早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

On the well-posedness of initial value problems
for incompressible ideal fluid with free boundary

(自由境界を伴う非圧縮性理想流体に対する
初期値問題の適切性について)

申 請 者
井 口 達 雄
Tatsuo Iguchi

1997 年 12月

本論文は五章から構成されている。第一章から第四章では、自由境界を伴った非圧縮性理想流体に対する初期値問題の適切性、すなわち、解の存在、一意性および初期値に関する連続的依存性を調べている。第五章では、圧縮性理想流体の非圧縮性極限を調べている。以下各章における研究成果の概要を述べる。

第一章 この章では、地球をとりまく海あるいは大気のような運動を空間2次元化した、円環状領域での循環流、そのなかでも特に、非圧縮性理想流体の渦無し流を考察している。この場合、流体は2つの閉曲線に囲まれた領域に満たされ、内側の曲線は物体（地球）の境界で時間に依存せず固定されたものであり、外側の曲線は時間と共に変化する自由境界である。その内側の境界が円である時、その円の中心からの距離に反比例する速さで回転する定常な循環流が存在する。この循環流は流れの速さを表すパラメーターを含んでいる。H. Okamoto (1982) は、このパラメーターを分岐パラメーターと見なして、定常解に対する分岐問題やその線形安定性といった定性的性質を調べている。しかしながら、非定常問題に対する解の存在定理はまだなかった。そこで申請者はこの章において、上記の定常な循環流のまわりでの初期値問題の適切性、すなわち、その循環流から少し摂動したような初期値に対する適切性を研究し、以下の結果を得た。

もし流れの速さに比べて物体からの引力（重力）の方が大きく、かつ初期値が適当な意味でその定常流に近ければ、その初期値問題は時間に関する1階微分と空間に関する1/2階微分とが釣り合うような Sobolev 空間において適切である。逆に、流れの速さに比べて物体からの引力の方が小さくなると、その適切性は一般には失われる。

第二章 この章では、2次元空間における水の波、すなわち、重力場内での非圧縮性理想流体の渦無し流、に対する二相問題の適切性を研究し、以下の結果を得た。

もし自由境界面（接触面）に表面張力が働いていれば、初期値が平衡状態に適当な意味で近いという仮定のもとで、その初期値問題は時間に関する1階微分と空間に関する3/2階微分とが釣り合うような Sobolev 空間において適切である。もし自由境界面に表面張力が働いていなければ、たとえ重力が働いていても、また初期値をどんなに平衡状態に近く取っても、その初期値問題は有限回微分可能な関数のクラスにおいては一般に適切でない。

水の波の一相問題に対する適切性は、深さが無限で表面張力がない場合V. I. Nalimov (1974) により、ほぼ水平な水底があり、かつ表面張力がある場合とない場合 H. Yosihara (1982) により調べられている。彼らは共に Lagrange 座標系（流体に乗った座標系）を使って問題を定式化しており、しかもそれは、その問題の適切性を示すのに本質的であった。ところが二相問題の場合、自由境界の時間発展に伴い上の流体と下の流体とがその接触面である自由境界上において反対向きに滑っており、その結果 Lagrange 座標系を導入することが本質的に不可能となっているだけでなく、表面張力がない場合には、その初期値問題は適切でなくなる。この点が一相問題と二相問題との間の大きな相違である。またこの章における結果は、表面張力があれば座標系の取り方は本質的でない（Lagrange 座標系を使う必然性はない）ということも示している。

第三章 前章では底が無い場合、すなわち、水平線から摂動した自由境界により平面が上下2つに分割され、その各領域に異なる流体が満たされている場合を考察している。しかしながら、海や川には必ず底（海底や水底）があるので、そのような底を考慮した方がより現実的なモデルと言える。そこでこの章では、2次元空間における水の波の二相問題で、下側の流体領域に底がある場合の適切性を研究し、以下の結果を得た。

もし底が適当な意味でほぼ水平で、適当な滑らかさを持っているとし、さらに自由境界面に表面張力が働いているとすれば、初期値が平衡状態に適当な意味で近いという仮定のもとで、その初期値問題は時間に関する1階微分と空間に関する3/2階微分とが釣り合うような Sobolev 空間において適切である。

底が無い場合は、自由境界を記述する関数のみに対する閉じた方程式を導出できた。その際に重要だったのは、上下の各流体に対する自由境界上での流体速度の水平成分と鉛直成分との間に、ある作用素を仲介とした関数関係があることであった。その作用素の主要部でもあり、かつ線形部分でもある Hilbert 変換は unitary 作用素であるから、特に、その逆作用素が存在する。このことを最大限に活用し，その方程式を導出したのである。他方、底がある場合、対応する作用素の線形部分は同型写像でなく、その逆作用素を考えることが出来ない。それゆえ自由境界を記述する関数のみに対する閉じた方程式を導出するのは極めて困難となる。したがって、方程式系の主要部を見失わないようにしつつ、方程式論が適用出来る形の準線形方程式系に同値変形していくことが証明の要点である。

第四章 先に言及した Nalimov や Yosihara の結果、および本論文の第一章から第三章の結果はいずれも、流れが渦無しであると仮定している。しかしながら、実際の現象においては渦が存在する場合もあるので、この章では渦が存在する場合、正確には、2次元空間における非圧縮性完全流体の自由境界問題（一相問題で表面張力がない場合）に対する時間局所的な一意可解性を研究し、以下の結果を得た。

もし初期値が適当な Sobolev 空間に属し、両立条件を満たし、そして適当な意味で平衡状態に近ければ、その初期値問題は一意な時間局所解を持つ。

もし初期渦度が恒等的に零であれば、解が存在する限りその後も渦度は零であるので、この結果は Nalimov の結果を真に含んだものとなっている。またこの結果は、平面的な流れにおいては渦が存在してもしなくても、少なくとも時間局所的には自由境界に影響はない、と解釈することも出来る。渦が存在しない場合には、問題を自由境界上に落とすことが出来た。すなわち、自由境界上での物理量に対する閉じた方程式系が得られる。そしてその方程式系を眺めることによって初めて、その系の主要部が見えてくる。渦が存在する場合には、そのような閉じた方程式系を導出することは出来ないが、自由境界上に落としきれない部分は低階項になっている、という評価を行い Nalimov の手法に帰着させる、というのが証明の基本的な方針である。その評価の際には、Lagrange 座標系での渦度は恒等的に初期渦度に等しい、という事実を本質的に用いた。

第五章　この章では、圧縮性理想流体と非圧縮性理想流体の関係を調べている。形式的には、Mach 数と呼ばれる無次元パラメーターの零極限において、圧縮性流体から非圧縮性流体に移り変わる。その極限操作の正当性については、もし圧縮性流体に対する初期値が非圧縮性流体に対する初期値に適当な意味で収束すれば、対応する解の一様収束性が成立する、ということが S. Klainerman & A. Majda (1981) 等により示されている。初期値に対するこの仮定を外すと一般に時刻 $t=0$ での収束性は失われるが、t が正であれば依然としてその極限操作が成立することが、流体領域が全空間の場合 S. Ukai (1986) 等により、流体領域が滑らかな境界を持つ外部領域の場合 H. Isozaki (1987) により証明されている。この場合には一般に、時刻 $t=0$ において初期遷移層と呼ばれる不連続性が現れる。

そこで申請者はこの章において、そのような現象が流体領域が半空間 $\mathbf{R}^n_+$ の場合にも成立することを証明した。幾何学的には半空間の方が外部領域よりも簡単な領域と言えるが、Isozaki が用いた方法は半空間の場合には本質的に適用できない。また彼の方法と比べると、申請者のは self-contained で、しかも簡単である。その証明は、スペクトル分解を用いて圧縮性流体に対する解を非圧縮性流体に対する解と異なる時間スケールを持つ波動方程式の解とに分解し、後者の decay の証明に帰着させるものである。そしてその decay 評価を行う際に重要なことは、半空間の場合、その上で定義された L^2 関数の Helmholtz 分解に付随する、ポテンシャル部分への射影作用素が、$\mathbf{R}^n_+$ から $\mathbf{R}^n$ への適当な拡張作用素、$\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n_+$ への制限作用素および Riesz 作用素だけで具体的に書き表せること、およびその拡張作用素に対して圧縮性完全流体に対する方程式系が不変であることである。その拡張が我々に必要な最低限の滑らかさを保っていることに注意して、Ukai が行った証明を改良することにより望みの評価が得られる。