(\vec{r})) = 0 \quad (\text{B.6})$$

が得られる。 $a(\vec{r})$ 、 $\phi(\vec{r})$ は実関数であるから、実部、虚部はそれぞれ 0 である。

$$\begin{cases} \nabla^2 a(\vec{r}) - a(\vec{r}) |\nabla \phi(\vec{r})|^2 + \frac{\omega^2}{c(\vec{r})^2} a(\vec{r}) = 0, \\ 2 \nabla a(\vec{r}) \cdot \nabla \phi(\vec{r}) + a(\vec{r}) \nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

アイコナル $\phi(\vec{r})$ を r_0 の近傍でテーラー展開すると、

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) + \nabla\phi(\vec{r})(\vec{r} - \vec{r}_0) + \dots \quad (\text{B.8})$$

であるから、第二項の係数を $\vec{k} = \nabla\phi(\vec{r})$ とおくと、電磁波の波長 λ は、

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{2\pi}{|\nabla\phi(\vec{r})|} \quad (\text{B.9})$$

で表わされる。 $a(\vec{r})$ と $\phi(\vec{r})$ は電磁波の空間変化に比べてゆっくりと変化するので、幾何光学近似として

$$\lambda^2 \frac{\nabla^2 a(\vec{r})}{a(\vec{r})} \ll 1 \quad (\text{B.10})$$

を用いることで、(B.7) の第一式の第一項を無視する。このとき、(B.7) の第一式からアイコナル方程式

$$|\nabla\phi(\vec{r})|^2 = \frac{\omega^2}{c(\vec{r})^2} \quad (\text{B.11})$$

が得られる。幾何光学では、アイコナル方程式の解 $\phi(\vec{r})$ から作られるベクトル

$$\vec{k} = \nabla\phi(\vec{r}) \quad (\text{B.12})$$

の積分曲線が「光線」と一致する。第 2 章では (B.10) が成り立つような波長の短い光線を考えている。

付録 C

面積保存性

誘電体マッシュルーム系のポアンカレ写像が面積保存性を持つことを示す。まず、軌道が誘電体に衝突しない場合のヤコビアンは 1 である。それ以外の軌道は上半円から長方形領域に入り、また上半円に戻ってくる軌道である。このような軌道の性質を調べるために、図 C.1 のような周期的撞球系を考える。図の実直線で表されるような軌道に着目すると、軌道は上半円上の一点 (L, θ) から下半円上の一点 (L', θ') へ移る。図 C.1 のように ϕ, ψ を定義する。

$$\varphi = -\arcsin(L/R), \quad \psi = \arcsin(2h/NR). \quad (\text{C.1})$$

このとき、

$$\begin{cases} s = \frac{r \sin \gamma}{\cos(-\beta + \gamma + \theta + \varphi + \psi)}, \\ s' = l_N - s. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

ただし、正弦定理やスネルの法則を用いて

$$R \sin \varphi = r \sin \beta, \quad (\text{C.3})$$

$$n \sin \beta = n_1 \sin \gamma, \quad (\text{C.4})$$

$$R \sin \varphi' = r \sin \beta', \quad (\text{C.5})$$

$$n \sin \beta' = n_1 \sin \gamma', \quad (\text{C.6})$$

$$l_N = \sqrt{4h^2 + N^2 R^2}. \quad (\text{C.7})$$

l_N は上半円の中心と下半円の中心の距離である。

(C.1)-(C.7) より、

$$L' = \frac{n_1}{n} l_N \cos \left[\left(\theta + \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - \arcsin \left| \frac{nL}{n_1 r} \right| - \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| - \arctan \left| \frac{2h}{NR} \right| \right) \right] + L. \quad (\text{C.8})$$

一方、 θ' について以下が成り立つ。

$$\theta' = \theta - \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| - \arcsin \left| \frac{L'}{R} \right| + \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - \arcsin \left| \frac{nL}{n_1 r} \right| + \arcsin \left| \frac{L'}{r} \right| - \arcsin \left| \frac{nL'}{n_1 r} \right| \quad (\text{C.9})$$

この写像 $\Phi : (L, \theta) \rightarrow (L', \theta')$ のヤコビアンが 1 になるので、面積保存写像となる。

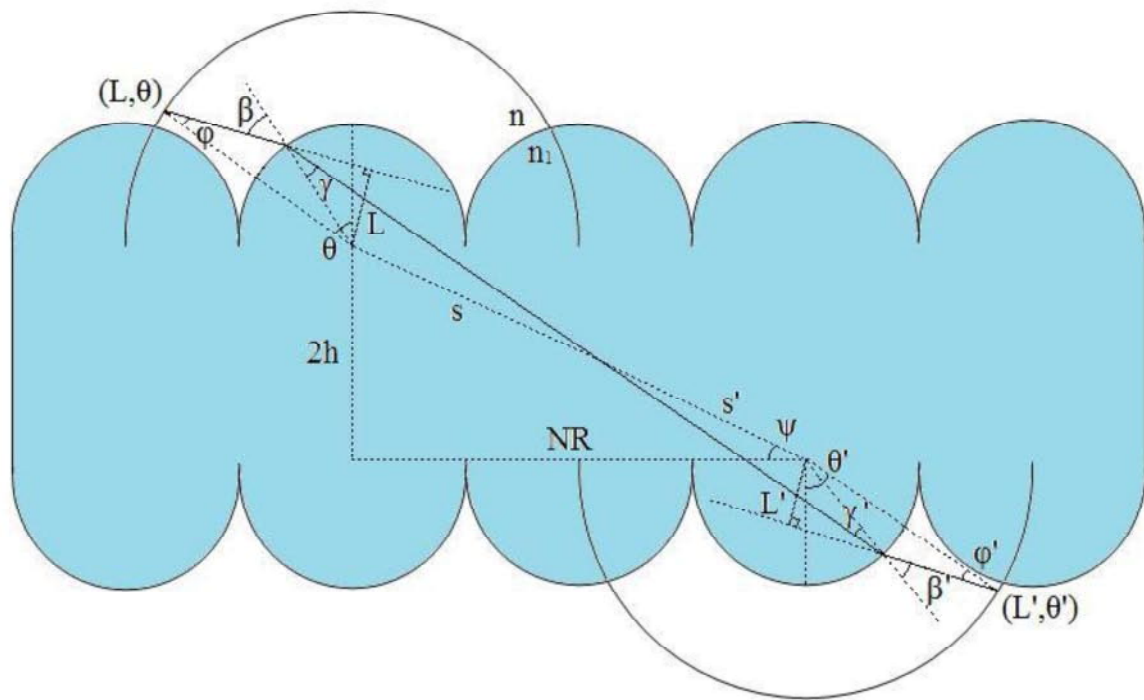


図 C.1 角運動量の符号が反転する場合

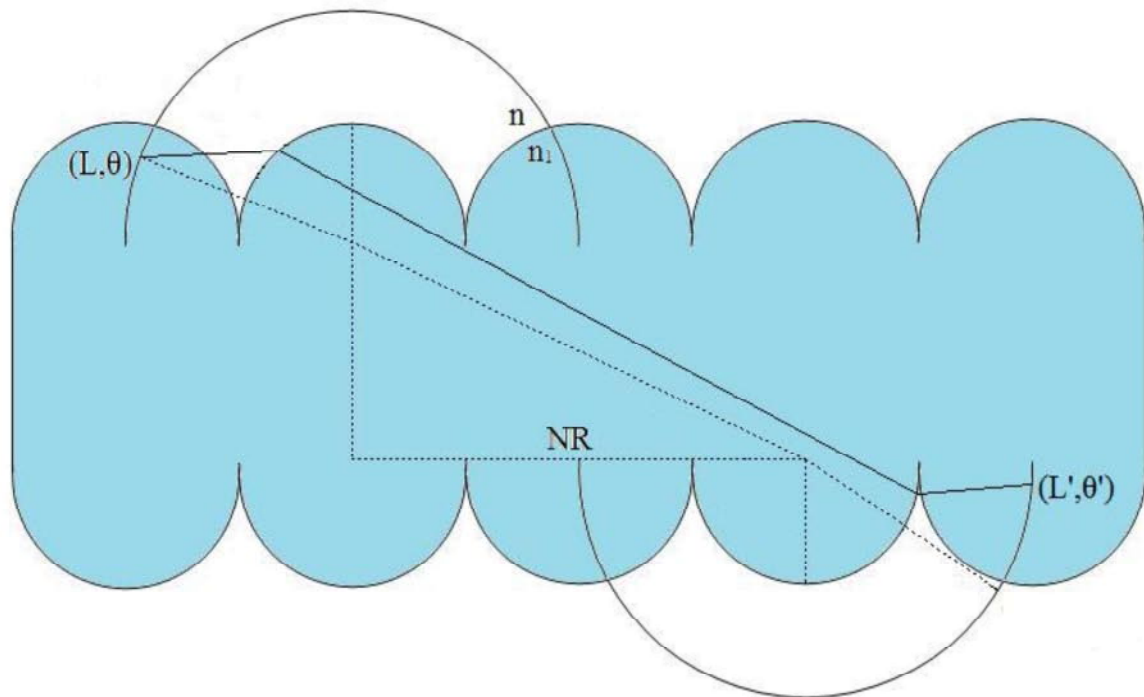


図 C.2 角運動量の符号が反転しない場合

付録 D

第 3 脱出領域と第 4 脱出領域の導出結果

第 n 脱出領域を求める際に必要な第 3 脱出領域と第 4 脱出領域の理論曲線を示す。

$$D_3 = \Phi^{-1}(D_2 \setminus D_{\text{in}}) = \Phi^{-1}(F_1^2) \cup \Phi^{-1}(F_2^2) \cup \Phi^{-1}(F_3^2) \cup \Phi^{-1}(F_4^2) = F_1^3 \cup F_2^3 \cup F_3^3 \cup F_4^3.$$

$$\Phi^{-1}(F_1^2) = \left\{ (L, \theta) \mid \theta_{\text{esc}}^-(L) - 4 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 4 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 4 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| + \pi < \theta < \theta_{\text{in}}^+(L), \right. \\ \left. \tilde{L} < L < 0 \right\}.$$

$$\Phi^{-1}(F_2^2) = \left\{ (L, \theta) \mid \theta_{\text{in}}^+(L) < \theta < \theta_{\text{esc}}^-(L) - 2 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 2 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 2 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| + \pi, \right. \\ \left. L_{\text{in}}^-(0) < L < 0 \right\}.$$

$$\Phi^{-1}(F_3^2) = \left\{ (L, \theta) \mid \theta_{\text{in}}^+(L) < \theta < \theta_{\text{esc}}^+(L) - 4 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 4 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 4 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| + \pi, \right. \\ \left. \tilde{L} < L < L_{\text{in}}^-(0) \right\}.$$

$$\Phi^{-1}(F_4^2) = \left\{ (L, \theta) \mid \theta_{\text{esc}}^-(L) - 4 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 4 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 4 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| + \pi < \theta < \theta_{\text{esc}}^+(L) \right. \\ \left. - 4 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 4 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 4 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| + \pi, -r < L < \tilde{L} \right\}.$$

$$D_4 = \Phi^{-1}(D_3 \setminus D_{\text{in}}) = \Phi^{-1}(F_1^3) \cup \Phi^{-1}(F_2^3) \cup \Phi^{-1}(F_3^3) \cup \Phi^{-1}(F_4^3) = F_1^4 \cup F_2^4 \cup F_3^4 \cup F_4^4.$$

$$\Phi^{-1}(F_1^3) = \left\{ (L, \theta) \mid \theta_{\text{esc}}^-(L) - 6 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 6 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 6 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| + \pi < \theta < \theta_{\text{in}}^+(L), \right. \\ \left. \tilde{L} < L < 0 \right\}.$$

$$\Phi^{-1}(F_2^3) = \left\{ (L, \theta) \mid \theta_{\text{in}}^+(L) < \theta < \theta_{\text{esc}}^-(L) - 4 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 4 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 4 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| + \pi, \right. \\ \left. L_{\text{in}}^-(0) < L < 0 \right\}.$$

$$\Phi^{-1}(F_3^3) = \left\{ (L, \theta) \mid \theta_{\text{in}}^+(L) < \theta < \theta_{\text{esc}}^+(L) - 6 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 6 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 6 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| + \pi, \right. \\ \left. \tilde{L} < L < L_{\text{in}}^-(0) \right\}.$$

$$\Phi^{-1}(F_4^3) = \left\{ (L, \theta) \mid \theta_{\text{esc}}^-(L) - 6 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 6 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 6 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| + \pi < \theta < \theta_{\text{esc}}^+(L) \right. \\ \left. - 6 \arcsin \left| \frac{L}{R} \right| + 6 \arcsin \left| \frac{L}{r} \right| - 6 \arcsin \left| \frac{n_v L}{n_d r} \right| + \pi, -r < L < \tilde{L} \right\}.$$

付録 E

最外殻トーラス近傍の淀み運動を記述する写像の構成

第 2 章における最外殻トーラス近傍のダイナミクスを記述する写像 T_t を構成する。そのためにまず最外殻トーラス上の写像 S_t を導出する。2.2.5 節で最外殻トーラスの回転数 $\rho(m)$ を導入したが、 m が奇数のときは整数 k' ($1 \leq k' \leq (3m-3)/2$) と新しい変数 $\rho(m)' = \rho(m)/2$ を用いてトーラス上の写像 $S_t(\theta_n)$ は以下で定義される。

$$S_t(\theta_n) = \theta_{n+1} = \begin{cases} -\theta_n + 1 - \rho(m)' & (0 \leq \theta_n < \rho(m)'), \\ \theta_n + 1 - \rho(m)' & (2\rho(m)' \leq \theta_n < 3\rho(m)'), \\ -\theta_n + 1 - \rho(m)' & ((2k' + 1)\rho(m)' \leq \theta_n < (2k' + 2)\rho(m)'), \\ -\theta_n + 1 + \rho(m)' & ((2k' + 2)\rho(m)' \leq \theta_n < (2k' + 3)\rho(m)'), \\ \theta_n - 1 + \rho(m)' & (3m\rho(m)' \leq \theta_n < (3m+1)\rho(m)'), \\ -\theta_n + 1 - \rho(m)' & ((3m+1)\rho(m)' \leq \theta_n < 1). \end{cases}$$

m が偶数のときは整数 k'' ($0 \leq k'' \leq (3m-1)/2$) を用いて、写像は以下で定義される。

$$S_t(\theta_n) = \theta_{n+1} = \begin{cases} -\theta_n + 1 - \rho(m)' & (2k''\rho(m)' \leq \theta_n < (2k'' + 1)\rho(m)'), \\ -\theta_n + 1 + \rho(m)' & ((2k'' + 1)\rho(m)' \leq \theta_n < (2k'' + 2)\rho(m)'), \\ \theta_n - 1 + \rho(m)' & ((3m+1)\rho(m)' \leq \theta_n < 1). \end{cases}$$

図 E.1 は $m = 0, 1, 2$ の場合の写像 $T_t(\theta_n)$ を示している。2.2.5 節で求められた回転数からトーラス上の軌道は以下の関係を満たす必要があることが示される。

$$\theta_{n+3m+2} = \theta_n. \quad (\text{E.1})$$

トーラス近傍の写像はトーラス写像 S_t からわずかにずれた軌道を考えるから、 S_t を $S_t : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ となる一次元写像とすると

$$f(x) = \begin{cases} Ax + Bx^2, & 0 \leq x < C, \\ x - C & C \leq x < 1. \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

で記述できることが考えられる。連続近似を用いると

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bx^2 \quad (\text{E.3})$$

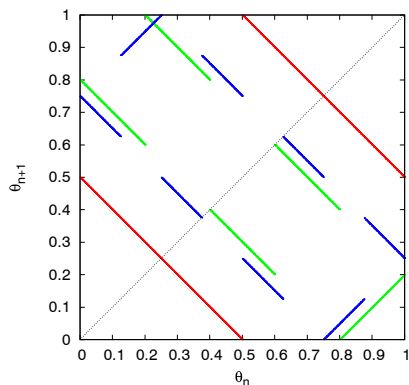


図 E.1 実践は最外殻 KAM トーラス上の軌道のリターンマップを示している。赤線は $m = 0$, 緑線は $m = 1$, 青線は $m = 2$ の場合である。点線は関数 $\theta_{n+1} = \theta_n$ を表わす。

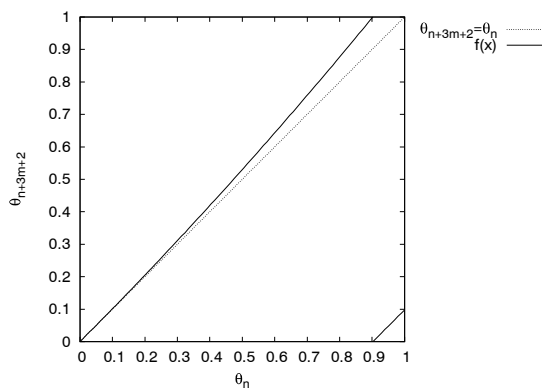


図 E.2 最外殻近傍の軌道を記述する写像 $f(x)$ 。図 D.1 のトーラス写像は関数 $\theta_{n+3m+2} = \theta_n$ に対応している。

が得られる。この方程式の長時間の振る舞いを議論したいので、 A について $A \simeq 0$ が成り立つと仮定する。初期条件を (x_0, t_0) とすると、

$$x - x_0 = \frac{1}{B(t_0 - t)} \quad (\text{E.4})$$

が成り立つ。領域 $[0, \varepsilon)$ におけるサバイバル確率 $p_\varepsilon(t)$ は

$$p_\varepsilon(t) \simeq t^{-1} \quad (\text{E.5})$$

と求めることができ、第 2 章の最外殻トーラス近傍のサバイバル確率と一致する。つまり、カオス領域の非双曲的構造を仮定するとトーラス近傍のダイナミクスを記述する写像 T_t として

$$\theta_{n+3m+2} = f(\theta_n) \quad (\text{E.6})$$

を想定することができる。

参考文献

- J. Aaronson. Random f -expansions. *The Annals of Probability*, **14**, 1037–1057, 1986.
- J. Aaronson. *An Introduction to Infinite Ergodic Theory*. American Mathematical Society, 1997.
- L. M. Abramov. Entropy of a derived automorphism. *Amer. Math. Soc. Transl.*, **49**, 162, 1966.
- Y. Aizawa. On the f^{-1} spectral chaos. *Prog. Theor. Phys.*, **72**, 659–661, 1984.
- Y. Aizawa. Non-stationary chaos revisited from large deviation theory. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, (99), 149–164, 1989a.
- Y. Aizawa. Universality of the stagnant motions in hamiltonian systems. *Prog. Theor. Phys.*, **81**(2), 249–253, 1989b.
- Y. Aizawa. キーポイント熱・統計力学. 岩波書店, 1996.
- Y. Aizawa. Comments on the non-stationary chaos. *Chaos, Solitons and Fractals*, **11**, 263–268, 1998.
- Y. Aizawa and T. Kohyama. *Chaos and Statistical Methods*. Springer, 1983. ed. Y. Kuramoto.
- Y. Aizawa and T. Kohyama. Asymptotically non-stationary chaos. *Prog. Theor. Phys.*, **71**(4), 847–850, 1984.
- Y. Aizawa, C. Murakami, and T. Kohyama. Statistical mechanics of intermittent chaos - $f^{-\nu}$ spectral behaviors of the semi-markovian class -. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **79**, 96–124, 1984.
- Y. Aizawa, Y. Kikuchi, T. Harayama, K. Yamamoto, M. Ota, and K. Tanaka. Stagnant motions in hamiltonian systems. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **98**, 36–82, 1989.
- Y. Aizawa, N. Koguro, and I. Antoniou. Chaos and singularities in the mixmaster universe. *Prog. Theor. Phys.*, **98**, 1225–1250, 1997.
- A. Akaishi and A. Shudo. Accumulation of unstable periodic orbits and the stickiness in the two-dimensional piecewise linear map. *Phys. Rev. E*, **80**, 066211, 2009.
- T. Akimoto. Subexponential instability in one-dimensional maps implies infinite invariant measure. *Chaos*, **20**, 033110, 2010.
- T. Akimoto and Y. Aizawa. Large fluctuations in the stationary - nonstationary chaos transition. *Prog. Theor. Phys.*, **114**(4), 737–748, 2005.
- T. Akimoto and Y. Aizawa. New aspects of the correlation functions in non-hyperbolic chaotic systems. *J. Korean Phys. Soc.*, **50**, 254–260, 2007.

- D. W. Allan. Statistics of atomic frequency standards. *Proceedings of IEEE*, **54**(2), 221–230, 1966.
- G. Altmann, A. E. Motter, and H. Kantz. Stickiness in mushroom billiards. *Chaos*, **15**, 033105, 2005.
- G. Altmann, A. E. Motter, and H. Kantz. Stickiness in hamiltonian systems: From sharply divided to hierarchical phase space. *Phys. Rev. E*, **73**, 026207, 2006.
- A. Arnold. 古典力学のエルゴード問題. 吉岡書店, 1967. 吉田耕作 訳.
- L. Arnold. *Random Dynamical Systems*. Springer, 2010.
- V. I. Arnold. Proof of a theorem by a. n. kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian. *Russian Math. Surveys*, **18**, 13–40, 1963a.
- V. I. Arnold. Small divisor problems in classical and celestial mechanics. *Russian Math. Surveys*, **18**, 85–191, 1963b.
- R. Artuso, L. Cavallasca, and G. Cristadoro. Dynamical and transport properties in a family of intermittent area-preserving maps. *Phys. Rev. E*, **77**, 046206, 2008.
- R. Badii and A. Politi. 複雑さの数理. 産業図書, 2001. 相澤洋二 監訳, 龍野正実 時田恵一郎 橋本敬 秦浩起 訳.
- G. Benettin, L. Galgani, and J. M. Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems : a method for computing all of them. *Meccanica*, **15**, 9, 1980.
- D. Bensimon and L. P. Kadanoff. Extended chaos and disappearance of kam trajectories. *Physica D*, **13**, 82, 1984.
- P. Bergé, M. Dubois, P. Manneville, and Y. Pomeau. Intermittency in rayleigh-bénard convection. *Le Journal de Physique-Lettres*, **41**, 341, 1980.
- P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. カオスの中の秩序 乱流の理解に向けて. 産業図書, 1992. 相澤洋二 訳.
- P. Billingsley. 確率論とエントロピー—エルゴード理論と情報量—. 吉岡書店, 1965.
- G. D. Birkhoff. Proof of the ergodic theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **17**, 656–660, 1931.
- R. Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. Springer, 2008. 2nd Revised Edition.
- L. A. Bunimovich. Mushrooms and other billiards with divided phase space. *Chaos*, **11**, 802, 2001.
- L. A. Bunimovich. Kinematics, equilibrium, and shape in hamiltonian systems: The “lab” effect. *Chaos*, **13**, 903, 2003.
- S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, 1961.
- N. Chernov and R. Markarian. *Chaotic Billiards*. American Mathematical Society, 2006.
- B. V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.*, **52**, 263,

- 1979.
- B. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky. Correlation properties of dynamical chaos in hamiltonian systems. *Physica D*, **13**, 395, 1984.
- D. R. Cox. *Renewal Theory*. Methuen & Co, 1962.
- D. A. Darling and M. Kac. On occupation times for markov processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84**, 444–458, 1957.
- S. R. de Groot and P. Mazur. *Non-Equilibrium Thermodynamics*. DOVER, 1984.
- J.-D. Deuschel and D. W. Stroock. *Large deviations*. Academic Press, 1989.
- J. R. Dorfman. *An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Cambridge University Press, 1999.
- J. P. Eckmann. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Rev. Mod. Phys.*, **53**, 643–654, 1981.
- J. P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 617–656, 1985.
- C. Efthymiopoulos, G. Contopoulos, N. Voglis, and R. Dvorak. Stickiness and cantori. *J. Phys. A*, **30**, 8167–8186, 1997.
- R. S. Ellis. *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*. Springer, 1985.
- M. J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, **19**(1), 25–52, 2013.
- W. Feller. Fluctuation theory of recurrent events. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67**, 98–119, 1949.
- W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications I*. JOHN WILLEY & SONS, 1957. (河田龍夫 監訳, 卜部舜一 矢部真 池守昌幸 大平担 阿部俊一 訳 (1961) 確率論とその応用 上下).
- W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications II*. JOHN WILLEY & SONS, 1966. (国沢清典 監訳, 羽鳥裕久 大平担 訳 (1970) 確率論とその応用 II 上下).
- C. Froeschle. Fast lyapunov indicators. application to asteroidal motion. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **67**, 41–62, 1997.
- C. Froeschle, E. Lega, and M. Guzzo. Analysis of the chaotic behaviour of orbits diffusing along the arnold web. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **95**, 141–153, 2006.
- H. Fujisaka. 非平衡系の統計力学. 産業図書, 1998.
- T. Geisel, A. Zacherl, and G. Radons. Generic $1/f$ noise in chaotic hamiltonian dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 2503–2506, 1987.
- P. Grassberger, R. Badii, and A. Politi. Scaling laws for invariant measures on hyperbolic and nonhyperbolic attractors. *J. Stat. Phys.*, **51**, 135–178, 1988.

- J. M. Greene. A method for determining a stochastic transition. *J. Math. Phys.*, **20**, 1183–1201, 1979.
- J. M. Greene, R. S. MacKay, F. Vivaldi, and M. J. Feigenbaum. Universal behaviour in families of area-preserving maps. *Physica D*, **3**, 468–486, 1981.
- P. R. Halmos. *Lectures on ergodic theory*. ams chelsea publishing, 1956.
- M. Hino. スペクトル解析. 朝倉書店, 1977.
- M. Ichiyanagi. 不可逆過程の物理 日本統計物理学史から. 日本評論社, 1999.
- R. Ishizaki and H. Mori. Anomalous diffusion induced by external force in the standard map. *Prog. Theor. Phys.*, **97**, 201, 1997.
- R. Ishizaki, T. Horita, and H. Mori. Anomalous diffusion on mixing of chaotic orbits in hamiltonian dynamical systems. *Prog. Theor. Phys.*, **89**, 947, 1993.
- H. Ito. 常微分方程式と解析力学. 共立出版, 1998.
- C. F. F. Karney. Long-time correlations in the stochastic regime. *Physica D*, **8**, 360, 1983.
- A. Katok. Some remarks on birkhoff and mather twist theorems. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **2**, 185–194, 1982.
- A. Katok. Periodic and quasi-periodic orbits for twist maps. *Dynamical Systems and Chaos (ed L Garrido)*, *Springer Lect. Notes Phys.*, **179**, 47–65, 1983.
- A. I. Khinchin. *Mathematical foundations of statistical mechanics*. Dover Publications, 1949.
- T. Kohyama. Non-stationary of chaotic motions in an area preserving mapping. *Prog. Theor. Phys.*, **71**, 1104–1107, 1984.
- A. N. Kolmogorov. Preservation of conditionally periodic movements with small change in the hamilton function. *Dokl. Akad. Nauk*, **98**, 527–530, 1954. ;English translation in G. Casati and G. Ford, eds, *Lecture Notes in Physics No. 93*, Springer Verlag, Berlin, 1979.
- R. Kubo. 大学演習 熱学・統計力学. 裳華房, 1961.
- L. Landau and E. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon, Oxford, 1959.
- A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer, 1992. Second Edition.
- R. S. MacKay. A renormalisation approach to invariant circles. *Physica D*, **7**, 283–300, 1983.
- R. S. MacKay and I. C. Percival. Converse kam : Theory and practice. *Commun. Math. Phys.*, **98**, 469, 1985.
- R. S. MacKay, J. D. Meiss, and I. C. Percival. Stochasticity and transport in hamiltonian systems. *Phys. Rev. Lett.*, **52**(9), 697–700, 1984.
- B. B. Mandelbrot and V. Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, **10**, 422, 1968.

- P. Manneville and Y. Pomeau. Intermittency and the Lorenz model. *Phys. Lett.*, **75A**, 1–2, 1979.
- P. Manneville. Intermittency, self similarity and $1/f$ spectrum. *Le Journal de Physique*, **41**, 1235, 1980.
- J. N. Mather. Non-existence of invariant circles. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **4**, 301–309, 1984.
- J. D. Meiss and E. Ott. Markov tree model of transport in area-preserving maps. *Physica D*, **20**, 387–402, 1986.
- T. Miyaguchi. 保存力学系における緩和・輸送現象. PhD thesis, 早稲田大学, 2006.
- T. Miyaguchi. Escape time statistics for mushroom billiards. *Phys. Rev. E*, **75**, 066215, 2007.
- T. Miyaguchi and Y. Aizawa. Spectral analysis and an area-preserving extension of a piecewise linear intermittent map. *Phys. Rev. E*, **75**, 066201, 2007.
- H. Mori and Y. Kuramoto. 散逸構造とカオス. 岩波書店, 2000.
- J. Moser. Convergent series expansions for quasi-periodic motions. *Math. Ann*, pages 136–176, 1967.
- J. Moser. Recent developments in the theory of hamiltonian systems. *SIAM Review*, **28**(4), 459–485, 1986.
- N. N. Nekhoroshev. An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable hamiltonian systems. *Russian Math. Surveys*, **32**(6), 1–65, 1977.
- S. Newhouse, D. Ruelle, and F. Takens. Occurrence of strange axiom A attractors near quasiperiodic flows on t^m , $m \geq 3$. *Commun. Math. Phys.*, **64**(1), 35–40, 1978.
- G. Nicolis and I. Prigogine. 散逸構造. 岩波書店, 1977.
- Y. Pomeau and P. Manneville. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Commun. Math. Phys.*, **74**, 189–197, 1980.
- D. Ruelle. *Thermo-dynamic formalism*. Cambridge Mathematical Library, 2004. Second Edition.
- D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys.*, **20**, 167, 1971.
- N. Saito, H. Hirooka, J. Ford, F. Vivaldi, and G. H. Walker. Numerical study of billiard motion in an annulus bounded by non-concentric circles. *Physica D*, **5**, 273–286, 1982.
- M. Sano, S. Sato, and Y. Sawada. Global spectral characterization of chaotic dynamics. *Prog. Theor. Phys.*, **76**(4), p.945–p.948, 1986.
- T. Sasagawa. 散乱理論. 裳華房, 1991.
- K. Sekimoto. ゆらぎのエネルギー論. 岩波書店, 2004.
- S. J. Shenker and L. P. Kadanoff. Critical behavior of a kam surface : I. empirical results. *J. Stat. Phys.*, **27**(4), 631, 1982.
- I. Shimada and T. Nagashima. A numerical approach to ergodic problems of dissipative dynamical systems. *Prog. Theor. Phys.*, **61**, 1605, 1979.
- S. Shinkai. 無限エルゴード系の特異ゆらぎとハミルトン系の異常緩和の解明. PhD thesis, 早稲田大学,

- 2012.
- S. Shinkai and Y. Aizawa. The lempel-ziv complexity of non-stationary chaos in infinite ergodic cases. *Prog. Theor. Phys.*, **116**(3), 503–515, 2006.
- S. Shinkai and Y. Aizawa. The lempel-ziv complexity in infinite ergodic systems. *J. Korean Phys. Soc.*, **50**(1), 261–266, 2007.
- S. Shinkai and Y. Aizawa. $1/f$ spectrum and 1-stable law in one-dimensional intermittent map with uniform invariant measure and nekhoroshev stability. *J. Phys. Soc. Jpn*, **81**, 2012. 024009.
- S. Shinohara and Y. Aizawa. The breakup condition of shearless kam curves in the quadratic map. *Prog. Theor. Phys.*, **97**(3), 379–385, 1997.
- Y. G. Sinai. Dynamical systems with elastic reflections. *Russ. Math. Surv.*, **25**, 137, 1970.
- H. Suyari. 複雑系のための基礎数理 べき乗則とツァリスエントロピーの数理. 牧野書店, 2010.
- H. Takayasu. フラクタル科学. 朝倉書店, 1987.
- H. Tanaka and A. Shudo. Recurrence time distribution in mushroom billiards with parabolic hat. *Phys. Rev. E*, **74**, 036211, 2006.
- K. Tanaka and Y. Aizawa. Fine structures in stationary and non-stationary chaos - numerical approach to the law of large number -. *Prog. Theor. Phys.*, **90**(3), 547–567, 1993.
- M. Thaler. Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points. *Isr. J. Math.*, **37**(4), 303–314, 1980.
- M. Thaler. Transformations on $[0, 1]$ with infinite invariant measures. *Isr. J. Math.*, **46**(1-2), 67–96, 1983.
- M. Thaler. A limit theorem for the perron-frobenius operator of transformations on $[0, 1]$ with indifferent fixed points. *Isr. J. Math.*, **91**, 111–127, 1995.
- H. Totoki. エルゴード理論入門. 共立出版, 1971.
- D. K. Umberger and J. D. Farmer. Fat fractals on the energy surface. *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 661–664, 1985.
- P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer, 1975.
- Y. Yamamoto. 熱学思想の史的展開-熱とエントロピー-. 現代数学社, 1987.
- G. M. Zaslavsky. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Phys. Rep.*, **371**, 461–580, 2002.

謝辞

指導教官である相澤洋二教授には、学部生の頃からお世話になり、研究を進めていく上で必要となる多くの知恵や難問に立ち向かう勇気をご指導いただきました。特に、地震に関する共同研究をした際は、問題の明確化やその解決手段へ導く方法など、研究内容とともにその姿勢について多くを学ばせていただきました。多くの議論とご指導に心から感謝いたします。

首都大の首藤啓教授には、ビリヤード系の研究について相談に乗っていただくとともにや議論をしていただき、またいくつかのセミナーで励みになる有益なコメントをいただきました。厚く御礼申し上げます。

研究室の先輩である宮口智成博士、秋元琢磨博士、新海創也博士、三ツ井孝仁博士、中川正基さん、白石允梓さんにはエルゴード理論やハミルトン系の研究について継続的に議論していただきました。特にハミルトン系に携わっている新海さん、中川さんには研究の方向性や別の角度からの見方についていくつも指摘をいただきました。深く感謝いたします。

最後に研究生活を支えてくれた家族に心から感謝いたします。

研究業績

論文

- (1) Satoru Tsugawa and Yoji Aizawa, Stagnant Motion in Hamiltonian Dynamics - Mushroom Billiard Case with Smooth Outermost KAM Tori -, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **83**, 024002, 2014.
- (2) Yoji Aizawa and Satoru Tsugawa, Aftershock Cascade of the 3.11 Earthquake (2011) in Fukushima-Miyagi Area, *New Challenges in Complex System Physics*, 2013 (印刷中).
- (3) Yoji Aizawa, Tomohiro Hasumi, and Satoru Tsugawa, Seismic Statistics: Universality and Interim Report on the 3.11 Earthquake (2011) in Fukushima-Miyagi Area, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **16**, No. 2, pp. 116-130, 2013.
- (4) Satoru Tsugawa and Yoji Aizawa, Stagnant Motion in Chaotic Region of Mushroom Billiard System with Dielectric Medium, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **81**, 064004, 2012.

国際会議

- (1) Satoru Tsugawa and Yoji Aizawa, Multi-fractal Relation in Seismicity Statistics: Data Analysis of the 3.11 Earthquake (2011), *Dynamics Days Europe 2013*, Centro de Tecnologia Biomédica, Spain, June 3 - 7, 2013.
- (2) Satoru Tsugawa and Yoji Aizawa, On the Stickiness Properties of Perturbed Mushroom Billiards, *Dynamics of Complex Systems 2012*, Hokkaido University, Japan, March 6 - 8, 2012.
- (3) Satoru Tsugawa and Yoji Aizawa, On the Stickiness Property of Perturbed Mushroom Billiard, *Dynamics Days 2012*, University of Maryland, Baltimore, USA, January 4 - 7, 2012.
- (4) Satoru Tsugawa and Yoji Aizawa, Stagnant Motion Can Exist in the Vicinity of the Outermost Torus, *The 13th Slovenia-Japan Seminar on Nonlinear Science and Waseda AICS Symposium on Nonlinear and Nonequilibrium Phenomena in Complex Systems*, Waseda University, Japan, November 4 - 6, 2010.

国内講演

- (1) 津川 暁, 一次元写像に現れるカントール集合について, 「力学系、カオス、複雑系のエルゴード論」シンポジウム, 早稲田大学染谷記念国際会館レセプションルーム, 2013年8月.
- (2) 津川 暁, 相澤洋二, 地震統計を満たす普遍法則の構成, 日本物理学会第68回年次大会, 広島大学東広島キャンパス, 2013年3月.
- (3) 津川 暁, 無理数比マッシュルームビリヤードの解析, 非線形・非平衡系シンポジウム, 早稲田大学染谷記念国際会館レセプションルーム, 2013年3月.
- (4) 津川 暁, 相澤洋二, 地震統計におけるマルチフラクタル関係式, 京都大学基礎物理学研究所研究会「摩擦、レオロジー、地震の新展開-異なる階層と舞台をつなぐ-」, 京都大学吉田キャンパス, 2012年11月.
- (5) 津川 暁, 斎藤史洋, 相澤洋二, 地震の発生間隔分布とマグニチュード分布を結合するカオスモデルの構成と普遍的関係式, 日本物理学会第67回年次大会, 関西学院大学西宮上ヶ原キャンパス, 2012年3月.
- (6) 津川 暁, 相澤洋二, 二次元無限測度を持つ可逆な写像のリアプノフ指数, 日本物理学会第66回年次大会, 新潟大学五十嵐キャンパス, 2011年3月.
- (7) 津川 暁, 相澤洋二, マッシュルームビリヤード系の淀み運動と分岐現象, Dynamics of Complex Systems 2011 - 時間発展の非可逆性と予測不可能性の限界に関する諸分野からの提言 -, 北海道大学, 2011年3月.
- (8) 津川 暁, 相澤洋二, 最外殻 KAM トーラスから離れた領域における淀み運動, 首藤研究室セミナー, 首都大学東京, 2010年12月.
- (9) 津川 暁, 相澤洋二, 誘電体マッシュルームビリヤードの解析, 日本物理学会第65回年次大会, 岡山大学津島キャンパス, 2010年3月.
- (10) 津川 暁, 新海創也, 相澤洋二, 非双曲ハミルトン系の再帰時間特性, 日本物理学会第63回年次大会, 岩手大学上田キャンパス, 2008年9月.

その他 (第二著者)

- (1) 古賀恭平, 津川 暁, 相澤洋二, 確率分岐に伴う無限測度と Multiplicative Noise 効果, 日本物理学会第67回年次大会, 関西学院大学西宮上ヶ原キャンパス, 2012年3月.