早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

On Blowing-up Solutions to
Some Nonlinear Degenerate Parabolic Equations

ある非線形退化放物型方程式の爆発解について

申 請 者
石渡 哲哉
Tetsuya Ishiwata

物理学及応用物理学専攻
数理物理学研究

1997 年 11 月

本論文では、ある種の非線形退化放物型方程式の爆発解の理論的・数値的解析を行なう。
Ωを滑らかな境界$\partial\Omega$をもつ$\mathbb{R}^N$の有界領域として、次の初期値・境界値問題を考える。

$$
\text{(P1)} \quad \begin{cases} u_t = u^{\delta}(\Delta u + \mu u), & x \in \Omega,\, t > 0, & (1) \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\, t > 0, & (2) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega & (3) \end{cases}
$$

ここで、δ、μは正の定数であり、初期値$u_0(x)$はΩで有界な非負値連続関数であるとする。この問題は、プラズマ物理のある種の磁場の時間発展を記述するモデル方程式として1973年に物理学者B.C.Lowによって提出されたが、数学的な解析は1980年代後半にA. FriedmanとB. McLeodによって始められた。また、この方程式は、金属を焼きなますときに現れる相転移の界面の運動を記述する方程式として知られている。

本研究では、この問題に現れる爆発解の詳細な性質を解析することを目的とする。爆発解については、主に次の3つの特徴的な性質を調べることが重要である。

1．爆発解の増大度(Blow-up rate)：この方程式にあらわれる爆発解には、自己相似解と同じ速さで爆発する解と、それよりも速い増大度で爆発する解との、2つのタイプがある。前者をType 1の爆発解といい、後者をType 2の爆発解という。Type 1の爆発解においてはBlow-up rateに関して次のような評価が成り立つ：

$$c(T-t)^{-1/\delta} \le u(x,t) \le C(T-t)^{-1/\delta}.$$

ここで、c、Cはある正の定数、Tは爆発時間(Blow-up time)である。このBlow-up rateに関する理論的評価は、後の解析的研究で重要になるだけではなく、数値解の品質を保証する意味でも重要な指針になる。また、Type 1の解析に比べ、Type2の解析は困難であり、我々はある条件を仮定することにより

$$(T-t)^{1/\delta}u(0,t) \longrightarrow \infty \qquad \text{as } t \longrightarrow T,$$

という評価は得ているものの、具体的なrateは解析的には未解決である。本論文chapter5において、数値的な予測を報告するに留まっている。

2．爆発領域(Blow-up set)：爆発集合として、Blow-up set $S = \{x \in \Omega \mid \exists(x_n,t_n) \in \Omega\times[0,T) \text{ s.t. } x_n \to x, t_n \to T \text{ and } u(x_n,t_n) \to \infty\}$とmonotone Blow-up Set $S_* = \{x \in \Omega \mid \exists t_n \text{ s.t. } t_n \to T \text{ and } u(x,t_n) \to \infty\}$の2つを考える。例えば、ある種の半線形放物型方程式においては、爆発集合は測度をもたない点であるが、本研究で扱っている退化型の方程式においては、Blow-up setが正のルベーグ測度をもつことがchapter 2において示される。次の関心は、このBlow-up setがどのような形状をもち得るか、という問題である。

3．漸近形状(Asymptotic shape)：正のルベーグ測度をもつBlow-up set上での爆発解の漸近形状(極限関数)を求める。

本論文は、内容的に大きく分けて3つの部分に分かれる。1つ目は、理論的解析である。この理論的解析においては、まず、ある種の条件や対称性を付加することにより、上記3項目にたいする精密な結果を得ている。2つ目は、数値的解析である。問題に適切な離散化を施し、数値解の厳密解への収束性などを示した上で、数値実験を行なう。また、理論的解析のとき付加した条件にあてはまらない初期条件に対する数値実験を行ない、そこから得た知見を理論的解析にフィードバックすることを目的をした。そして、再度、理論的解析を行なっている。3つ目は、(半)離散化した方程式の解析である。これは、非線形方程式の数値解析においては、収束性を示すだけ

では不十分であり、その離散解そのものの性質を調べることにより、離散化に伴う爆発解の性質の保存性を知ることができ、数値解の信頼性を高めている。

上記内容について、本論文では章を4つに分けている。以下は各章ごとの要約である。

Chapter 2 Analytical Results I. (解析的研究の結果I)

近年、非線形方程式の解析において発達してきた粘性解理論の結果を使い、退化放物型方程式の解析を行なう。まず、領域の広さと初期値に関するある条件下で、有限時間での解の爆発を示し、爆発集合が正のルベーグ測度をもつことを示した。また、爆発解の性質に関しては$\delta = 2$がcriticalで、Blow-up rateに関しては、$0 < \delta < 2$の場合、すべての爆発解がType 1であり、$\delta \ge 2$の場合、ある条件下でType 2の爆発解が存在することが示されている。また、Blow-up setと漸近形状に関しては、球対称解について$v(r,t) = u(|x|,t)$とおき1次元化して研究している。爆発解がType 2であるとき、次のような結果を得ている。(ただし、簡単のためこの章では$\mu = 1$としている。)

Blow-up setについて：$S = [0, r_{0N}]$..

漸近形状について: $\dfrac{v(r,t)}{v(0,t)} \longrightarrow \psi_N(r)$ for $r \in [0, r_{0N})$ uniformly as $t \longrightarrow T$.

更に、$r_{0N} < r < R$ならば、$\dfrac{v(r,t)}{v(0,t)} \longrightarrow 0.$

ただし、$\psi_N(r) = C_N\, r^{-(N-2)/2} J_{(N-2)/2}(r)$ $(r \ge 0)$ (C_Nは$\psi_N(0) = 1$となるように選ぶ)とし、r_{0N}は$\psi_N(r)$の最初の正の零点とする。ここで、$J_\nu(z)$はν次Bessel関数であるとする。

Type 1の場合、初期値からBlow-up setを同定することは未だ不可能であるが、Blow-up setを与えることができれば、その上で非線形の境界値問題を解くことにより、爆発解の漸近形状を求めることができる。

Chapter 3 Semidiscrete Problem. (半離散問題の解析)

数値解析を行なうためには、方程式の離散化が必要であるが、ここではまず空間に関してのみの離散化を考え、格子上での関数を考える。離散化された空間領域での問題を考え、その解(ただし、時間変数は離散化していないため、これを半離散解という。)の理論的解析をおこなう。部分積分に対応するある種の部分和分とJensenの不等式を利用し、Kaplanの方法で有限時間での半離散解の爆発を示す。さらに、Blow-up rateの上からの評価と下からの評価を出すことにより、Chapter 2と同様、$\delta = 2$がcriticalで、$0 < \delta < 2$の場合、半離散爆発解はType 1であることが分かる。また、その場合のBlow-up setの大きさに関する評価を出すことに成功している。$\delta \ge 2$の場合、Blow-up rateをType 2であると仮定することにより、Blow-up setの広さに関するexactな評価式を得ている。対称性などは仮定していないため、その形状に関する情報は得られていない。また、漸近形状であるが、Blow-up setが与えられたとすると、その上で極限関数は線形の境界値問題の解になることがわかる。

Chapter 4 Analytical Results II. (解析的研究の結果II)

この章においては、Chapter 2にて付加されている条件を緩め、主に漸近挙動に関する研究を行なっている。まず、領域が星型領域のとき、$\delta \ge 2$の場合の自己相似解の非存在定理を示す。これは、ある非線形の境界値問題

$$
\begin{cases}
\Delta v + v = \dfrac{1}{\delta} v^{1-\delta}, & x \in \Omega, \quad (4) \\
v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad (5)
\end{cases}
$$

に関する正値解の非存在として証明される。次に、$0 < \delta < 2$ の場合、$\lim_{t \nearrow T}(T-t)^{1/\delta}u(x,t)$ なる関数の収束先の関数の満たすべき境界値問題を得る。ここで、Tは解の爆発時間である。また、$\delta \geq 2$ の場合、次元に依存する条件がつくものの、Blow-up rate が Type 2 であることが示される。このとき、上記 2 つの定理が必要になっている。更に、同様の条件のもとで爆発集合の大きさに関する次のような exact な評価として$\lambda_1(S_*) = 1$ を得る。ここで、$\lambda_1(S_*)$ は領域 S_*における$-\Delta$ の zero Dirichlet 境界値問題における最小固有値である。また、この章においては、簡単のため$\mu = 1$ としている。

Chapter 5 Numerical Studies. (数値解析の結果)

Chapter 3 において空間に関して離散化して得られた半離散方程式を、時間に関して離散化する。この離散化は、前進差分、後退差分などの単純な離散化や、ルンゲ・クッタ法なども適用できるが、我々は陽的に計算できる前進差分を採用した。後退差分などは通常時間刻みを細かくできる、などの利点があるが、後で述べる我々の考案した可変型時間刻みを用いる場合、爆発時間に近付くにつれ時間刻みは小さくなる。よって、この意味で、陰的解法はメリットがなくなる。むしろ、行列の反復計算のオーバーヘッドのほうが問題となってくる。可変型時間刻みは、爆発解の計算を正しく行なうための 1 つの方法である。爆発解は、有限時間で発散するため、爆発解の数値計算においては数値解の非負性や、計算が有限回の計算において破綻しないという意味でのある種の安定性が必要であり、時間刻みの適切なコントロールが必要となる。このコントロールを適切なものにすることにより、収束性が保証され、適切な爆発解が得られる。

以上のようにして設計されたスキームを用い、様々な初期値、領域に対して数値実験を行なった。まず、理論的に得られている性質について、これを検証し、我々の数値実験の適切性を得た。また、Chapter 2 では除外されていた初期値や領域の広さに対する制限をとり、数値実験した結果、非常に有益な情報、例えば、幾つかの別の爆発領域での同時爆発や、円環領域上での爆発などを得た。これらの性質のうち幾つかは、Chapter 4 にて証明されている。また、得られた数値結果を考察することにより、幾つかの conjecture を得た。これは未解決問題であるが、近い将来理論的に証明可能であろうと思われる。