早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

電子計算機の数学研究への応用

申 請 者
井戸川 知之
Tomoyuki Idogawa
物理学及び応用物理学専攻
数理物理学研究

1995年 11月

電子計算機の誕生以来、他の研究分野での場合と同様に、数学においても、その研究に電子計算機が活用されるようになり、旧来とは異なる、電子計算機を用いた新しい研究分野・方針もいくつか生まれてきた。数値解析と名のつくものは、その典型であり、電子計算機の活用という意味では、最も古くからなされているものである。また、離散数学と呼ばれる分野には電子計算機と密接な関係のあるものが数多くある。膨大な量の場合分け、数え上げ等のある問題については、電子計算機の活用が極めて有効である。中でも、四色問題の証明等は有名であろう。これらとは活用法が異なるが、例えば微分方程式の解など、数学で取り扱われる様々な対象の、電子計算機による可視化が、理論研究に大きく貢献している。このような中で、更に近年は、ワークステーションやパーソナルコンピュータといった、個人で占有可能な安価で小型の電子計算機が急速な発展を遂げつつあり、広く一般に普及してきている。それに従い、より多くの数学者が電子計算機の利用を始め、様々な活用が考えられるようになった。

こうした状況を踏まえ、本研究では、数学研究支援ソフトを作る立場、数学の問題を研究する立場の二面から、電子計算機の数学研究への応用を見ている。ここでは、4 つのそれぞれ異なる問題を扱い、それを第 2 章から第 5 章に記してある。第 2 章の研究では、現在あまり扱われていない、不等式の数式処理に対する機能の実現を目標にしている。これに対して、第 3 章以降の研究では、数学者の立場にたち、現実の未解決問題に対し、積極的に電子計算機を活用しながら、実際に成果をあげる、ということを行っている。各章には、その成果とあわせて、そこで電子計算機をどのように活用したか記してある。以下に各章の概略を述べる。

第 2 章「不等式を扱う数式処理システムの研究」では、数式処理ソフトで如何に不等式を扱うかに対しての一つの答を、試作システムの構築、という形で記してある。具体的には、既存の数式処理システム REDUCE 上に、与えられた多項式の符号条件式を論理式の形で返す、というパッケージを以下のように構築している。

まず、REDUCE では論理式が扱えないので、その拡張を行った。論理式の内部表現としては選言標準形を採用している。その際、各素論理式に適当な順序を導入し、その順序で整列させることで、表現の単一化を図っている。

次に、多項式の符号条件式という概念を導入した。これは、与えられた多項式 f が正・零・負である、ということを示す 3 つの論理式を組にしたもので、REDUCE 上では $\{\#P(f), \#Z(f), \#N(f)\}$ というリストで表される。$\#P$, $\#Z$, $\#N$ はその引数がそれぞれ正, 零, 負のとき真となる述語を表している。この符号条件式を、f の形に従って変形する、というのが本パッケージの主な役割である。これは記号微分の手法にヒントを得たもので、多項式 f の符号条件式を、f の構成要素の符号条件式を用いて表す、というものである。例えば、$f = gh$ と f が部分式の積で表されている場合、符号条件式は $\{(\#P(g) \wedge \#P(h)) \vee (\#N(g) \wedge \#N(h)), \#Z(g) \vee$

$\#Z(h), (\#P(g) \wedge \#N(h)) \vee (\#N(g) \wedge \#P(h))\}$ となる。ここで、$\wedge$ は論理積、$\vee$ は論理和を表しており、この符号条件式は、例えば、「gh が正となるのは gが正かつ h が正、または、gが負かつ h が負のときである」ということを示している。和、巾乗についても同様な展開を定義した。これを部分式がもはや分解されなくなるまで、繰り返して実行する。

多項式が部分式の積で書ける場合、符号条件式は部分式の符号条件式のみを用いて書けるが、和の場合は扱いが難しい。また、符号条件式の展開をそのまま行うと、得られる論理式は一般に冗長なものとなる。そこで、符号条件式の簡約化プロセスというものも作成した。ここでは、論理演算子、述語、多項式、のそれぞれの性質に由来する三種類の簡約化アルゴリズムを構築した。特に、多項式の性質によるものとしては、因数分解を用いたもの、完全平方式への変形を用いたもの、の二通りを考え、これらの簡約化への貢献が大きいことを、実験を通して確認した。

第 3 章「ある非線形常微分方程式の二点境界値問題の実解析性」では、実関数論の分野から問題を一つ得て、それについて調べた。

ここで扱ったものは、区間 $[a, b]$ 上の $(|u_x|^{p-2}u_x)_x(x) + |u|^{q-2}u(x) = 0$ なる非線形常微分方程式の、0 境界値 Dirichlet 問題である。これは Sobolev-Poincaré 型の不等式に付随する方程式の 1 次元版で、その解の平滑性については、1984 年に M. Ôtani により詳細に調べられ、u の可微分階数に対する指数 p, q の必要十分条件が具体的に示されている。ここでの問題は、特に u が無限回連続可微分のとき、更に u は実解析的になるか、というもので、これを肯定的に示す結果を得た。

証明には、実解析性に関する必要十分条件を与える Pringsheim の定理、即ち、「u の高階導関数 $u^{(k)}$ が、x に依存しない正定数 A, B を用いて、$|u^{(k)}(x)| \leq AB^k k!$ となるとき、かつそのときに限り、有限閉区間で定義された無限回連続可微分な実関数 u が実解析的になる」という定理を使っている。ここでは、これらの正定数 A, B を具体的に求めている。その際の基本方針は次の通りである。まず、方程式を変形して、u_{xx} を u と u_x で表す。この関係式の両辺を微分すると、$u^{(3)}$ が u, u_x, u_{xx} で表されることになるが、再び u_{xx} の式を用いれば、結局、$u^{(3)}$ も u, u_x で書ける。同様に、この関係式を再帰的に用いることで、$k > 3$ に対しても、$u^{(k)}$ を、u と u_x で書ける。これらの具体形から、$|u^{(k)}(x)|$ の大きさを、$|u(x)|, |u_x(x)|$ の最大値を用いて評価することができ、上記 A, B が求められる。

ここで、$u^{(k)}$ の具体形を求めるにあたり、上記プロセスを用いた数式実験を通して、その形を予測した。この予測を、数学的帰納法により確認し、定理の証明へとつなげている。

第 4 章「エジプト分数表現に関連した問題」で扱っているのは、初等整数論で扱われる問題の一つで、有理数を単位分数の有限和で表現する、というものである。

エジプト分数に関連した問題は多数あるが、最も有名なものは、Erdös-Straus の

予想であろう。即ち、「不定方程式 $4/n = 1/x + 1/y + 1/z$ は、任意の $n \geq 3$ に対して、自然数解 x, y, z $(x < y < z)$ を持つ」という予想で、未解決問題である。本章前半では、与えられた n に対して、この不定方程式を解くアルゴリズムを構築して数値実験を行っている。この結果を見て、n が奇素数 p の場合、$x < p/2$ である、$p|z, p^2 \nmid z$ である、といった予想がたち、更にこれらを証明することができた。

本章の中盤では、$a/b = \Sigma_{i=1}^{n} 1/x_i$ と展開したときのエジプト分数の長さ n に関する問題を扱っている。ここでは、n をとめるごとに、「長さ n のエジプト分数で表現できる正の有理数は至るところ疎である」という内容を表す結果を得ている。

後半では、エジプト分数表現の重複項除去可能の定理、「1 より小さい正の有理数 q に対して、広義エジプト分数表現 $q = \Sigma_{i=1}^{n} 1/x_i$ $(x_i \leq x_{i+1})$ が与えられると、これを書き換えて、狭義表現 $q = \Sigma_{i=1}^{n} 1/x'_i$ $(x'_i < x'_{i+1})$ とできる」という結果と、その応用について書いている。定理の証明として、実際の書き換えアルゴリズムを提示し、その停止性を示した。この書き換えアルゴリズムを $a/b = \Sigma_{i=1}^{a} 1/b$ $(0 < a < b)$ に用いると、a/b の狭義エジプト分数表現を得ることができる。これは今までにない狭義エジプト分数表現導出アルゴリズムである。これを用いて生成される表現の性質については、数値実験を通して、従来知られているアルゴリズムとの比較を行った。また、特定の形をした a/b の展開形について、いくつかの定理を得た。

第 5 章「一般化された曲線短縮方程式の数値解析」では、微分幾何に現れるある非線形偏微分方程式を取り上げ、その数値解法についての研究を行った。

ここで扱った一般化された曲線短縮方程式とは、$(\partial/\partial t)\mathcal{C} = g(\kappa)\mathcal{N}$ と書かれる、平面中の閉曲線 $\mathcal{C}$ の時間発展方程式である。ここで、t は時間変数、$\kappa, \mathcal{N}$ はそれぞれ曲線の曲率、内向き単位法線ベクトル、g は適当な非減少実関数である。これは、各点が、法線方向に曲率に依存した速さで移動することで変形して行くという曲線の振舞いを表した方程式である。特に、$g(\kappa) = \kappa$ としたものが、本来の曲線短縮方程式と呼ばれていたもので、この場合は曲線は時間とともに縮むことが知られている。

本章では、この一般化された曲線短縮方程式に対して、新たに構築した数値解法を提示し、その検証を試みている。用いた数値解法は、曲線を折れ線で近似し、各節点の時間変化を陽解法で求めるものであるが、曲率、法線ベクトルの近似方法に特徴がある。n 番目の節点 $\mathcal{C}_n$ での近似値 $\kappa_n, \mathcal{N}_n$ は、$\kappa_n^{-1}\mathcal{N}_n$ が、$\mathcal{C}_n$ から三角形 $\mathcal{C}_{n-1}\mathcal{C}_n\mathcal{C}_{n+1}$ の外接円の中心を指すベクトルとなるように近似している。これは、二次の接触円の半径が $|\kappa|^{-1}$ に等しい、という κ の幾何学的表現に立脚している。

また、特に $g(\kappa) = -1/\kappa$ のときは、一般化された曲線短縮方程式は、曲線の接線が x 軸となす角 θ を曲線パラメータに取って書き直すと、線形方程式になる。即ち、この場合は、方程式の厳密解が求められるので、この厳密解と数値解との比較を行って、数値解法の検証をした。