早稲田大学大学院 先進理工学研究科

博　士　論　文　概　要

論　文　題　目

Mathematical studies for a system describing the double-diffusive convection

二重拡散対流を記述する方程式系の数学的解析

申　請　者

Shun	UCHIDA
内田	俊

物理学及応用物理学専攻　数理物理学研究

2015 年 10 月

溶質を含む流体内において，上部が高温高濃度かつ下部が低温低濃度である場合に，通常の拡散モデルでは説明されない，溶質が指の形状で沈降するSalt fingeringと呼ばれる現象が100年以上も前から観察されていた．この現象のメカニズムは1960年M. Sternにより初めて解明され，浮力及び温度溶質濃度間の相互作用がその要因であることが判明した．一般に流体内に異なる拡散速度を持つ2成分が混在し，かつその分布が非一様である状況で生じる現象は二重拡散対流(Double-diffusive convection)と呼ばれ，Sternの先駆的な研究以降様々な分野で研究されている．とりわけ多孔質媒質中の二重拡散対流は，土壌汚染モデル，触媒内の化学反応モデル等の応用性に富み，特に重要な研究対象となっている．一方，この現象を記述する方程式系の数学的研究に関しては，可解性等の重要な問題が未解決のまま残されていた．本論文では，多孔質媒質中の二重拡散対流現象を記述する方程式系に対する偏微分方程式論的な視点からの研究について述べる．

本論文の構成及び概要は以下の通りである．

第1章では多孔質媒質中の二重拡散対流現象に関する物理的背景，数学的手法に基づく先行研究について述べ，本論文の第2章以降の内容を概観する．

第2章では次章以降用いる記法の定義及び数学的基本事項が述べられている．

第3章以降では次の方程式系が考察される．

$$
\text{(DCBF)}\begin{cases}
\partial_t \boldsymbol{u} = \nu\Delta\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{u} - \nabla p + \boldsymbol{g}T + \boldsymbol{h}C + \boldsymbol{f}_1 & (x,t)\in\Omega\times[0,S],\\
\partial_t T + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T = \Delta T + f_2 & (x,t)\in\Omega\times[0,S],\\
\partial_t C + \boldsymbol{u}\cdot\nabla C = \Delta C + \rho\Delta T + f_3 & (x,t)\in\Omega\times[0,S],\\
\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & (x,t)\in\Omega\times[0,S].
\end{cases}
$$

ここで，ΩはN次元Euclid空間$\mathbb{R}^N$内の領域とし，Sは時間間隔を表す正定数であり，流速$\boldsymbol{u}=(u^1,u^2,\cdots,u^N)^t$, 流体温度$T$, 溶質濃度$C$及び圧力$p$は未知関数である．また既知のデータとして，$\nu$, a, ρは正定数，$\boldsymbol{g}=(g^1,g^2,\cdots,g^N)^t$, $\boldsymbol{h}=(h^1,h^2,\cdots,h^N)^t$は定ベクトル，$\boldsymbol{f}_1=(f_1^1,f_1^2,\cdots,f_1^N)^t$, f_2, f_3は外力を表す関数である．

第一式は多孔質媒質中の流速の挙動を記述するBrinkman-Forchheimer方程式を，適切な物理的条件の下で線型化したものである．$\boldsymbol{g}T$，$\boldsymbol{h}C$はOberbeck-Boussinesq近似により現れる浮力項であり，更に流体の非圧縮性を記述する為，流速には$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$の条件が課されている．第二，第三式には非線型項として移流項$\boldsymbol{u}\cdot\nabla T$, $\boldsymbol{u}\cdot\nabla C$が含まれており，方程式系の数学的取扱いを困難にする最も大きな要因となっている．また，第三式には温度と溶質濃度との相互作用の一つであるSoret効果を表す項$\rho\Delta T$が含まれている．二重拡散対流においては温度と溶質濃度の分布は非一様となる為，温度勾配を要因とするSoret効果を無視することはできない．

(DCBF)の第一式がNavier-Stokes方程式に置き換えられた方程式系に関しては，２次元長方形領域上での可解性と大域アトラクターの存在について述べたM. Piniewski(2008)等，既にいくつかの先行結果が得られている．しかしこれらの研究ではNavier-Stokes方程式の取扱いに議論が集中しており，移流項，Soret効果及び

浮力項に起因する困難の解決に対しては触れられていない．本研究ではこれを踏まえ，工学系で良く用いられる，流速を記述する方程式を単純化したモデルに対して，移流項，Soret 効果及び浮力項が方程式系の可解性や解の漸近挙動にどのような影響を及ぼすかを数学的に解明することを目標としている．

(DCBF) の可解性に関する結果は，3 次元有界領域上で斉次 Dirichlet 境界条件を課した初期値境界値問題に対する時間大域解の一意存在を示した K. Terasawa–M. Ôtani(2010) が最初である．ここでは，M. Ôtani(1982) による劣微分作用素に対する非単調摂動理論を適用することにより，解の存在が示されている．この事実は，3 次元領域における大域可解性が未解決である Navier-Stokes 方程式の非線型項に類似する移流項を (DCBF) も保有しているという観点からすれば非常に興味深いものであり，方程式系 (DCBF) の研究に対する更なる発展の可能性を示唆している．

以上を踏まえ，第 3 章以降では次の問題を取り扱う．

第 3 章ではまず，K. Terasawa–M. Ôtani(2010) の手法により，3 次元有界領域上での初期値境界値問題が斉次 Neumann 境界条件下でも一意的大域可解性を有するという結果が示される．更にこの手法を発展させ，3 次元有界領域上での時間周期問題が斉次 Dirichlet 条件及び斉次 Neumann 条件の双方に対し可解性を有するという結果が示される．より具体的には，緩和項が付加された (DCBF) の近似方程式に，M. Ôtani(1984) による，劣微分作用素を主要項とする非単調摂動項を含む発展方程式の時間周期問題の可解性の結果を適用することで近似解の存在を保証し，近似解の収束性を議論することにより時間周期解の存在が示される．ここで，M. Ôtani(1982)(1984) の結果を適用する際には Rellich–Kondrachov の定理の寄与が大きく，空間領域の有界性は本質的な仮定であることに留意する．

第 4 章では非有界空間領域上での (DCBF) の初期値境界値問題に対する可解性が考察される．前述の通り，第 3 章における手法を非有界領域上の問題に直接適用することは困難である．そこで第 4 章では，Banach の不動点定理の適用により解の構成を行い，空間次元 N が 4 以下かつ領域 Ω が Sobolev の埋蔵定理及び Laplace 作用素と Stokes 作用素の楕円型正則性を成立させる条件（例えば uniform C^2-regular class）の下で，Dirichlet 境界条件及び Neumann 境界条件の双方に対して (DCBF) に一意大域解が存在するという事実が示される．Navier-Stokes 方程式と比較した場合この結果は，移流項の可積分性が保証される空間次元 4 までの可解性が初期値，外力項の小ささを仮定せずに得られるという興味深い知見を与えている．

第 5 章では全空間 $\mathbb{R}^N$ 上の (DCBF) の時間周期問題が考察されている．前章の結果を鑑みれば，時間周期問題に関しても Large data（外力項に小ささを課さない）に対する可解性が期待される．しかし，非有界領域上の時間周期問題の Large data に対する可解性に関する結果は非常に少ない．非有界領域上での時間周期問題の可解性は，例えば Navier-Stokes 方程式に対しては，P. Maremonti(1991)，H. Kozono–M. Nakao(1996) において既に得られている．これらの論文では，解の構成に逐次近似

を用いており，その収束を保証する為に外力項の小ささは本質的な条件となっている．一方，時間周期問題のLarge dataに対する可解性は，放物型抽象発展方程式の枠組みで多くの結果が得られている．しかしこれらの論文では，空間領域が有界であることを想定した条件（例えば劣微分作用素に対する強圧性及び定義域に関するコンパクト性）の下で議論がなされており，非有界領域の場合にこれを適用することは困難である．このように，非単調摂動項$\boldsymbol{u}\cdot\nabla T, \boldsymbol{u}\cdot\nabla C$を含む放物型方程式である(DCBF)に対する$\mathbb{R}^N$上の時間周期問題のLarge dataに対する可解性については，先行研究の手法が直接適用出来ず，新しいアプローチが必要となる．

第5章では，以下の手法により時間周期解の構成を行う．まず全空間を半径nの開球で置き換えた近似問題を考察する．有界領域上の問題は先行研究において既に考察されており，任意の大きさの外力項に対する解の構成が可能である．次に各nに対して得られた解及び方程式系の$n\to\infty$における極限が，Ascoliの定理を適用した局所強収束性と対角線論法を用いることにより全空間における解及び方程式系となる事を示す．この際に近似解の一様有界性をアプリオリ評価により求めるが，ここに外力項の小ささは必要とされない．以上の方法により，空間次元が$N=3,4$の場合，Large dataに対する(DCBF)の時間周期解の存在が示される．

第6章では，有界領域上の(DCBF)の解の時間大域的挙動が，大域アトラクター及び指数アトラクターの存在という観点から考察されている．本論文では特に外力項が時間に依存しない場合（自励系）について考察されている．アトラクターの構成は抽象論の結果に基づいて行われる．即ち第4章の可解性の結果に基づき定義される半群$\{\mathscr{S}(t)\}_{t\geq 0}$（初期値に$t$時間後の解を対応させる写像族）に対し，大域アトラクター（全ての解軌道を引き付けるコンパクト集合で最小のもの）の存在は，各写像$\mathscr{S}(t)$の連続性とコンパクト吸収集合（任意の有界集合から出発した解軌道を有限時間で引き込む集合）の存在により保証される．また指数アトラクター（フラクタル次元が有限で，引き込みの速度が指数関数的である集合）の存在は，Smoothing propertyと呼ばれる性質が満たされることにより保証される．

M. Piniewski(2008)では2次元の場合が考察されているが，3次元以上の場合には，コンパクト吸収集合の存在及びSmoothing propertyを検証する為に，前章までに要求されなかったより高い正則性に関する評価を行う必要があり，その手法は十分ではない．第6章ではこれを解決する為に，非線型発展方程式論において良く知られているH. Brézis(1973)の手法を改良，拡張した結果が与えられている．これを主たる道具として，斉次Dirichlet境界条件を課した(DCBF)に対する大域アトラクター及び指数アトラクターの存在が，空間次元が4以下の場合に示される．

また第6章では，斉次Neumann境界条件を課した場合についても考察されている．この時T, CはMass conservation propertyを満たす為，通常の意味でのアトラクターは存在し得ない．ここでは初期値と外力項に制限を課すことでこの問題を解消し，一般化されたアトラクターの存在が示される．

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

氏 名　　　　内田　　俊　　　印

（2016 年　2 月　10 日現在）

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
論文 （査読有）	○１.The existence of periodic solutions of some double-diffusive convection system based on Brinkman-Forchheimer equations, Adv. Math. Sci. Appl. vol.23 no.1 pp 77-92, 2013 年, 大谷光春・内田俊.
	○２.Global solvability of some double-diffusive convection system coupled with Brinkman-Forchheimer equations, Lib. Math. (N.S.) vol.33 no.1 pp 79-107, 2013 年, 大谷光春・内田俊.
	○３. Attractors for autonomous double-diffusive convection systems based on Brinkman-Forchheimer equations, to appear in Math. Meth. Appl. Sci., 大谷光春・内田俊.
	○４.Global solvability for double-diffusive convection system based on Brinkman-Forchheimer equation in general domains, to appear in Osaka J. Math. vol.53 no.3 , 大谷光春・内田俊.
（査読無）	５. Periodic solutions of some double-diffusive convection system based on Brinkman-Forchheimer equations, 数理解析研究所講究録 1792 非平衡非線形現象の解析―発展方程式の立場から― pp 18-29, 2012 年 5 月, 内田俊・大谷光春.
	６. Global existence results for some double-diffusive convection system based on the Brinkman-Forchheimer equation with homogeneous Neumann boundary conditions, 数理解析研究所講究録 1892　抽象的発展方程式の新たなる役割―個々の偏微分方程式を俯瞰する観点から― pp 1-12, 2014 年 4 月, 内田俊.
講演 （国際研究集会）	１.Periodic solutions of some double-diffusive convection system based on Brinkman-Forchheimer equations, RIMS 研究集会：非平衡非線形現象の解析―発展方程式の立場から（開催地：京都）, 2011 年 10 月, 内田俊・大谷光春.
	２.Periodic solutions of some double-diffusive convection system based on Brinkman-Forchheimer equation, 9th AIMS International Conference, Dynamical Systems, Differential Equations And Applications（開催地：オーランド, アメリカ）, 2012 年 7 月, 内田俊.
	３. The solvability of double-diffusive convection system with Soret’s coefficient depending on the concentration of solute, 5th Polish-Japanese Days on Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences（開催地：京都）, 2012 年 11 月, 内田俊.
	４. The global solvability of some double-diffusive convection system with the homogeneous Neumann boundary condition, One Forum, Two Cities 2013: Aspect of Nonlinear PDEs（開催地：東京）, 2013 年 9 月, 内田俊.

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
講演（国際研究集会）	５．Global existence results for some double-diffusive convection system based on the Brinkman-Forchheimer equation with homogeneous Neumann boundary conditions, RIMS 研究集会:抽象的発展方程式の新たなる役割—個々の偏微分方程式を俯瞰する観点から—（開催地：京都），2013 年 10 月，内田俊.
	６．Non-negative solution of double-diffusive convection system based on Brinkman-Forchheimer equation, Conference on Partial Differential Equations 2014（開催地：ノヴァツェッラ，イタリア），2014 年 5 月，内田俊.
	７．Large time behavior of solutions for double-diffusive convection systems based on Brinkman-Forchheimer equation, 10th AIMS Conference on Dynamical systems, Differential Equations and Applications（開催地：マドリッド，スペイン），2014 年 7 月，内田俊.
	８．Periodic solutions of double-diffusive convection system in the whole space, RIMS 研究集会：非線形現象の解析への応用としての発展方程式論の展開（開催地：京都），2015 年 10 月，内田俊.
（日本数学会）	９．Periodic solutions of some double-diffusive convection systems based on Brinkman-Forchheimer equations, 日本数学会秋季総合分科会（開催地：信州大学），2011 年 9 月，内田俊・大谷光春.
	10. The solvability of double-diffusive convection systems based on Brinkman-Forchheimer equation with some perturbations, 日本数学会年会（開催地：東京理科大学），2012 年 3 月，内田俊・大谷光春.
	11. The solvability of double-diffusive convection system with Soret’s coefficient depending on the concentration of solute, 日本数学会秋季総合分科会（開催地：九州大学），2012 年 9 月，内田俊・大谷光春.
	12. The solvability of double-diffusive convection system coupled with Brinkman-Forchheimer equations under the Neumann boundary condition, 日本数学会秋季総合分科会（開催地：愛媛大学），2013 年 9 月，内田俊・大谷光春.
	13. The solvability of double-diffusive convection system in general domains, 日本数学会年会（開催地：学習院大学），2014 年 3 月，内田俊・大谷光春.
	14. Global attractor of some autonomous double-diffusive convection system, 日本数学会秋季総合分科会（開催地：広島大学），2014 年 9 月，内田俊・大谷光春.
	15. Exponential attractor of some autonomous double-diffusive convection system, 日本数学会年会（開催地：明治大学），2015 年 3 月，内田俊・大谷光春.

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
講演 （日本数学会） （その他国内講演）	16. Periodic problem for double-diffusive convection system in R^N with N = 3,4, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会（開催地：京都産業大学），2015 年 9 月，内田俊・大谷光春. 17. The solvability of double-diffusive convection systems based on Brinkman-Forchheimer equation with some perturbations，第 19 回応用解析研究会シンポジウム（開催地：熱海），2012 年 3 月，内田俊. 18. The solvability of double-diffusive convection system with Soret's coefficient depending on the concentration of solute，第 38 回発展方程式研究会（開催地：日本女子大学），2012 年 12 月，内田俊・大谷光春. 19. The existence of non-negative solutions of double-diffusive systems with variable Soret coefficient，第 20 回応用解析研究会シンポジウム（開催地：小田原），2013 年 3 月，内田俊. 20. 一般領域上での二重拡散対流方程式の可解性について，第 39 回発展方程式研究会（開催地：日本女子大学），2013 年 12 月，内田俊・大谷光春. 21. Global solvability of a system describing double-diffusive convection phenomena，第 6 回楕円型放物型微分方程式研究集会（開催地：東北大学），2014 年 1 月，内田俊. 22. 二重拡散対流方程式の一般領域上における時間大域解の存在について，第 21 回応用解析研究会シンポジウム（開催地：箱根），2014 年 3 月，内田俊. 23. 二重拡散対流方程式の指数アトラクターについて，第 40 回発展方程式研究会（開催地：日本女子大学），2014 年 12 月，内田俊・大谷光春. 24. 二重拡散対流方程式の指数アトラクターについて，第 22 回応用解析研究会シンポジウム（開催地：熱海），2015 年 3 月，内田俊. 25. 全空間上の二重拡散対流方程式に対する時間周期解の存在について，第 41 回発展方程式研究会（開催地：日本女子大学），2015 年 12 月，内田俊・大谷光春. 26. 二重拡散対流現象を記述する方程式系の全空間上における時間周期問題について，若手による流体力学の基礎方程式研究集会（開催地：名古屋），2016 年 1 月，内田俊.