早稲田大学大学院理工学研究科

博　士　論　文　概　要

論　文　題　目

ファジィグラフの連結性に関する諸性質の研究とその応用

申　請　者

森岡　正臣

Masaomi　Morioka

平成4年5月

本稿では，ファジィグラフの連結性に関する性質の研究とその応用に関して，内容的に３つに大別して概要を記す。

（１）ファジィグラフの有向辺の重みが大きい部分，小さい部分およびあいまいな部分を抽出する方法について：

種々の社会現象がファジィグラフで表されることがわかるようになると，そのおおまかな特徴をとらえる数学的な方法をさぐることが重要になると思われる。特徴といってもいろいろあるが（例えば，グラフの連結性等），ここではファジィグラフの有向辺の重みに注目して研究を行なった。

ファジィグラフの有向辺の重みは０から１までの任意の値をとり，有向辺の重みが１であるとは，有向辺が確かに存在していることを意味しており，有向辺の重みが０であるとは，有向辺が存在していないことを意味している。また，ファジィ理論によるとあいまいさをはかる尺度というものがあり，これによると有向辺の重みが０と１のときは，その尺度が０（すなわち，有向辺の存在状況にあいまいさはないことを意味する）であり，有向辺の重みが０．５のときその尺度は最大で１（すなわち，有向辺の存在状況にあいまいさがあることを意味する）になる。このことから，ファジィグラフでは有向辺の重みの大小ばかりでなく，重みのもつあいまいさにも注意しなければならないことがわかる。

与えられたファジィグラフに対して，有向辺の重みのもつあいまいさを考慮して定義される特殊なカットグラフを考え，両者の距離を定義する。（このとき，ファジィグラフとそのカットグラフはいずれも隣接行列で表現されている。）この距離は０から１までの値をとるが，この値が最小になり，かつある一定値より小さいときのカットグラフを抽出することができる。このグラフは有向辺の重みが１か０か０．５のいずれかになる３値グラフであり，このときの１や０の重みをもつ有向辺に対応するファジィグラフの有向辺が，重みとしてそれぞれ１や０に近い部分であり，また，この３値グラフの０．５の重みをもつ有向辺に対応するファジィグラフの有向辺が重みとして０．５に近い部分である。「ある一定値」はファジィ意志決定を応用した Nearness condition と呼ぶ条件を考察することから定まる。

このようにしてファジィグラフの有向辺の重みがそれぞれ１，０，０．５に近い有向辺を抽出する数学的方法（一種のアルゴリズム）を考案した。ファジィグラフ理論に対するアプローチとしてこの方法は初めてのものである。

（２）ファジィグラフの連結性について：

これについては二つの視点から研究を行ったので，(a),(b) に分けて概要を記す。

(a) 強化，弱化，中立点という観点から見たファジィグラフの連結性：

ある社会現象が有向グラフ$T=[t_{ij}]$ で表されているとし，これがいろいろな原因によりファジィグラフ$F=[f_{ij}]$ で表される現象に変化することはしばしば起こる。（ただし，両グラフの点の集合は同じものとする。）このような状況では，Ｔにおける有向辺の重みt_{ij} とＦにおける有向辺の重みf_{ij} は一般に異なり，それに伴いグラフの点ｖがＴで担う役割（強化，弱化，中立点）は，ｖがＦで担う役割と異なる。そこで，有向グラフとファジィグラフを比較して，有向辺の重みがどの程度変化したか，そしてそれはどの辺か，また点ｖがＴで担う役割とＦで担う役割がどのように変化したかを調べる方法を考案した。この結果もファジィグラフ理論において初めて得られたものである。

この方法の基本的なアイデアを簡単に紹介する。ファジィグラフＦにおいて点ｖが強化点，弱化点，中立点のいずれかであるという観点とともに，グラフＴ，Ｆそれぞれから点ｖを除いたサブグラフＴ＼｛ｖ｝とＦ＼｛ｖ｝の連結度の変化量を大きい，小さい，あいまいの３つに分けることができる観点から，ファジィグラフＦを９つのタイプに分類することができる。（ここにも，Nearness condition が利用される。）有向グラフＴにおいて点ｖは強化点か弱化点か中立点のいずれかであるから，これらの場合のＴと上記の９つのタイプに分類されたファジィグラフを比較することができるようになる。すなわち，ＦをＴと比較して，重みがそれぞれ大きく，小さく，あいまいに変化した有向辺およびそれにかかわった点を抽出することができる。現在，この方法はアルゴリズム化され計算機に入れられているので，２つのグラフＴとＦを入力すると即座に抽出結果が得られるようになっている。

(b) 歩道（ walk ）という観点から見たファジィグラフの連結性：

有向グラフが片連結であることの必要十分条件は，このグラフが少なくとも１つの全域歩道(spanning walk)をもつことであるという定理はグラフ理論においてよく知られている。しかし，具体的な片連結有向グラフが与えられた場合，この定理ではどこにどのような全域歩道が存在しているのかということまではわからない。本研究では，この点を考慮に入れて上記の定理をファジィグラフ上に拡張した。この結果はファジィグラフの連結性の研究に関して初めて得られたものであり，以下このことについて概要を記す。

ファジィグラフＦ（点の数をｎ個とする）が片連結有向グラフになっている度合いは既に定義されているが，この度合いの定義式と同値なしかも上記のことを考慮に入れた別の表現式を得ることができた。具体的にいうと，隣接行列で表されたＦの可到達行列 $\hat{F}$ の任意の相異なるｎ個の要素の最小値を考え，任意ｎ個を動かしてそれらの最小値の最大値をとったものが片連結有向グラフになっている度合いに一致するというものである。この表現式により，上記の定理はファジィグラフ上に拡張され，しかも全域歩道も求めることができるようになるが，このための計算は一般に複雑になる。そこで，有向グラフの発散核という概念をファジィグラフ上に拡

張し，これを用いて表現式を再度書き換えることにより，この計算を比較的簡単にすることを考えた。以上のことからファジィグラフの連結性に関する表現定理が得られたことになり，これを使うことにより，ファジィグラフが片連結有向グラフになっている度合いとそれに対応する余域歩道を比較的簡単な代数計算により求めることができるようになった。

（３）（１）の方法の教授過程の構造解析への応用について：

教授過程の構造解析に用いられるＩＲＳ分析とは，教材のもつ階層構造を有向グラフＴで表し，それに対応するテストを作成，実施して得られるテスト問題ＱｉとＱｊ間の順序性の度合いr_{ij}をそれらの正答率，誤答率，同時正答率等により定義したとき（これにより得られる学習者の反応の階層構造を表していると考えられるグラフを学習構造グラフＲという），ＴとＲの間の順序性に関する差異を抽出し，それらの原因を吟味し，これをもとに授業の改善をはかっていくというものである。Ｔは有向グラフであるがＲはそうではないので，直接ＴとＲを比較することはできない。ＩＲＳ分析ではカットグラフの考えを使って，Ｒを有向グラフＲ'に変形してＴとＲ'の間の順序性に関する差異を抽出する。r_{ij}は順序性係数と呼ばれており，この定義は Airasian-Bart の順序理論を拡張したものである。これがとり得る値の範囲は１以下であるから，r_{ij}が１に近ければＱｉからＱｊへの順序性は強いことはわかるが，r_{ij}が負の値をとるときのＱｉからＱｊへの順序性を解釈することが難しい。この点を解決するために、テスト問題ＱｉとＱｊ間に新しい順序性の度合いf_{ij}を定義した。f_{ij}は０と１の間の任意の値をとり，f_{ij}が１に近ければＱｉからＱｊへの順序性は強く，f_{ij}が０に近ければその順序性は弱いと解釈することができる。また，f_{ij}は Airasian-Bart のそれやr_{ij}の拡張になっており，順序性係数として必要ないくつかの条件もみたしている。r_{ij}を要素とする隣接行列$F=[f_{ij}]$はファジィグラフを表しており，ＩＲＳ分析でいう学習構造グラフに相当する。そこで，有向グラフＴとファジィグラフＦを比較して順序性（有向辺の重み）に関する差異を抽出することになるが，そこではＩＲＳ分析のようにＦを有向グラフに変形する必要はなく（１）で述べた方法で直接両者を比較することができる。直接比較ができることから，得られる差異に関する情報もＩＲＳ分析によるものより詳細なものになる。ＩＲＳ分析の拡張であるこの分析法をＦＲＳ分析と呼ぶ。ＦＲＳ分析はアルゴリズム化されコンピュータ用にソフト化されているので，分析はきわめて容易に行うことができ，現在，主に数学教材の構造解析の事例研究に利用されている。本研究は教授過程の構造解析に用いられる分析法をファジィ理論を使って拡張した初めてのものである。