早稲田大学大学院 先進理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

Mathematical studies for a system describing the double-diffusive convection

二重拡散対流を記述する方程式系の数学的解析

申　請　者

Shun	UCHIDA
内田	俊

物理学及応用物理学専攻　数理物理学研究

2016 年 2 月

Oberbeck-Boussinesq 方程式系は，流体の速度場と流体の温度との相互作用を記述する数理モデルとして古くから定着し，既にその詳細な数学的解析が蓄積されている．しかしながらこの系に, 流体中を拡散する溶質の濃度との相互作用が加わると，流体上部が高温高濃度，下部が低温低濃度という状況下において，溶質が指状の形状を保って沈降するという (Salt fingering) 現象に代表される複雑な対流現象が起きることが，100 年以上も前から知られていた．この現象のメカニズムは 1960 年 M. Stern により解明され，この現象を記述する基礎方程式として二重拡散対流 (Double-diffusive convection) 方程式が導出された．M. Stern の先駆的な研究以降，この方程式系は海洋学，地質学等の様々な工学分野において実験との比較とともに研究されてきたが，数学的な解析は殆ど成されて来なかった．

本論文では特に，多孔質媒質中の非圧縮性粘性流体における二重拡散対流現象を記述する，工学系で多く用いられる以下のモデル (DCBF) について考察される．

$$
\text{(DCBF)}\begin{cases}
\partial_t \boldsymbol{u} = \nu\Delta\boldsymbol{u} - a\boldsymbol{u} - \nabla p + \boldsymbol{g}T + \boldsymbol{h}C + \boldsymbol{f}_1 & (x,t)\in\Omega\times[0,S],\\
\partial_t T + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T = \Delta T + f_2 & (x,t)\in\Omega\times[0,S],\\
\partial_t C + \boldsymbol{u}\cdot\nabla C = \Delta C + \rho\Delta T + f_3 & (x,t)\in\Omega\times[0,S],\\
\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 & (x,t)\in\Omega\times[0,S].
\end{cases}
$$

ここで $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ は流体の占める空間領域を表し，ν, a, ρ は正定数，$\boldsymbol{g} = (g^1, g^2, \cdots, g^N)$, $\boldsymbol{h} = (h^1, h^2, \cdots, h^N)$ は重力に由来する定ベクトル，$\boldsymbol{f}_1 = (f_1^1, f_1^2, \cdots, f_1^N)$, f_2, f_3 は外力項である．

第一方程式では，多孔質媒質中における流速の挙動の実験との整合性から，Navier-Stokes 方程式から移流項 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$ が省略された Brinkman-Forchheimer 方程式に基づく線形化方程式が採用されているが，第二，第三方程式には新たな移流項 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla T, \boldsymbol{u}\cdot\nabla C$ が現れる為，(DCBF) の方程式系としての構造は Navier-Stokes 方程式のそれに酷似している．

第一方程式が Navier-Stokes 方程式に置き換えられた，流体速度と温度間のみの相互作用を記述する Oberbeck-Boussinesq 方程式系に対しては，既に Navier-Stokes 方程式に対する結果と同様の先行結果が数多く得られている．これらの研究では，Navier-Stokes 方程式の取扱いに焦点が当てられており，非線形項 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla T$, $\boldsymbol{u}\cdot\nabla C$ は移流項 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$ と同様の手法により取り扱われてきた為，$\boldsymbol{u}\cdot\nabla T$, $\boldsymbol{u}\cdot\nabla C$ の特殊性には目が向けられてこなかった．

一方，K. Terasawa–M. Ôtani(2010) では，この特殊性に着目し３次元有界空間領域における斉次 Dirichlet 境界条件下の方程式系 (DCBF) に対する初期値境界値問題の large data に対する一意的時間大域解の存在が，M. Ôtani(1982) の劣微分作用素に対する非単調摂動理論を適用することにより示されている．

本論文は以上の背景を踏まえ，非線形移流項 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla T$, $\boldsymbol{u}\cdot\nabla C$ の独自な構造に焦点を当て，(DCBF) の可解性及び解の挙動について総合的に研究した成果をまとめたものである．

本論文は全６章により構成される．以下, 各章の概要とその意義及び評価を述べる．

第１章では，方程式系 (DCBF) の物理的背景及び先行研究について述べた上で，本論文の概観が与えられている．

第２章では次章以降の準備として，記法の定義及び数学的基本事項についてまとめられている．

第３章では，K. Terasawa–M. Ôtani の結果を踏まえ，空間領域 Ω が有界である場合の (DCBF) の大域可解性について精査されている．まず申請者は，斉次 Neumann 境界条件の下での初期値境界値問題に対し，M. Ôtani(1982) の抽象論の結果を適用することにより，空間次元が３以下の場合，large data に対して (DCBF) が時間大域的可解性を有するという事実を示している．次に (DCBF) の時間周期問題について考察される．ここでは適切な近似方程式を導入し，M. Ôtani(1984) の非単調摂動理論を適用することで近似解を構成し，近似解の収束性を議論することにより，斉次 Dirichlet 境界条件及び斉次 Neumann 境界条件に対し，(DCBF) に対する時間周期問題が large data に対する可解性を有するという事実が示されている．

これらの結果は，K. Terasawa–M. Ôtani の結果を拡張したものであると同時に，「方程式系 (DCBF) は $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$ に類似する項 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla T$, $\boldsymbol{u}\cdot\nabla C$ を持つにもかかわらず，Navier-Stokes 方程式よりも詳細な解析が可能である」という予想を実証しているという意味で意義深い．
また，第 3 章は非線形項 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla T$, $\boldsymbol{u}\cdot\nabla C$ の評価法およびアプリオリ評価導出の適正な順序等の解の評価方法，収束性の議論などといった本論文の根幹をなすプロトタイプの指針を集約しており，この意味においても本論文の重要な部分を構成している．

第 4 章では，(非有界) 一般領域上の初期値境界値問題の可解性について考察されている．

K. Terasawa–M. Ôtani 及び第 3 章の議論では，Rellich-Kondrachov のコンパクト性に関する定理が重要な役割を担う為，非有界領域の場合を含む本問題に既存の手法を直接採用することは不可能である．そこで申請者は，まず (DCBF) の各方程式を他の未知関数を与えられたものとして順次解き，その後に Banach の不動点定理を適用させるという手法を用いることにより，空間次元 N が 4 以下の場合に対して，初期値の大きさの制限なしで (DCBF) に一意的時間大域解が存在するという結果を与えている．これにより，非線形項 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla T$, $\boldsymbol{u}\cdot\nabla C$ の特徴を巧妙に用いた L^2-framework における臨界空間次元 $N=4$ までの大域可解性を導く手法が完成されたと言える．即ち第 4 章の議論及び結果は，既存の結果と比較して方程式系 (DCBF) の構造の本質により肉迫するものであり大変意義深い．

第 5 章では，全空間領域上での (DCBF) の時間周期問題の可解性について考察されている．
特に，前章の初期値境界値問題に対する時間大域的可解性が large data に対して得られているという事実の類推から，時間周期問題に対しても「外力項 $\boldsymbol{f}_1$, f_2, f_3 の大きさに制限を課さずに可解性を示す」事がその目標となる．

非単調摂動項を持つ放物型方程式の時間周期問題の large data に対する可解性については，発展方程式の枠組みにおいて既に数多くの結果が得られている．しかしながら，Schauder 型の不動点定理に依拠する手法がとられている為コンパクト性に関する条件が必要となり，これ等の手法を非有界領域の場合に適用することは困難である．一方，非有界領域における時間周期問題は，Naiver-Stokes 方程式を始めとして既に先行研究が存在する．この問題では，移流項の非線形性の強さと空間領域の非有界性から生じるコンパクト性の欠如により Schauder 型の不動点定理を適用することが困難となる．そこで与えられた data の大きさをしぼることにより解の大きさをコントロールし，逐次近似法を用いることで時間周期解の構成が行われる．その為 data の小ささは不可欠な条件であり，この手法も適用できない．

第 5 章ではこの困難を回避するため，空間領域を原点中心半径 $n\in\mathbb{N}$ の開球 Ω_n に制限した上で，large data に対する時間周期解を構成し，この近似解の n に依存しないアプリオリ評価を導きその収束性を議論する手法が用いられている．この際，第二，第三方程式の強圧性の欠如と，浮力項 $\boldsymbol{g}T$, $\boldsymbol{h}C$ が強制項として第一方程式に存在するという事実から，近似解の収束性を保証する十分なアプリオリ評価を得ることが困難な状況となっている．しかし，申請者はまず強圧性を保証する近似項 λT, λC を付加した方程式系について $n\to\infty$ として全空間領域上の近似解 $(\boldsymbol{u}_\lambda, T_\lambda, C_\lambda)$ を構成し，その後，全空間領域上における Stokes 作用素の性質及び解の時間差分に関する評価を用いて $\lambda\to 0$ とした時の近似解の収束性を示すという手法により上述の困難を克服している．
結論として第 5 章では，空間次元が 3 または 4 の場合に対し，全空間領域上における (DCBF) は large data に対し，時間周期解をもつという事実が示されている．

前述のとおり「非有界領域上における非単調摂動項を持つ放物型方程式に対する時間周期問題の large data に対する可解性」について言及した既存の結果はこれまで見られなかった．
第 5 章における「空間局所収束性」及び「対角線論法」を用いた申請者の手法はこの問題に対し肯定的な回答を与えるものであり，単に有界領域に対する結果を非有界領域の場合に拡張したという位置付けだけではなく，新しい解析手法を与えたという意味から高く評価できる．

またこの手法は将来的には，高次元 $(N \geq 5)$ に対する L^q-framework による議論，または Sobolev の埋蔵定理がうまく機能しない低次元 $N = 2$ の場合，或いは外部問題のような全空間領域以外の非有界領域の場合へと発展的に応用されることも期待できる．

第 6 章では，初期値境界値問題において得られた解の時間大域的挙動が，アトラクターの存在という観点から議論されている．

力学系の大域アトラクターについては，コンパクト吸収集合の存在に基づく存在定理が，また指数アトラクターについては Efendiev–Miranville–Zelik(2000) による smoothing property に基づく定理がそれぞれよく知られている．本問題に対してこれらの抽象論の結果を適用するために要請される条件は，解の H^2-ノルムに関する各時刻における評価を導出することに他ならないが，前章までのアプリオリ評価ではこれを導出するまでに至っていない．この問題を解決するために申請者は，解の第二エネルギーまでをアプリオリ評価で導出した後，H. Brézis(1973) により与えられている発展方程式の解に対する抽象理論を (DCBF) の第一方程式に適用することで $\boldsymbol{u}$ の H^2-評価を導出している．また申請者は，摂動項として $\boldsymbol{u} \cdot \nabla T$, $\boldsymbol{u} \cdot \nabla C$ を含む第二，第三方程式に対しても H. Brézis による抽象論を拡張した同様の結果が得られることを示し，これを適用することで T 及び C の H^2-評価を導出している．結論として第 6 章では次元 4 以下の有界領域で外力項が時間に依存しない場合，(DCBF) の初期値境界値問題から生成される力学系に対して大域アトラクター及び指数アトラクターが存在するという結果が示されている．

H. Brézis の抽象論は主要項の極大単調性を巧妙に用いたものであるため，摂動項が付加された方程式に対して一般には成立しない．しかし申請者は，$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ の条件を巧妙に利用することにより $\boldsymbol{u} \cdot \nabla T$, $\boldsymbol{u} \cdot \nabla C$ が摂動項である場合には同様の議論が可能であることを見抜き，解の H^2-評価を導出することに成功している．此処での議論は抽象論として見直すことも可能であり，発展方程式論的観点からも重要な示唆を与えている．また，この結果は流体現象を記述する方程式系に対する解の正則性を議論する際に重要な手がかりを与えるものであり，この意味からも本章の議論は重要な意義をもつと言える．

以上要約すると, 本論文は方程式系 (DCBF) に対する数学的な側面からの初めての総合的な研究であるという点で意義深いものであり，かつ (DCBF) は Navier-Stokes 方程式と類似した方程式系でありながら，Navier-Stokes 方程式に対しては未解決問題である 3 , 4 次元空間における初期値問題や時間周期問題に対する大域可解性を示すなどの新しい重要な知見を数多く与えている．また，本研究の議論・手法は近年盛んに研究がなされている，流体方程式と非線形拡散方程式とのカップリングからなる様々な数理モデルに対して幅広く応用できる汎用性を備えており, この分野の研究に貢献するところ大である．更に，本論文で与えられている非有界領域における時間周期問題の large data に対する可解性を示す新しい処方箋は，今後，他の多くの非単調摂動項を含む非線形放物型方程式に対する未解決問題へ応用されることが期待される．

よって本論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める．

2016 年 1 月

審査員

(主査)	早稲田大学教授	理学博士 (東京大学)	大谷光春
	早稲田大学教授	理学博士 (京都大学)	小澤　徹
	早稲田大学教授	理学博士 (筑波大学)	柴田良弘
	早稲田大学教授	理学博士 (名古屋大学)	山田義雄