内98-72

早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

ツイスト条件を破る
ハミルトン力学系の研究

申 請 者

篠原 晋

Susumu Shinohara

物理学及
応用物理学 統計物理学

1998 年 12 月
(西暦)

ハミルトン力学系の重要な問題の一つに、可積分系に摂動を加えていったときの軌道の安定性を調べることがある。Poincaré はこの問題を「力学の基本問題」と呼んだ。この問題の進展は、60 年代に Kolmogorov, Arnold, Moser (KAM) によって与えられた。KAM 理論は、摂動が十分小さい場合は、無理数の回転数をもつ不変トーラス (準周期的運動) の多くが存在し続けることを保証する。摂動が大きい場合、摂動論的なアプローチは破綻するが、そのような場合に対しては、数値計算を援用した研究が行なわれている。二自由度ハミルトン系では、相空間の横断面 (Poincaré 断面) が二次元保測写像になるので、相空間を視覚化できる。そこで、数値的に正準方程式を解いて Poincaré 断面を描く方法により、摂動の増加に伴う相空間構造の変化が調べられてきた。とくに不変トーラス崩壊については、数値的に精度良く扱うことのできる二次元保測写像について研究が進められ、詳しい性質が解明された。二次元保測写像では、摂動の増加とともに、相空間をいくつかのエルゴード成分に分割するような不変曲線が崩壊してゆき、摂動に対して最も頑丈な不変曲線 (last KAM) の崩壊によって大域的なカオスが発生する。J. M. Greene は、黄金比の回転数を持つ不変曲線が last KAM になることを発見し、last KAM 崩壊の臨界パラメータ値を精密に決定した。最近では、不変曲線の回転数と崩壊の臨界パラメータ値との関係を与える関数 (critical function) の性質も詳しく調べられ、不変曲線の摂動に対する頑丈さが、回転数の数論的性質によって決まることを示唆する結果も得られている。

このように、不変曲線の存在条件や崩壊過程については、多くの研究の蓄積があるが、そのほとんどは、ツイスト条件 (非退化条件) を満たす系に関するものである。しかし、ツイスト条件を破る系 (ノン・ツイスト系) に関する研究は少なく、ツイスト条件の破れによって生じる相空間構造が、不変曲線の崩壊過程や、系の大域的性質にどのような影響を与えるかという問題は、全く手つかずのまま残されている。このような背景のもと、本研究ではノン・ツイスト系の標準的なモデルとなっている二次元保測写像に注目し、ツイスト条件の破れから生じる相空間構造を系統的に調べる方法を考案し、ノン・ツイスト系の大域的カオスへの遷移機構の特徴を明らかにした。以下に各章の概要を述べる。

第 1 章では、軌道の存在や安定性に関して成されたハミルトン系の研究をまとめ、ツイスト条件を破る系を研究する意義と目的を明らかにした。

第 2 章では、本研究で扱うノン・ツイスト写像 quadratic twist map(QTM) についてこれまで知られている性質をまとめた。QTM は、T:(I', θ')= $(I - K\sin(\theta), \theta + 2\pi\mu - I'^2)$, $(I,\theta) \in \mathbf{R}\times\mathbf{S}^1$で与えられる二次元保測写像である。ここで、$\mu$ は写像の可積分部分を調節するパラメータ、Kは摂動の強さを調節するパラメータである。この写像は、ツイスト条件 ($\partial\theta'/\partial I \neq 0$ for$^\forall I$) を満たさない。そのため、QTM の可積分系 (K=0) では、任意の点で shear $\partial\theta'/\partial I$ がゼロになるような不変曲線が存在し、shearless 曲線と呼ばれる。一般に、shearless 曲線の両側には

同一回転数の周期軌道が存在する。摂動パラメータ Kの値を増すと、周期軌道の乗った不変曲線は Poincaré-Birkhoff island chain に変わるが、その結果として同一回転数の island chain が shearless 曲線の両側に存在することになる。パラメータの変化によって、同一回転数の island chain のセパラトリクスは結合し、セパラトリクスの組み換えが起こる。この現象は、磁力線の組み換え現象との類推からリコネクション現象と呼ばれる。shearless 曲線の存在や、リコネクション現象はノン・ツイスト系に特有のものであるが、それらが不変曲線の崩壊過程に及ぼす影響は、まだ良く分かっていない。

第 3 章では、shearless 曲線の性質やリコネクション現象を系統的に調べるための理論的方法を発展させた。まずはじめに、QTM の相空間には 4 つの特別な点が存在することを、写像の対称性から導いた。これらの点を初期点とする軌道を調べることによって、shearless 曲線やリコネクション現象、さらには大域的カオスの発生に関する詳しい情報が得られることから、これらの点を “indicator points” と呼ぶ。第 3.1 節では、indicator points の座標を導出し、shearless 曲線が存在するならば、4 つの indicator points を全て通ることを示した。第 3.2 節では、リコネクション現象と indicator points の関係について述べた。QTM では、island chain の周期が偶数であるか奇数であるかによって、セパラトリクスの結合の仕方が異なる。偶数型では、セパラトリクス結合時に双曲型周期点の結合を伴い、奇数型では伴わない。いずれの場合も、セパラトリクス結合時に indicator points の軌道が特徴的な振舞いをすることが分かった。すなわち、偶数型のセパラトリクス結合時には indicator points が周期点になり、奇数型では indicator points の軌道が周期点に収束する性質がある。この性質を利用して、セパラトリクスの結合が起こるパラメータ値 (リコネクション閾値) を系統的に決定する方法を提案した。この方法によって、周期 9 以下の全ての island chain について、リコネクション閾値を決定した。

第 4 章では、QTM における不変曲線の崩壊過程の特徴を明らかにし、リコネクション現象が大域的カオスへの遷移に及ぼす影響を解明した。第 4.1 節では、摂動の増加によって、どのように不変曲線が崩壊してゆき、大域的カオスが発生するのか調べ、大域的カオスへ至るまでの遷移のシナリオを明らかにした。ノン・ツイスト写像では摂動の増加によって、リコネクション過程と不変曲線の崩壊過程が同時に進行するため、大域的カオスへの遷移過程は非常に複雑なものになる。そこで、これら二つの過程を分離して扱えるような見方をすることが重要である。具体的には、shearless 曲線の回転数を一定に保ちながら摂動を増すか、リコネクション閾値に沿って摂動を増すことによって、リコネクション過程を凍結しながら不変曲線の崩壊過程を追うことが出来る。このように摂動を増した場合の相空間構造の変化を詳細に調べ、その結果、shearless 曲線近傍の不変曲線が摂動に対して極めて頑丈であることを見出した。とくに、shearless 曲線の回転数を無理数

に保ちながら摂動を増した場合は、shearless 曲線が last KAM になることが分かった。

第 4.2 節では、大域的カオスが発生する臨界パラメータ値を決定する方法を考案し、パラメータ平面 (μ-K平面) において臨界値が形成する集合 (以下、臨界値集合) を決定した。臨界値集合は、indicator points を用いた次のような方法によって決定できる。shearless 曲線近傍の不変曲線は、摂動に対して頑丈であるため、indicator points を初期点とする軌道が有界領域に留まるならば、次のいずれかが成り立つ: (i) shearless 曲線が存在し、indicator points はその上にある; (ii) shearless 曲線は崩壊したが、shearless 曲線近傍の不変曲線によって有界領域に閉じ込められている。いずれの場合も、少なくとも一本の不変曲線が存在することになる。一方、indicator points を初期点とする軌道が非有界ならば、不変曲線は全く存在しない。よって、indicator points の軌道が有界領域に留まるか否かを判定することにより、不変曲線が存在するか否かを判定できる。各パラメータ値について、この判定を数値的に行い、不変曲線が存在するパラメータ領域 (存在相) と存在しないパラメータ領域 (非存在相) を決定した。ここで、存在相と非存在相の境界が臨界値集合である。臨界値集合は、自己相似構造を持ち、フラクタルになることが分かった。このことは、摂動の加え方の僅かな違いによって、大域的カオスへ遷移する臨界パラメータ値が激しく変化することを意味している。

第 4.3 節では、臨界値集合の構造を詳しく調べた。臨界値集合は、鋭く切れ込んだ “谷” 構造を無数に持っているが、谷の位置はリコネクション閾値と一対一に対応していることが分かった。ここで、より周期の長い island chain のリコネクション閾値には、より細かな谷構造が対応する。さらに、どの谷構造に注目しても、谷の片側では、臨界値集合とリコネクション閾値が一致することを明らかにした。これらの結果より、臨界値集合の複雑な形状の骨組は、リコネクション閾値によって与えられるという結論が得られる。

第 5 章では、本論文で得られた結果をまとめ、今後の展望を述べる。