早稲田大学大学院理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

Vector Fields in $\mathcal{G}^1(M)$ on 3-manifolds and Their Characterization

3次元$\mathcal{G}^1(M)$のベクトル場とその特徴付けについて

申　請　者

山中竹春

Takeharu Yamanaka

2003 年 10 月

1960年代にSmaleとPalisはそれまで知られていた構造安定な力学系を一般化してAxiom Aという概念を導入し、構造安定性予想を提唱した。この予想は長い間、未解決であったが、1988年、Mañé により「構造安定なC^1微分同相写像はAxiom A を満たす」ことが証明された。1992年、林修平は Mañé の結果を拡張して、「$\mathcal{F}^1(M)$に属するC^1微分同相写像は Axiom A を満たす」ことを証明した。この結果により、C^1微分同相写像が$\mathcal{F}^1(M)$に属することとΩ-安定であることは同値であることが示され、C^1微分同相写像の安定性問題は完結するに至った。一方、ベクトル場についても1997年、林により「構造安定なC^1ベクトル場は Axiom A を満たす」ことが証明された。そこで微分同相写像の集合$\mathcal{F}^1(M)$における林の結果を、これに相当するベクトル場集合$\mathcal{G}^1(M)$へ拡張することが考えられる。ここで$\mathcal{G}^1(M)$とは特異点及び周期軌道がすべて hyperbolic であるようなベクトル場集合の内部である。しかしながら、$\mathcal{G}^1(M)$に属しながら Axiom A を満たさない反例 geometric Lorenz attractor があるため、このような拡張は不可能である。しかも geometric Lorenz attractorの性質により、Axiom A 系は$\mathcal{G}^1(M)$の中で稠密集合ですらないことがわかる。従って、$\mathcal{G}^1(M)$については Axiom A とは異なる別の特徴付けが必要とされるが、$\dim M > 2$の場合、これについてはまだいかなる結果も得られていない。このような背景のもと、本論文は3次元系における$\mathcal{G}^1(M)$の特徴付けを目指している。

第1章 Guckenheimer による geometric Lorenz attractor が Axiom A を満たさないのは、ある特異点に周期軌道列が集積しており、nonwandering set が hyperbolic set になり得ないからである。第1章では、逆に$\mathcal{G}^1(M)$に属するベクトル場の特異点に周期軌道列が集積している場合、その特異点はどのような性質を満たすかという問題を議論している。

定理 1.1.2 $\mathcal{G}^1(M)$の開かつ稠密集合に属するベクトル場Xについて以下が成り立つ。もしXのある特異点に周期軌道列が集積しているならば、Xまたは$-X$に対して、その特異点は Lorenz-like である。

ここで$X \in \mathcal{G}^1(M)$の特異点σがLorenz-likeであるとは、Xのσにおける微分$D_\sigma X$の固有値$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$がすべて実根で、$\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < -\lambda_2 < \lambda_3$を満たすことである。この固有値の条件は geometric Lorenz attractor の特異点に課せられている条件と同一である。従って、本定理は$\mathcal{G}^1(M)$に属するほとんどすべてのベクトル場Xに対して、もし周期軌道が集積するような特異点σが存在すれば、σの近傍で

の X の振る舞いは geometric Lorenz attractor の特異点近傍を通る軌道の振る舞いとよく似ていることを示しており、その意味で $\mathcal{G}^1(M)$ の特徴付けに対して、重要なステップを与えていると考えられる。 申請者は Mañé 及び Liao により示された $X \in \mathcal{G}^1(M)$ の周期軌道の性質、C^1-Closing Lemma、C^1-Connecting Lemma といった安定性理論における不可欠な結果を用いることで本定理の証明を与えている。

第2章 この章では $\mathcal{G}^1(M)$ の稠密部分集合の一つの特徴付けが与えられている。近年、Morales-Pacifico-Pujals は robust transitive set を研究する過程で singular hyperbolic set という概念を導入した。 singular hyperbolic set は hyperbolic set の定義を拡張したものであり、特異点を含む M のコンパクト部分集合に対して定義される。 また、geometric Lorenz attractor は周期軌道を稠密部分集合として含む singular hyperbolic set の典型例となっている。申請者はこの singular hyperbolic set を用いて、$\mathcal{G}^1(M)$ の特徴付けを行っている。

定理 2.1.2 $\mathcal{G}^1(M)$ の稠密部分集合に属するベクトル場 X について以下が成り立つ。X は Axiom A を満たすか、または X ないし $-X$ は周期軌道を稠密部分集合として含むような singular hyperbolic set を持つ。

この結果から $\mathcal{G}^1(M)$ に属するベクトル場が Axiom A を満たさないならば、多くの場合、そのベクトル場には周期軌道が集積するような特異点が存在することが分かる。さらに定理 1.1.2 より、Axiom A を満たさないベクトル場の多くが geometric Lorenz attractor と似た構造を持つ部分集合を持つことも分かる。 このように geometric Lorenz attractor は単に $\mathcal{G}^1(M)$ に属しながら Axiom A を満たさない一反例となっているだけでなく、Axiom A を満たさない $\mathcal{G}^1(M)$ のベクトル場では、一般的に geometric Lorenz attractor が起こっていると考えられることをこの定理は示している。

証明では、$\mathcal{G}^1(M)$ の任意のベクトル場について、それが Axiom A 系で近似できないときは、周期軌道列 $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ が集積するような特異点 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ を持つベクトル場 X でいくらでも近似できる、ということが示されている。 そして、その周期軌道列の和集合の閉包 $K = cl\left(\bigcup_{n\geq 1}\gamma_n\right)$ が X の singular hyperbolic set であることを示している。 一般にある不変集合 Λ が singular hyperbolic set であるためには Λ の特異点はすべて Lorenz-like でなければならないが、定理 1.1.2 から K に含まれる特異点は X または $-X$ に対して、Lorenz-like であることがわかる。 また、Morales-Pacifico-Pujals による robust transitive set を考察した論文のいくつかの命題が

用いられている。彼らはこの論文の中でベクトル場のC^1 robust transitive set は singular hyperbolic set の構造を持つことを示している。しかし、一般にはある集合の robust transitivity は判断するのが困難で、僅かに perturb しても transitivity はなくなりうる。例えば、X のある特異点 σ に周期軌道が集積していても、一般には僅かな perturbation によって、σ は isolated になる可能性がある。しかし、申請者は $\mathcal{G}^1(M)$ においてはその適当な稠密部分集合 $\mathcal{V}$ を考えることで、$X \in \mathcal{V}$ ならば僅かな perturbation で σ が isolated になったとしても、また別の僅かな perturbation で再度、σ に周期軌道が集積している状況を作り出せることを示し、この性質を定理 2.1.2 の証明に用いている。また、これはある意味で $\mathcal{G}^1(M)$ の中で robust transitive に準じた状況が作り出せるということであり、この点は興味深い性質の発見であるといえる。

本論文は $\mathcal{G}^1(M)$ の特徴付けを目指した研究をまとめたものである。得られた結果はどれも新しくかつ非常に興味を引くものとなっている。特に周期軌道列が集積する特異点が Lorenz-like であり、その事実と新しい概念である singular hyperbolic set を用いて $\mathcal{G}^1(M)$ の稠密部分集合を特徴付けた点は重要な結果である。さらに $\mathcal{G}^1(M)$ のベクトル場が Axiom A を満たさない理由が、一般的に周期軌道の特異点への集積に因っており、しかもそれらが geometric Lorenz attractor になっていることを示した点は独創的と高く評価できる。申請者の結果は今後、singular hyperbolic set の性質の研究が進めば、3次元 $\mathcal{G}^1(M)$ 全体の特徴付けが可能になりうることを示唆している。また、現時点で3次元以上の $\mathcal{G}^1(M)$ を特徴付ける結果は他に得られておらず、その意味でも申請者の結果は大きな前進と考えられる。

以上述べたように、本論文は力学系の安定性理論の発展に貢献し、更なる拡張の可能性を示している。よって、本論文は博士（理学）の学位論文として十分価値あるものと認める。

2003年7月

審査員（主査）	早稲田大学教授	理学博士（早稲田大学）	伊藤隆一
	早稲田大学教授	理学博士（早稲田大学）	田中純一
	東京理科大学教授	理学博士（早稲田大学）	戸川美郎
	早稲田大学助教授	理学博士（早稲田大学）	渡邊展也