早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

On arithmetic of algebraic curves
and abelian varieties
代数曲線とアーベル多様体の整数論

申 請 者
村林 直樹
Naoki Murabayashi

数学専攻 保型関数論研究

1994 年 5 月

数論的幾何学は，現在，最も活発に研究が行われている分野の一つであり，そこでは，保型関数論，整数論，代数幾何学が非常にきれいに交錯している．その対象とするものは，代数体上定義された代数曲線 及び アーベル多様体の有理点，解析的に定義された複素多様体の代数的構造，L- 関数，それらの間の相互関係など，多くの数学者を魅了して止まないものばかりである．本研究は，この分野に含まれるものであり，特に，代数体の世界では 2 次体に相当する hyperelliptic curve と，それに付随したヤコビ多様体の数論的性質を考察している．

第一章では，算術的 Fuchs 群によって一意化される代数曲線の定義方程式を考察している．Γ を $i\infty \in \mathrm{cusp}(\Gamma)$ となる第一種 Fuchs 群とし，X_Γ^{an} を Γ によって一意化されるコンパクト Riemann 面とする．g を X_Γ^{an} の種数とし，以下，$g \geq 2$ を仮定する．h を

$$\Gamma \cdot \{\pm 1\} \cap \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & mh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, m \in \mathrm{Z} \right\}$$

によって一意的に定まる正の実数とする．

$$f_1 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(1)} q_h^j, \ \ldots, \ f_g = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(g)} q_h^j \quad (q_h = \exp(2\pi i \frac{z}{h}))$$

を Γ に関する weight 2 の cusp form のなす空間 $S_2(\Gamma)$ の基底を $i\infty$ の回りで Fourier 展開したものとする．$k = \mathrm{Q}(a_j^{(1)}, \ \ldots, \ a_j^{(g)} \,|\, j \geq 1)$ とおく．本論文では，まず次の定理を示している．

定理 1 X_Γ^{an} は canonical な k 上の model X_Γ を持つ．

次に，$g = 2$ という仮定の下で，本論文の主結果である X_Γ の normal form ($y^2 = g(x)$ という型の X_Γ の定義方程式) に関する次の定理を提示している．

定理 2 $f_1 = \sum_{l=e_1}^{\infty} a_l q_h^l$ ($a_{e_1} \neq 0$)，$f_2 = \sum_{l=e_2}^{\infty} b_l q_h^l$ ($b_{e_2} \neq 0$)，ここで，

$$(e_1, \ e_2) = \begin{cases} (3, \ 1) & (\overline{i\infty} \text{ が Weierstrass 点であるならば}) \\ (2, \ 1) & (\text{そうでないならば}) \end{cases}$$

を $S_2(\Gamma)$ の正規化された基底とする．この時，

(a) $\overline{i\infty}$ が Weierstrass 点ならば，$\{a_3, \ a_4, \ \ldots, \ a_{13}, \ b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_{11}\}$ から X_Γ の normal form がアルゴリズム的に計算される．

(b) そうでなければ，$\{a_2, \ a_3, \ \ldots, \ a_8, \ b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_7\}$ から X_Γ の normal form がアルゴリズム的に計算される．(この定理の証明が，アルゴリズムになっているのであるが，長くなるので，その記述は省略する)

p と ∞ でのみ分岐する Q 上の四元数体の maximal order から作られる theta 級数を計算し，定理 2 を適用する事により，種数が 2 で level が素数 p である modular 曲線の normal form を計算する事ができる．

定理 3

$X_0(23) : y^2 = x^6 - 8x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 10x - 7 \quad (2^{12} \cdot 23^6)$

$X_0(29) : y^2 = x^6 - 4x^5 - 12x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 8x - 7 \quad (2^{12} \cdot 29^5)$

$X_0(31) : y^2 = x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 18x^3 - 11x^2 - 14x - 3 \quad (2^{12} \cdot 31^4)$

$X_0(37) : y^2 = x^6 + 8x^5 - 20x^4 + 28x^3 - 24x^2 + 12x - 4 \quad (2^{12} \cdot 37^3)$

$X^*(67) : y^2 = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 14x + 9 \quad (2^{12} \cdot 67^2)$

$X^*(73) : y^2 = x^6 - 4x^5 + 6x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 10x + 1 \quad (2^{12} \cdot 73^2)$

$X^*(103) : y^2 = x^6 - 10x^4 + 22x^3 - 19x^2 + 6x + 1 \quad (2^{12} \cdot 103^2)$

$X^*(107) : y^2 = x^6 - 4x^5 + 10x^4 - 18x^3 + 17x^2 - 10x + 1 \quad (2^{12} \cdot 107^2)$

$X^*(167) : y^2 = x^6 - 4x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \quad (2^{12} \cdot 167^2)$

$X^*(191) : y^2 = x^6 + 2x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 6x + 1 \quad (2^{12} \cdot 191^2)$

ここで，括弧の中の数字は，normal form $y^2 = g(x)$ に現れる多項式 $g(T)$ の判別式である．

定理 2 の証明は，X_Γ の normal form に現れる 2 つの有理型関数を用いた正則 1-form の代数的表示と $S_2(\Gamma)$ の元を用いた解析的表示を巧みに用いる事により，なされる．論文には明記されていないが，このアルゴリズムは種数 3 以上の超楕円曲線の normal form を求める際にも，有効である．又，このアルゴリズムを用いる事により，種数 3 以上の代数曲線の超楕円性を判定する事が出来る．実際，この判定法を用い，Kluit 予想が正しいという事が示される．又，定理 3 に於ける $g(T)$ の判別式の素因子の指数は，$y^2 = g(x)$ によって定義される Z 上の model と minimal regular model との gap を表しているのであるが，$X^*(p)$ に関しては，本論文で求めた normal form は，その gap が少ない非常に良いものである事が判る．

第二章では，superelliptic curve (hyperelliptic curve を一般化したもの) のヤコビ多様体の Mordell-Weil rank 考察している．以下が，主結果である．

定理 p を素数とし，K を ζ_p を含む代数体とする．$\mathcal{O}_K$ を K の整数環とする．$\mathcal{O}_K$- 係数の n 次分離多項式 f で次の 2 つの条件を満たすものを考える：$(n, \ p) = 1$; $\frac{1}{2}(p-1)(n-1) \geq 1$. K 上定義されたアーベル多様体として，$y^p = f(x)$ によって定義される代数曲線のヤコビ多様体 J を考えた時，

$$L = K(\sqrt[p]{d_1}, \ \ldots, \ \sqrt[p]{d_m}), \quad r_L \geq r_K + (p-1)m$$

を満たす L が具体的に無限個構成できる．ここで，K を含む任意の代数体 N に対し，r_N は，J の N 上の Mordell-Weil rank を表す．

この定理の根源は Néron にまで遡る．彼は，代数体 K 上定義された hyperelliptic curve (すなわち，$y^2 = f(x)$ によって定義される代数曲線) のヤコビ多様体の場合に，

$$L = K(\sqrt{d_1}, \ \ldots, \ \sqrt{d_m}), \quad r_L \geq m$$

となる L が無限個構成できる事を示した．しかし，Néron の証明では specialization の議論が用いられており，具体的に $d_1, \ \ldots, \ d_m \in K$ を，どの様に取って来れば良いかという事までは判らない．最近，Top が specialization の議論を用いずに，Néron の定理の別証を与えた．しかも，Top の証明だと $d_1, \ \ldots, \ d_m \in K$ をどの様に取れば良いかが判るのである．本論文の定理は，彼らが扱った hyperelliptic curve を，superelliptic curve にまで拡張したものである．証明は，Top の方法に，Kummer 拡大の理論と $\mathrm{Q}(\zeta_p)$ の整数環がヤコビ多様体の endomorphism ring に埋め込まれるという事実を組み合わせて得られる．Top は構成した有理点が一次独立であるという事を示すのにアーベル多様体の twist の議論を用いているのであるが，この論文では，その部分をある種の行列を使った議論で示しており，非常に簡明なものとなっている．本論文の定理は，素数次の Fermat 曲線 F_p に適用可能である．F_p のヤコビ多様体を J_p で表す．Weil は，任意の代数体 k に対し，J_p の k 上の L- 関数 $L(s, \ J_p/k)$ を，いくつかの Hecke L- 関数の積で表している．M を定理で構成された代数体とすると，Tate 予想から，$L(s, \ J_p/M)$ は，$s = 1$ で，位数 $(p-1)m$ 以上の零点を持つはずである．従って，対応する Hecke L- 関数も $s = 1$ で，高位の零点を持つはずである．又，$\mathrm{Z}[\zeta_p]$ の J_p の Tate module への作用と絶対ガロア群の作用が可換になる事から，$L(s, \ J_p/M)$ は，ある関数の $(p-1)$ 乗となる事が判る．この事から，予想される零点の位数に於ける $p-1$ という因子が理解される．

第三章では，種数 2 の曲線で，それのヤコビ多様体が，split しているもの全体のなす集合を考察している．このような曲線は，一般のものと比べて，数論的性質がかなり異なっており，moduli space の中で，これらが，どのように分布するかを調べる事は，重要である．$\mathcal{M}_2(\mathrm{C})$ を，種数 2 の代数曲線の同型類に関する coarse moduli space $\mathcal{M}_2$ の C- 有理点のなす集合とする．この時，次の集合 S_n (n は，2 以上の整数) を考えるのが自然である：

$$S_n = \left\{ [C] \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} C \text{ は，ある楕円曲線 } E \text{ へ degree } n \text{ の} \\ \text{“maximal” map } f \text{ を持つ} \end{array} \right\}$$

ここで，$[C]$ は種数 2 の代数曲線 C によって代表される同型類を表し，$f : C \longrightarrow E$ が “maximal” であるとは，非自明な不分岐部分被覆を持たない事を意味する．

一方，2 次の Siegel 上半空間 $\mathfrak{H}_2$ には，symplectic 群 Sp (4, Z) が作用し，その商空間は 2 次元主偏極アーベル多様体の同型類に関する coarse moduli space $\mathcal{A}_2$ の C- 有理点のなす解析空間 $\mathcal{A}_2(\mathbf{C})$ と canonical に同型である．$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_2$ が invariant Δ ($\Delta \in \mathbf{Z}$) の singular relation を持つとは，次の条件を満足する $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)\ (\neq 0) \in \mathbf{Z}^5$ が存在する事である：

- $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ の最大公約数は 1 である
- $a\tau_1 + b\tau_2 + c\tau_3 + d(\tau_2^2 - \tau_1\tau_3) + e = 0$
- $\Delta = b^2 - 4ac - 4de$

この時，$\mathfrak{H}_2$ の元で invariant Δ の singular relation を持つもの全体のなす集合を N_Δ とし，N_Δ の canonical な写像 $\mathfrak{H}_2 \longrightarrow \mathrm{Sp}(4,\ \mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H}_2$ による像を H_Δ とする．H_Δ は，invariant Δ の Humbert 曲面と呼ばれている．

定理　J_C によって C の (主偏極) ヤコビ多様体を表す．$\mathrm{Sp}(4,\ \mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H}_2$ と $\mathcal{A}_2(\mathbf{C})$ の canonical な同一視により，$H_\Delta \subseteq \mathcal{A}_2(\mathbf{C})$ とみる．この時，$\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ の元 $[C]$ が，S_n に属する為の必要十分条件は，$[J_C] \in H_{n^2}$ となる事である．

Legendre は，種数 2 の超楕円積分で次数 2 の変数変換を行うことにより，2 つの種数 1 の超楕円積分の和になるようなものの family を代数的に構成した．Jacobi は，これを拡張し，その様な性質を持つものの complete family (すなわち，上の性質を持つ種数 2 の超楕円積分は必ずその family の中に現れる) を構成した．これは，S_2 の代数的構造を決定した事に他ならない．更に，一般の S_n の代数的構造は，Lange によって研究されている．1 つの結果として，S_n は代数的集合 (すなわち，S_n の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ で，各 U_i がアフィン空間内の有限個の多項式の零点集合と同一視出来るものが存在する) となる事が示されている．他方，S_n の解析的構造の研究は，あまりなされておらず，S_n と invariant n^2 の Humbert 曲面 H_{n^2} が一致するという事を明確に示したのは本論文が最初である．証明は，テータ関数とリーマン形式の理論を用いて，なされる．本論文の定理と，$\mathrm{Sp}(4,\ \mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H}_2$ は十分大きい weight の Siegel modular form によって，複素射影多様体の部分多様体 (但し，閉部分多様体にはならない) として埋め込めるという事実から，Lange の結果の別証が得られる．