早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Reformulation of Einstein equations with constraint damping and numerical simulation

Constraint damping を用いた Einstein 方程式の再定式化と数値計算

申　請　者

土屋	拓也
Takuya	TSUCHIYA

数学応用数理専攻　相対論研究

2012 年 5 月

一般相対性理論における支配方程式の一つである Einstein 方程式は, 非線形連立 2 階偏微分方程式である. この解は, 対称性などの条件を課した場合において多数発見されている (例えば, “Exact Solutions of Einstein’s Field Equations”) が, 一般解を求めることは非常に困難である. 一方で, 物理的に興味のある現象には, 対称性などの条件がない場合が多く, 対称性などを課さない解についての解析を行うために, Einstein 方程式を数値計算を用いて解く “数値相対論” が 1990 年以降発展してきた. 一般相対性理論は, 時間と空間の混在した 4 次元共変形で構築されているため, Einstein 方程式自体をそのまま用いて計算することができず, Einstein 方程式を時間成分と空間成分に分解するのが一般的である. これを 3+1 分解と呼ぶ. これは, 4 次元 (semi-)Riemann 多様体を時間一定面の超曲面の葉層構造としてとらえ, 各超曲面上で満たされるように Einstein 方程式を再定式化し, Cauthy 問題として考えていることにあたる. 3+1 分解によって, Einstein 方程式は非線形双極型の発展方程式と非線形楕円型の拘束方程式に分解される.

この分解の方法を最初に行ったのが R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner(“in Gravitation: an introduction to current research, edited by L. Witten”) らであったため, これを ADM formulation と呼ぶ. ADM formulation によって Einstein 方程式を数値計算可能な方程式系に書き下すことができたが, ADM formulation を用いて数値計算を行うと, 数値安定性が良くないことが知られている. そこで, ADM formulation 以外の, 数値安定性の良い方程式系を構築する研究が盛んに行われている. これを数値相対論における formulation 問題と呼ぶ. 新しい formulation は多数提案されてきているが, 主な formulation としては Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) formulation, generalized-harmonic (GH) formulation, Kidder-Scheel-Teukolsky (KST) formulation, Z4 formulation などがある. これらの formulation を用いて, 連星中性子星や連星ブラックホールの合体やその際の重力波のシミュレーションなどが数多く行われている.

一方で, formulation 問題の答えとしては, 確たるものは得られていない. 新しい formulation には, 発展方程式に拘束方程式を付加する constraint-damping という技術が用いられていることに注目し, 数値安定性はこの技術によるものではないかという視点がある (例えば, G. Yoneda and H. Shinkai, Phys. Rev. D **63**, 124019(2001): Phys. Rev. D **66**, 124003 (2002)). そこで, 発展方程式に適切に拘束方程式を付加すれば, 数値安定な方程式系を構築することができるのではないかと考えられた. それらを定式化したものは, “adjusted system” と呼ばれている. これは, 発展方程式系:

$$\partial_t u^i = f(u^i, \partial_j u^i, \cdots), \tag{1}$$

$$C^i = g(u^i, \partial_j u^i, \cdots) \approx 0, \tag{2}$$

(u^i は発展変数, C^i は拘束値, $\approx$ は力学系に現れる weak equality である) に対して, 拘束値の時間発展方程式 (拘束伝播方程式) は

$$\partial_t C^i = h(C^i, \partial_j C^i, \cdots), \tag{3}$$

となる. ここで, (1) のかわりに

$$\partial_t u^i = f(u^i, \partial_j u^i, \cdots) + F(C^i, \partial_j C^i, \cdots) \tag{4}$$

と発展方程式に拘束値から構成される付加項 $F(C^i, \partial_j C^i, \cdots)$ を加えた発展方程式を考えれば, 拘束伝播方程式 (3) は

$$\partial_t C^i = h(C^i, \partial_j C^i, \cdots) + H(C^i, \partial_j C^i, \cdots) \tag{5}$$

と変化を受ける．この変化が数値安定化につながるように $F(C^i, \partial_j C^i, \cdots)$ を付加すればよいという考えである．この際, 数値安定性の解析の方法として, 拘束伝播方程式の係数の固有値を解析することで, 安定性を考える手法が提案された, この手法では, Fourier 変換によってモード分解を行い, その固有値の実部が負であれば, (時間的に) 漸近的な解が得られるというシステムになっている．この固有値のことを Constraint Amplification Factors(CAFs) とよぶ．そのため, CAFs の実部が負になるようなシステムを考案すれば, 数学的に数値安定なシステムであることが保障される．

しかし, adjusted system はどのようにしたら CAFs の実部が負になるようなシステムを構築できるかという問いに対しては, その解答を与えていない．そこで, D. R. Fiske(Phys. REv. D **69**, 047501) によって提案された "C^2-adjusted System" によって, それに対する一つの解答が与えられる．C^2-adjusted System では発展方程式:

$$\partial_t u^i = f(u^i, \partial_j u^i \cdots) \tag{6}$$

に対して,

$$\partial_t u^i = f(u^i, \partial_j u^i \cdots) - \kappa_{ij} \frac{\delta C^2}{\delta u^j} \tag{7}$$

という修正をおこなう．ただし, $C^2 \equiv \int dx^3 C^i C_i$, κ_{ij} は positive definite とする．その際, C^2 の拘束伝播方程式は

$$\partial_t C^2 = G(C^a, \partial_b C^a, \cdots) - \left(\frac{\delta C^2}{\delta u^i}\right) \kappa_{ij} \left(\frac{\delta C^2}{\delta u^j}\right) \tag{8}$$

となる．(8) の右辺第 2 項目が (7) の修正から生じる項である．(8) の右辺第 2 項目は常に正であるため, 第 1 項目よりも第 2 項目が支配的になるようにパラメータ κ_{ij} を設定すれば, $\partial_t C^2 < 0$ を実現でき, 数値安定性の高い方程式系を構築できる．

本論文では, C^2-adjusted System を ADM formulation と BSSN formulation に適用し, その数値安定性が良くなることを解析的な面から議論し, 数値計算によっても確認した．

論文の構成は以下のとおりである．全体は 3 部構成であり, 第 1 部では数値相対論の概要を述べた．第 1 章では, 数値相対論における導入を述べた．第 2 章では．最初に Arnowitt, Deser, Misner らにより導出された Einstein 方程式の正準系 (original ADM formulation) について述べた．その次に, 第 3 章で J. W. York, Jr, L. Smarr によって幾何学的に再定式化された形式 (standard ADM formulation) について述べた．その後, 第 4 章で現在最もよく用いられる formulation の一つである BSSN formulation について述べた．

第 2 部では, 第 5 章で安定性の解析のための中心になる拘束伝播方程式について述べた。第 6 章では数値安定のために手法の説明を行った．ここで, adjusted system

の解説, CAFs の解説, それに C^2-adjusted System の解説を行った. 第 7 章では standard ADM formulation に C^2-adjusted System を適用した C^2-adjusted ADM formulation について述べた. 次に, 第 8 章で BSSN formulation に C^2-adjusted System を適用した C^2-adjusted BSSN formulation について述べた.

第 3 部では, 第 9 章で数値計算の設定について解説した. 第 10 章で, C^2-adjusted ADM formulation を用いて数値計算を行った時の結果を載せ, その解説を行った. 第 11 章で C^2-adjusted BSSN formulation を用いて数値計算を行った時の結果を載せ, その解説を行った. 第 12 章で, 本論文のまとめを述べた.

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

氏 名　　土屋　拓也　印

（2012 年　5 月　現在）

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
論文	[1] ○Constraint propagation of C^2-adjusted formulation. II. Another recipe for robust Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura evolution system, Takuya Tsuchiya, Gen Yoneda and Hisa-aki Shinkai, Phys. Rev. D **85**, 044018 (2012) [2] ○Constraint propagation of C^2-adjusted formulation: Another recipe for robust ADM evolution system, Takuya Tsuchiya, Gen Yoneda and Hisa-aki Shinkai, Phys. Rev. D **83**, 064032 (2011)
講演	[1] Constraint propagation and constraint-damping for C^2-adjusted formulations, 土屋　拓也，第 24 回理論懇シンポジウム（国立天文台）(2011 年 11 月) [2] Constraint propagation and constraint-damping for C^2-adjusted formulations, Takuya Tsuchiya, The 21st workshop on General Relativity and Gravitation in Japan（東北大学）(2011 年 9 月) [3] Einstein 方程式の数値シミュレーションの安定化法，土屋　拓也，日本数学会 2010 年度年会(2010 年 3 月)
その他（報告書）	[1] Constraint Propagation and constraint-damping in the C^2-adjusted formulation. Takuya Tsuchiya, Gen Yoneda, and Hisa-aki Shinkai, PROCEEDINGS OF THE TWENTY-FIRST WORKSHOP ON GENERAL RELATIVITY AND GRAVITATION IN JAPAN, (2011) [2] Constraint Propagation of C^2-adjusted Equations ---Another Recipe for Robust Evolution Systems--- Takuya Tsuchiya, Gen Yoneda, and Hisa-aki Shinkai, PROCEEDINGS OF THE NINETEENTH WORKSHOP ON GENERAL RELATIVITY AND GRAVITATION IN JAPAN, pp.363-366, (2009)