

2000-2001

早稲田大学大学院理工学研究科

## 博士論文概要

### 論文題目

On the nonexistence of weak solutions  
of some nonlinear elliptic equations  
(ある非線形橢円型方程式の弱解の非存在について)

申請者

橋本 貴宏

Takahiro Hashimoto

2000年10月

非線形楕円型方程式について研究する上での興味深い視点の一つとして、時間発展を伴う方程式と比べて、定常状態を記述する楕円型方程式では解の存在・非存在が、領域  $\Omega$  の形状や非線形項の形に大きく依存するという事実が挙げられる。実際、これを裏付ける非自明解の存在・非存在に関する研究が今まで盛んに行なわれてきた。解の非存在に関する結果のほとんどは、「Pohozaev の恒等式」に基づくもので、これを導く際には、解の滑らかさとして  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  が常に仮定され、非有界領域に於ける議論では、種々の可積分性が必要となる。

しかしながら、主要項が退化するある種の準線形楕円型方程式の非自明解は、 $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  に属さないことが良く知られており、半線形楕円型方程式に対しても、非線形項が super critical な増大度を有する場合には、弱解が  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  に属するか否かは自明ではない。更に、このような場合には、非有界領域に於いて要求される可積分条件が満たされるかどうかは微妙な問題である。この意味で、従来の解の非存在の議論は、幾分形式的であり、弱解の枠内での非存在の厳密な議論は極めて重要であるにもかかわらず、あまり十分にはなされてこなかった。

本論文では、退化する準線形楕円型方程式の典型的な例として、次の方程式を主たる研究対象としている。

$$(E) \begin{cases} -\Delta_p u(x) = |u|^{q-2}u(x) & x \in \Omega, \quad 1 < p, q < \infty, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

ここで、 $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 、 $1 < p, q < \infty$  で  $\Omega$  は滑らかな境界  $\partial\Omega$  をもつ  $\mathbb{R}^N$  の領域とする。

本論文の主目的は、上に挙げた方程式 (E) の非自明解の存在・非存在が領域の形状と二つの非線形性をあらわすパラメータ ( $p, q$ ) にどのように依存するかを、非有界領域に於ける可積分条件を考慮した、ある種の弱解の枠内で解明することにある。

本論文の構成は以下の通りである。

第 1 章では、本論文にて展開される議論の基礎となる関数空間についての説明、抽象的枠組での解の存在定理、および第 2 章以降での議論で必要とされる解の滑らかさに関する結果を準備する。

第 2 章では、内部問題と外部問題の解の存在・非存在に関する相補性について議論する。特に外部問題に対する Pohozaev 型の不等式を示すことが主題となる。

第 3 章では、柱状領域の問題の解の非存在について議論する。Pohozaev 型の不等式の他に、一般化された固有値問題について述べる。

第 4 章では、無限竹輪型領域など、非星状領域での問題について議論する。

第 5 章では、4 階の方程式での内部問題と外部問題の解の存在・非存在に関する相補性について考察する。

以下、2 章以降の内容について概観する。

方程式 (E) は、 $\Omega$  が有界領域の場合には、関数解析学的観点からは、次の Rayleigh 商

$$R(v) := \frac{\|\nabla v\|_{L^p}}{\|v\|_{L^q}}$$

を最小化する問題に由来している。

Rellich の定理によれば、最小化元  $u_0$  の存在は  $q < p^*$  のとき保証され、 $u_0$  を適当に規格化した  $u$  は (E) をみたすことが知られている。ここで  $p^*$  は Sobolev の臨界指数と呼ばれるもので、次で与えられる。

$$p^* := \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{if } p < N, \\ \infty & \text{if } p \geq N. \end{cases}$$

一方、 $q \geq p^*$  に対しては、 $\Omega$  が星状領域である場合に、Pohozaev (1965) により  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  のクラスでの非存在が、また大谷 (1988) により Sobolev 空間のあるクラスでの非存在が示されている。

$\Omega$  に有界性を仮定しない場合、もはや上に述べたような (E) 解の特徴付けはできないが、純粹に非線形楕円型方程式の研究という立場から、非有界領域における方程式 (E) の非自明解の存在の研究は盛んになされてきた。例えば、Schindler (1992) や Yang & Zhu (1987) の結果が挙げられる。非有界領域における (E) の非自明解の非存在について研究することは、このような観点から意義のあることといえる。

第 2 章では、領域  $\Omega$  が外部領域である場合に、方程式 (E) の非自明解の非存在が弱解の範囲で論じられている。

方程式 (E) の解の非存在に関する多くの結果は、Pohozaev 型の恒等式を示すことにより得られる。この恒等式を示すには、解に強い微分可能性 (例えば  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ) を仮定しなければならないが、本論文では、弱解を対象とするので恒等式を期待することはできない。この困難を解決するために、大谷 (1988) によって、有界領域に対して提唱された、「弱解に対する Pohozaev 型の不等式」の外部領域版が導出されている。そのためには、種々の近似手順が必要となるが、ここでは非有界領域での議論となるので、領域  $\Omega$  を近似する有界領域の列  $\Omega_n$  と、式の中に現れる積分の可積分性を保証する cut-off 関数、そしてその過程で現れた近似解の収束に関する精密な議論が必要となる。

第 3 章に於いて論じられているのは、 $\Omega$  が柱状領域の場合における非自明解又は正値解の非存在である。外部領域の境界は有界であるが、柱状領域では境界が有界でないという特徴がある。柱状領域での方程式 (E) の解の存在結果には先にも挙げた Schindler (1992) がある。そこでは (Concentration-Compactness という議論を柱状領域の問題に適用することによって)  $p < q < p^*$  に対して、解の存在が示されている。この結果を踏まえると  $1 < q \leq p$  あるいは  $p^* \leq q$  のときの解の存在・非存在が残された問題となる。第 3 章ではさらに係数関数  $a(\cdot)$  を付け加えた

$$(E)_a \begin{cases} -\Delta_p u = a(x)|u|^{q-2}u & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

の非自明解の非存在を考える。ここで、 $a(x) \geq 0$  は有界関数とし、 $\Omega$  は  $\Omega := \Omega_d \times \mathbb{R}^{N-d}$  ( $\Omega_d$  は  $\mathbb{R}^d$  の有界領域) で与えられる柱状領域とする。この有界な切片  $\Omega_d$  に対して星状性を仮定すれば、前章と同様な議論により、柱状領域における Pohozaev 型の不等式が導かれ、 $q \geq p^*$  に対する解の非存在を示すことができる。一方、それとは全く別の  $\mathbb{R}^{N-d}$  での平行移動不变性を用いた議論により  $1 < q \leq p$  のときの正値解の非存在の結果も得られている。これ等の事実により、柱状領域は有界領域と非有界領域の中間的性質をもっている、すなわち super principal ( $p < q$ ) の場合は有界領域の問題と同様に振る舞い、sub principal ( $1 < q < p$ ) の場合や固有値問題 ( $q = p$ ) の場合は非有界(外部)領域の問題と同様に振る舞う、ということが結論づけられる。

第 2 章及び第 3 章において非存在を議論するときに導いた Pohozaev 型の不等式は、領域あるいは領域の補集合が星状領域の場合にしか効果がない。実際、Kazdan-Warner (1975) は星状性をもたない円環領域の場合には、任意の  $q \in (1, \infty)$  で正値解が存在することを指摘している。

そこで第 4 章では、Pohozaev 型の不等式に対する星状領域性の仮定を弱めることはできないかという問題が議論されている。まず、4 章第 1 節においては、円環領域と柱状領域の中間的性格をもった、「無限竹輪型領域」を考える。ここで、無限竹輪型領域  $\Omega$  とは  $\Omega := \Omega_d \times \mathbb{R}^{N-d}$ , ( $\Omega_d$  は  $d$ -次元円環領域) で与えられる領域のことである。 $\Omega$  は明らかに、星状領域ではないため、通常の Pohozaev 型不等式は、解の非存在を示すためには役立たないが、適当な重み関数つきの Pohozaev 型の不等式を導出することにより、

$$q \geq p_d^* = \frac{(N-d+1)p}{N-d+1-p}$$

に対して、正値解の非存在を示すことができる。 $(p < q < p_d^*)$  に対しては、正値解が存在することが知られているので、この結果は最良である。)

4 章第 2 節では、Kelvin 変換とよばれる等角不变性をもつ変換を用いて、星状領域性をもたない領域における非線形項が臨界指数の増大度をもつ半線形楕円型方程式の非自明解の非存在について議論されている。

最後に、第 5 章では、「2 階の方程式 (E) に対して示された、内部問題と外部問題の相補性の結果が、4 階の方程式に対しても得られるか?」という問題を議論している。4 階楕円型方程式では、2 階楕円型方程式における Dirichlet 境界条件  $u = 0$  on  $\partial\Omega$  を仮定するだけでなく、以下のようにさらにもう一つの境界条件を課す必要がある。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u) = |u|^{q-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{Eq}) \\ (\text{Bc1}) \\ (\text{Bc2}) \end{array}$$

5 章第 1 節では、 $p = 2$  の場合の方程式 (Eq)-(Bc1) について、2 階の方程式と同様に内部問題と外部問題の相補性の結果が得られている。第 2 節では、方程式 (Eq)-(Bc2) を、2 階の楕円型方程式系に帰着させることにより、その非自明解の存在・非存在についての考察がなされている。