早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Generalizations of Gamma Function and
Its Applications to q-Analysis
(ガンマ函数の一般化とその q-解析学への応用)

申 請 者

氏 名 西澤 道知
Michitomo Nishizawa

数理科学 専攻 代数解析学 研究

1998 年 7 月
(西暦)

ガンマ函数は、古くは、Euler, Gauss に始まる研究に端を発し、最も基礎的な特殊函数の一つとして重きをなしてきた。この函数を一般化しようとする試みが、いくつかなされているが、本論分に関わるのは、次の二つである。

ひとつは、「多重化」である。多重ガンマ函数は、1900 年前後に、イギリスの E.W.Barnes により導入された。ガンマ函数は、Hurwitz のゼータ函数を用いて定義することもできるが、彼はその方法を一般化したゼータ函数に適用することによって多重ガンマ函数を定義した。この函数は 新谷卓郎の Kronecker 極限公式などに用いられている。また、1970 年代には、M.F.Vignerás が ガンマ函数を特徴づけるのに基本的な Bohr-Morellup の定理を一般化するかたちで、Barnes の 多重ガンマ函数の特殊な場合について、再解釈を下した。この函数は Selberg のゼータ函数、ラプラシアンの行列式表示などのスペクトル幾何の分野に応用されている。

もう一つは「 q-類似 」である。これは変数 z のかわりに $[z]=(1-q^z)/(1-q)$ を用いて、特殊函数を表示することであり、これは $q\to 1$ で、古典的な函数に戻る。q-類似は、古典論の 微分方程式に対し、q-差分方程式を対応させることにより、特に超幾何函数に関する話題において、古典論との著しい対応を示す。この背景として 1970 年代後半からの 数理物理の発展の中で、新しい代数的概念として発見された量子群の理論がある。量子群(量子座標環)の球関数論に、直交多項式の q-類似が現れることが発見されたことで q-類似をつかさどる対称性の一端が明らかにされたとともに、今後の数理物理に関わる解析として、q-差分系の重要性が認識されている。

本論文ではガンマ函数の一般化と、その q-解析への応用についての研究結果を述べる。

本論文は、3部に別れる。第一部は、Vignerás の多重ガンマ函数の q-類似(多重 q-ガンマ函数)の構成とその古典極限の研究である。まず、Vignerás の一般化された Bohr-Morellup の定理の q-類似をみたすような函数を組み合わせ論的に構成し、この函数の一意性を Dufresnoy と Pisot の、差分方程式の解に関する存在と一意性の定理を用いて示す。次に、多重 q-ガンマ函数の無限積表示について考察する。多重 q-ガンマ函数は、ガンマ函数の Weierstrass 積表示に対応する無限積表示で定義されるが、ガンマ函数の Euler 積表示、 Gauss 積表示に対応する無限積表示も持つことを示す。さらに、この函数の $q\to 1$ の極限(古典極限)について考察する。このため、多重 q-ガンマ函数の対数をとり、Euler-MacLaurin の和公式を用いて展開する。こうして得た式は有限和と積分項の和になるが、この表示を Euler-MacLaurin 展開と呼ぶ。Euler-MacLaurin 展開の各項は $q\to 1$ の極限において一様収束することがいえるため、多重 q-ガンマ函数の古典極限の存在と、それが Vignerás の一般化された Bohr-Morellup の定理を満たすことが証明され、この極限が Vignerás の多重ガンマ函数に一致することがいえる。このことにより、多重 q-ガンマ函数の Euler-MacLaurin 展開の古典極限(以後、これを Vignerás の多重ガンマ函数の Euler-MacLaurin 展開と呼ぶ。)は Vignerás の多重ガンマ函数の表示式を表わすことになるが、この表示から Vignerás の多重ガンマ函数に関する性質を導くことができる。Euler-MacLaurin 展開の各項の漸近的挙動を評価することにより、この展開が Vignerás の多重ガンマ函数の漸近展開になっていることがわかる。これはガンマ函数の Stirling の公式の一般化である。また、Vignerás の多重ガンマ函数の Euler-MacLaurin 展開を用いて、多重ガンマ函数の無限積表示を求める。これは ガンマ函数の Weierstrass 積表示の一般化になっている。

第二部は、このようなガンマ函数と深く関わる Hurwitz のゼータ函数の q-類似(q-Hurwitz ゼータ函数)を構成し、その性質について調べる。我々が、ここでゼータ函数の定義の手がかりとするのは、量子座標環によって定義されるラプラシアンのスペクトルである。それを基に、Hurwitz のゼータ函数 $\zeta(s,z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z+n)^{-s}$ の q-類似を $\zeta(s,z;q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n+1)s}}{[z+n]^s}$ と定義する。この函数が Hurwitz のゼータ函数に対応する性質を持つことを調べる。まず、この函数は全複素平面に有理型函数として解析接続される。つぎに、この函数は、Euler-MacLaurin の和公式を用いて展開することによって、超幾何函数を各項にもつ無限級数で表わせる。この級数の古典極限は一様収束し、収束した無限級数は合流型超幾何函数を各項に持つ。これより、古典的な Hurwitz のゼータ函数の新しい表示が得られる。また、超幾何函数を用いた q-Hurwitz ゼータ函数の表示から、Hurwitz の関係式の q-類似にあたる式も得られる。また、q-Hurwitz ゼータ函数 と、q-ガンマ函数、その他の q-級数の関係が論じられる。q-Hurwitz ゼータ函数 の $s=0$ における Laurant 展開より、Hurwitz ゼータ函数とガンマ函数の関係に対応する q-Hurwitz ゼータ函数と q-ガンマ函数の関係式が得られる。これに関連して、q-shifted factorial $(q^z;q)=\prod_{k=0}^{\infty}(1-q^{z+k})$ の Euler-MacLaurin の和公式を用いた展開を調べる。ここで、特に重要なことのひとつは、この展開の主要項として二重対数函数 (dilogarithm) が現れることである。さらにこの展開式を用いて、Rogers-Ramanujan 恒等式を考察する。最後に q-Hurwitz ゼータ函数 の 積分表示や、q-Hurwitz ゼータ函数で $z=1$ とおいた q-Riemann ゼータ函数に関する話題についても触れる。

第三部は、Barnes の多重ガンマ函数の q-解析、特に $|q|=1$ で q が 1のべき根でない場合の解析についての応用を行う。ここで扱うのは超幾何型の q-差分方程式である。通常の パラメタの範囲 $0<q<1$ のときは、q-差分方程式のべき級数解は収束するが、$|q|=1$ のときはそうはならない。このため、積分表示を考える。超幾何函数の積分表示の主なものとしては、 Barnes 型表示と Euler 型表示がある。この2種類の表示について考えることにより、$|q|=1$ の場合の超幾何型 q-差分方程式の積分解を構成する。このさい、問題になるのは、

$0 < q < 1$ で基本的な q-ガンマ函数や、q-shifted factorial は、それらを素朴に $|q| = 1$ と おきかえただけでは定義されないことである。このため、差分方程式 $f(z) = (1 - q^z)f(z+1)$ を満たすような函数を別に構成する必要がある。ここで、多重ガンマ函数を用いる。ガンマ函数の相補公式から三角函数が得られることと、多重ガンマ函数の満たす函数等式から上の差分方程式を満たす函数が構成される。これを用いて上述の 2 種類の積分表示について考察する。まず、最も基本的な Gauss の 超幾何方程式の q-類似の Barnes 型積分解を $|q| = 1$ の場合の q-ガンマ函数を用いて構成する。これは無限積分で表わされるが、超幾何函数のパラメタにある条件を加えると、多重ガンマ函数の漸近的挙動から、積分の一様収束性が従う。さらにこの積分と q-差分作用素が可換であることと、、この積分が Gauss の 超幾何方程式の q-類似を満たすことがわかる。次にこの積分解の性質について、漸近展開と隣接関係式について調べる。漸近展開は積分解の留数計算から、隣接関係式は直接計算で得られる。しかし、$|q| = 1$ の場合はパラメタに制限があるため、この隣接関係式は、$0 < q < 1$ と異なり作用できる場合が限られることもわかる。 さらに、Barnes 型積分解の一般化として、一般化された (r, s) パラメタの 超幾何型 q-差分方程式の積分解などを構成する。次に、Euler 型積分について考察する。ここでは、$0 < q < 1$ の場合の Jackson 積分表示の q-shifted factorial を、多重ガンマ函数を用いて $|q| = 1$ でも 成り立つような 積分に書き直す。このときに q-差分作用素を加法的な差分作用素に変換する必要が生じる。以上のことに注意すると、超幾何函数のパラメタにある条件を課したとき、この積分は Gauss の超幾何 q-差分方程式の q-差分作用素を加法的な差分作用素に書き直した形の方程式の解になっていることがやはり Cauchy の定理より証明される。さらにこの積分解が q-差分作用素を加法的な差分作用素に書き直した形の隣接作用素により、隣接関係式を満たしていることが示される。この手法は、Euler 型積分表示をもつ多変数の超幾何型 q-差分方程式の積分解についても 適用される。その例として Lauricella の D-型と呼ばれる超幾何型 q-差分方程式の積分解を構成する。 これも 隣接関係式を満たすことを示す。Euler 型の 積分解についても、 $|q| = 1$ のパラメタの条件から、隣接作用素の作用する範囲が限られてしまうこともわかる。

以上のように、一般化されたガンマ函数を通して、特殊函数に関する今までに知られていなかった結果が得られる。これらの研究は、可解格子模型や量子群の表現との関連が期待され、今後、重要性をましてゆくと思われる。