

# 博士論文審査報告書

## 論文題目

ハミルトン系カオスの  
スローダイナミクスの起源に関する研究

Studies on the Origin of the Slow Dynamics  
in Hamiltonian Chaos

申請者

津川	暁
Satoru	Tsugawa

物理学及応用物理学専攻 統計物理学研究

2014年2月

カオスの理論的研究は、歴史的には気体分子運動論、乱流統計、雑音・ブラウン運動論など多くの統計力学の基礎論的課題と密接に関係しながら進められてきた。それぞれの対象が示すマクロな統計的挙動を背後にあるミクロな力学系の構造から基礎付けようとするのがエルゴード問題の精神である。近年の力学系理論の発展によって、マクロな熱力学的諸量の関係 (thermodynamical formalism) も双曲性エルゴード力学系から一貫して導けることが明らかになっている。その意味では、双曲性カオスの理論はほぼ完成したと言へる。その一方で、双曲性条件を破る対象については、例へば、非カオス的ストレンジアトラクタや無限エルゴード性など従来のエルゴード定理を超す複雑な運動を示す新たなカオスが報告されて来ており、その解明に世界的な関心がむけられている。そこでは確率測度がカントール集合上に制限されることや、確率測度が存在せず、平衡測度が無限測度であったり、ユニークネスを破るものもある。リャプノフ指数の負値性やスローダイナミクスの出現、異常拡散など、未解明な物理現象の多くがこれに関連していることが予想されており、非双曲系の未知なカオス機構とその統計力学的法則の探求がエルゴード問題の新たな一つの方向となっているのが現状である。

このような流れの中で、本研究の著者は典型的な非双曲性力学系であるハミルトン系のカオスに注目し、スローダイナミクスの起源とその統計則の解明に挑戦している。一般の近可積分ハミルトン系では不安定性の強いカオス領域と不安定性の弱いトーラス領域が共存している。その結果として軌道はトーラス近傍領域に長時間束縛されるため、長時間記憶をもつ不安定性の弱い運動 (スローダイナミクス) が生じ、その局所的なダイナミクスは非双曲力学系の中立不動点の周りの淀み層のメカニズムによるものと予想されて来た。しかし、近可積分系の相空間には大小さまざまな島状トーラス群がフラクタル的に分布しており、それらを全て考慮に入れたスローダイナミクスの詳細な発生機構の解明は今なお困難な課題となっている。これに対して、近年、カオスとトーラスが共存しながらもその境界を明確に分離できる (棲み分け型) ハミルトン系の例が多く報告されて来たことによって、スローダイナミクスのメカニズムの理解や統計的性質を分類できる可能性が出て来た。

本論文は、棲み分け境界型ハミルトン系カオスの具体的モデル (マッシュルームビリヤード) における淀み層の出現機構とその統計力学的法則の詳細な解析、およびスローダイナミクスを記述するための新たな方法論を非定常カオスの視点から研究したものである。次に各章の概要と評価を述べる。

第1章では、カオスの理論研究の歴史、とくにエルゴード理論に基礎付けられたカオス統計力学の諸結果をまとめるとともに、従来のエルゴード特性を超える非定常カオス及びスローダイナミクスの新たな研究課題を整理し、本研究の目標を述べている。

第2章では、誘電体を挿入したマッシュルームビリヤードを構成して、棲み分け境界型ハミルトン系におけるスローダイナミクスの出現メカニズムを調べる。

誘電体の屈折率を連続的に変え、最外殻 KAM トーラス近傍の淀み領域を構造変化させて、その相空間の変化と共に上半円領域からの脱出時間分布を厳密に決定している。その結果、最外殻 KAM トーラス近傍に脱出時間の異なる淀み層の無限集積点が生成され、その特異点をはさんで両側に異なる淀み層が存在することを発見している。この階層構造の形成過程を理論的に解析し、無限集積点が出現するのは脱出領域同士が重なり合う共鳴条件を満たすときであることを明らかにし、淀み層の測度が逆べき型のスケール則に従うことを導いている。またこれらの結果を数値計算によっても確かめている。本章の結果は、カオス領域の中での新しいタイプの淀み構造の出現機構を明解に示したもので高く評価できる。

第3章では、マッシュルームビリヤード系の最外殻トーラスの回転数が無理数（準周期）の場合を詳しく調べるため回転数をフィボナッチ数比で変化させた場合の相空間の微細構造を解析する。回転数が有理数の場合には、最外殻トーラス上に特異点が存在しその周りに淀み層が形成されるが、フィボナッチ数比を無理数に漸近すると淀み層が急激に消滅する。その一方で、回転数が無理数極限では、いくつかの特異点はカオスの海の中に侵入してそこに残り、その特異点の周りに前述した淀み層とは異なる淀み層を形成する。このカオスの海の中に存在する特異点の位置と淀み層の測度を理論的に決定し、それぞれの淀み層の滞在時間が逆べき型分布に従うこと、およびパワースペクトルの **Long Tail** を更新解析によって導出している。マッシュルームの頭部半径 ( $R$ ) が茎半径 ( $r$ ) より大きい場合 ( $r/R \geq 1/2$ ) には、最外殻トーラス上の回転数に依らず普遍的にパワースペクトル密度に  $|\log \omega|$  スケーリング則が現れることを数値計算によっても確かめている。他の無理数回転数の場合（例えば代数的無理数や超越無理数）も同じスケール則を持つことから、これによって、ひとつの例であるが、棲み分け境界型ハミルトン系に生じる **Long Tail** の起源の一つが明瞭に解決されたと言へる。その一方で、 $r/R \leq 1/2$  の場合には全く別のもっと強い **Long Tail** ( $\omega^{-\nu}$  スケール則) が出現することを著者は発見している。これは相空間の局所的構造（特異点由来）によるものではなく、ビリヤードの大域的な形状に由来するもう一つの新しいタイプの間欠性として理解すべきことを著者は主張している。

第4章では、ハミルトン系を含めカオス力学系のスローダイナミクスを特徴づけるためマルチフラクタル解析を導入し、スローダイナミクスのマルチフラクタル性を明らかにする新しい方法を提案している。まず、大域的パワースペクトル密度の情報次元と分散を導出する。情報次元の逆数はスローダイナミクスの強さを表わし、その分散は軌道の多様性を表わすというのが著者の着想である。この手法を適用して、従来から研究されて来た変形ベルヌイ写像、変形 **cat** 写像、マッシュルームビリヤード、標準写像などスローダイナミクスを内蔵する力学系を系統的に解析している。その結果は、ハミルトン系に注目してみると、変形 **cat** 写像では非線形パラメータが大きくなると、強いスローダイナミクスと軌道多様性を併せ持つ性質があり、マッシュルームビリヤードでは形状パラメータ

$r/R$  が小さいときにスローダイナミクスはさらに強くなるが、全てのパラメータ領域で軌道多様性が少ない性質がある。標準写像は、強いスローダイナミクスを持ち軌道多様性も併せ持つ変形 *cat* 写像に類似の大域的構造を持つことが示唆されている。本章で示された結果は、今のところスローダイナミクスの定性的な分類にとどまっているが、軌道多様性という視点から *Long Tail* の具体的様子を理解する上で、興味深い新しい方法と言へる。

第5章では、スローダイナミクスの極限とも言へる非定常カオスの軌道多様性を表わす特性量として改良型アラン分散の考え方を提案し、そのスケール則を解析する。従来の時間平均をアンサンブル平均で置き換えることによって、スケールリング則を解析的に決定できる。具体的に変形ベルヌーイ系に適用して、アラン分散の相似則、および2つのスケールリング指数を理論的に評価し数値計算によっても確かめている。アラン分散の初期分布依存性を含めて、スローダイナミクスに潜む普遍的性質を明確に導出した本章の成果は高く評価できる。

第6章は、本研究のまとめと今後の展望である。

以上を要約すると、本研究はカオスとトーラスの領域が鋭く分離されている棲み分け境界型ハミルトン系に注目してスローダイナミクスを生み出す淀み層のスケールリング則とその出現機構を厳密に解析すると共に、スローダイナミクスの *Long Tail* の普遍的性質を決定することに成功している。これはトーラス群が無限階層的に分布している淀み層とは全く別の仕方で形成される新しいタイプの淀み層の性質を解明したもので本研究の優れた成果の一つである。本研究のもう一つの成果は、スローダイナミクスを内蔵する力学系の統計力学的特性量を探索し、軌道の多様性によってそれを評価する新たな方法を提案している点である。パワースペクトル関数のマルチフラクタル解析によって次元のゆらぎがスローダイナミクスの強さを補うもう一つの特性量となることを示すと共に、もう一つの特性量として2軌道相関指標（アラン分散）を考えそのスケールリング指数がスローダイナミクスの強さを評価する有効な方法であることを示している。本論文のこれらの成果は、現在まだ混沌としている非双曲性カオスの統計力学の発展に大きく貢献し、高い学術的価値を持っており、博士（理学）の学位に相応しいものと認める。

2014年2月

審査員

主査	早稲田大学教授	理学博士（早稲田大学）	相澤洋二
副査	早稲田大学教授	工学博士（東京大学）	栗原進
	早稲田大学教授	博士（理学）京都大学	山崎義弘
	早稲田大学教授	博士（学術）東京大学	高野光則
	早稲田大学教授	博士（理学）早稲田大学	湯浅一哉
	首都大学東京教授	理学博士（早稲田大学）	首藤啓