早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

On the C^1 Stability Conjecture
(C^1 安定性予想について)

申 請 者
林 修平
Shuhei Hayashi

数学専攻・トポロジー研究

1 9 9 4 年 10月

本論文では, C^1 Stability Conjecture と, その解決に必要な connecting lemma を研究の対象とする. ここで, M は compact で境界のない smooth manifold とし, $\mathrm{Diff}^1(M)$ を M の C^1 diffeomorphism 全体からなる集合とする.

第 1 章

定義. f が C^1 structurally stable であるとは, $\mathrm{Diff}^1(M)$ における f のある近傍 $\mathcal{U}$ に属する各 g に対して, M の homeomorphism h が存在し, $hf = gh$ となることである. また, この homeomorphism が f の nonwondering set $\Omega(f)$ 上に制限されているとき, f は C^1 Ω-stable であるという.

Smale と Palis は 1970 年に, diffeomorphism が stable であるための必要十分条件を予想した.

予想 I) f が C^r structurally stable であるための必要十分条件は f が Axiom A と strong transversality condition を満たすことである.

II) f が C^r Ω-stable であるための必要十分条件は f が Axiom A と no cycles condition を満たすことである.

それ以来この予想については多くの研究がなされた. 十分条件の方の証明は C^2以上が 1971 年, C^1が 1976 年, と比較的早い時期に解決したが, 必要条件に関する "$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ が C^1 structurally stable あるいは C^1 Ω-stable であるとき, f は Axiom A を満たす" という部分は長い間未解決で C^1 Stability Conjecture と呼ばれ, Smale の力学系理論における中心問題として残っていた. 1988 年 Mañé は f が C^1 structurally stable であるときこれを証明し, その直後 Palis は Mañé の結果をもとに, C^1 Ω-stable まで拡張した.

定義. ある C^1 近傍 $\mathcal{U}$ を持ち, その $\mathcal{U}$ に属するすべての g のあらゆる periodic point が hyperbolic であるような $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ 全体を $\mathcal{F}^1(M)$ で表す.

C^1 Ω-stable diffeomorphism は $\mathcal{F}^1(M)$ に属している. Mañé は C^1 Stability Conjecture を解決する過程で, すべての $\mathcal{F}^1(M)$ の element は Axiom A を満たすであろうと予想し, 実際, 彼自身 M が 2 次元の場合を証明した. また Palis は, 先の C^1 Ω-stable diffeomorphism への拡張の際に, $\mathcal{F}^1(M)$ の open dense subset の element は Axiom A を満たすことを示した. 第 1 章では, 次の定理を証明する.

定理. $\mathcal{F}^1(M)$ に属する diffeomorphism は Axiom A を満たす.

つまり Mañé の予想が一般次元で正しいことになり, C^1 Stability Conjecture が最も理想的な形で証明されたことになる. また Mañé は C^1 Stability Conjecture を解くために 2 種類の C^1 perturbation を開発したが, そのひとつである Attainability Theorem を本論文では用いないので, 証明自体も簡略化された.

$f|\Lambda$ が transitive であるような isolated hyperbolic set Λを basic set という. $P_j(f)$ を f の index j の periodic point の集合とするとき, $\overline{P_j(f)}$ が hyperbolic set ならば $\overline{P_j(f)}$ は disjoint な basic set の finite union で表される. $f \in \mathcal{F}^1(M)$ なら, $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$ であり, $P_0(f)$ は finite set（よって hyperbolic）であることが知られているので, $\bigcup_{0 \le i \le j} \overline{P_i(f)}$ が hyperbolic と仮定して, $\overline{P_{j+1}(f)}$ が hyperbolic であることをいえば, 先の定理が証明される. $\mathcal{F}^1(M)$ の性質から. $\overline{P_{j+1}(f)}$は, 既に弱い hyperbolicity を持っている. 即ち dominated splitting $TM|\overline{P_{j+1}(f)} = E \oplus F$ が存在して, ある $m > 0$, $0 < \lambda < 1$ とすべての $x \in \overline{P_{j+1}(f)}$ について, $\|(Df^m)|E(x)\| \cdot \|(Df^{-m})|F(f^m(x))\| < \lambda$ であり periodic orbit 上では E, Fがそれぞれ 1 周期の平均として contracting, expandig になっている. この E が実際に contracting ならば Fが expanding であることがいえるので, 結局 E が contracting であること, 即ちすべての $x \in \overline{P_{j+1}(f)}$ に対して $\|(Df^m)|E(x)\| < \lambda < 1$ をいえばよい. さて, $\overline{\bigcup_{0 \le i \le j} P_i(f)} = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_l$ と disjoint な basic set の finite union で表すとき, $\bigcup_{t=1}^{l} \Lambda_t \cap \overline{P_{j+1}(f)} = \emptyset$ であればそれがいえるので定理の証明は次の命題を示すことに帰着される. 実際, この命題によって index $\le j$の新しい periodic point ができるので $\mathcal{F}^1(M)$ の性質に反する.

命題. $f \in \mathcal{F}^1(M)$ で $P_{j+1}(f)$ が $\cup_{t=1}^{l} \Lambda_t$に集積しているとき, $\cup_{t=1}^{l} \Lambda_t$ のある近傍で f と一致し, f に C^1 でいくらでも近い $g \in \mathrm{Diff}^1(M)$ が存在して, ある $1 \le t \le l$ に対し, $W_g^s(\Lambda_t) \cap W_g^u(\Lambda_t) - \Lambda_t \ne \emptyset$ となる.

さて E が contracting でないとすると, 平均すると contracting であるか, 平均しても contracting にならないような, いくらでも長い finite orbit がとれる. Mañé は前者のときは Attainability Theorem, 後者のときは下にのべる補題を用いて, 異なる basic set 間の heteroclinic point をつくることにより stability 即ち, 先の定義における homeomorphism h の存在との矛盾を示している. 一方 Palis は Mañé の technique を何度も用いることにより $\mathcal{F}^1(M)$ における Axiom A の density を示し, そこから C^1 Ω-stable diffeomorphism が Axiom A であることを導いた.

補題 (Mañé). M の Borel σ-algebra 上の probability 全体の集合で通常の位相を持つものを $\mathcal{M}(M)$ とすると, $\mathcal{M}(M)$ における列

$$\{\mu(x_k, n_k) = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \delta_{f^{-j}(x_k)} | k \ge 1\}, \ \lim_{k \to \infty} n_k = \infty, \ \lim_{k \to \infty} x_k = x$$

の集積点 μ に対して, $\mu(\Lambda) > 0$ かつ $x \notin \Lambda$ であれば, Λ のある近傍で f と一致し, C^1 で f にいくらでも近い g で, ある k に対して $x_k \in W_g^u(\Lambda)$ となるものが存在する.

ところが, $\mathcal{F}^1(M)$ の場合は stability の定義における homeomorphism が存在しないので, heteroclinic point ではなく命題で要求されているような homoclinic point をつくらなくてはならない. そこで, この章では $\mu(\Lambda) > 0$ のときの finite orbit と $\mu(\Lambda) = 0$ のときの E に関する contracting finite orbit をうまく選んだ上でそれらを組み合わせ, その 2 つの finite orbit を trace する orbit が（Mañé の枠組みにおける）C^1 perturbation によっ

て homoclinic orbit の一部となるようなものを見つける．その際，上の補題の内容をより sharp な形にして用いる．

第 2 章

前に述べたように，C^1 Stability Conjecture は最終的には，ある basic set の finite union $\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_l$ に，periodic point が集積しているとき，あるひとつの basic set Λ_i に対して，その stable manifold $W^s_f(\Lambda_i)$ と unstable manifold $W^u_f(\Lambda_i)$ を C^1 perturbation によって連結するという問題に帰着される．そこで Mañé は C^1 Stability Conjecture の証明に際し，いくつかの connecting lemma を開発したが，その中に次の (A) がある．$x \in M$ に対して $\mathcal{M}(x)$ を

$$\mu(x,n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{f^j(x)}$$

のように表される probability の集積点全体からなる集合とする．

(A) ある $\mathcal{M}(x)$, $x \notin W^s(\Lambda)$ に属するすべての $\mu \in \mathcal{M}(x)$ に対して $\mu(\Lambda) > 0$ ならば，f の任意の C^1 近傍 $\mathcal{U}$ の中に，Λ のある近傍で f と一致し，ある $1 \leq i \leq l$ に対して $W^s_g(\Lambda_i) \cap W^u_g(\Lambda_i) - \Lambda_i \neq \emptyset$ となる g が存在する．

ところが，この証明には gap があり，Mañé の論法で (A) を証明することは出来ない．第 2 章では，その根拠を示すとともに，(A) に代わる次の定理を証明した．

定理．ある $x \notin W^s(\Lambda)$ が存在して，すべての $\mu \in \mathcal{M}(x)$ に対し $\mu(\Lambda) > 0$ とする．このとき (A) の結論が成り立たなければ次が成り立つ：basic set $\Lambda_{i_1}, \ldots, \Lambda_{i_m}$ と f の任意の C^1 近傍 $\mathcal{U}$ に属する $g_1, \ldots, g_m$ が存在して、各 g_t は Λ のある近傍で f と一致し、$W^s_{g_t}(\Lambda_{i_t}) \cap W^u_{g_t}(\Lambda_{i_{t+1}}) \neq \emptyset$ $(1 \leq t \leq m-1)$, $W^s_{g_m}(\Lambda_{i_m}) \cap W^u_{g_m}(\Lambda_{i_1}) \neq \emptyset$ となる．

第 3 章

Pugh の C^1 Closing Lemma は 1960 年代からあるにもかかわらず，box が重複する場合を扱った研究はこれまでないように思われる．box が重複する場合にも同様のことが出来れば，今までは不可能と思われた C^1 perturbation が可能となる．これは flow についても適用できることから，flow に対する C^1 Stability Conjecture の解決に必要な C^1 connecting lemma の開発にも役立つ．この章では Pugh の perturbation technique を要約しながら，ある程度重複する場合について試み，概略を述べた．