早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博　士　論　文　審　査　報　告　書

論　文　題　目

Reformulation of Einstein equations with constraint damping and numerical simulation

Constraint dampingを用いたEinstein方程式の再定式化と数値計算

申　請　者

TSUCHIYA　Takuya

土屋　拓也

数学応用数理専攻　相対論研究

2012年7月

Einstein 方程式を数値計算によって解を解析する数値相対論において, 4 次元共変的な Einstein 方程式を数値計算可能な方程式系へ再構築することは, 一つの研究テーマとなっている．最もよく知られている再定式化された方程式系は Arnowitt-Deser-Misner(ADM) formulation と呼ばれ, 数値相対論における基本的な方程式系となっている．しかし, ADM formulation を用いた数値計算では, 数値安定性が悪いことが知られており, 物理的に興味深い現象であるブラックホール形成の数値計算などには適していない．そこで, 長時間重力場の強い現象のシミュレーションを行える方程式系の構築をテーマとした formulation 問題を解くために, 本論文では新たに数値安定な方程式系を提案し, 実際にその方程式系を用いた数値計算によりその安定性を確かめた.

本論文の構成は 3 部構成となっており, 以下の通りである．まず, 第 1 部では, 数値相対論において基本となる方程式系および現在最も頻繁に用いられる方程式系の紹介をしている．最初に, 数値相対論の中で最も基本的な方程式系である ADM formulation の紹介をしている．次に, 現在数値相対論研究者の間で最も頻繁に用いられている方程式系の一つである, Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) formulation の紹介をしている．

第 2 部では, 数値計算の安定性の解析方法の紹介と, 新しい方程式系を構築する手法, それを用いた新たな方程式系が提案されている．まず, 数値安定性を解析する手段となる拘束方程式の時間発展式 (拘束伝播方程式) の導出を行っている．拘束値は解析的には 0 であるべき量だが, 数値計算上では数値誤差により 0 とはならない．その誤差がどのように増加していくか予測できる方程式が拘束伝播方程式である．これが数値計算とともに self-decay してくれるように方程式系を構築すれば, 数値計算は安定して行われるはずであるというのが, この方程式を用いた再定式化を考案する研究者たちの主張である．拘束伝播方程式が self-decay してくれる方程式系を構築するための一つの処方箋として, 発展方程式に拘束値を付加すればよいと考え, その安定化の度合いをはかる尺度として, Constraint Amplification Factors(CAFs) を提案した先行研究がある Yoneda-Shinkai(Phys. Rev. D **63**, 124019 (2001))．しかし, そこではどのように拘束値を付加すればよいかの方法までは提案されていなかった．本論文では, その付加の方法の 1 つとして, Fiske(Phys. Rev. D **69**, 047501 (2004)) によって提案された, 拘束値の 2 乗ノルムの変分項を発展方程式に付加する方法 (C^2-adjusted System) を ADM formulation と BSSN formulation に適用し, その安定性の解析と数値計算による確認を行っている．この方法の概要は以下の通りである．拘束

条件付き発展方程式系:

$$\partial_t u^i = f(u^i), \tag{1}$$

$$C^a(u^i) \approx 0, \tag{2}$$

(u^i は発展変数, C^a は拘束値) に対して, その拘束値の 2 乗ノルムの発展変数による変分項を付加した方程式系

$$\partial_t u^i = f(u^i) - \kappa^{ij}\left(\frac{\delta C^2}{\delta u^j}\right), \tag{3}$$

$$C^a(u^i) \approx 0, \tag{4}$$

を考える (κ^{ij} は正定値とする). このとき, 拘束値の 2 乗ノルム C^2 の時間発展式は

$$\partial_t C^2 = g(C^a, \partial_j C^a, \cdots) - \left(\frac{\delta C^2}{\delta u^i}\right)\kappa^{ij}\left(\frac{\delta C^2}{\delta u^j}\right) \tag{5}$$

となる. 右辺第 2 項目が発展方程式への付加によって加わった項である. κ^{ij} は正定値であることから, 右辺第 2 項目は常に負となり, κ^{ij} をうまくとれば $\partial_t C^2 < 0$ が実現でき, self-decay してくれる方程式系になっていることがわかる. 本論文では, まずこの手法を ADM formulation に適用した方程式系 C^2-adjusted ADM formulation を導出した:

$$\partial_t \gamma_{ij} = [\text{Original Terms}] - \kappa_{\gamma ijmn}\left(\frac{\delta C^2}{\delta \gamma_{ij}}\right), \tag{6}$$

$$\partial_t K_{ij} = [\text{Original Terms}] - \kappa_{Kijmn}\left(\frac{\delta C^2}{\delta K_{ij}}\right), \tag{7}$$

$$\mathcal{H} \approx 0, \quad \mathcal{M}_i \approx 0, \tag{8}$$

ただし, $C^2 \equiv \int d^3x(\mathcal{H}^2 + \gamma^{ij}\mathcal{M}_i\mathcal{M}_j)$. この方程式系に対して, その安定性の解析を CAFs を求めることで確認した. 簡単のために $\kappa_{\gamma ijmn} = \kappa_{Kijmn} = \kappa\delta_{im}\delta_{jn}$ とし, flat な時空の摂動を考え，Fourier 変換を行うと拘束伝播方程式は

$$\partial_t \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{H}} \\ \hat{\mathcal{M}}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\kappa|k|^4 & -2\mathrm{i}k_j \\ -(1/2)\mathrm{i}k_i & \kappa(-k^2\delta_{ij} - 3k_ik_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{H}} \\ \hat{\mathcal{M}}_j \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる. ただし, $\mathcal{H} = \int \hat{\mathcal{H}} \exp(\mathrm{i}k\cdot x)d^3x, \mathcal{M}_i = \int \hat{\mathcal{M}}_i \exp(\mathrm{i}k\cdot x)d^3x$. この係数行列の固有値は

$$(-\kappa k^2, -\kappa k^2, \lambda_+, \lambda_-), \quad \text{where} \quad \lambda_\pm \equiv -2\kappa k^2(k^2+1) \pm |k|\sqrt{-1 + 4\kappa^2 k^2(k^2-1)^2} \tag{10}$$

となり, $\lambda_+ + \lambda_- < 0$, $\lambda_+\lambda_- > 0$ よりすべての固有値の実部は負となる. CAFs はその実部が負であることが方程式系の数値安定性を示すことを考慮すれば, この方程式系は数値安定となることが予想される. さらに, C^2-adjusted System を BSSN formulation に適用した C^2-adjusted BSSN formulation を導出した．そして，これについての CAFs の計算を数値的に行い，すべての CAFs の実部が負であることを確認し, この方程式系が数値安定となることを示した.

第 3 部では, 第 2 部で得た C^2-adjusted ADM formulation と C^2-adjusted BSSN formulation に対して数値計算を行い, もとの方程式系と比較することで, 新しく得た方程式系のほうが拘束値の破れを抑えることを確かめた. さらに, 別の補正システムである先行研究の Detweiler system(Phys. Rev. D **35**, 1095 (1987)) と $\widetilde{A}$-adjusted BSSN formulation (Phys. Rev. D **66**, 124003 (2002)) に対しても数値計算を行い, 今回提案された方程式系の方がより拘束値の破れを押さえることも確かめた. また, BSSN formulation においては, 拘束方程式の数が ADM formulation の場合よりも 5 本多く, その 5 本をどのように用いて C^2-adjusted BSSN formulation を構築すると数値安定となるかということについて, 解析的な観点と数値計算の両方で調査し, 良いものを提案した.

以上で述べたように, 申請者は本論文で数値相対論の新しい方程式系を提案し, その方程式系が解析的な観点から安定性を持つことを示し, さらに数値計算で実際に数値安定であることを確認している. この分野では，重力波観測など，観測結果と比較する必要があり，高精度なものが要求される．また, ブラックホールの衝突など，さらに複雑な現象を取り扱う傾向にある．数値安定性の高い方程式系の需要は高まると思われ, 本研究における手法は，数値相対論において，今後重要な位置を占めると考えられる. よって, 本論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認められる.

2012 年 6 月

審査員

(主査)	早稲田大学教授	博士（理学）早稲田大学	米田 元
(副査)	早稲田大学教授	理学博士（京都大学）	上野 喜三雄
	早稲田大学教授	工学博士（東京大学）	高橋 大輔
	早稲田大学教授	理学博士（京都大学）	前田 恵一