早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Embeddings of Graphs in Surfaces

(曲面へのグラフの埋め込み)

申 請 者

山下 哲

Satoshi Yamashita

1997年 10月

本論文では、曲面へのグラフの埋め込みを対象として、Strong Embedding Conjectureとユークリッド平面内へのgeodesic埋め込みについて研究する。また、曲面に埋め込まれたグラフを対象として、制限付き点樹化数の評価について研究する。ここでは、グラフは全て有限無向単純グラフとし、グラフの曲面への埋め込みは、各面が開2-胞体であるとする。

定義 1. $f: G \to S$をグラフGの曲面Sへの埋め込みとする。$f(G)$の各面の境界歩道がサイクルであるとき、fをstrong埋め込みと呼ぶ。

定義1より、グラフGがある閉曲面へのstrong埋め込みをもつならば、Gが2-連結であることは明らかである。g個のハンドルをもつ向き付け可能閉曲面をS_gで表し、k個のcrosscapをもつ向き付け不可能閉曲面をN_kで表す。ただし、$N_0 = S_0$とする。1967年にOreは、任意の2-連結平面的グラフのS_0への任意の埋め込みがstrong埋め込みであることを示した。1985年にJaegerはStrong Embedding Conjectureを提唱した。

予想 2. (Strong Embedding Conjecture)　任意の2-連結グラフはある閉曲面へのstrong埋め込みをもつ。

本論文の第1章では、どのような2-連結グラフに対して予想2が成り立つかについて考察する。グラフGがS_gに埋め込み可能であるが、S_{g-1}に埋め込み可能でないとき、gをGの種数という。また、GがN_kに埋め込み可能であるが、N_{k-1}に埋め込み可能でないとき、kをGの向き付け不可能種数という。1988年に根上は、向き付け不可能種数1をもつ任意の2-連結グラフのN_1への任意の埋め込みがstrong埋め込みであることを示した。種数が1以上、かつ、向き付け不可能種数が2以上である2-連結グラフでは、Oreや根上の示したような命題は成り立たない。しかし、次の定理が得られた。

定理 3. 種数1をもつ任意の2-連結グラフはある閉曲面へのstrong埋め込みをもつ。

定理 4. 向き付け不可能種数2または3をもつ任意の2-連結グラフはある向き付け不可能閉曲面へのstrong埋め込みをもつ。

定理3、定理4の証明方法によりStrong Embedding Conjectureが真であることが証明可能な2-連結グラフの集合について考察した。

定義 5. Gを2-連結グラフとする。Gの任意の頂点vに対して、ある連結グラフHの非隣接2頂点v', v''をvとして同一視することによりGが得られるとき、HをvにおけるGのvertex-splittingグラフと呼び、$H = \mathrm{Sp}(G; v)$で表す。ある頂点vにおけるGのvertex-splittingグラフ$\mathrm{Sp}(G; v)$が存在して、$\mathrm{Sp}(G; v)$の任意のブロックBに対して、$B = K_2$であるか、または、Bがある閉曲面へのstrong埋め込みをもつとき、Gをchainグラフと呼ぶ。

予想 6. 任意のchainグラフはある閉曲面へのstrong埋め込みをもつ。

予想6はStrong Embedding Conjectureと同値である。strong埋め込みのrepresentativityは2以上である。埋め込みのrepresentativityに関連して、次のようなchainグラフを定義した。

定義 7. Gを2-連結グラフとする。ある頂点vにおけるGのvertex-splittingグラフ$\mathrm{Sp}(G; v)$の各ブロックBに対して、Bは平面的であるか、または、ある閉曲面にk-representableであるとき、Gをk-representative chainグラフと呼ぶ。

定義7より、任意のchainグラフが2-representativeであることは明らかである。3-representative chainグラフに対して、次の定理が得られた。

定理 8. 任意の3-representative chainグラフはある閉曲面へのstrong埋め込みをもつ。

点彩色数を一般化したグラフの不変数に点樹化数がある。閉曲面の点樹化数は完全に決定されている。制限付き点樹化数として、線形点樹化数と星状点樹化数が研究されている。本論文の第2章では、いくつかの閉曲面の線形点樹化数と星状点樹化数を決定する。

定義 9. $V(G)$をグラフGの頂点集合とし、$(V_1, \cdots, V_n)$を$V(G)$のn-分割とする。各連結成分が道（もしくは、星）である林を線形林（星状林）と呼ぶ。$1 \leq i \leq n$に対して、V_iにより誘導されるGの部分グラフが線形林（星状林）であるとき、$(V_1, \cdots, V_n)$を線形樹化的（星状樹化的）n-分割と呼ぶ。$V(G)$の線形樹化的分割（星状樹化的分割）の分割数の最小値をGの線形点樹化数（星状点樹化数）という。閉曲面Sに埋め込み可能なグラフの線形点樹化数（星状点樹化数）の最大値をSの線形点樹化数（星状点樹化数）と呼び、$la(S)$（$\sigma(S)$）で表す。

1990年にPohは、$la(S_0) = 3$を示した。Pohの証明方法の改良により、次の定理が得られた。

定理 10. $la(N_1) = 3$、$la(S_1) = 4$。

定理 11. $\chi(S)$を閉曲面Sのオイラー標数とする。$-2 \leq \chi(S) \leq 1$のとき、$la(S) \leq 4 - \chi(S)$。$\chi(S) \leq -3$のとき、

$$la(S) \leq \lfloor \frac{15 + \sqrt{169 - 48\chi(S)}}{4} \rfloor。$$

1992年にDongは、$\sigma(S_0) = 4$を示した。4色定理を用いて、次の定理が得られた。

定理 12. $\sigma(N_1) = 4$。

定理 13. $\chi(S)$を閉曲面Sのオイラー標数とする。$\chi(S) \leq 0$のとき、

$$\lfloor \frac{9 + \sqrt{49 - 24\chi(S)}}{4} \rfloor \leq \sigma(S) \leq \lfloor \frac{15 + \sqrt{169 - 48\chi(S)}}{4} \rfloor。$$

1948 年に Fáry は、任意の平面グラフは、各辺が直線分であるような平面グラフに ambient isotopic であることを示した。本論文の第 3 章では、この定理を一般化して、辺だけでなく、指定された幾つかの誘導部分道も直線分であるような平面グラフに ambient isotopic になるための必要十分条件を考察した。

定義 14. $\mathcal{P}$を正の長さをもつグラフ G の道のある集合とする。$\bigcup_{P\in\mathcal{P}} E(P) = E(G)$、かつ、相異なる 2 つの道 $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$に対して、$E(P_1) \cap E(P_2) = \emptyset$ であるとき、$\mathcal{P}$を G の道分解と呼ぶ。G の道分解 $\mathcal{P}$において、任意の $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$に対して、$P_1 \cup P_2$が非輪状的であるとき、$\mathcal{P}$は非輪状的であるという。また、相異なる 2 つの道 $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \setminus E(G)$ に対して、$V(P_1) \cap V(P_2)$ が P_1と P_2 の共通の端点からなるとき、$\mathcal{P}$は内素であるという。

定義 14 より、辺集合 $E(G)$ は G の内素非輪状的道分解である。また、点素な G の誘導部分道 $P_1, \cdots, P_m$に対して、$\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_m\} \cup \left(E(G) \setminus \bigcup_{i=1}^{m} E(P_i)\right)$は G の内素非輪状的道分解である。

定義 15. $\mathcal{P}$を平面的グラフ G の内素非輪状的道分解とし、$f : G \to \mathbf{R}^2$を G のユークリッド平面 $\mathbf{R}^2$への埋め込みとする。任意の $P \in \mathcal{P}$に対して、$f(P)$ が $\mathbf{R}^2$の直線分であるとき、$f : G \to \mathbf{R}^2$ を $\mathcal{P}$に関して測地的埋め込みであるという。G の任意のサイクル Cにおいて、$\mathcal{P}(C)$ を、任意の $P \in \mathcal{P}$に対して、正の長さをもつ $P \cap C$の連結成分から成る集合とすると、$\mathcal{P}(C)$ は Cの内素非輪状的道分解である。$\mathcal{P}(C)$ の各道の端点から成る集合を $V(C;\mathcal{P})$ で表す。任意の $v \in V(C;\mathcal{P})$ に対して、次の 2 条件 (i), (ii) を満たす $P \in \mathcal{P} \setminus E(G)$ が存在するとき、$f(C)$ は $f(v)$ で凸でないという。

(i) vは Pの内点である。

(ii) $\mathbf{R}^2$における $f(v)$ の近傍内で、$f(P) \subset \mathrm{Int} f(C)$。ただし、$\mathrm{Int} f(C)$ は $f(C)$ を境界とする $\mathbf{R}^2$の円板である。

上記の 2 条件を満たす $P \in \mathcal{P} \setminus E(G)$ が存在しないとき、$f(C)$ は $f(v)$ で凸であるという。$f(C)$ が $f(v)$ で凸であるような頂点 $v \in V(C;\mathcal{P})$ の集合を $V_{\mathrm{conv}}(C;\mathcal{P})$ で表す。

Fáry の証明方法を改良して、次の定理が得られた。

定理 16. $\mathcal{P}$を平面的グラフ G の内素非輪状的道分解とし、$f : G \to \mathbf{R}^2$を埋め込みとする。このとき、$\mathcal{P}$に関して測地的埋め込み $\bar{f} : G \to \mathbf{R}^2$が存在して、$\bar{f}(G)$ が $f(G)$ に ambient isotopic であるための必要十分条件は、G の任意のサイクル Cに対して、$|V_{\mathrm{conv}}(C;\mathcal{P})| \geq 3$ となることである。

系 17. G を平面的グラフとし、$f : G \to \mathbf{R}^2$を埋め込みとする。点素な G の誘導部分道 $P_1, \cdots, P_m$ に対して、$\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_m\} \cup \left(E(G) \setminus \bigcup_{i=1}^{m} E(P_i)\right)$ とおく。このとき、測地的埋め込み $\bar{f} : G \to \mathbf{R}^2$ が存在して、各誘導部分道 $\bar{f}(P_i)$ が $\mathbf{R}^2$の直線分であり、かつ、$\bar{f}(G)$ が $f(G)$ に ambient isotopic であるための必要十分条件は、G の任意のサイクル Cに対して、$|V_{\mathrm{conv}}(C;\mathcal{P})| \geq 3$ となることである。