

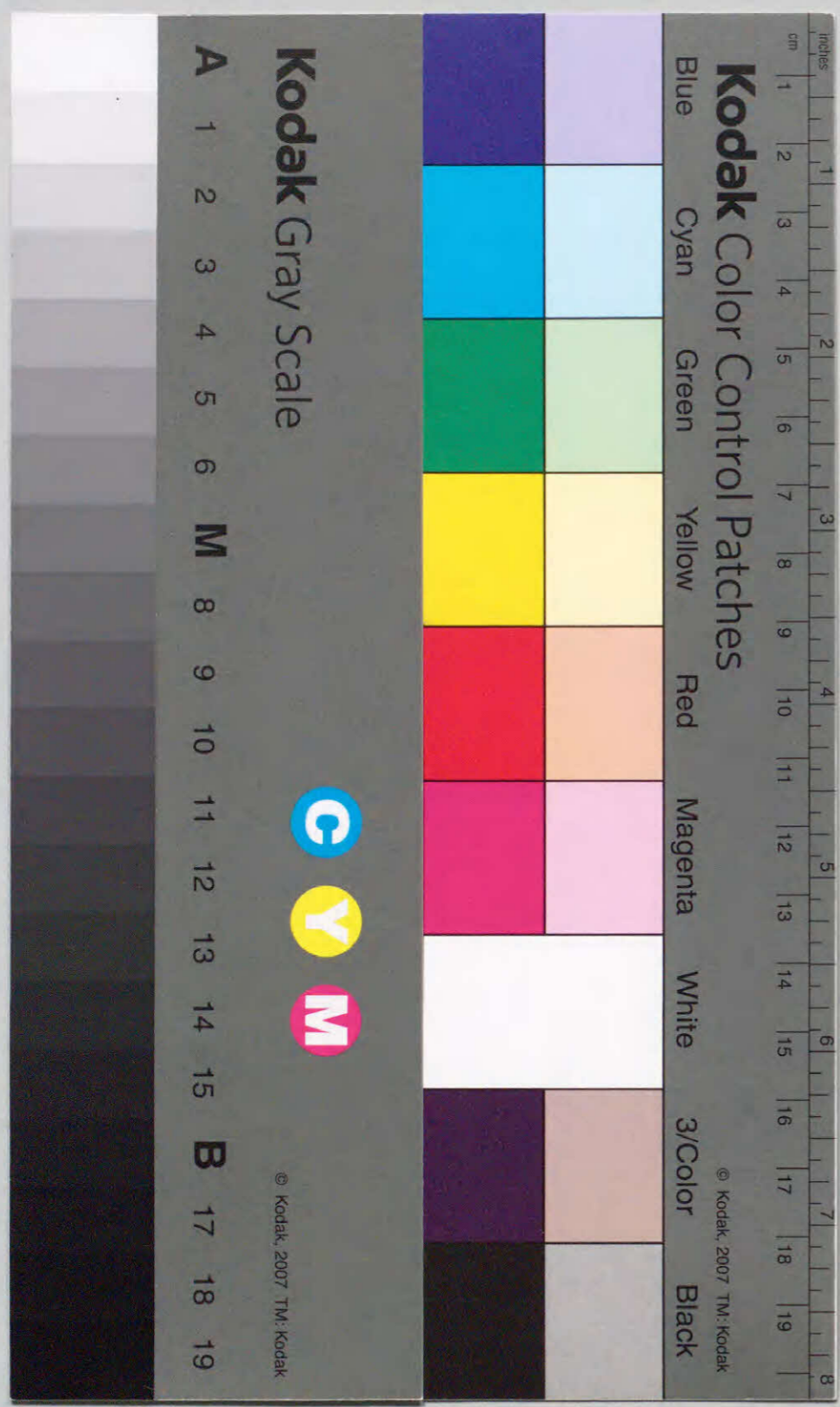
早稲田大学審査学位論文(博士)

博士論文

非可換ブラックホールの構造と安定性

鳥居 隆

1996年2月



①

目次

博士論文

非可換ブラックホールの構造と安定性

目次

第一章 序論

第二章 非可換ブラックホールの構造

第三章 非可換ブラックホールの安定性

第四章 結論

参考文献

謝辞

早稲田大学理工学研究科
物理学及応用物理学専攻
宇宙物理学研究

鳥居 隆

1996年2月

目次

1 序	3
2 ブラックホール物理学	9
2.1 ブラックホールの無毛仮説	9
2.2 球対称ブラックホール	10
2.3 ブラックホール熱力学	13
3 非可換ブラックホール解	19
3.1 中性の非可換ブラックホール I (質量を持たない非可換場の場合) [NI タイプ]	19
3.1.1 colored black hole	20
3.1.2 dilatonic colored black hole	27
3.2 中性の非可換ブラックホール II (質量を持つ非可換場の場合) [NII タイプ]	34
3.2.1 Proca black hole	34
3.2.2 sphaleron black hole	42
3.2.3 new sphaleron black hole	48
3.2.4 Skyrme black hole	57
3.3 帯電した非可換ブラックホール [CII タイプ]	62
3.4 宇宙項入りの非可換ブラックホール [AI タイプ]	68
3.5 Higher Curvature 入りの理論の非可換ブラックホール [R^2I タイプ]	75
3.6 時空構造のまとめ	91
4 熱力学的性質からみた非可換ブラックホール	99
4.1 エントロピー	99
4.2 温度・熱容量	101
4.2.1 NI タイプのブラックホール	103
4.2.2 NII タイプのブラックホール	105
4.2.3 CII タイプのブラックホール	109
4.2.4 AI タイプのブラックホール	109
4.2.5 R^2I タイプのブラックホール	112
4.3 熱力学的性質のまとめ	114
5 安定性からみた非可換ブラックホール	117
5.1 NI タイプのブラックホール	119
5.1.1 孤立系	119

5.1.2 熱浴系	119
5.2 NII タイプのブラックホール	122
5.2.1 孤立系	122
5.2.2 熱浴系	128
5.3 CII タイプのブラックホール	131
5.4 AI タイプのブラックホール	139
5.5 安定性のまとめ	142
6 結び	147
謝辞	149
A ブラックホールの無毛定理と唯一定理	151
A.1 静的な場合	151
A.2 軸対称な場合	153
B カタストロフィー理論概論	157
B.1 ジーマンの機械とカタストロフィー	157
B.2 くさびのカタストロフィー	163
B.3 トムの定理	169
B.4 折り目のカタストロフィー	172
参考文献	179

第1章

序

1905年にアインシュタインによって提唱された特殊相対性理論はニュートン力学とマックスウェル電磁気学との矛盾を解決することに成功した。それとともに、それ以前の絶対空間・絶対時間の概念をくつがえし、物体の運動はすべて相対的なものであるとした。アインシュタインは1916年にさらに理論を拡張して一般相対性理論を発表した。一般相対性理論は重力の理論であり、遠隔作用として働くニュートン重力とは全く異なった描像を与えている。一般相対性理論によると時空は質量やエネルギーなどによって歪められ、リーマン幾何学を用いて記述される。そして重力はその歪んだ時空そのものが担うのである。一般相対性理論の効果は極めて重力の強い時空でなければ顕著に現れない。そのために地球上ではその効果が非常に小さく、理論の正当性を確かめるには宇宙や天体を“実験室”，“実験対象”とする必要があった。アインシュタインは太陽系という“実験室”で水星の近日点移動のずれを一般相対性理論の効果で完全に説明し、また重力による光の屈折などを予言した。後にそれらが観測により確かめられ、さらにその他多くの実証により、現在では一般相対性理論は広く認められている。

一般相対性理論によれば時空の歪みはアインシュタイン方程式によって記述される。アインシュタイン方程式はニュートン重力理論の重力ポテンシャルに関するポアソン方程式に対応しており、一般に複雑な非線形連立偏微分方程式である。アインシュタイン自身その複雑さゆえになかなか解は見つからないだろうと考えていた。ところが最初の解の発見は以外にも理論の発表の翌年になされた。シュワルツシルトが静的球対称な時空において真空な場を仮定して解を求めたのである。それは回転のない球対称な星の外部の真空な時空を表しているが、後にブラックホールという特殊な天体を記述する解にもなっていることがわかった。

ブラックホールは星が自分の重力を支えることができず、崩壊して特異点につぶれた天体であり、星の最終的な姿のひとつと考えられている。その重力場は極めて強く、光でさえも脱出できない領域が現れる。これがブラックホールという名前の由来である。現在までにブラックホールの

存在を確認したという決定的な証拠はないが、観測的には、白鳥座 X-1 はブラックホールに間違いないだろうと考えられていたり、最近、ハッブル望遠鏡によって「銀河中心部に巨大ブラックホールが観測された」という報告がされたりといくつもの有力候補がある。

一方、理論ではシュワルツシルト解の発見後、電荷を持ったライスナー・ノルトシュトルム (RN) 解、角運動量を持った、すなわち回転しているカー解、そしてその両方を持ったカー・ニューマン解が発見された。1970年代にはいと W. Israel, S. W. Hawking, B. Carter そして D. C. Robinson 等の研究によってアインシュタイン・マクスウェル系ではブラックホール解はカー・ニューマン解に唯一に決まることが証明された。これをブラックホールの無毛定理 (no hair theorem) という。この定理がもとになって、星の持っていたほとんどの情報はブラックホールになるときの崩壊過程で失われてしまい、最終的に定常状態に落ち着くと質量・角運動量・電荷の3つの物理量しか残らないだろうという推測がうまれた。J. A. Wheeler は物理量を“毛”にたとえ、これら3つ以外には物理量が存在しないことから「ブラックホールには“毛”がない。」と言い表した。これをブラックホールの無毛仮説 (no hair conjecture) という。

では、本当にブラックホールは質量・角運動量・電荷しか持ち得ないのか。ブラックホールの構造はそんなに単純なものなのか。このような疑問から新たな“毛”の候補としてヤン・ミルズ (YM) 場が考えられた。1977年 M. J. Perry は $U(1)$ 群を $SU(2)$ 群に埋め込む形式で静的球対称なブラックホール解を求めた [1]。彼は QCD のカラー対称性から名前をとって、その解を colored black hole と名付けた。ただし、この解は RN 解の自明な拡張になっているだけで、 $SU(2)$ 群の非可換性を含んでおらず、物理的に特別興味を引くものではなかった。

ところが1989年、 $SU(2)$ 対称性を持った静的球対称な粒子解¹ (BM 解) [2]、そして1990年にかけてそのブラックホール解である colored black hole 解 [3, 4, 5] が求められた。これらは重力と $SU(2)$ YM 場が結合した系の古典解であり、アインシュタイン方程式と YM 方程式の連立微分方程式を数値的に解くことにより得られる。これらの解は次の2つの理由により非常に興味深いものといえる。第一に真空のアインシュタイン方程式と YM 方程式各々には、静的で大域的に正則な解は、自明なものを除いて存在しないことが確かめられている [6, 7]。ところが両方同時に考えると非自明な粒子解が存在することが示されたのである。第2に、新しいブラックホール解がブラックホールの無毛仮説の反例になる可能性があるからである。こうしてこれらの解は注目を集めたが、その後の解析により球対称の線形摂動に対して不安定であることが確かめられた。

アインシュタイン・ヤン・ミルズ (EYM) 系における colored black hole 解の発見により、非

¹ここで粒子解とは、時空全体にわたって正則でソリトンのように局所的にエネルギーが集中したものを指している。

可換ゲージ場が新しい“毛”になる可能性が出てきた。その後、この数年の間に静的球対称時空中で非可換場を伴う様々な新しいブラックホール解が発見された。ここではこれらを非可換ブラックホールと呼ぶことにする。本論文の主題はそれぞれの非可換場の存在がブラックホールにどのような影響を与えるのかを統一的な見地から明らかにすることである。具体的には、以下の課題について取り組む。

(1) 非可換ブラックホール解の計算とその周りの時空 (第3章)

本研究で新たに発見した非可換ブラックホール解を説明するとともに、これまでに導かれた解の再解析を行い、それらの時空構造を明らかにする。

最初の colored black hole の発見以来、多くのモデルで同様の非可換ブラックホール解が求められている。そして、それぞれの非可換ブラックホールの性質が明らかになってきた。ところが、これらが統一的に調べられたことはなく、したがって非可換場がブラックホールにどのように影響するかが明らかにされていない。そこで、これまでに求められている非可換ブラックホールを再考するとともに、それらの性質をまとめて系統立てて議論する。本論文で考察した系は以下のとおりである。

- | | | |
|--------|------------------------------|---------------------------------|
| (i) | colored black hole | (重力 + YM 場) |
| (ii) | dilatonic colored black hole | (重力 + YM 場 + ディラトン場) |
| (iii) | Proca black hole | (重力 + プロカ場) |
| (iv) | sphaleron black hole | (重力 + YM 場 + ヒッグス場) |
| (v) | new sphaleron black hole | (重力 + YM 場 + ヒッグス場) |
| (vi) | Skyrme black hole | (重力 + スキルム場) |
| (vii) | monopole black hole | (重力 + YM 場 + ヒッグス場) |
| (viii) | cosmic colored black hole | (重力 + YM 場 + 宇宙項) |
| (ix) | stringy black hole | (重力 + YM 場 + ディラトン場 + ガウス・ボンネ項) |

これらの中で新たに発見した解は (ii), (v), (viii), (ix) であるが、これらは次の様な動機から解の探索を行った。非可換ブラックホールが実際に存在したとすると、そのエネルギースケールから宇宙初期の頃と考えられる。宇宙初期には真空のエネルギーなど宇宙項もしくはそれに相当するものの存在が示唆されている。また現在のハッブル・パラメータの観測や、銀河の個数分布 (number count) を見ても、宇宙項が存在する可能性が強くなってきている。そこで宇宙項が存在するときの非可換ブラックホール解を求め、その性質等の解析を行う。また、宇宙のごく初期段階では重力

の量子化が必要となる。ところが、アインシュタイン重力はくり込みが不可能で量子重力理論にはなり得ない。現在のところそのような理論の最有力候補として超弦理論が考えられている。そこで超弦理論の低エネルギー近似でのモデルを用いて、非可換ブラックホールの解析を行う。

(2) 熱力学的性質かみらた非可換ブラックホール (第4章)

通常の Kerr-Newman black hole はブラックホールの熱力学第1～3法則が成立することが知られており、したがって熱力学的対象として扱うことができる。これまでに非可換ブラックホールのいくつかは同様に熱力学法則に従うことが数学的に示されている。ここでは(1)で分類した非可換ブラックホールの熱力学的性質、特にエントロピー、温度、熱容量について解析をする。また相転移の議論や、熱力学的進化を考え、形成過程も含めた無毛仮説の反例を示す。

(3) 安定性からみた非可換ブラックホール (第5章)

先に述べたように、最初に発見された非可換ブラックホールの colored black hole は球対称の線形摂動に対して不安定であることが知られている。しかし、実際の物理過程においては安定な解しか定常に存在し得ない。したがって、宇宙論に対する非可換ブラックホールの影響を問題にする場合には、解の安定性は非常に重要になる。そこで、ここでは非可換ブラックホールの安定性の解析を行う。特に環境として、孤立系のもと、熱浴中にあるものを考察する。

通常安定性の解析となると線形摂動を行うのが普通だが、ここではカタストロフィー理論が非可換ブラックホールに対して有用であることを示し、主にこの理論を用いて安定性の解析を行った。そして、非可換ブラックホールは折り目、くさび、つばめの尾カタストロフィーと多彩な構造安定性を持つことを示した。カタストロフィー理論は自然界における形態の変化を扱う数学的手法で、不連続現象を扱うことが可能である。カタストロフィーはこの理論の創始者であるトムの定理によって、初等カタストロフィーと呼ばれる7つの基本的形態に分類される。トムの定理は現代数学の微分トポロジーを基礎にしており、その証明は複雑であるが、結論が非常に分かり易いので、摂動計算に比べて解析が容易なので多くの分野に応用されている。またAIタイプのブラックホールに対してはカタストロフィー理論と摂動論のそれぞれの長所を用いて、通常よりも簡単に不安定モードの数を求めることに成功した。

本論文の構成は以下のとおりである。第2章ではブラックホールの無毛仮説・無毛定理についてまとめる。また、非可換ブラックホールとの比較のために静的球対称な Schwarzschild black hole と RN black hole を簡単に振り返る。第3章から第5章については上に列挙した内容に沿って研究成果を述べる。最後の第6章では、本研究で明らかになった成果をまとめる。また、付録Aで

は、アインシュタイン・マックスウェル系での無毛定理・唯一定理を証明なしに整理した。付録Bではカタストロフィー理論と、その中心となるトムの定理を説明した。

第2章

ブラックホール物理学

2.1 ブラックホールの無毛仮説

一般相対性理論によると、エネルギーや運動量が存在することによって、時空は平坦なミンコフスキー時空からゆがめられる。重力源が重くなるほど場の曲率は大きくなり、そのゆがみが十分大きくなると光でさえも脱出できない領域が生じる。これがブラックホールである。

通常、ブラックホールは星が重力崩壊した結果形成されると考えられている。もし、全くの球対称な星が崩壊すれば Schwarzschild black hole になるし、さらに星が電荷や磁荷をもてば RN black hole になる。しかし、そのような星は理想化されたもので、現実の星ははるかに複雑で非常に多くの情報を含んでいる。では現実の星が崩壊してブラックホールになった場合、それが作り出す時空はどのようなものか。これに関して次の仮説がある。

仮説 1 ブラックホールは、その形成段階でほとんどの物理量が失われてしまい、最終的な定常状態では質量、電荷(磁荷)、角運動量の3つの大域的なチャージのみによって特徴付けられる。

これをブラックホールの無毛仮説 (no hair conjecture) という。この仮説が主張するところによれば、重力崩壊する星が多様な情報を含んでいたとしても、ブラックホールになる段階では極めて単純になってしまうのである。

ブラックホールの無毛仮説を受け入れると、すべてのブラックホールは表 2.1 のように分類される¹。

当然のことではあるが、これまでにブラックホールの無毛仮説を証明しようとする試みはあった。しかしながら、現在ではまだ問題解決には至っていない。だが、いくつかの非常に重要な結果が導き出されている。1つはブラックホールの無毛定理 (no hair theorem)、もしくは拡張さ

¹ここでは物理的に意味のある状況を考えて、裸の特異点は存在しないことを要請する。また、宇宙項や一様磁場のある場合は考えず、無限遠で漸近的に平坦な時空へ近づくことだけを扱うことにする。

表 2.1: ブラックホールの分類

場	球対称	軸対称
真空	Schwarzschild black hole	Kerr black hole
電磁場	Reissner-Nordström black hole	Kerr-Newman black hole

れた無毛定理 (extended no hair theorem) といわれるもの, もう1つは唯一定理 (uniqueness theorem) といわれるものである. この2つの定理の存在により, 無毛仮説の正当性が一般に広く信じられているのである. 多少数学的にはなるが, 付録Aに無毛定理と唯一定理の証明のポイントをまとめておいた.

2.2 球対称ブラックホール

ブラックホールは, 無毛仮説で言い表されるように, 質量・角運動量・電荷の3つの物理量しか持ち得ないと考えられ, 裸の特異点は存在しないこと, 無限遠で漸近的に平坦な時空へ近づくことを要請すると, 表2.1のように分類される. ここでは第3章以降に出てくる非可換ブラックホールとの比較のために, よく知られているブラックホール (Kerr-Newman black hole) について復習する. 今のところ球対称な非可換ブラックホールしか発見されていないので², Schwarzschild black hole と RN black hole について考察する.

静的球対称な時空を考える. 一般的に静的球対称なメトリックは次の形を持つ.

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.1)$$

ここで関数 Φ, Λ は動径座標 r のみの関数である. 重力源より十分離れたところでは, 時空は平坦になると考えられるので, Φ, Λ に次の境界条件 (漸近的平坦条件) を課す.

$r \rightarrow \infty$ のとき,

$$\Phi(r) \rightarrow 0, \quad \Lambda(r) \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

(2.1) で与えられるメトリックに対してアインシュタイン・テンソルの各成分は次のようになる.

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{2\Phi} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\Lambda})] \quad (2.3)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \Phi' \quad (2.4)$$

²振動の範囲でならば, 軸対称もしくはそれ以上の多重極をもったブラックホール解を求めたという報告はある [8].

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\Lambda} \left[\Phi'' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \Phi' \Lambda' - \frac{\Lambda'}{r} \right] \quad (2.5)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta} \quad (2.6)$$

ここで ' は r に関する微分を表す. これら以外の成分はすべてゼロになる. さて, 重力源が電荷 Q_e , 磁荷 Q_m を持っているとしよう. このときベクトル・ポテンシャル A は

$$A = -\frac{Q_e}{r} dt + Q_m \cos \theta d\phi \quad (2.7)$$

のように表され³, 場の強さは $F = dA$ より

$$F = \frac{Q_e}{r^2} dr \wedge dt - Q_m d\theta \wedge \sin \theta d\phi \quad (2.8)$$

となる. 電磁場のエネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right) \quad (2.9)$$

で与えられる⁴. ここで $F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ である. (2.8) を用いて (2.9) を具体的に書くと次のようになる.

$$T_{tt} = \frac{1}{8\pi r^4} \left(Q_e^2 e^{-2\Lambda} + Q_m^2 e^{2\Phi} \right) \quad (2.10)$$

$$T_{rr} = -\frac{1}{8\pi r^4} \left(Q_e^2 e^{-2\Phi} + Q_m^2 e^{2\Lambda} \right) \quad (2.11)$$

$$T_{\theta\theta} = \frac{1}{8\pi r^2} \left(Q_e^2 e^{-2\Lambda+\Phi} + Q_m^2 \right) \quad (2.12)$$

$$T_{\phi\phi} = \sin^2 \theta T_{\theta\theta} \quad (2.13)$$

アインシュタイン方程式に代入するさいに

$$Gm(r) \equiv \frac{r}{2} \left(1 - e^{-2\Lambda} \right) \quad (2.14)$$

で定義される関数 $m(r)$ を用いると便利である. ここで G はニュートンの重力定数である.

(2.3)~(2.6), (2.10)~(2.13) をアインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ に代入すれば

$$\frac{dm}{dr} = \frac{(Q_e^2 + Q_m^2)}{2Gr^2} \quad (2.15)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{G(m + rm')}{r(r - 2Gm)} \quad (2.16)$$

³磁気単極子を考えているのに, ベクトル・ポテンシャルが存在するのは変に思えるかもしれないが, 磁気単極子がデルタ関数的な分布をしている場合には定義可能である. ブラックホールはその条件を十分満たしている.

⁴この論文を通じてギリシャ文字の添え字は0から3, ラテン文字の添え字は1から3を表す.

となる⁵. (2.15), (2.16) を境界条件 (2.2) のもとで積分すると

$$m = M - \frac{Q_e^2 + Q_m^2}{2Gr} \quad (2.17)$$

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q_e^2 + Q_m^2}{r^2} \quad (2.18)$$

となる. ここで定数 M は無限遠からみたブラックホールの質量である. したがってメトリックは

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q_e^2 + Q_m^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q_e^2 + Q_m^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.19)$$

となる. これが RN 解である. 電磁場が存在しない場合, すなわち $Q_e = Q_m = 0$ を考えると, 静的球対称真空のシュワルツシルト解

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.20)$$

が得られる.

いまシュワルツシルト解を考えよう. (2.20) から明らかに $r = r_h = 2GM$ でメトリックは発散する⁶. r_h を事象の地平線 (event horizon), または単に地平線 (horizon) という. ホライズンの存在は物理的に興味深い意味を持っている. ホライズンの外側 ($r > r_h$) の領域が現在我々のいるところである. そこでは $g_{tt} < 0$ および $g_{rr}, g_{\theta\theta}, g_{\phi\phi} > 0$ が成り立ち, t が時間座標で (r, θ, ϕ) が空間座標になっている. 一方ホライズンの内側 ($r < r_h$) の領域では $g_{rr} < 0$ で $g_{tt}, g_{\theta\theta}, g_{\phi\phi} > 0$ になって, 外側と比べてみると g_{tt} と g_{rr} の符号が入れかわる. つまり r を時間座標, (t, θ, ϕ) を空間座標と考えなくてはならない. このときホライズンの外側の領域から入ってきた粒子の時間の向きは $r \rightarrow 0$ である. したがってすべての物質は内向きに落ち込まざるを得なくなる. このようにホライズンの内側の領域は光でさえも脱出できないブラックホールになっている.

RN 解の場合も同様に RN black hole が考えられる. このときのホライズン半径は

$$r_h = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - (Q_e^2 + Q_m^2)} \quad (2.21)$$

になる. RN black hole は (2.21) の根号の中身の値によって大きく3つに分けることができる.

1. $GM > \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2}$

ホライズンが2つ存在し, (2.21) のプラスのほうを事象の地平線 (event horizon), マイナスのほうを内部地平線 (inner horizon) という. 内部地平線は事象の地平線に覆われているので外部時空から見ることはできない. また, 内部地平線は Kerr black hole にも存在するが, どちらの場合も摂動に対して不安定であることがわかっている [10].

⁵ $c = \hbar = k_B = 1$ の単位系を用いる. 記述法は [9] に従うものとする.

⁶ 本論分を通じて添え字 'h' はホライズン上での値を示すこととする.

2. $GM = \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2}$

事象の地平線と内部地平線が縮退して1つになる. この RN black hole を extreme RN black hole という.

3. $GM < \sqrt{Q_e^2 + Q_m^2}$

このとき地平線は存在しなくなり, 裸の特異点が発生する. 地平線が存在しない以上, もはや, これはブラックホールではなくなってしまう. 現実の宇宙に裸の特異点が存在し得るかという問題については, 「宇宙には検閲官がいて, 裸の特異点が人前に出ないように見張っている」と主張する宇宙検閲官仮説 [11] もあるが, 未だに決着はついていない.

2.3 ブラックホール熱力学

ブラックホールの持つ重要な性質として, 熱力学的性質がある. 熱力学の対象としてのブラックホールというのは, どうも考えにくいのであるが, 事の始まりはホーキングによるブラックホールの表面積定理である. これによると, 古典的に考える限りではブラックホールの地平線の表面積は決して減少しないのである. 例えば, ブラックホールに物質が落ち込むときには当然表面積は増大し, また表面積 A_1, A_2 を持つ2個のブラックホールが合体して表面積 A の1個のブラックホールになるときは, $A \geq A_1 + A_2$ が成立するのである. この性質は, エントロピーの持つ性質, つまり熱力学の第二法則に似ているというのでいろいろ類推がなされた. そして, J. M. Bardeen, B. Carter, S. W. Hawking [12] により熱力学の法則とブラックホール物理学の法則の間に特筆すべき類似があることが示された. つまり, 熱力学の法則において

$$E \rightarrow M, T \rightarrow C\kappa, S \rightarrow \frac{A}{8\pi C} \quad (2.22)$$

の置き換えをすればブラックホール物理学の法則 [13] が導けるのである. ここで M, κ, A はそれぞれブラックホールの質量, 表面重力 (surface gravity) と表面積である. また C は定数である. 古典的な相対論においてはブラックホールの熱力学的温度は厳密にゼロのように見える. ところが, 量子効果を考慮するとブラックホールは温度 $T = \kappa/2\pi$ で粒子を吸収したり放出したりすることを S. W. Hawking が示し, この問題を解決した [14].

以下にブラックホール熱力学の4つの法則を簡単に示すことにする.

第0法則

(平衡状態にある) 定常なブラックホールの表面重力 κ はホライズン上で定数である.

この性質は [12] に定理として証明されている。P. T. Landsberg はより厳密に次のように定式化している [15]. 「断熱的な分割と long-range field が存在しなければ, 平衡状態にある系は一定の温度になる。」もし上の条件が満たされないときには, 熱的に平衡であっても異なる 2 つの温度を持つような断熱的な系を構成することができる [16].

質量 M , 電荷 Q , 角運動量 \vec{J} を持った Kerr-Newman black hole では表面重力は次のようになる [17].

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{r_+ - r_-}{(r_+^2 + a^2)} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}{2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}} \quad (2.23)$$

ここで, $a^2 = |\vec{J}|^2/M^2$ で,

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \quad (2.24)$$

はそれぞれ事象の地平線 (r_+) と内部地平線 (r_-) である.

第1法則

ブラックホールに限らず, 孤立した系についての言及であるが, 系の全エネルギーは保存する.

一般的に定常なブラックホールでは質量の変化は

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \vec{\Omega} \cdot \delta \vec{J} + \Phi \delta Q \quad (2.25)$$

のようになることが文献 [12] で導かれている. ここで $\vec{\Omega}$ と Φ はそれぞれ事象の地平線の角速度と静電ポテンシャル,

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 8\pi \left\{ M^2 - \frac{1}{2}Q^2 + \sqrt{M^4 - J^2 - M^2Q^2} \right\} \quad (2.26)$$

は表面積である. Mc^2 は実質的にブラックホールの全エネルギーを表し, $T = \kappa/2\pi$ は Bekenstein-Hawking 温度である.

(2.25) から $A/4$ がブラックホールのエントロピーの役割をしていることが分かる.

$$S_{bh} = \frac{1}{4}A \quad (2.27)$$

(2.25) の右辺の第2項と第3項はなされた仕事, またはブラックホールの角運動量と電荷を変化させたときに抜き取られるエネルギーである. 角運動量と静電ポテンシャルは

$$\Omega = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (2.28)$$

$$\Phi = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} \quad (2.29)$$

となる [18]. (2.26) を逆に解くと, 質量 M を A, J, Q の関数として表せる [19, 20].

$$M = \left(\frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A} + \frac{Q^2}{2} + \frac{\pi Q^4}{A} \right)^{1/2} \quad (2.30)$$

これはブラックホールの熱力学的状態についてのすべての情報を頭を含んだ熱力学的関係式である. 同次関数 M にオイラーの定理を用いると [18]

$$M = \frac{1}{2}TA + 2\vec{\Omega} \cdot \vec{J} + \Phi Q \quad (2.31)$$

となる. このように T, Ω, Φ は示強変数であり, 定常なブラックホールのホライズン上ではいたるところ定数になる.

第2法則

全エントロピー

$$S = S_{bh} + S_m \quad (2.32)$$

はいかなる物理過程でも減少しない [13, 21, 22]. ここで S_m はブラックホールの外部に存在する通常の物質の全エントロピーである.

S. W. Hawking はブラックホールの表面積 A は減少しない, つまり,

$$\delta A \geq 0 \quad (2.33)$$

という定理を示した [22]. しかしながら, ホライズン付近で量子過程を考慮すると, この定理は成り立たない. というのはホーキング輻射の $T_{\mu\nu}$ は, 定理の証明の際に仮定した正エネルギー条件にしたがわないからである. 例えば孤立したブラックホールは完全に蒸発し, 表面積がゼロになることもある⁷. 一方, ブラックホールの外部にある物質の全エントロピー S_m は, 物質がブラックホールに落ち込むことによって減少することは容易に理解される.

式 (2.32) の右辺の和を考えると, お互いに一方の減少はもう一方の増加によって補われるように見える. 実際, 物質がブラックホールに落ち込み, S_m が減少すると, ブラックホールの面積は増加する. 逆にブラックホールが輻射を出すと, ブラックホールの外部の物質はより高いエントロピーの状態になる. こうして, どのような過程においても

$$\delta S \geq 0 \quad (2.34)$$

⁷これは一般相対性理論の範囲でいえることで, 実際にはプランク・スケールのあたりのことは現在も研究中である.

になるのである。これは任意の動的過程においても系はエントロピーが最大になる平衡状態へと進んでいくことを意味している [15]。 S_m に対する通常の第2法則は (2.34) の特別な場合で、ブラックホールが存在しない場合に成立する。式 (2.33) の表面積定理は、ブラックホールへのエントロピー流が正になる古典極限において用いることができる。

式 (2.34) の正当性はいくつかの思考過程によって試されており、準古典的な補正が考慮されると第2法則が成立することが示されている [23]。これは少なくとも平衡状態からのずれが小さい準定常な過程においては式 (2.34) は成立しなければならないことを強く示唆している [24]。

第3法則

有限回数の物理過程によって表面重力 κ をゼロにすることはできない。

これはネルンストによって定式化された熱力学の第3法則の類推である。「 $T \rightarrow 0$ の極限で任意の系のエントロピーはある決まった定数（熱力学ではゼロ）に近づく」というプランクの定式化はブラックホール熱力学では成立しないことは注意すべきである。実際に extreme Kerr-Newman black hole では

$$S_{bh}(T=0) = \pi(Q^2 + 2a^2) \quad (2.35)$$

である。D. N. Page は縮退していない基底状態のブラックホールに対しては $S(T=0) = 0$ が成立するべきであるという仮説を立てた [25]。しかしながら、Schwarzschild black hole であっても $M \rightarrow \infty$ の極限では $S \rightarrow \infty$ になる一方、 $\kappa = 0$ すなわち、 $T = 0$ が達成されるのである。

W. Israel は RN black hole においてブラックホール熱力学の第3法則の定式化とその証明を与えている [26, 27]。それを要約すると以下ようになる。「ブラックホールに落ち込んでいく物質の stress-energy tensor が有界で、outer apparent horizon の近傍で弱いエネルギー条件 (weak energy condition) を満たす連続的な過程を考えよう。そのような任意の過程において、先進時間 (advanced time) の有限の間隔では extreme black hole でないブラックホールは extreme black hole になることはできない。」この定式化のより正確な表現は文献 [26, 27] にある。

第3法則と宇宙検閲官仮説は密接な関係がある。実際に W. Israel の補題は “gravitational confinement” と呼ばれる弱い形式でのこの仮説を立証するのに使用することができる。Kerr-Newman black hole が粒子を放出し、角運動量または電荷が $a^2 + Q^2 = M^2$ になるまで有限のステップで増加したとしよう。この場合には、さらに $a^2 + Q^2 > M^2$ にすることが可能になってしまうのである。その結果、裸の特異点が現れる。特異点はもはや地平面に隠されず、外部の宇宙に影響を及ぼす。これは好ましくないことから、逆に第3法則の正当性が保証されるのである。しかしな

がら、この仮説はまだ証明されておらず、古典相対論において最も重要な未解決の問題の1つになっている。

第3章

非可換ブラックホール解

この章では、これまでに発見された非可換ブラックホールを再考し、各々のブラックホールの周りの時空などの性質を見る。その後で、別々にしか議論されていなかった各ブラックホール解を性質別に分類し、統一的な立場から議論を行う。

表 3.1 に非可換ブラックホールの名前とモデルをまとめておく。ここで YM 場は $SU(2)$ 対称性、でスキルム場は $SU(2) \times SU(2)$ 対称性を持っている。また、プロカ場は $SU(2)$ YM 場に質量を持たせたものである。この中で本研究で発見した新しい解は new sphaleron black hole, cosmic colored black hole, dilatonic colored black hole そして stringy black hole である。

3.1 中性の非可換ブラックホール I (質量を持たない非可換場の場合) [NI タイプ]

$U(1)$ 対称性を持った電磁場とアインシュタイン重力が結合した系では RN black hole 解が存在する。ではゲージ場を拡張して $SU(2)$ YM 場を考えた場合、同様にブラックホール解が存在するであろうか¹。この問題に対しては2つの理由から否定的な見方が多かった。1つは YM 方程式、そして真空のアインシュタイン方程式を独立に解いた場合、全時空での正則性と球対称を仮定すると自明な解以外は存在しないからである。もう1つは、ブラックホールの無毛仮説が非可換ゲージ場を持つようなブラックホールの存在を否定しており、静的な解自身も存在しないだろうと考えられていたからである。このような状況の下での $SU(2)$ 対称性を持った粒子解 [2] および colored black hole 解 [3, 4, 5] の発見は非常に衝撃的な出来事であった。

colored black hole は $SU(2)$ 対称性を持っているため、その時空構造も複雑で興味深い研究対象といえる。さらに、他の非可換ブラックホールにおいて、ある極限をとると colored black hole が

¹ $SU(2)$ 群よりも大きな群での解析もある。例えば $SU(3)$ 群では [28]、一般の $SU(n)$ 群では [29] 等がある。ただし、これらの解はすべてその部分群の $SU(2)$ 群のところだけに非可換性があり、実質的に $SU(2)$ 群のみのものと変わらない。また、 $SU(3)$ 群に $SU(2)$ 群を埋め込んで、残りの $U(1)$ 群に電磁場を適応した解も考えられている [30]。

表 3.1: 非可換ブラックホールの名前とモデル

名前	ベクトル場	ヒッグス場	宇宙項	ディラトン場	ガウス・ボンネ項
colored BH	YM 場				
Skyrme BH	スキーム場				
sphaleron BH	YM 場	複素 2 重項			
new sphaleron BH	YM 場	複素 2 重項			
Proca BH	プロカ場				
monopole BH	YM 場	実 3 重項			
cosmic colored BH	YM 場		○		
dilatonic colored BH	YM 場			○	
stringy BH	YM 場			○	○

再現されるので, colored black hole についてよく理解しておくことは, 非可換ブラックホール全体を理解する上で重要なことである.

この節では中性で, かつ非可換場が質量を持たない EYM 系の colored black hole [3, 4, 5] とインシュタイン・ヤン・ミルズ・ディラトン (EYMD) 系の dilatonic colored black hole [31, 32, 33, 34] を扱う.

3.1.1 colored black hole

EYM 方程式と境界条件

colored black hole 解は静的球対称な時空でのみ発見されいるので, ここでも同様の仮定をおくことにする. 一般性を失うことなく, 静的球対称メトリックは次のような形にかける.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) e^{-2\delta} dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.1)$$

ここで, m, δ は動径座標 r にのみ依存する関数である. この 2 つの関数に次の境界条件をおく.

1. 漸近的平坦条件

$r \rightarrow \infty$ のとき

$$m(r) \rightarrow M = \text{const.} \quad (3.2)$$

$$\delta(r) \rightarrow \delta_0 = \text{const.} \quad (3.3)$$

3.1. 中性の非可換ブラックホール I (質量を持たない非可換場の場合) [NI タイプ]

2. 正則なホライズンの存在

$$2Gm(r_h) = r_h \quad (3.4)$$

$$\delta(r_h) < \infty \quad (3.5)$$

3. ホライズンの外に特異点が存在しない

$r > r_h$ に対して,

$$2Gm(r) < r \quad (3.6)$$

条件 1 は空間が漸近的にミンコフスキー空間に近づく要請である. 物理的には, 定数 M は無限遠の観測者からみたブラックホールの質量, 関数 δ はメトリックの (t, t) 成分と (r, r) 成分とのずれを表して. 条件 2 はホライズン上で曲率が発散しないための条件である. ここで我々は $\delta(r_h) = 0$ とおく. $\delta(\infty) = 0$ とおくのが普通だが, これは後の数値計算を楽にするためである. 両者は単に時間座標のスケールの違いだけで関係づけられており, 本質的には差異はない². 条件 3 はホライズンの外では空間が正則であることを要請している. 条件 1~3 はこの後, cosmic colored black hole を除いたすべての非可換ブラックホールで用いることになる.

最も一般的な球対称 SU(2) YM 場は次の形で与えられる³[35, 36].

$$\mathbf{A} = a\tau_3 dt + b\tau_3 dr + (w\tau_1 + d\tau_2) d\theta + (\cot\theta\tau_3 + w\tau_2 - d\tau_1) \sin\theta d\phi \quad (3.7)$$

ここで, a, b, w, d は t, r の関数であり, τ_i ($i = 1, 2, 3$) は su(2) リー代数の生成子で

$$[\tau_i, \tau_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} \tau_k \quad (3.8)$$

をみたす. パウリ行列とは

$$\tau_i = \frac{1}{2i} \sigma_i \quad (3.9)$$

で関係づいている. ベクトル・ポテンシャル (3.7) は次の U(1) ゲージ変換に対して不変である.

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = U^{-1} \mathbf{A} U + U^{-1} dU \quad (3.10)$$

ここで, $U = \exp[\phi(r, t)\tau_3]$ である. このゲージ自由度を用いて, 我々は $b \equiv 0$ とおくことができる. 静的な場合, すなわち a, b, w, d が r にのみ依存しているときは, YM 方程式から $d = Cw$ が

²ただしエネルギー等の時間が関与する量には注意が必要で, $\delta(\infty) \neq 0$ のとき座標 t は無限遠の観測者の固有時間とは異なる. スケール変換により無限遠の観測者の固有時間に戻すことができる.

³ボールド体の文字は SU(2) アイススピンのベクトルを表す.

示される⁴. ここで C は任意の定数である. そこで $C=0$ すなわち, $d \equiv 0$ とする. こうして, 一般的な静的球対称 SU(2)YM 場を $a(r), w(r)$ のみからなる形で得ることができた.

$$A = a\tau_3 dt + w\tau_1 d\theta + (\cot\theta\tau_3 + w\tau_2) \sin\theta d\phi \quad (3.11)$$

場の強さは $F = dA + A \wedge A$ より次のようになる.

$$F = a'\tau_3 dr \wedge dt + w'\tau_1 dr \wedge d\theta + w'\tau_2 dr \wedge \sin\theta d\phi \\ - (1-w^2)\tau_3 d\theta \wedge \sin\theta d\phi + aw\tau_2 dt \wedge d\theta - aw\tau_1 dt \wedge \sin\theta d\phi \quad (3.12)$$

ここで U(1) 対称性をもった場, すなわち電磁場と比較するのは有意義である. 中心に電荷 Q_e , 磁荷 Q_m をもった場では, ベクトル・ポテンシャルと場の強さはそれぞれ (2.8), (2.17) になる. (3.12) と比べると a が電荷に相当する部分に, そして w が磁荷に相当する部分になっているのがわかる.

次に更なる単純化をしよう. YM 場に 'tHooft-Polyakov の仮定: $a \equiv 0$ をおいて, 静電荷による効果を消す. この結果, 場の強さは次の様に関数 $w(r)$ だけで書き表される⁵.

$$F = w'\tau_1 dr \wedge d\theta + w'\tau_2 dr \wedge \sin\theta d\phi - (1-w^2)\tau_3 d\theta \wedge \sin\theta d\phi \quad (3.13)$$

$w \equiv \pm 1$ のとき $Q_m = 0$ で, $w \equiv 0$ のとき $Q_m = 1$ に対応していることがわかる.

アインシュタイン方程式を導く作用汎関数は,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R(g) - \frac{1}{4\pi g_c^2} \text{tr} F^2 \right] \quad (3.14)$$

である. ここで $\kappa^2 = 8\pi G$, R はリッチ・スカラー, g_c は YM 場の結合定数である. 作用関数 S を変分すれば, YM 方程式 $d * F = 0$ とアインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ がでてくる. エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は (2.9) と同様に

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \text{tr} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^2 \right) \quad (3.15)$$

で定義される. 以上より, 単純化された YM 場を源にもつ場合の EYM 方程式は次のようになる.

$$\left[e^{-\delta} \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}} \right) w' \right]' + e^{-\delta} \frac{w(1-w^2)}{\bar{r}} = 0 \quad (3.16)$$

$$\delta' = -\frac{2w'^2}{\lambda_h^2 \bar{r}} \quad (3.17)$$

$$\bar{m}' = \frac{1}{\lambda_h^2} \left\{ \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}} \right) w'^2 + \frac{1}{2} \frac{(1-w^2)^2}{\bar{r}^2} \right\} \quad (3.18)$$

⁴ どのような系でも $d=Cw$ が成立するとは限らない. 例えば, 後に出てくるように, ヒッグス場が入るとこのような線形関係は成り立たなくなる.

⁵ 電荷 a と磁荷 w が同時に存在するようなダイオン解は YM 場の対称性が SU(2) のときには存在しないことが証明されている [37, 38, 39].

ここでホライズン半径 r_h を用いて関数 r , M を無次元化した. つまり $\bar{r} = r/r_h$, $\bar{m} = Gm/r_h$ である. また $\lambda_h = r_h/[l_P/g_c]$, l_P はプランク長である. 定義からわかるように λ_h は系の典型的な大きさとブラックホールとの比を表している. ' は \bar{r} による微分を表している. (3.16) を変形すると

$$\bar{r}^2 \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}} \right) w'' + \left[2\bar{m} - \frac{1}{\lambda_h^2} \frac{(1-w^2)^2}{\bar{r}} \right] w' + w(1-w^2) = 0 \quad (3.19)$$

のようになり, w と \bar{m} の式には δ は入ってこなくなる.

基礎方程式を (3.16) ~ (3.18) のように書き表すとパラメータとして λ_h の 1 つだけになるという利点がある. 当然のことであるが, 同じ λ_h の値をもつブラックホールは同じ解によって表される. ただし, それらのサイズは結合定数の値によって違ったものとなる. 大きなサイズのブラックホールを考えたいときは (g_c を固定したまま) $\lambda_h \rightarrow \infty$ とすればよい.

次に $w(r)$ の境界条件を考えよう. 局所エネルギー密度 $\bar{\rho} = \rho/r_h^2 \equiv -T_0^0/r_h^2$ は

$$4\pi\bar{\rho} = \frac{1}{\lambda_h^2} \left\{ \frac{(1-w^2)^2}{2\bar{r}^4} + \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}} \right) \frac{w'^2}{\bar{r}^2} \right\} = \frac{\bar{m}'}{\bar{r}^2} \quad (3.20)$$

である. これは $r=r_h$ で有界なので, $w(r)$ に制限をつけない. 漸近的に平坦な系では, ホライズンの外での全エネルギーは有界でなければならないので,

$$M - m(r_h) = 4\pi \int_{r_h}^{\infty} \rho r^2 dr < \infty \quad (3.21)$$

となる. したがって (3.20), (3.21) より r が大きくなるにつれて $w' = 0$ つまり w はある定数に近づかなければならない. (3.18) は漸近的に解けて次のようになる.

$$|w| \simeq 1 - \frac{C}{r}, \quad C > 0 \quad (3.22)$$

また自明な解として, $w \equiv 1$, $\bar{m} \equiv \bar{M}$, $\delta \equiv \text{const.}$ がある. この解はシュワルツシルト解になっている. もう一つ $w \equiv 0$, $\bar{m} = \bar{M} - 1/2\lambda_h^2 \bar{r}$, $\delta \equiv \text{const.}$ がある. このときの磁荷は任意にとれるのではなく, 理論を決めればある値 ($1/g_c$) に定まってしまう.

(3.22) より $F_{\theta\phi}$ は $1/r$ で漸的にゼロに近づく. つまり YM 場の "毛" は遠くなるとその存在がわからなくなってしまう, 大域的なパラメータは質量 M のみになる. 遠方から見れば, Schwarzschild black hole と見分けがつかなくなるのである.

EYM 方程式の解と時空の性質

次に (3.16)~(3.18) または (3.19) の方程式を条件 (3.2)~(3.6), (3.22) のもとで解く. 方法は 2 点境界値問題の標準的なシューティング法を用いて行う. このためには $r = r_h$ に対して 4 つの境

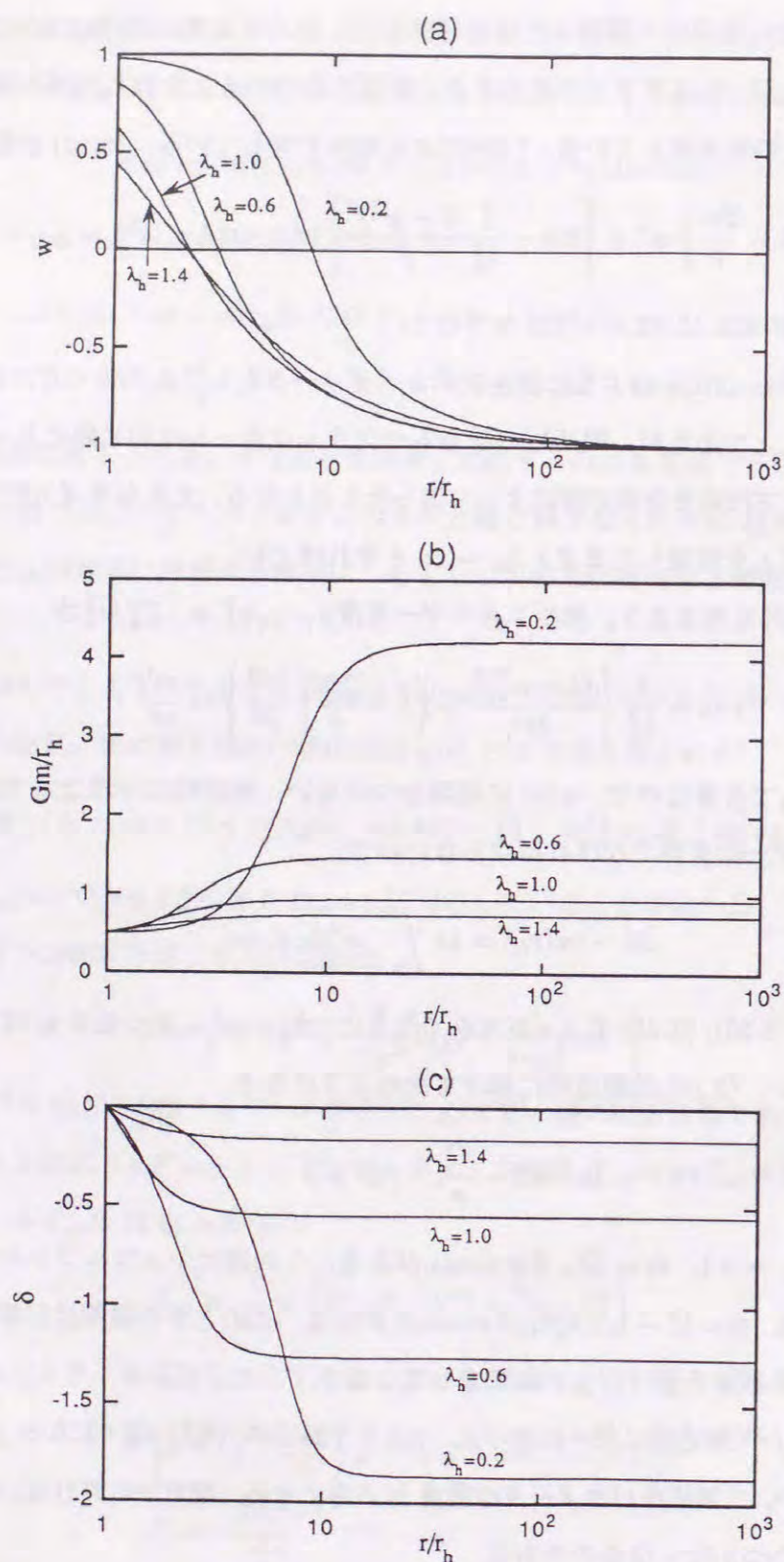


図. 3.1: $n = 1$ の colored black hole の場の振舞いを示した. $w = \pm 1$ は Schwarzschild black hole に, $w = 0$ は RN black hole に相当する. 中心付近に非自明な構造があり, 遠方では Schwarzschild black hole に近づくのがわかる.

界条件 $\delta_h, \bar{m}_h, w_h, w'_h$ が必要になる. δ に関しては式 (3.18) と (3.19) を解いて w と m を求めた後に式 (3.17) を積分して得られるので, δ_h は積分定数となる. したがって, 数値計算では δ_h は任意にとれる. そこで, 前に述べたように $\delta_h = 0$ にする. また (3.4) より $\bar{m}_h = 1/2$ になる. w_h と w'_h に関しては (3.19) より次の関係式が成り立つ.

$$\left\{ 1 - \frac{(1 - w_h^2)^2}{\lambda_h^2} \right\} w'_h + (1 - w_h^2) w_h = 0 \quad (3.23)$$

したがって結合定数 λ_h を決めれば, シューティング・パラメータとして w_h ただ一つを持つことになる.

さて, ある半径 r で関数 w が極値をとると, (3.19) よりこの点で

$$\text{sgn } w'' = \text{sgn} (w^2 - 1) w \quad (3.24)$$

となる. これより $w > 1$ のときは極大値, $w < -1$ のときは極小値をもたないことがわかる. また, 同様に (3.23) より

$$\text{sgn } w'_h = \text{sgn} (w_h^2 - 1) w \quad (3.25)$$

となる. もし $w_h > 1$ ならば, $w'_h > 0$ で w が増加する方向に打ち出される. しかし, $w > 1$ のとき極大値は存在しないので, w は ± 1 に近づくことはできない. $w_h < -1$ のときも同様である. したがって $|w| < 1$ および $|w| \equiv 1$ の解のみが存在する.

こうして w_h をシューティング・パラメータとして $|w_h| < 1$ の条件で打ち出し, $|w(\infty)| = 1$ になる解を求めた. 結果は図 3.1 のようになった. 図 3.1 ではいくつかの λ_h の値に対して解を描いている. これはブラックホールのホライズン半径を変化させているとも, YM 場の結合定数 g_c を変化させているとも考えられる. $r_h \rightarrow 0$ の極限では BM 解になる. colored black hole 解は YM ポテンシャル w のノード数⁶ n に対して一つずつ離散的に存在する. 表 3.2 に $\lambda_h = 1$ としたときの, それぞれのノード数を持つ解の w_h と \bar{M} , δ_0 の値を示す. ノード数が大きくなるほど大きな質量を持つことがわかる. また, 図 3.2 に $n = 2$ の解を示す. 図 3.2 の $n = 2$ の解では, $n = 1$ の解に比べて $|w| \sim 0$ にある範囲が広がっているのがわかる. つまり, ホライズン付近で RN 解に似た時空が広がっているといえる. そして, $n \rightarrow \infty$ の極限では, 解析的に解がわかり, RN black hole になることが示されている [40, 41].

図 3.1 から colored black hole のつくる重力場の性質を見ることができる. まず中心の方から見ていくと, ホライズン付近の領域では $w \approx 0$ で, RN 解に似た場をつくる. それから YM 場はべき関数的に減衰して, その外側ではシュワルツシルト解に近づいていく. こうして colored black

⁶YM ポテンシャル w がゼロをきる回数

表 3.2: $\lambda_h = 1.0$ の colored black hole の各ノードの解における w_h , \bar{M} , δ_0 の値

ノード数	w_h	\bar{M}	δ_0
1	0.632 206 952	0.937 191 161	-0.548 472 096
2	0.345 178 112	0.993 848 856	-0.593 180 907
3	0.187 579 799	0.999 437 943	-0.590 174 478
4	0.102 277 365	0.999 949 567	-0.587 905 574
5	0.055 839 881	0.999 995 498	-0.587 110 995

hole の大域的な, すなわち無限遠で観測される物理量は質量のみとなる. これは monopole black hole と cosmic colored black hole を除いた非可換ブラックホールに共通した性質だが, 実際にこのようなブラックホールを観測した場合には面白い現象が見られる [42]. また, この性質は熱力学を考察したときにも顕著に現れる.

$\lambda_h \rightarrow \infty$ の極限では, YM ポテンシャルは非自明のままに残るが, 時空はシュワルツシルト解に近づくことがわかる. $\lambda_h \rightarrow \infty$ には2つの解釈がある. 1つは $r_h \rightarrow \infty$, つまりホライズン半径を無限大にした場合, もう1つは $g_c \rightarrow \infty$ である. ここでは $r_h \rightarrow \infty$ の極限として, 大きなブラックホールを考えたとしても, 上に述べた振舞いは容易に理解できる. というのは, 方程式 (3.16) ~ (3.18) を見てわかるように, $\lambda \rightarrow \infty$ の極限では YM 場の方程式は重力から分離する. そのために YM 場は非自明な値を持ち続けるのだが, 重力へ影響しなくなり, ブラックホールの構造への寄与はなくなるのである.

再解析の結果, ここにあげた性質の他にも重要なものがあるが, それらは次節の dilatonic colored black hole のところでまとめて議論する.

また YM 場の“毛”をもったブラックホールの解が存在したことは非常に興味深い. 2.1 節で述べたようにブラックホールは質量, 電荷, 角運動量の三本の“毛”しか持たないと考えられてきた. しかし, YM 場の“毛”をもったブラックホールが存在し得ることが数値的に計算された. したがって colored black hole はブラックホールの無毛仮説を再考するきっかけになったのである. ところが, 第5章で見るように, その後 colored black hole は動径方向の線形摂動に対して不安定であることが N. Straumann 等によって確かめられている [43, 44]. 摂動が加わると YM 場はブラックホールに落ち込んでしまうか, 無限遠に飛び散ってしまうのである. そのために, 現実の宇宙で colored black hole が定常的に存在しているとは考えられない. したがってブラックホールの無毛

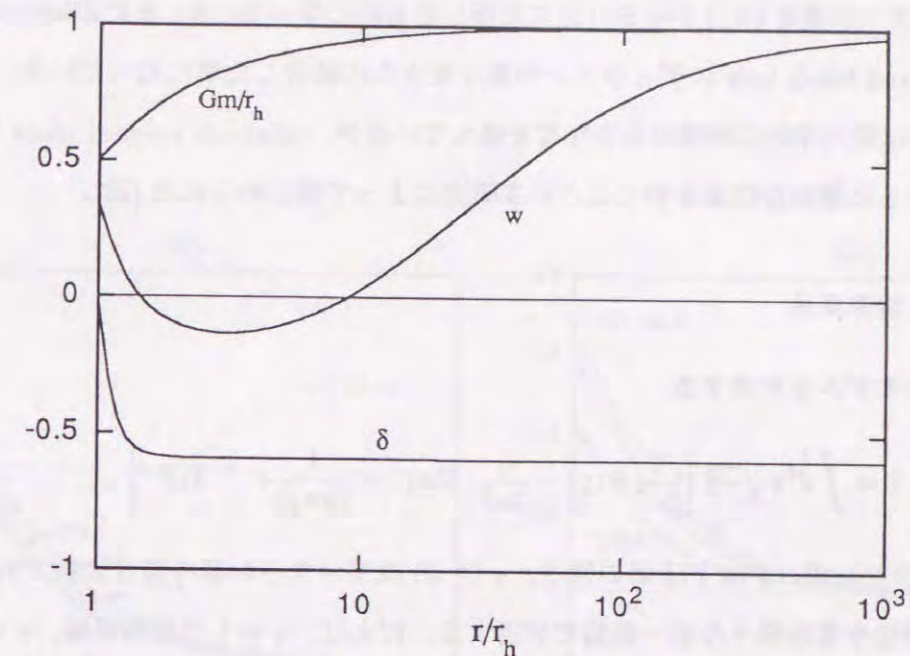


図. 3.2: $n = 2$ の colored black hole の場の振舞いを示した. $\lambda_h = 1.0$ の解である. $n = 1$ の場合に比べて, $|w| \sim 0$ にある範囲が広がっている.

仮説の反例としての地位はほとんど失ってしまったと言えよう. ただし, colored black hole 解の発見によって無毛仮説を再考しようとする動きが出たことは真に注目すべきであり, この解が果たした役割は大きい.

3.1.2 dilatonic colored black hole

以前から, 自然界の4つの相互作用を統一するために, 次元を4次元から拡張して高次元での理論を用いることが試みられている. このような統一理論ではスケール不変なスカラー場が登場する. これをディラトン場とよぶ. ブラックホールの“毛”としてのディラトン場の位置づけをみると, “枝毛”ということになっている. というのは, 重力とディラトン場だけの系ではブラックホール解が存在しないことが証明されているが, さらに電磁場が加わると解が存在し, 解析的に求められている. したがって, ディラトン場は電磁場の“毛”にくっついている“枝毛”の描像が当てはまるのである. アインシュタイン・マックスウェル・ディラトン (EMD) 系のブラックホール解は G. W. Gibbons や K. Maeda [45], D. Garfinkle 等 [46] によってなされており, 熱力学的に特徴のある性質を示すことがわかっている.

ここでは, 次元のコンパクト化以降の4次元有効理論でのアインシュタイン・ヤン・ミルズ・ディラ

トン (EYMD) 系でのブラックホール (dilaton colored black hole) を考察する⁷[31, 32, 33, 34]. これは EMD 系でゲージ場を U(1) から SU(2) に拡張したものになっている. また dilaton colored black hole は colored black hole にディラトンの重力をさらに結合した解になっている. EMD 系のブラックホールは熱力学的に特徴のある性質を備えているが, dilaton colored black hole も同様に, もしくはさらに複雑な性質を持つことが本研究によって確かめられた [33].

EYMD 方程式と境界条件

次の作用を持つモデルを考察する.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R(g) - \frac{1}{2\kappa^2} (\nabla\sigma)^2 - \frac{1}{16\pi g_c^2} e^{-\gamma\sigma} \text{Tr} F^2 \right], \quad (3.26)$$

ここで σ はディラトン場, F は YM 場の強さ, $\gamma (\geq 0)$ はディラトン場の結合定数である. この型の作用は超弦理論を含む様々な統一理論で登場する. 例えば, $\gamma = 1$ は超弦理論, $\gamma = \sqrt{3}$ は 5 次元カルツァー・クライン理論に相当する. 詳しくは [45] を参照してもらいたい. また, $\gamma = 0$ で $\sigma \equiv 0$ のときには, EYM 系が再現されることを注意しておく. したがって, この場合は colored black hole 解が得られるのである.

(3.26) のモデルで静的球対称なブラックホール解を考える. そこで, colored black hole の場合と同じように, メトリックを (3.1) の形にとる. また, YM ポテンシャル, YM 場の強さも, それぞれ (3.11), (3.12) を採用する.

作用汎関数 (3.26) の変分をとると, 以下の方程式系が得られる.

$$\bar{m}' = \frac{\bar{r}^2}{4} \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}} \right) \sigma'^2 + \frac{1}{\lambda_h^2} e^{-\gamma\sigma} \left\{ \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}} \right) w'^2 + \frac{1}{2\bar{r}^2} (1 - w^2)^2 \right\} \quad (3.27)$$

$$\delta' = -\frac{\bar{r}}{2} \sigma'^2 - \frac{2}{\lambda_h^2} \frac{e^{-\gamma\sigma}}{\bar{r}} w'^2 \quad (3.28)$$

$$\left[e^{-\delta\bar{r}^2} \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}} \right) \sigma' \right]' + \frac{2}{\lambda_h^2} \gamma e^{-(\delta+\gamma\sigma)} \left[\left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}} \right) w'^2 + \frac{1}{2\bar{r}^2} (1 - w^2)^2 \right] = 0 \quad (3.29)$$

$$\left[e^{-(\delta+\gamma\sigma)} \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}} \right) w' \right]' + e^{-(\delta+\gamma\sigma)} \frac{1}{\bar{r}^2} w (1 - w^2) = 0, \quad (3.30)$$

ここで無次元変数 $\bar{m} = Gm/r_h$, $\bar{r} = r/r_h$ および $\lambda_h = r_h/[l_P/g_c]$ を用いた.

基礎方程式 (3.27) ~ (3.30) でブラックホール解を計算するために, ホライズン上と無限遠での境界条件を考えなければならない. まず, 物理的な要請として, 漸近的平坦条件 (3.2), (3.3), 正

⁷さらにアキシオン場が結合した球対称な系でも粒子解と非可換ブラックホール解が求められている [47]. ただし, 質量なしの場では自明な解しか存在しないので, ディラトン場もアキシオン場も質量を持っている.

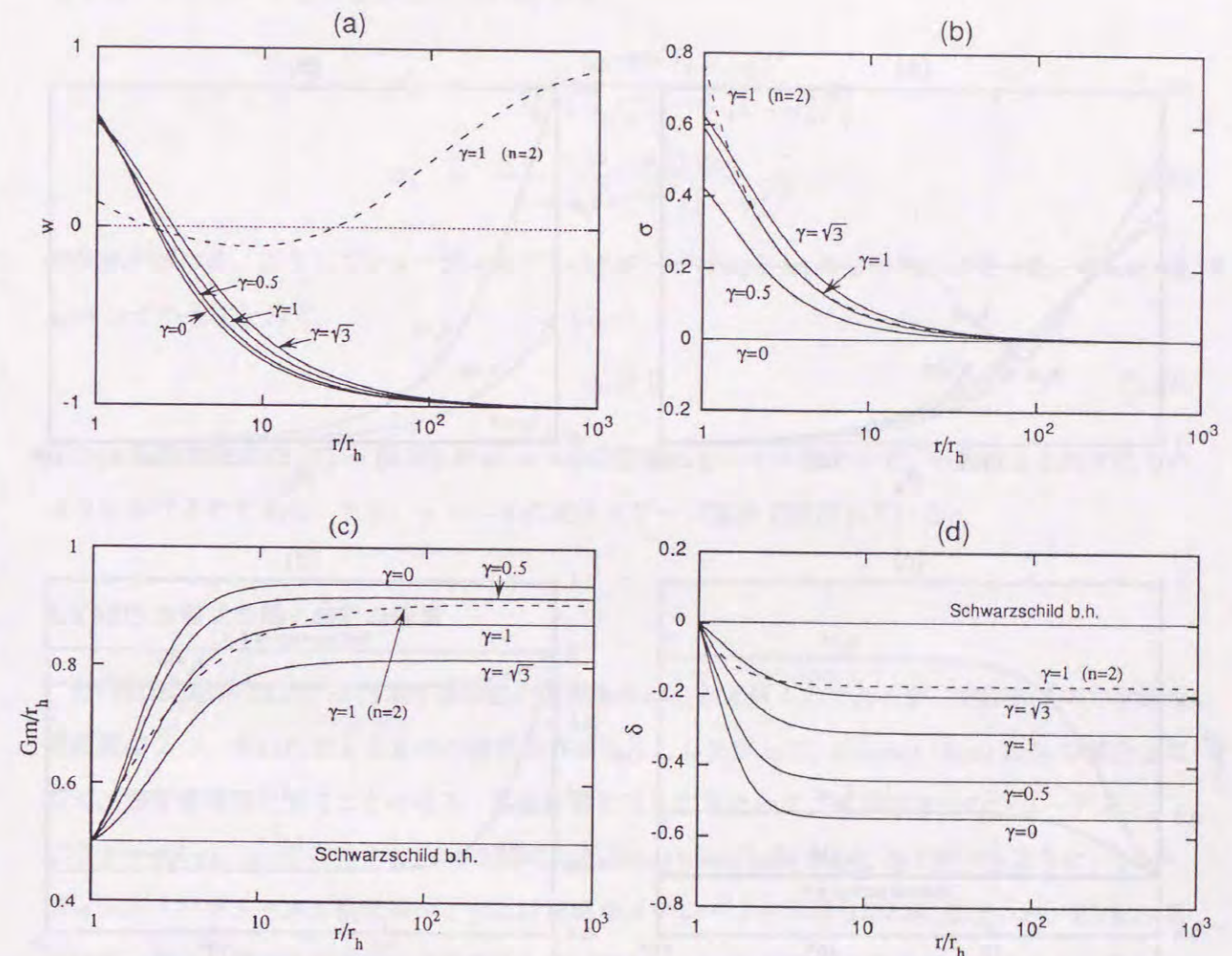


図. 3.3: $n = 1$ の dilaton colored black hole の場の振舞いを示した. (a) は YM ポテンシャル w , (b) はディラトン場 σ , (c) は質量関数 m , (d) は関数 δ である. $\lambda_h = 1.0$ に固定し, $\gamma = 0, 0.5, 1, \sqrt{3}$ の場合を描いた. $\gamma = 0$ は colored black hole 解になっている. $\gamma = 1$ と $\gamma = \sqrt{3}$ は, それぞれ超弦理論と 5 次元のカルツァー・クライン理論から予言される値である [45]. $\gamma = 1$ で $n = 2$ の解も鎖線を描いた. (c), (d) を見るとわかるように $\gamma \rightarrow \infty$ の極限では, 解は Schwarzschild black hole に近づいていく.

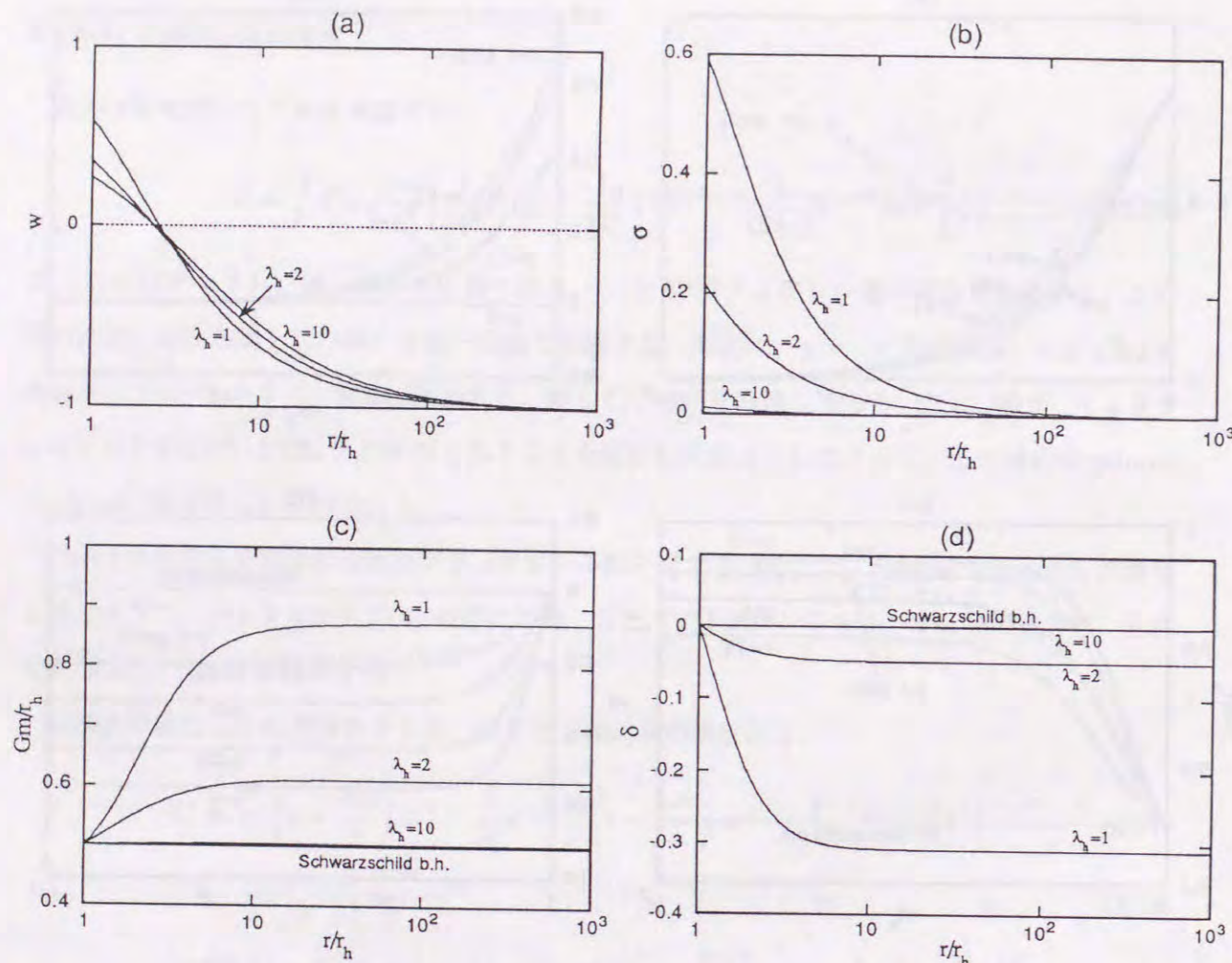


図. 3.4: $n = 1$ の dilatonic colored black hole の場の振舞いを示した. (a) は YM ポテンシャル w , (b) はディラトン場 σ , (c) は質量関数 m , (d) は関数 δ である. $\gamma = 1$ に固定し, $\lambda_h = 1, 2, 10$ の場合を描いた. 比較のために Schwarzschild black hole も記してある. $\lambda_h \rightarrow \infty$ の極限では, 非自明な YM ポテンシャルを持ったまま, 時空は Schwarzschild black hole へと近づいていく.

則なホライズンの存在 (3.4), (3.5), ホライズンの外での正則性の条件 (3.6) を課す. また, 系全体のエネルギーが有限になるために, 無限遠で,

$$\sigma \rightarrow 0, \quad w \rightarrow \pm 1 \quad (3.31)$$

とする. ホライズン上では (3.29), (3.30) より,

$$\sigma'_h = -\frac{\gamma e^{-\gamma\sigma_h} (1-w_h^2)^2}{\lambda_h^2 [1-\lambda_h^{-2} e^{-\gamma\sigma_h} (1-w_h^2)^2]} \quad (3.32)$$

$$w'_h = -\frac{(1-w_h^2) w_h}{1-\lambda_h^{-2} e^{-\gamma\sigma_h} (1-w_h^2)^2}. \quad (3.33)$$

の関係が導ける. こうしてシューティング・パラメータは σ_h と w_h の 2 つだけになった. さらに w_h にはつぎの条件をおく.

$$w_h \geq 0 \quad (3.34)$$

これは基礎方程式 (3.27) ~ (3.30) が $w \rightarrow -w$ の変換に対して不変なので, 一般性を失わずにこのようにおけるのである. また, $w \rightarrow -w$ の変換はゲージ変換で結ばれている.

EYMD 方程式の解と時空の性質

EYMD 方程式 (3.27) ~ (3.30) を前述の境界条件のもとで解くのであるが, 方程式系の力学的な自由度は 2 つ, それに対して 6 つの境界条件がある. したがって, colored black hole の場合と同じく, 固有値問題を解くことになる. 数値計算を行うにあたって, 今回は 2 つのシューティング・パラメータ: σ_h, w_h が存在する. 3.2.2 節の sphaleron black hole のところで述べるように, シューティング・パラメータが複数個のときには単純なイテレーションの方法は使えないが, EYMD 系ではディラトン場の方程式の性質を利用してイテレーションを用いて解を求めることができた.

こうして方程式系 (3.27) ~ (3.30) を解いた結果, colored black hole と同様に YM ポテンシャルのノード数によって特徴づけられる離散的なブラックホール解が得られた. $\lambda_h = 1$ で様々な γ の値に対する $n = 1$ の解を図 3.3 に示す. また, $\lambda_h = 1, \gamma = 1, n = 2$ の解も同じく図 3.3 に示す. 図 3.3 から, 結合定数 γ が大きくなるにつれて, ディラトン場 σ も増すことがうかがえる. しかし, さらに γ を大きくすると σ は再び小さくなっていった. これは $\gamma \rightarrow \infty$ の極限では Schwarzschild black hole ($\bar{m} = 1/2, \delta = 0$) が再現されなければならないことから予想されていたことである. また, 同様の理由で YM 場も消える ($w \equiv 1$) と予想される. 図には示さないが, 数値計算の結果これらの振舞いがすべて確かめられた.

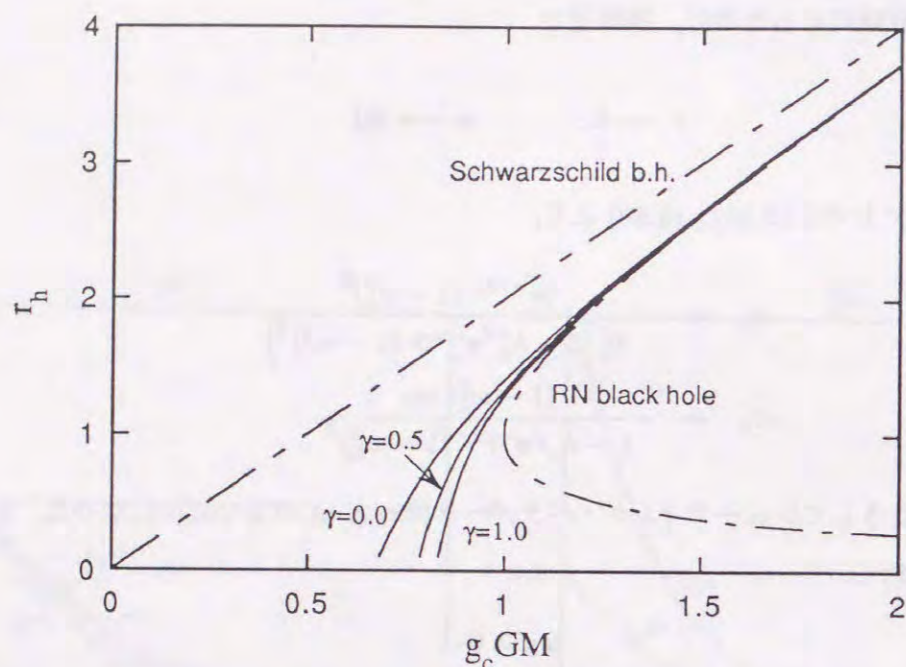


図. 3.5: dilaton colored black hole の質量 M とホライズン半径 r_h の図である. $\gamma = 0, 0.5, 1.0$ にした. $\gamma = 0$ の解は colored black hole である. 比較のために Schwarzschild black hole と RN black hole も記した. 定性的な振舞いは γ の値に依存しないことがわかる.

つぎに, $\gamma = 1$ に固定して λ_h の値を変化させた解を図 3.4 に示す. $\lambda \rightarrow \infty$ にした場合は colored black hole のときと同じように, YM ポテンシャルは非自明のまま残るがディラトン場は消え, 時空はシュワルツシルト解に近づいた.

図 3.4 を見ると λ_h が大きいブラックホールのほうが, 小さい質量を持っているように見えるが, これは質量をホライズン半径で規格化しているため, もとに戻すとやはり大きい λ_h のブラックホールのほうが大きな質量を持つ. 実際に図 3.5 にブラックホールの質量とホライズン半径との図を描くと, グラフが単調に増加していることからその様子がよくわかる. 図 3.5 には colored black hole も含めて γ の値が異なるものを 3 つ描いたが, 定性的に大した差は見あたらなかった.

ブラックホールが大きくなっていくと, エネルギー密度分布はどうなるのだろうか. 粒子解は, 各々のノード数に対して, それぞれ m_h/g_c と $1/g_c$ のオーダーの質量と “YM 荷” を持っている. その解の中心にホライズンが形成してブラックホールになると, ブラックホールは YM 場の一部を飲み込み, そして残りはホライズンの外側に “雲” のようにとりまく. 粒子解の典型的なサイズは l_P/g_c で与えられる. したがって, ブラックホールの大きさがこの値よりも小さいときには, YM 場の一部だけがホライズンの内部にあり, 残りは “雲” になっている. ここで, 以下の議論に必要な

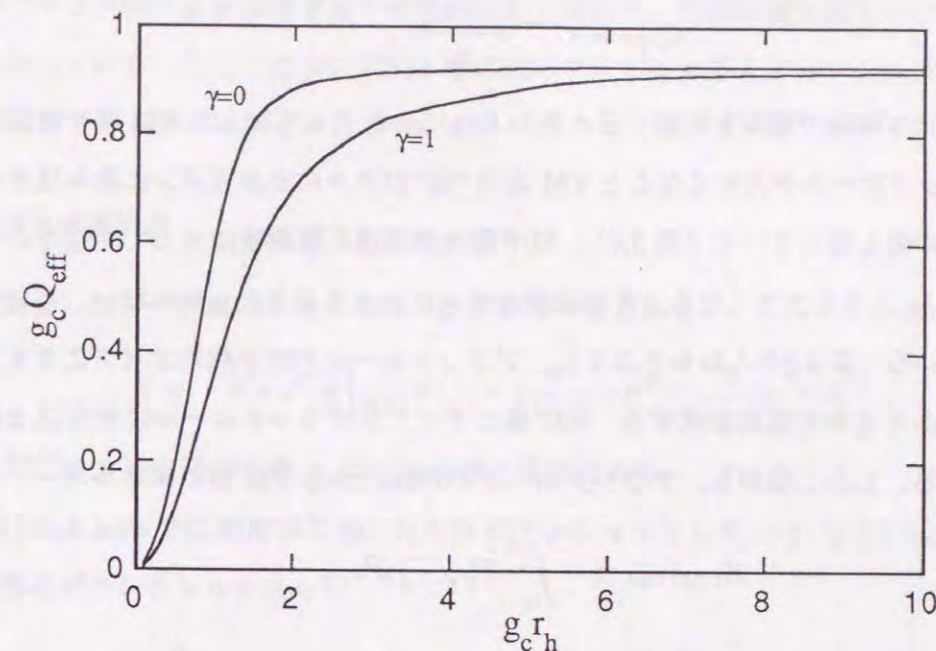


図. 3.6: dilaton colored black hole の有効磁荷 Q_{eff} を示した. 粒子解の典型的なスケール ($\sim l_P/g_c$) 以下では Q_{eff} は λ_h とともに増加するが, それを超えると Q_{eff} はある有限の値に収束する.

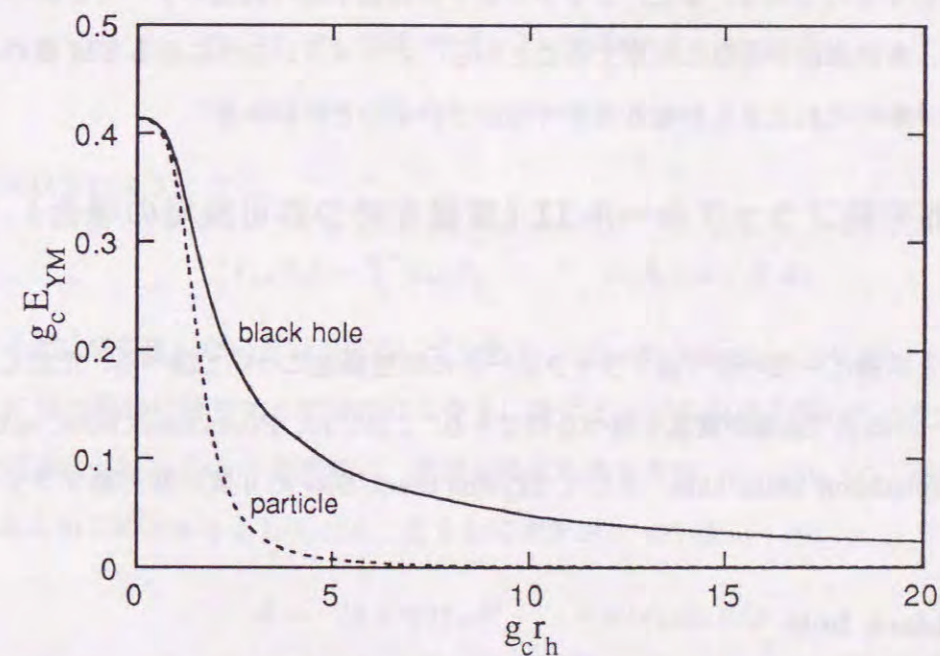


図. 3.7: ブラックホールに外部にある YM 場のエネルギーを示した. 同時に粒子解のある半径よりも外側に存在するエネルギー $E(r)$ も描いた. 2 つの曲線は似ているので, YM 場の非自明な構造はホライズンの存在にほとんど無関係であることがわかる.

な物理量として、ブラックホールの有効磁荷 Q_{eff} を定義する.

$$Q_{eff} \equiv e^{-\gamma\sigma_h} \frac{1-w_h^2}{g_c} \quad (3.35)$$

これはマクスウェル理論で電荷を定義するときのように、ホライズン上で YM 場を表面積分して定義した。ブラックホールが大きくなると YM 場の“雲”は徐々にホライズンに飲み込まれ、その結果、有効磁荷の値も増していく (図 3.6)。粒子解は無遠の観測者にとって中性なので、ブラックホールが l_P/g_c よりも大きくなると有効磁荷はゼロになると思うかも知れない。しかし、この予想は間違っている。図 3.6 からわかるように、ブラックホールが粒子解のサイズよりも大きくなると有効磁荷はある有限の値に収束する。YM 場のすべてがブラックホールに飲み込まれるわけではないのである。しかしながら、ブラックホールの外部にある YM 場のエネルギー

$$E_{YM}(r_h) \equiv - \int_{r_h}^{\infty} T_0^0 \sqrt{-g} d^3x, \quad (3.36)$$

は漸近的に

$$E_{YM}(r_h) \sim \frac{Q_{eff}^2}{r_h} \quad (3.37)$$

の形をしており、 $r_h \rightarrow \infty$ の極限ではゼロになる (図 3.7)。こうしてブラックホールが大きくなると、YM 場のエネルギー密度からくる時空構造への寄与はなくなり、前に述べたように、シュワルツシルト時空になるのである。また、ブラックホールは粒子解の構造のすべてを飲み込むわけではないこと、有効磁荷が有限に収束することから、ホライズンの外にある YM 場のエネルギーは、元々の粒子解のそれよりもかなり大きくなっていることがわかる。

3.2 中性の非可換ブラックホール II (質量を持つ非可換場の場合) [NII タイプ]

この節では前節と同様に中性の非可換ブラックホールの時空構造について調べる。ただし、ここで扱うブラックホールは非可換場が質量を持つものである。これには、Proca black hole, sphaleron black hole, new sphaleron black hole, そして Skyrme black hole の 4 個の非可換ブラックホールが属する。

3.2.1 Proca black hole

プロカ場とは、あまり聞き慣れない名前だが、一言でいうと質量を持ったベクトル場のことである。質量を持っているので当然ゲージ不変性を持たず、くりこみ不可能などの問題が出てくるが、ちょうど非線形シグマ模型を再現する場になっており、現象論的な議論では役に立っている。

質量項をゼロにすると電磁場や YM 場と等しくなり、対称性を回復する。また、質量を持った非可換場のブラックホールを理解するのに単純でありながら、その本質を明らかにしてくれるよいモデルになっている。ここでは SU(2) YM 場に対応するプロカ場とアインシュタイン重力との系 (EP 系) でブラックホール解を考える [48, 49]。

EP 方程式と境界条件

重力と結合したプロカ場の作用汎関数は次の式で与えられる。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R(g) - \frac{1}{16\pi g_c^2} \text{tr} F^2 + \frac{1}{8\pi g_c^2} \mu^2 \text{tr} A^2 \right], \quad (3.38)$$

ここで g_c はプロカ場の結合定数、 μ はプロカ場の質量である。

colored black hole では球対称な SU(2) YM ポテンシャルとして (3.7) を用いた。しかし、ここでは次の形のポテンシャルを扱う⁸。

$$A = a\tau_r dt + \frac{b}{r}\tau_r dr + \{d\tau_\theta - (1+w)\tau_\phi\} d\theta + \{(1+w)\tau_\theta + d\tau_\phi\} \sin\theta d\phi \quad (3.39)$$

ここで、 a, b, d, w は t, r の関数であり、 $(\tau_r, \tau_\theta, \tau_\phi)$ は以前に用いた su(2) リー代数の生成子 $\tau_i (i=1, 2, 3)$ を次のように球座標に変換したものである。

$$\tau_r = \tau_1 \sin\theta \cos\phi + \tau_2 \sin\theta \sin\phi + \tau_3 \cos\theta, \quad (3.40)$$

$$\tau_\theta = \tau_1 \cos\theta \cos\phi + \tau_2 \cos\theta \sin\phi - \tau_3 \sin\theta, \quad (3.41)$$

$$\tau_\phi = -\tau_1 \sin\phi + \tau_2 \cos\phi, \quad (3.42)$$

交換関係は以下ようになる。

$$[\tau_a, \tau_b] = \sum_c \varepsilon_{abc} \tau_c \quad (a, b, c = r, \theta, \phi) \quad (3.43)$$

次にダイオンが存在しないという仮定、すなわち、'tHooft-Polyakov の仮定 : $a \equiv 0$ をおく。こうして YM 場は磁場に相当する部分だけになる。次にゲージ自由度を用いて b をゼロにする。また、colored black hole のときと同様に、基礎方程式を求めると、 $d = Cw$ (C : 任意の定数) となるので、あらかじめ $d \equiv 0$ としておく。こうしてポテンシャルは

$$A = -(1+w)\tau_\phi d\theta + (1+w)\tau_\theta \sin\theta d\phi \quad (3.44)$$

となる。場の強さ F を計算すると、

$$F = -w'\tau_\phi dr \wedge d\theta + w'\tau_\theta dr \wedge \sin\theta d\phi - (1-w^2)\tau_r d\theta \wedge \sin\theta d\phi \quad (3.45)$$

⁸プロカ場はゲージ不変でないために、ポテンシャルの取り方に注意が必要である。

が得られる。

静的球対称メトリック (3.1) を仮定して, (3.38) の変分をとると, 次の EP 方程式が導ける。

$$\tilde{m}' = \frac{1}{\lambda_h^2} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}}\right) w'^2 + \frac{1}{2\lambda_h^2} \frac{(1-w^2)^2}{\tilde{r}^2} + \tilde{\mu}^2(1+w)^2 \quad (3.46)$$

$$\delta' = -\frac{2w'^2}{\lambda_h^2 \tilde{r}} \quad (3.47)$$

$$\left[\tilde{r}^2 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}}\right) e^{-\delta} w'\right]' - e^{-\delta} \left[2\tilde{r} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}}\right) w'^2 - 2(1-w^2)w + \tilde{\mu}^2(1+w)^2 \tilde{r}^2\right] = 0 \quad (3.48)$$

ここで $\tilde{\mu} = \mu/g_c$ である。その他の上線付きの変数と λ_h は dilatonic colored black hole のときと同様の無次元量である。プロカ場は YM 場に質量項を付け加えただけであるから, $\mu \rightarrow 0$ では EYM 方程式に一致する。

境界条件は colored black hole の場合とほとんど同じである。ただ1つだけ異なるのはホライズン上での w と w' との関係で, (3.48) より,

$$w'_h = -\frac{(1-w_h^2)w_h - \tilde{\mu}^2 \lambda_h^2 (1+w_h)}{1 - (1-w_h^2)^2/\lambda_h^2 + 2\tilde{\mu}^2(1+w_h)^2} \quad (3.49)$$

である。こうしてシューティング・パラメータは w_h だけ1つになる。

EP 方程式の解と時空の性質

計算の結果, 2種類の解が存在することがわかった。場の振舞いを図 3.8, 図 3.9 に示す。これらは $\mu = 0.10 m_{Pg_c}$ に固定し, $\lambda_h = 0.2, 0.6, 1.0$ と変化させている。 $m_P = 1/\sqrt{G}$ はプランク質量である。図 3.8 を a 型, 図 3.9 を b 型と呼ぶことにする。図 3.8 と図 3.9 を比較すると, まず, YM 場のポテンシャルから a 型の方が内側に構造ができる傾向にあることがわかる。また, 同じホライズン半径でも, 質量関数 m は a 型の方が大きくなっている。関数 δ は b 型は a 型に比べて非常に小さくなっているのがわかる。 δ は重力ポテンシャルに関連した量であり, これから b 型は重力ポテンシャルが浅く, a 型は深くなっている。

図 3.10, 図 3.11 にホライズン半径を $\lambda_h = 0.5$ に固定し, 非可換場の質量 μ を変化させてみた。 a 型の方には $\mu = 0$ の colored black hole も描いてある。ここで μ がプランク質量 m_P よりも小さい近似を考えよう。これを低エネルギー近似と呼ぶことにする。低エネルギー近似では a 型の解は colored black hole に, b 型の解は Schwarzschild black hole に近づいているのがわかる。また, a 型の YM 場の変化を見ると, Proca black hole と colored black hole ではその減衰の仕方が定性的に異なっている。これは Proca black hole では非可換場が質量を持つので, 理論にスケールが入ったためと思われる。

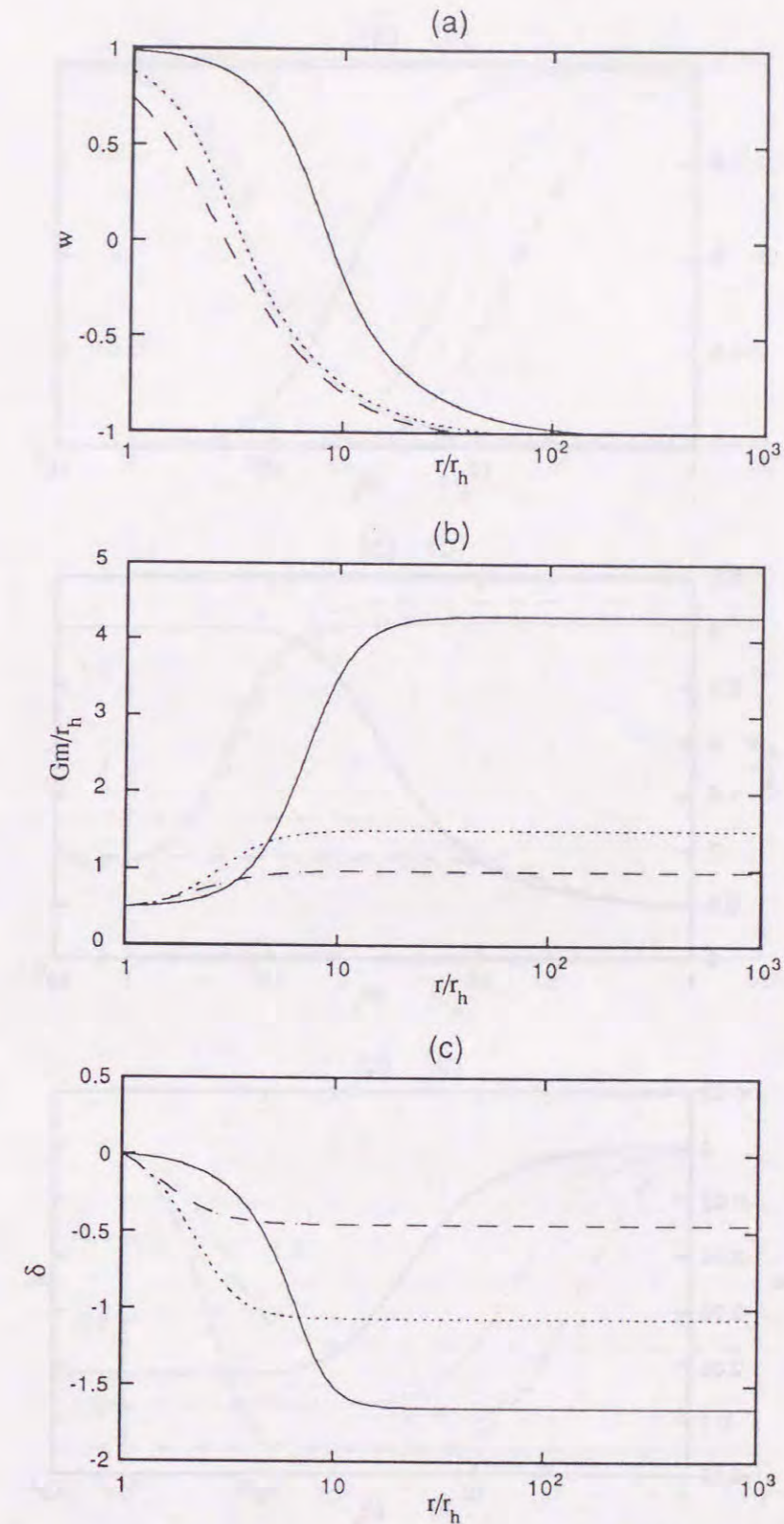


図 3.8: a 型の Proca black hole の場の振舞いを示した。 $n = 1$, $\mu = 0.01 m_{Pg_c}$ とし, ホライズン半径を $\lambda_h = 0.2$ (実線) 0.6 (点線) 1.0 (鎖線) とした。(a) はプロカ場 w , (b) は質量関数 m , (c) は関数 δ である。

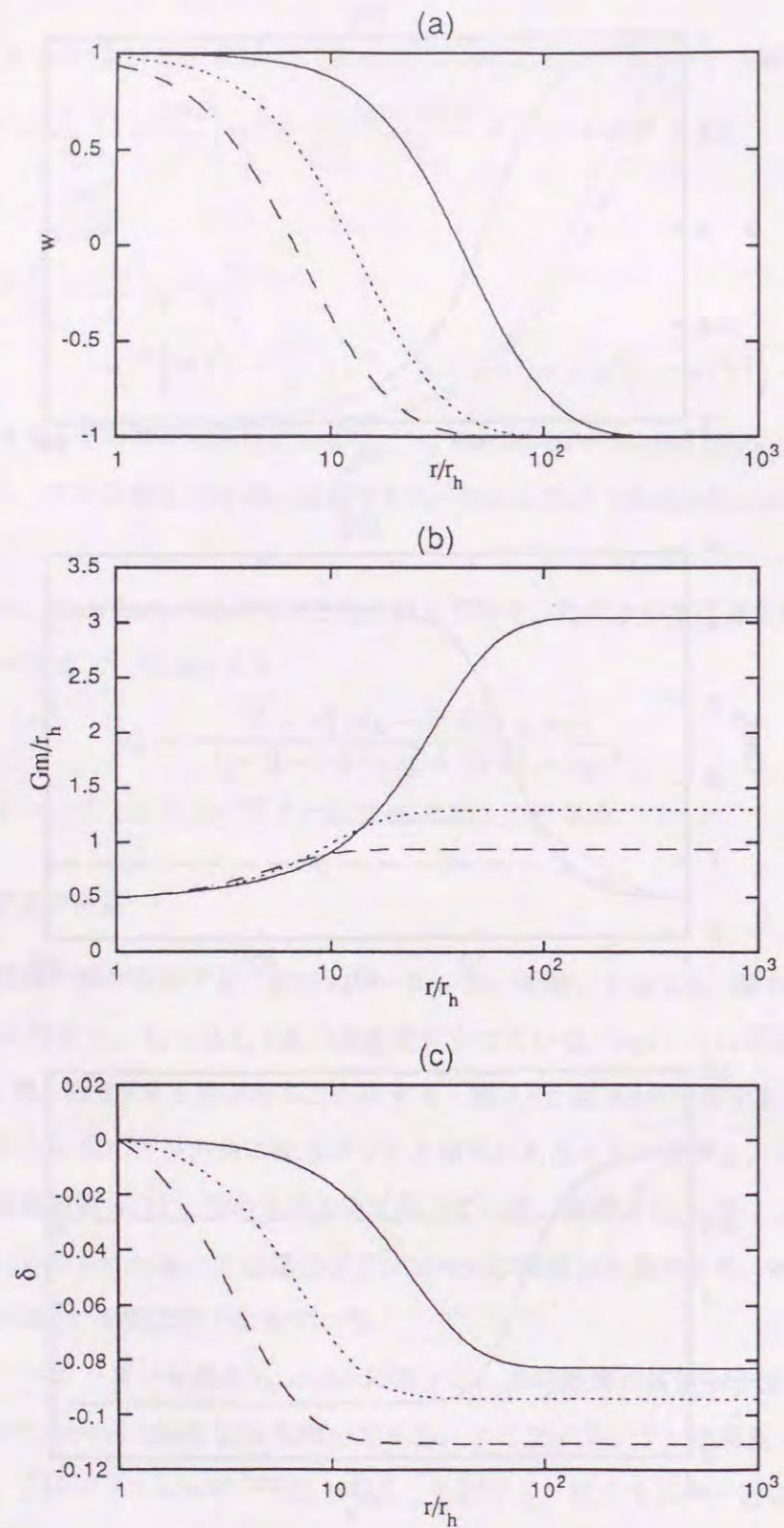


図. 3.9: b 型の Proca black hole の場の振舞いを示した. $n = 1$, $\mu = 0.01 m_{pgc}$ とし, ホライズン半径を $\lambda_h = 0.2$ (実線) 0.6 (点線) 1.0 (鎖線) とした. (a) はプロカ場 w , (b) は質量関数 m , (c) は関数 δ である. 図 3.8 と比べると, a 型の方の m が大きくなっているのがわかる. また, δ の絶対値も大きく, 重力ポテンシャルが深くなっている.

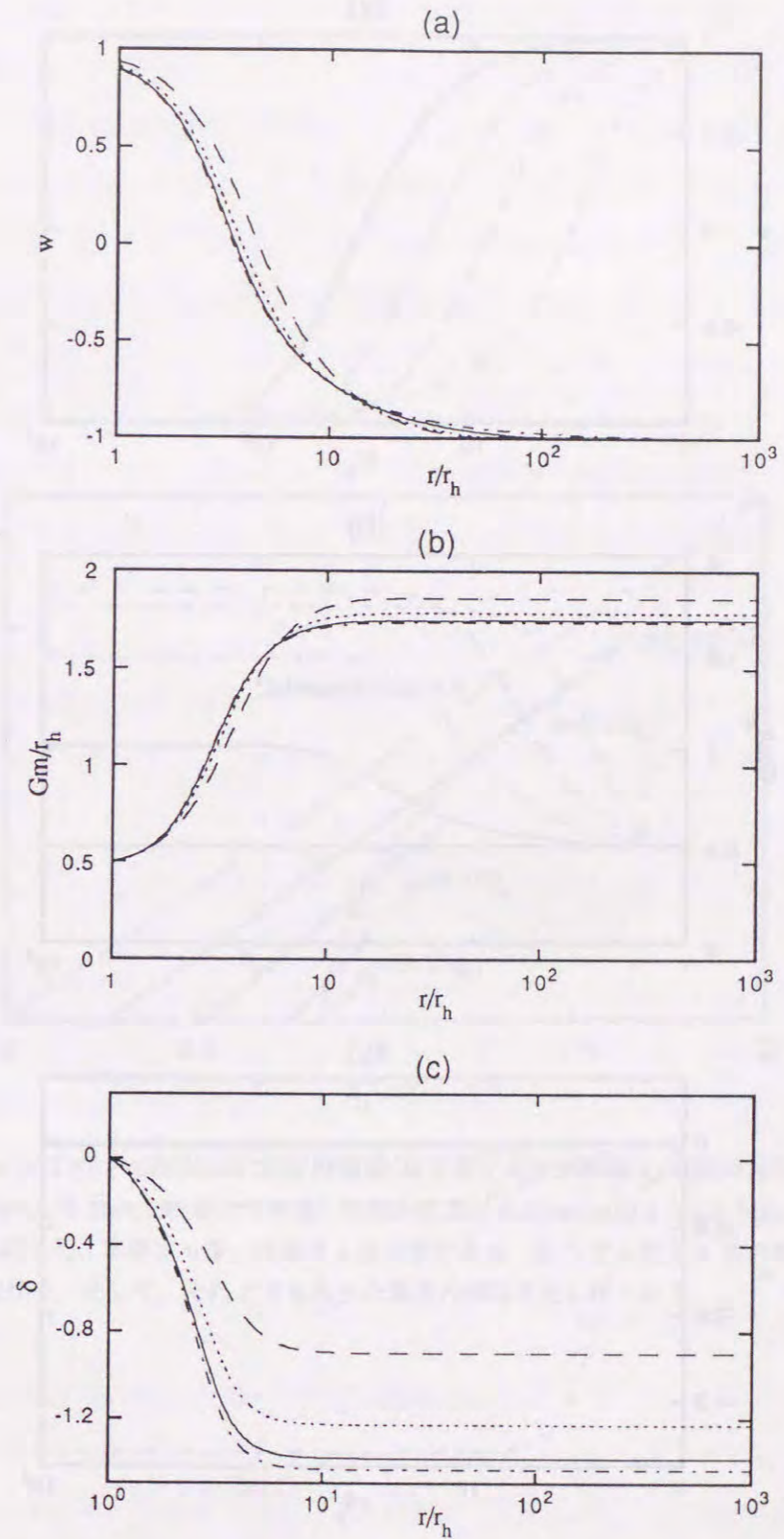


図. 3.10: a 型の Proca black hole の場の振舞いを示した. $n = 1$, $\lambda_h = 0.5$ とし, 非可換場の質量を $\mu/g_c = 0.05$ (実線) 0.10 (点線) 0.15 (鎖線) とした. (a) はプロカ場 w , (b) は質量関数 m , (c) は関数 δ である. また, 比較のために colored black hole (一点鎖線) も描いた. $\mu \rightarrow 0$ の低エネルギー極限では a 型の Proca black hole は colored black hole になる.

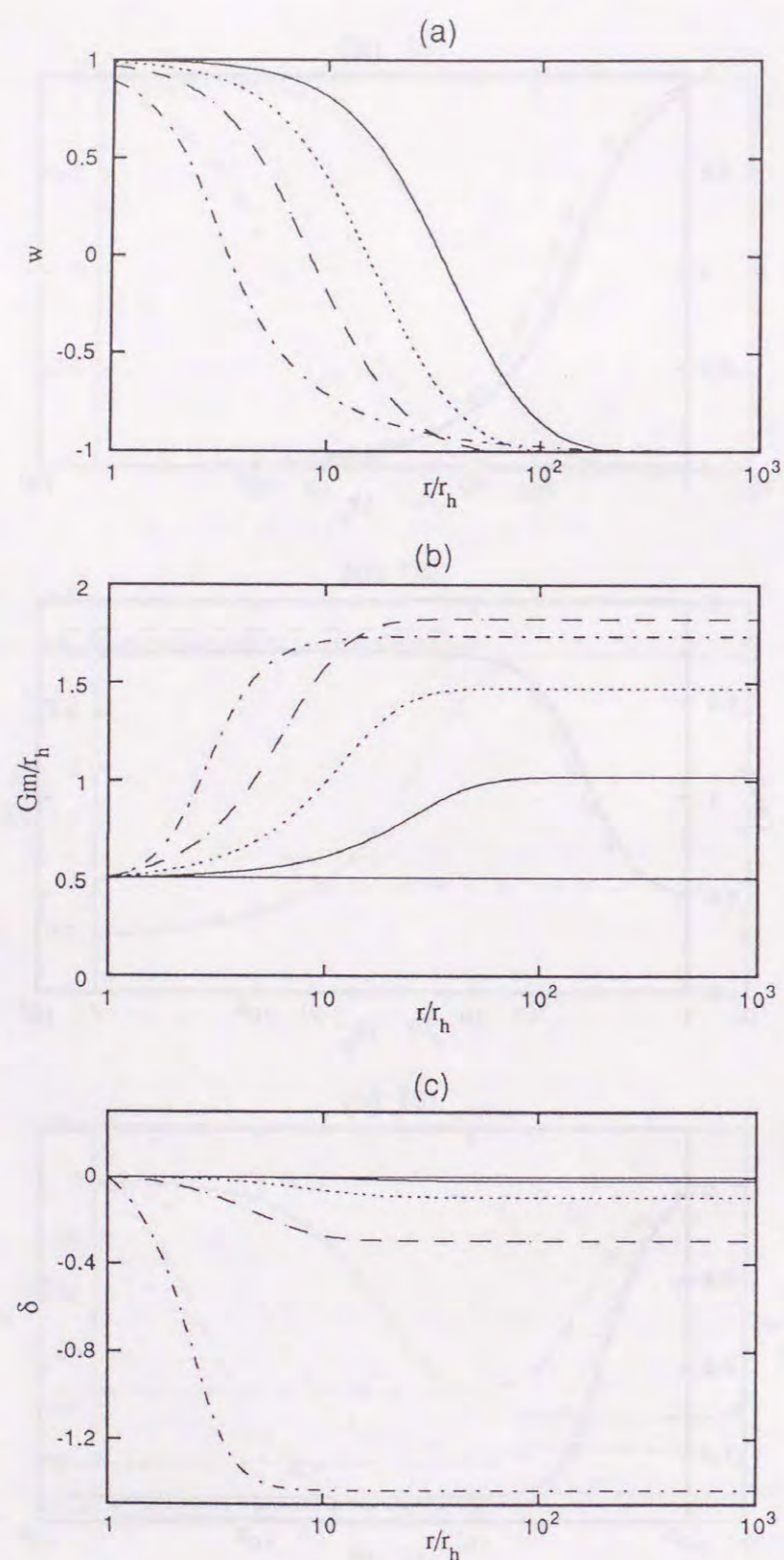


図. 3.11: b型の Proca black hole の場の振舞いを示した. $n = 1$, $\lambda_h = 0.5$ とし, 非可換場の質量を $\mu/g_c = 0.05$ (実線) 0.10 (点線) 0.15 (鎖線) とした. (a) はプロカ場 w , (b) は質量関数 m , (c) は関数 δ である. また, 比較のために colored black hole (一点鎖線) も描いた. $\mu \rightarrow 0$ の低エネルギー極限では b 型の Proca black hole は Schwarzschild black hole になる.

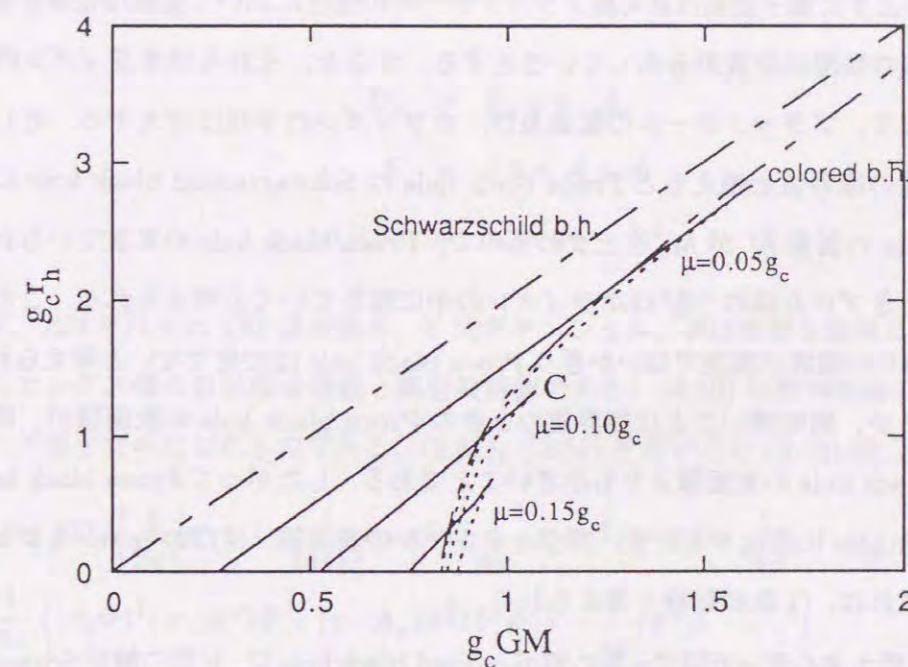


図. 3.12: $n = 1$ の Proca black hole の質量 M とホライズン半径 r_h の図である. $\mu/g_c = 0.05m_p, 0.10m_p, 0.15m_p$ の場合である. 比較のために Schwarzschild black hole と colored black hole も記した. 実線は b 型, 点線は a 型の解である. 点 C で a 型と b 型の解は一致し, くさび構造を作る. そして, それよりも大きな質量の解は存在しなくなる.

質量とホライズン半径の関係を図 3.12 に示す。Proca black hole は次の性質を持つ。\$r_h \to 0\$ の極限では 2 つの粒子解が存在する。1 つは重力がない場合、すなわちミンコフスキー時空でも存在する粒子解（これを、プロカオンと呼ぶ）。もう 1 つは BM 解と似た性質を持つ解である。この 2 つの粒子解から延びているブラックホール解の枝（a 型、b 型）はある臨界ホライズン半径 \$r_{h,cr}\$ で一致している。そして、質量は最大値 \$M_{cr}\$ になる。この臨界点をこえると非自明な解は存在しなくなる。また図 3.12 は臨界点でくさび型を形成している。

以上のように大きな半径の解が存在しないことは、Proca black hole の進化に対して次のようなシナリオを与える。ここではブラックホールの蒸発などの量子効果は無視とすることにする。ただし次章で議論するように量子効果は非可換ブラックホールの進化において重要な役割を果す。まず、ブラックホールの周囲に物質が分布しているとすると、それらはホライズン内に落ち込み、その結果として、ブラックホールの質量及び、ホライズンの半径は増大する。そして、ホライズン半径が上述の臨界値を超えると Proca black hole は Schwarzschild black hole に変化する。Proca black hole の質量 \$M\$ が \$M_{cr}\$ を上まわるので、Proca black hole のままでいられなくなるのである。このときプロカ場の“毛”はホライズンの中に落ちていくと考えられる。このような意味においては、周りの環境が真空でないかぎり Proca black hole は安定でないと考えられる。そして次章で議論するが、興味深いことは臨界値のときの Proca black hole の表面積が、同じ質量の Schwarzschild black hole の表面積よりも小さいことである。したがって Proca black hole から Schwarzschild black hole に進化するとき、ブラックホールの表面積、すなわちエントロピーが鋭くジャンプする。これは、1 次相転移と考えられる。

図 3.12 を見ると、低エネルギー近似で a 型の解が colored black hole に、b 型の解が Schwarzschild black hole になる様子がよくわかる。逆に高エネルギー近似をとると、\$\mu \sim m_P/g_c\$ のあたりで両方の解は消えている。

3.2.2 sphaleron black hole

グラシヨウ・ワインバーグ・サラムの標準理論は電磁相互作用と弱い相互作用を統一することに成功したが、さらに多くの興味深い現象も提供した。それらの 1 つがスファレロンである。スファレロンは D. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu (DHN) によってヤン・ミルズ・ヒッグス (YMH) 系におけるエネルギー汎関数の鞍点として発見された [50, 51, 52]。鞍点上の解なのでスファレロンはトポロジ的に不安定である。スファレロンはインスタントンのように真空と真空の間の遷移を引き起こすので、多くの注目を集めた。標準理論ではインスタントンによる遷移確率は指数的に極めて小さく抑えられているので、実質的にゼロであるが、スファレロンによるも

のは、系の温度が十分に高ければフェルミオン数の破れの大きな振幅を持っている [53, 54, 55]。

以下ではアインシュタイン重力を考慮したアインシュタイン・ヤン・ミルズ・ヒッグス (EYMH) 系で、スファレロン解について議論する [48, 49]。

EYMH 方程式と境界条件

sphaleron black hole 解を導く出発点は次の作用汎関数である。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R(g) - \frac{1}{16\pi g_c^2} \text{Tr} F^2 - \frac{1}{4\pi} (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \frac{1}{4\pi} V(\Phi) \right], \quad (3.50)$$

ここで

$$D_\mu = \partial_\mu + \tau \cdot A_\mu \quad (3.51)$$

$$F = dA + A \wedge A \quad (3.52)$$

$$V(\Phi) = \lambda (\Phi^\dagger \Phi - v^2)^2 \quad (3.53)$$

である。\$F\$, \$A\$ はそれぞれ YM 場の強さ、YMポテンシャル、\$\Phi\$ は複素 2 重項ヒッグス場、\$\lambda\$ と \$v\$ はそれぞれヒッグス場の自己結合定数と真空期待値である。(3.50) は標準理論のボゾンの部分でワインバーグ角をゼロにしたものである。(3.51), (3.53) を用いると (3.50) は

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R(g) - \frac{1}{16\pi g_c^2} \text{Tr} F^2 - \frac{1}{4\pi} (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{16\pi} (\tau \cdot A_\mu) (\tau \cdot A^\mu) (\Phi^\dagger \Phi) - \frac{1}{4\pi} \left\{ (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\tau \cdot A^\mu) \Phi - (\tau \cdot A_\mu) \Phi^\dagger (\partial^\mu \Phi) \right\} - \frac{\lambda}{4\pi} (\Phi^\dagger \Phi - v^2)^2 \right], \quad (3.54)$$

となる。ゲージ場の質量は \$\mu = g_c v\$ で与えられる。

SU(2) YM ポテンシャルは (3.39) で 'tHooft-Polyakov の仮定 : \$a \equiv 0\$ をおいた

$$A = \frac{b}{r} \tau_r dr + \{d\tau_\theta - (1+w)\tau_\phi\} d\theta + \{(1+w)\tau_\theta + d\tau_\phi\} \sin\theta d\phi \quad (3.55)$$

を用いる。colored black hole のときはゲージの自由度を用いて \$b\$ をゼロにしたが、ここではそのまま残しておくことにする。

系が静的なときには \$b, d, w\$ は動径座標 \$r\$ のみに依存した関数となり、場の強さ \$F\$ を計算すると、

$$F = \left[\left(d' + \frac{bw}{r} \right) \tau_\theta - \left(w' - \frac{bd}{r} \right) \tau_\phi \right] dr \wedge d\theta + \left[\left(w' - \frac{bd}{r} \right) \tau_\theta + \left(d' + \frac{bw}{r} \right) \tau_\phi \right] dr \wedge \sin\theta d\phi - \left[1 - (w^2 + d^2) \right] \tau_r d\theta \wedge \sin\theta d\phi \quad (3.56)$$

となる。

最も一般的な複素2重項のヒッグス場は、関数 h と $SU(2)$ の値を持つ ξ を用いて

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp[-\tau \cdot \xi(\vec{x})] \begin{pmatrix} 0 \\ h(\vec{x})/r \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

で表わされる。球対称な EYM 解を見つけるときには、(3.57) をつぎのように書き換えておくと便利である。

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_2(\vec{x}) + i\psi_1(\vec{x}) \\ \phi(\vec{x}) - i\psi_3(\vec{x}) \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

ここで4つの自由度をスカラー関数 ϕ とベクトル ψ に分けた。(3.58) を作用汎関数 (3.54) に代入すると、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R(g) - \frac{1}{16\pi g_c^2} \text{Tr} F^2 - \frac{1}{8\pi} \{ \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + (\partial_\mu \psi) \cdot (\partial^\mu \psi) \} \right. \\ \left. - \frac{g^2}{32\pi} (\phi^2 + |\psi|^2) \text{Tr} A^2 - \frac{1}{8\pi} A_\mu \cdot (\psi \times \partial^\mu \psi + \psi \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \psi) \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{16\pi} (\phi^2 + |\psi|^2 - v^2)^2 \right], \quad (3.59)$$

となる。ここで球対称解を求めるためにヒッグス場に次のヘッジホッグ型を採用する。

$$\phi = h(r, t), \quad (3.60)$$

$$\psi = \psi(r, t) \hat{r} \quad (3.61)$$

これは (3.57) の形のヒッグス場に対しては

$$h(\vec{x}) = h(r, t), \quad (3.62)$$

$$\xi(\vec{x}) = \gamma(r, t) \hat{r} \quad (3.63)$$

に相当する。

ここで YM 場ポテンシャルの関数 b を消さなかったことを思い出してもらいたい。そのために、ゲージの自由度がまだ1つ残っている。これをヒッグス場のほうで用いることにする。つまり、

$$\psi(r, t) \equiv 0 \quad (3.64)$$

とする。これは $\gamma \equiv 2\pi$ に対応する⁹。

⁹(3.64) の代わりに $\phi(r, t) \equiv 0$ としてもよい。この場合は $\gamma \equiv \pi$ に対応しており、2つの関係はゲージ変換で結ばれている。

静的球対称なメトリックとして (3.1) を用いて、作用汎関数 (3.59) の変分をとると、次の EYM 方程式が得られる。

$$\bar{m}' = \frac{1}{\lambda_h^2} \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) \left\{ \left(d' + \frac{bw}{\bar{r}}\right)^2 + \left(w' - \frac{bd}{\bar{r}}\right)^2 \right\} \\ + \frac{1}{2\lambda_h^2 \bar{r}^2} (1 - w^2 - d^2)^2 + \frac{1}{8} h^2 \left[\left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) b^2 + 2 \{d^2 + (1+w)^2\} \right] \\ + \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) h'^2 + \frac{\bar{\lambda}}{4} \bar{r}^2 (h^2 - v^2)^2 \quad (3.65)$$

$$\delta' = -\frac{2}{\lambda_h^2 \bar{r}} \left\{ \left(d' + \frac{bw}{\bar{r}}\right)^2 + \left(w' - \frac{bd}{\bar{r}}\right)^2 \right\} - \bar{r} h'^2 - \frac{1}{4} h^2 \frac{b^2}{\bar{r}} \quad (3.66)$$

$$\left[\bar{r}^2 \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) e^{-\delta} h' \right]' \\ + \frac{e^{-\delta}}{4} \left[b^2 \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) + 2 \{d^2 + (1+w)^2\} \right] - \bar{\lambda} \bar{r}^2 e^{-\delta} (h^2 - v^2) h = 0 \quad (3.67)$$

$$\left[\left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) e^{-\delta} \left(d' + \frac{bw}{\bar{r}}\right) \right]' \\ + \frac{e^{-\delta}}{\bar{r}^2} \left[b\bar{r} \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) \left(w' - \frac{bd}{\bar{r}}\right) + d(1 - w^2 - d^2) \right] - \frac{1}{4} \lambda_h^2 e^{-\delta} d h^2 = 0 \quad (3.68)$$

$$\left[\left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) e^{-\delta} \left(w' - \frac{bd}{\bar{r}}\right) \right]' \\ - \frac{e^{-\delta}}{\bar{r}^2} \left[b\bar{r} \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) \left(d' + \frac{bw}{\bar{r}}\right) - w(1 - w^2 - d^2) \right] - \frac{1}{4} \lambda_h^2 e^{-\delta} (1+w) h^2 = 0 \quad (3.69)$$

$$b = \frac{2\bar{r}(w'd - d'w)}{2(d^2 + w^2) + \lambda_h^2 \bar{r}^2 h^2 / 4}. \quad (3.70)$$

ここで 3.1 節で定義した無次元の結合定数 λ_h および無次元関数 \bar{m} , \bar{r} を用いた。 $\bar{\lambda} = r_h^2 \lambda$ である。

これまでではすべて一般的な場合について述べてきた。しかし、この節ではもう少し簡単化を行い、DHN スファレロンタイプのブラックホール (sphaleron black hole) を考えることにする。より一般的な場合については次節で議論する。

sphaleron black hole では次を仮定する。

$$d \equiv 0, \quad b \equiv 0 \quad (3.71)$$

要するに、colored black hole に複素2重項のヒッグス場が加わったことになる。こうして力学的な自由度は h と w の2個になる。

次に境界条件を考える。まず、関数 m と δ の境界条件としては (3.2)~(3.6) を用いる。また w , h の無限遠での振舞いは、系のエネルギーが有限にならなければいけないので、

$$w \rightarrow \pm 1 \quad (3.72)$$

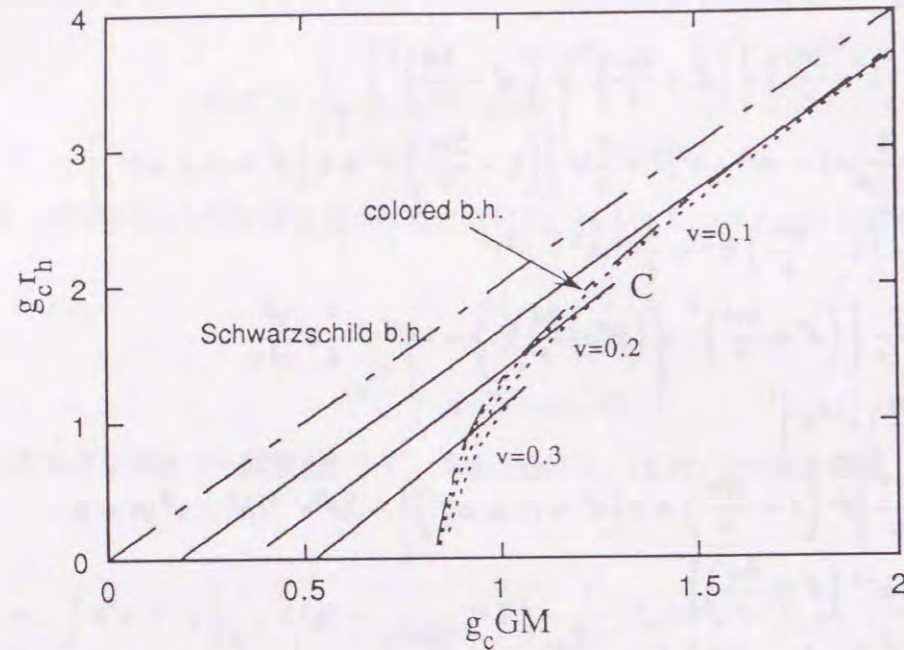


図. 3.13: $n = 1$ の sphaleron black hole の質量 M とホライズン半径 r_h の図である. $\lambda = 0.125/g_c^2$ とし, $v = 0.1m_P, 0.2m_P, 0.3m_P$ の場合である. 比較のために Schwarzschild black hole と colored black hole も記した. 実線は b 型, 点線は a 型の解である. 定性的に Proca black hole の場合とよく似ている.

$$h \rightarrow v \quad (3.73)$$

となる. (3.73) は無限遠でヒッグス場の対称性が破れていることを表している. ホライズン上では (3.67) と (3.69) より,

$$w'_h = \left[-w_h(1-w_h^2)^2 + \frac{\lambda_h^2}{4} h_h^2(1+w_h) \right] / F_h \quad (3.74)$$

$$h'_h = \left[\frac{1}{2} h_h(1+w_h)^2 + \bar{\lambda}(h_h^2 - v^2)h_h \right] / F_h \quad (3.75)$$

の関係がある. ここで,

$$F_h = 1 - \frac{(1-w_h^2)^2}{\lambda_h} - \frac{1}{2} h_h^2(1+w_h)^2 - \frac{\bar{\lambda}}{2} (h_h^2 - v^2)^2 \quad (3.76)$$

である. したがって, 数値計算を行う際のシューティング・パラメータは w_h と h_h の 2 つになる.

EYMH 方程式の解と時空の性質

実際に数値計算で方程式系を解いていくのだが, シューティング・パラメータが複数個になると, 一般的に colored black hole で用いたような反復法は使えない. もしくは, 反復法は可能な

かもしれないが, 反復するときの判定条件が明らかでない. したがって, ここでは次の方法を用いた.

まず, シューティング・パラメータ w_h と h_h の最大値 (w_h^{max}, h_h^{max}) と最小値 (w_h^{min}, h_h^{min}) を決める. そしてこの 2 次元パラメータ空間を $m \times n$ 個の格子に分けて, $\{(w_{h,i}, h_{h,j}) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, w_{h,1} = w_h^{min}, w_{h,m} = w_h^{max}, h_{h,1} = h_h^{min}, h_{h,n} = h_h^{max}\}$ とする. つぎに, それぞれを初期値にして場の方程式 (3.65) ~ (3.70) を解いていく. そうすると, 真のパラメータの値から離れた境界値を与えたところでは, 場の関数が発散するなり, 質量が負になったりと物理的にあり得ない振舞いを示す. そこで, 以下の条件のうち, どれか 1 つでも該当したら, それは解の候補から除外していく.

1. $|w| > 1$
2. $h > v$
3. $h' < 0$
4. $m' < 0$
5. $(1 - \frac{2m}{r}) < 0$

1 は YM 場が (3.72) の境界条件を満たすための必要条件である. 2 と 3 はヒッグス場が単調に真空期待値に近づくための条件である. 4 は局所的にマイナスのエネルギーが存在しないことを表している. 5 はホライズンより外では時空が正則になることを保証している.

このようにして積分していくうちに, ほとんどのものは除外され, 例えば (w_{h,i^*}, h_{h,j^*}) の初期値で打ち出したものが最も大きな積分変数 \bar{r} の値まで生き残る. しかし, これも真のパラメータの値ではないので, そのうちに上の 1 ~ 5 の条件に抵触する. そこで (w_{h,i^*}, h_{h,j^*}) を解のパラメータの候補とし, これを中心に $w_h^{min} = w_{h,i^*-k}, w_h^{max} = w_{h,i^*+k}, h_h^{min} = h_{h,i^*-l}, h_h^{max} = h_{h,i^*+l}$ (k は $m/2$ 以下の, l は $n/2$ 以下の整数) の間でパラメータ空間をとり, 同様のことをしていく. こうしてパラメータ空間で最もらしい境界値をしぼっていき sphaleron black hole 解を求めていくのである.

こうして解を求めた結果 Proca black hole のときと同様に 2 つのタイプの解が存在した. 重力質量 M とホライズン半径 r_h の関係を描くと図 3.13 のようになる. いくつかの真空期待値のものを描いた. 図より, 2 種類のタイプの解が存在しているのがわかる. ホライズン半径が大きいほうを a 型, 小さい方を b 型と呼ぶことにする. この a 型と b 型は Proca black hole での分類と同じで, 似た性質をしている. a 型と b 型は臨界重力質量 M_{cr} で一致してその先は解がなくなって

いる。これも Proca black hole と同様の構造で、進化などに関しても似たような結論が得られる。また、図 3.13 の解は YM ポテンシャルのノード数 $n=1$ の解のみを示したが、パラメータによって、 $n=2, 3$ 等の解も存在する。ただし、 n は有限である。

3.2.3 new sphaleron black hole

DHN スファレロンが発見された後に、より一般的な仮定、つまり (3.56) のままのゲージ場で新しいタイプのスファレロン解が発見された [56]。この解はヒッグス粒子の質量が大きいところでしか解を持たないが、場の振舞いは複雑で、DHN スファレロンに比べてエネルギー的に低い値を持つ。そのため新しい解は DHN スファレロンより安定といえる。また、新しい解は non-contractible loop を持たないので、フェルミオン数非保存の過程には寄与しないことがわかっている。

この節では自己重力をともなった新しいタイプのスファレロンを考え、粒子解とブラックホール解について議論する [57]。用いる方程式は (3.65)~(3.70) であるが、シューティング・パラメータは粒子解の場合は $d'(0)$, $w''(0)$, $h'(0)$ 、ブラックホール解の場合は d_h , w_h , h_h といずれにしても 3 個存在し、パラメータ空間は 3 次元になる。原理的には sphaleron black hole の場合と同じ様に解くことはできるが、3 次元パラメータ空間で解を求めることは、コンピューターの計算時間の問題や解の候補の判定の問題もあって、なかなか難しい。そこでヒッグス場の結合定数 λ に次の仮定をおく。

$$\lambda \rightarrow \infty \quad (3.77)$$

この極限では場の方程式を $1/\lambda$ で展開するとわかるように、ヒッグス場は全時空で定数: $h(r) \equiv v$ となり、YM 場の関数 $d(r)$ と $w(r)$ のみが非自明になる。このような仮定をおいたことには数値計算が簡単になるという以外にも理由がある。1 つは、重力を考えない場合ヒッグス粒子の質量が結合定数に依存したある臨界値よりも小さくなると、新しいスファレロン解はなくなってしまふことがわかっている [56]。そこで重力を入れた系でも同様のことが期待され、大きな λ を用いることにする。新しい解と DHN スファレロンとを比較する場合に、 $\lambda \rightarrow \infty$ のときが最も顕著に違いが現れるからである。もちろん λ が有限の場合と $\lambda \rightarrow \infty$ では解の振舞いは定性的に同じになっている。また、実験から自己結合定数 λ の制限はなく、どのような値にとっても一概に間違っているとはいえない。

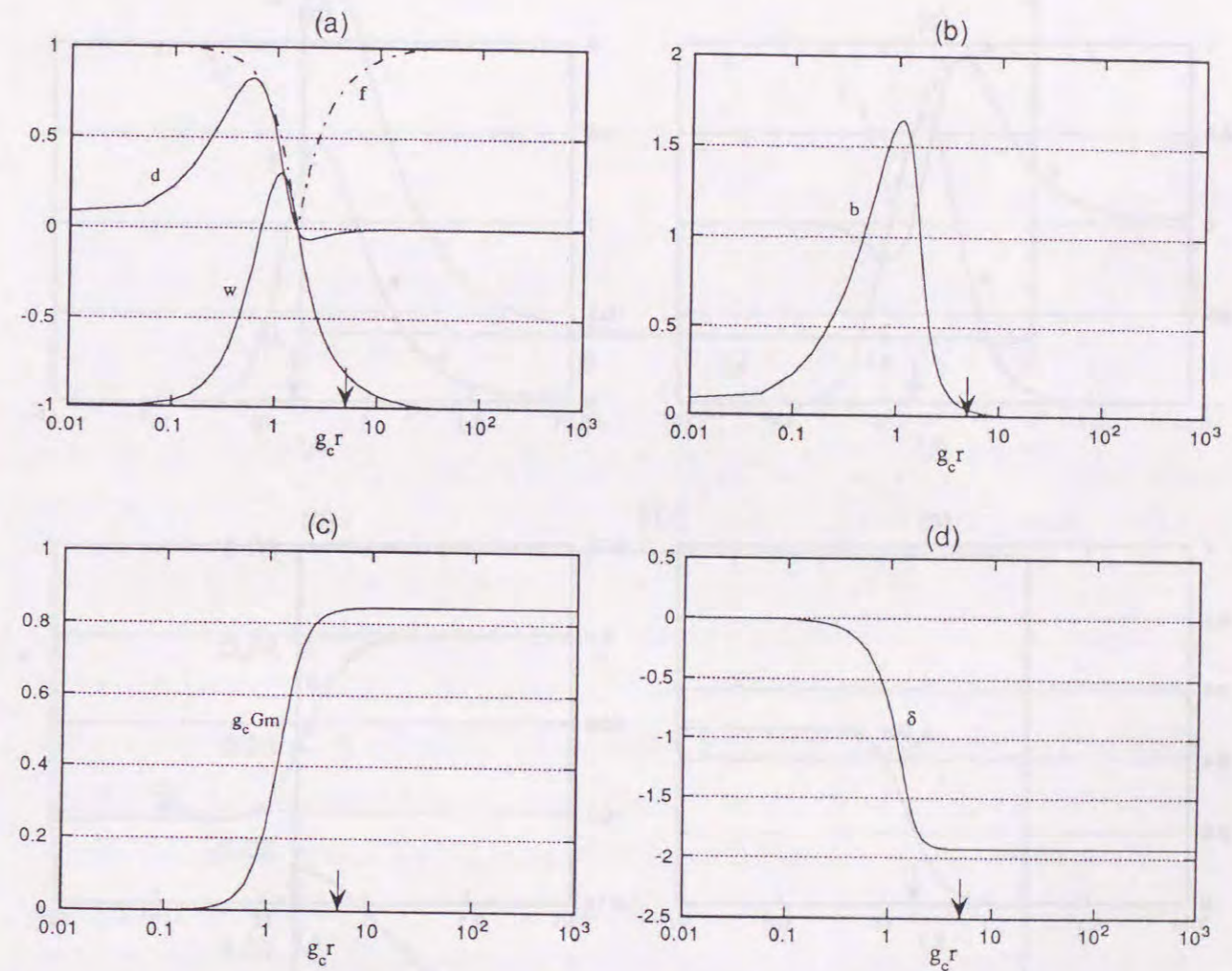


図 3.14: a 型の粒子解の場の振舞いを描いた。 $\lambda = \infty$, $g_c l_P = 1.0$, $g_c v = 0.2 m_P$ にした。(a), (b) は YM 場 w, d, b , (c) は質量関数 m , (d) は関数 δ である。

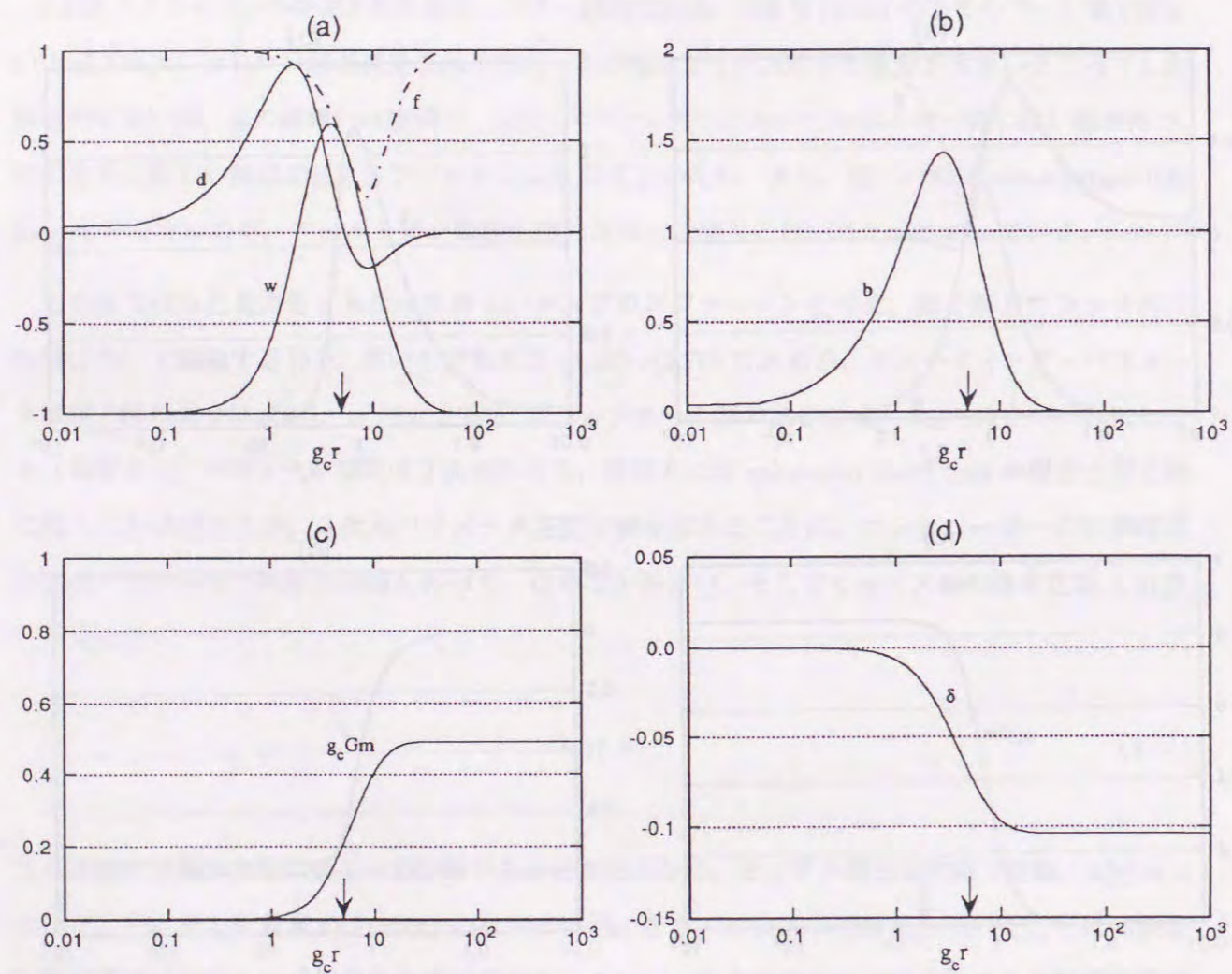


図. 3.15: b 型の粒子解の場の振舞いを描いた. $\lambda = \infty$, $g_c l_P = 1.0$, $g_c v = 0.2 m_P$ にした. (a), (b) は YM 場 w, d, b , (c) は質量関数 m , (d) は関数 δ である. 図 3.14 と比較すると, b 型の質量の方が a 型のよりも小さいことがわかる.

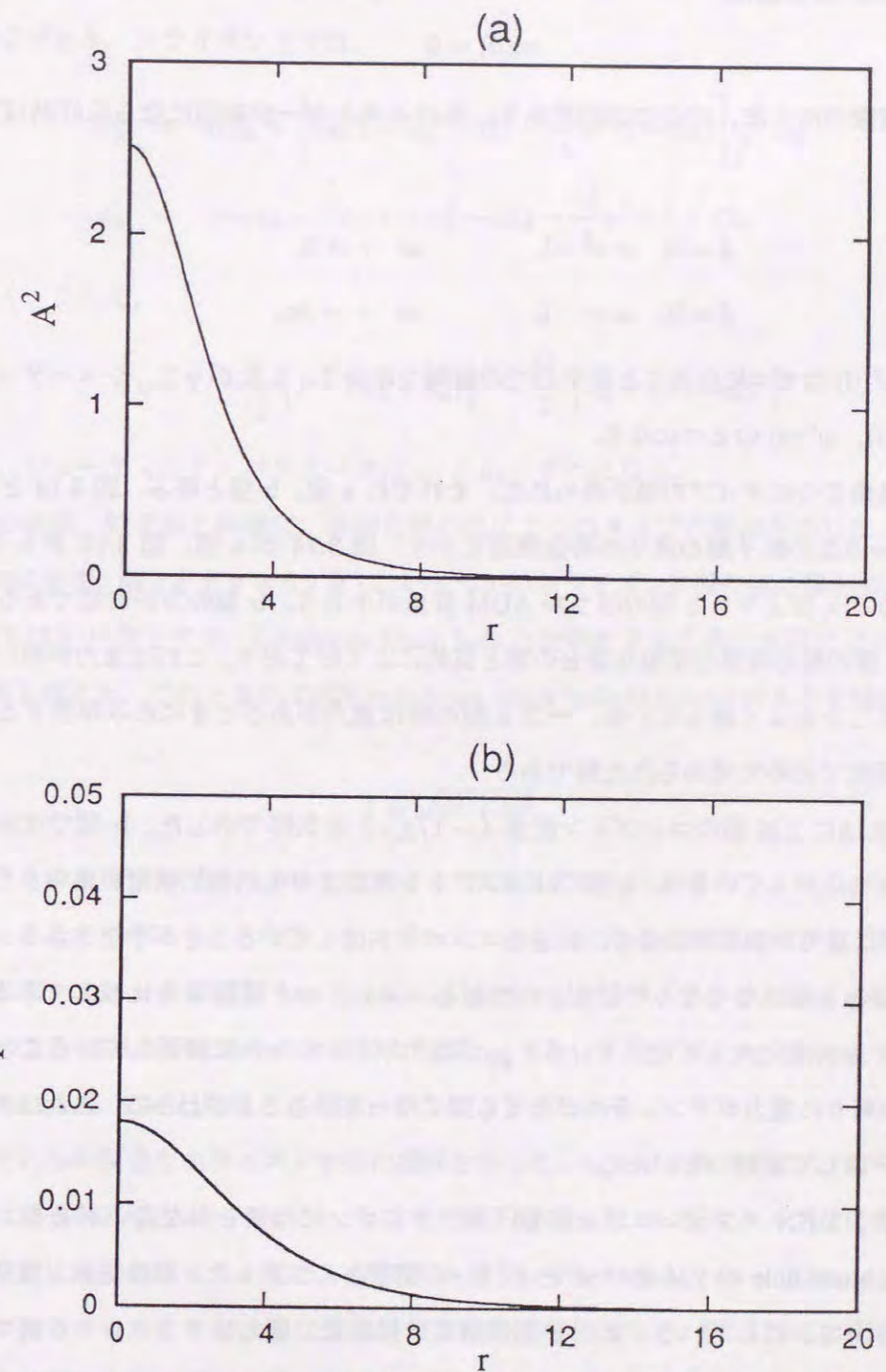


図. 3.16: 自己重力を考慮した新しいスファレロン解の A^2 (a) と F^2 (b) の分布を示した. $\lambda = \infty$, $g_c l_P = 1.0$, $g_c v = 0.2 m_P$ である.

粒子解と時空の性質

まず、粒子解から求めることにする。メトリック関数の境界条件は(3.2), (3.3), (3.5), (3.6)を用いる。中心での m の値は

$$m(0) = 0 \quad (3.78)$$

となる。場の関数のほうは、中心で正則であり、系のエネルギーが有限にならなければいけないので、

$$\begin{aligned} d = 0, \quad w = -1, & \quad \text{at } r = 0, \\ d = 0, \quad w = -1, & \quad \text{as } r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.79)$$

となる。また $w'(0)$ はゼロになることが中心での展開でわかり、したがって、シューティング・パラメータは $d'(0)$, $w''(0)$ の2つになる。

数値計算の結果2つのタイプの解が得られた。それぞれ a 型, b 型と呼ぶ。図 3.14 と図 3.15 に $g_c l_P = 1.0$, $v = 0.2$ の粒子解の周りの時空構造を示す。図 3.14 が a 型, 図 3.15 が b 型である。両者を見比べると a 型よりも b 型のほうが ADM 質量が小さく, b 型の方が安定であることを暗示している。b 型の解の時空は平坦な場合の解と質的によく似ており, これは重力が弱い近似では両者が一致することをよく表している。一方 a 型の解は重力があるときにのみ存在する解で, したがって, 本研究で初めて求められた解である。

図 3.14, 図 3.15 に YM 場のコンプトン波長 ($\sim 1/g_c v$) を矢印で示した。b 型では非自明な構造は矢印を越えて広がっているが, a 型ではコンプトン波長よりも内側に構造が集中している, これから, a 型では重力が効果的に働き, 構造をコンパクト化していることが予想される。そのために重力が弱くなると解がなくなってしまうのである。メトリック関数 δ を比較してみると, a 型の方が b 型よりも非常に大きくなっている。 g_{tt} が重力ポテンシャルに関係していることを考えると, a 型の解の周りの重力ポテンシャルがとて深くなっていることがわかる。これは中心への構造の集中化と一致した振舞いといえる。

粒子解の場合, DHN スファレロンと新しいスファレロンには明らかな違いがある。図 3.16 に new sphaleron black hole の YM 場の A^2 と F^2 を r の関数として示した。結合定数と真空期待値は $g_c l_P = 1.0$ と $v = 0.2$ にしている。また b 型の解だけ描いた。新しいスファレロン解では原点で A^2 も F^2 も有限の値を持ち, それから r のべきの関数で減衰している。しかし, DHN スファレロンでは (3.67) を $1/\lambda$ で展開すればわかるように, 原点では $h = 0$, その他すべての点では $h = v$ ならなくてはならない。そのためヒッグス場の運動量項やポテンシャル項は発散し, 原点は特異になってしまう。新しいスファレロン解ではそのような不連続性や特異点などは見られない。

ブラックホール解と時空の性質

次にブラックホール解 (new sphaleron black hole と呼ぶ) について議論する。

メトリック関数の境界条件は (3.2)~(3.6) を用いる。場の関数の境界条件は, 無限遠では粒子解の場合と同じであり, ホライズン上では,

$$w'_h = b_h d_h - \left[w_h(1 - w_h^2 - d_h^2) - \frac{\lambda_h^2 v^2 (1 + w_h)}{4} \right] / G_h \quad (3.80)$$

$$d'_h = -b_h w_h - \left[d_h(1 - w_h^2 - d_h^2) - \frac{\lambda_h^2 v^2 d_h}{4} \right] / G_h \quad (3.81)$$

の関係がつく。ここで,

$$G_h = 1 - \frac{1}{\lambda_h^2} \{1 - (w_h^2 + d_h^2)\}^2 - \frac{h_h^2}{2} \{d_h^2 - (1 + w_h^2)\}^2 \quad (3.82)$$

したがって, シューティング・パラメータは w_h と d_h の2つになる。

数値計算の結果, 粒子解と同様に, 自明な解の他に2つのタイプの解が存在した。それらを図 3.17, 図 3.18 に示す。両方とも $v = 0.2$ とし, いくつかのホライズン半径の値の解を描いた。図 3.17 を a 型, 図 3.18 を b 型とする。sphaleron black hole と比較をするために点線で DHN sphaleron black hole 解も加えた。このときの DHN sphaleron black hole は $\lambda = \infty$ のものを描いている。ここで f は

$$f = \sqrt{d^2 + w^2} \quad (3.83)$$

で定義されるもので YM ポテンシャルの“大きさ”に相当するものと考えてよい。sphaleron black hole では $d \equiv 0$ なので $f = |w|$ となる。したがって, $w = 0$ になる点で折れ曲がって常に正の領域に存在するのである。一点鎖線は new sphaleron black hole 解の f である。new sphaleron black hole ではこのように微分不可能な点は見あたらない。また, a 型では, sphaleron black hole と new sphaleron black hole とはほとんど違いがないことがわかる。

図 3.19 にそれらの質量をホライズン半径の関係を示した。 $r_h = 0$ は粒子解になっている。ブラックホール解は粒子解につながっている。そこで, 粒子解の a 型, b 型のタイプ分けをそのままブラックホール解にも適応する。a 型と b 型の解は $M_{cr} = 1.088 g_c m_P$, ($v = 0.2 m_P / g_c$) で一致し, くさび型をつくる。これよりも大きな質量の非自明解は存在しない。図 3.19 には DHN スファレロンも描いた。同じホライズン半径では new sphaleron black hole の方が小さな ADM 質量を持つことがわかる。つまり, new sphaleron black hole の方がエネルギーが低いので, より生成され易いということである。この性質については宇宙論との応用なども含めて現在議論中である。真空期待値 v を小さくしていくと a 型の解は colored black hole へ, b 型の解は Schwarzschild black

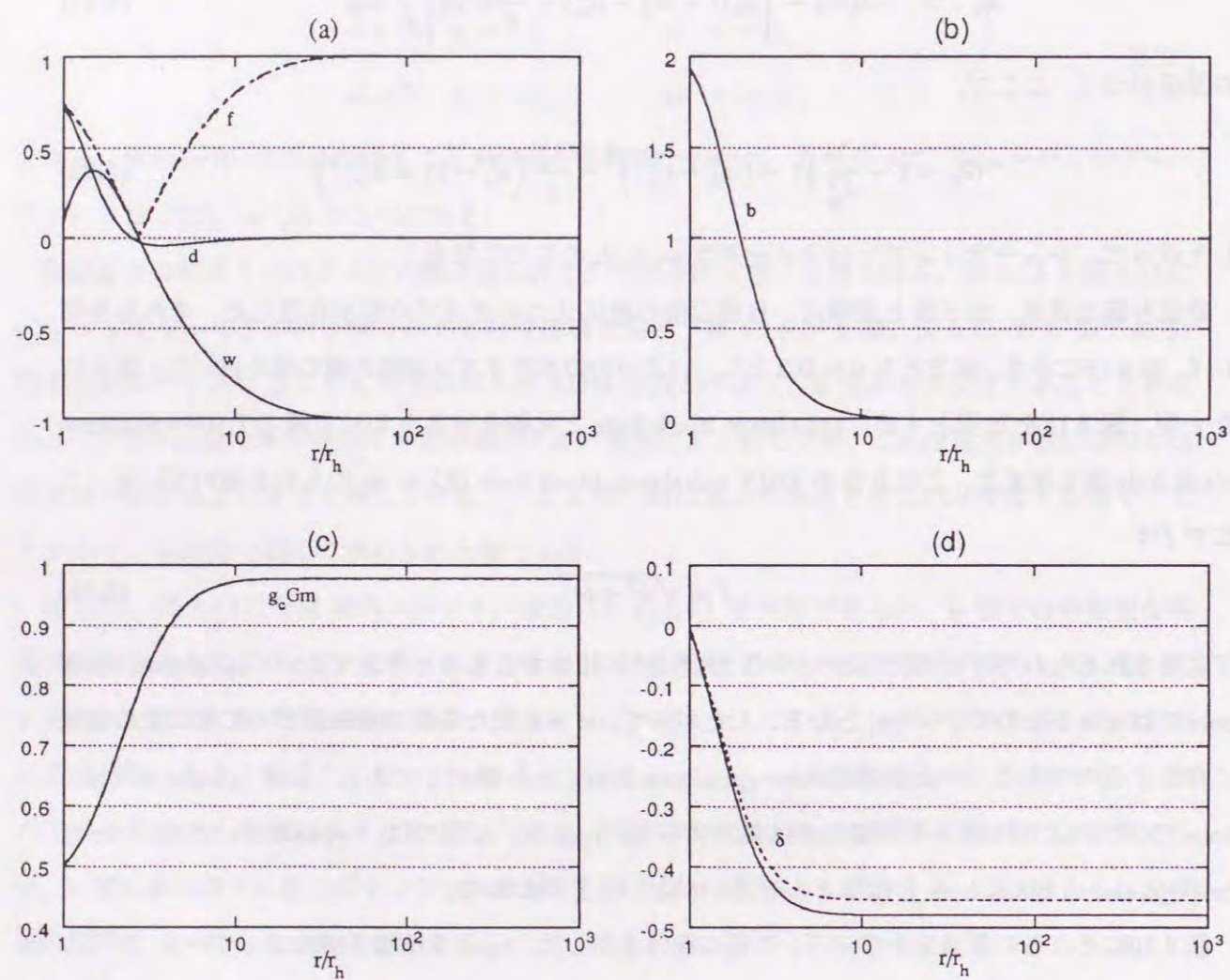


図. 3.17: a型の new sphaleron black hole の場の振舞いを描いた. $\lambda/g_c^2 = \infty$, $\lambda_h = 1.0$, $v = 0.2m_P$ にした. (a), (b) は YM 場 w, d, b , (c) は質量関数 m , (d) は関数 δ である. 比較のため DHN sphaleron black hole (点線) を描いた. DHN sphaleron black hole に比べて質量が小さくなっている.

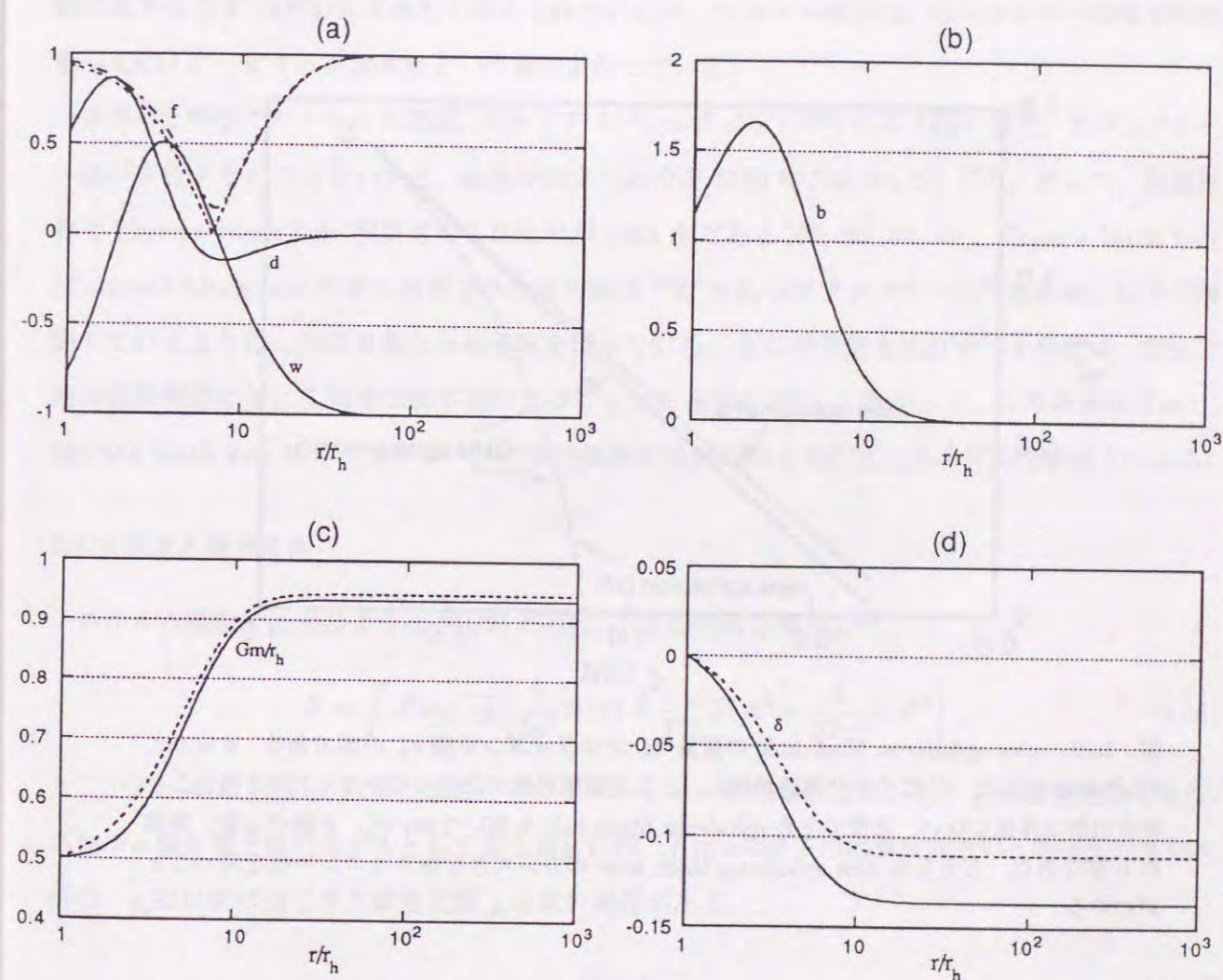


図. 3.18: b型の new sphaleron black hole の場の振舞いを描いた. $\lambda/g_c^2 = \infty$, $\lambda_h = 1.0$, $v = 0.2m_P$ にした. (a), (b) は YM 場 w, d, b , (c) は質量関数 m , (d) は関数 δ である. 比較のため DHN sphaleron black hole (点線) を描いた. DHN sphaleron black hole に比べて質量が小さくなっているが, ほとんど違いはない.

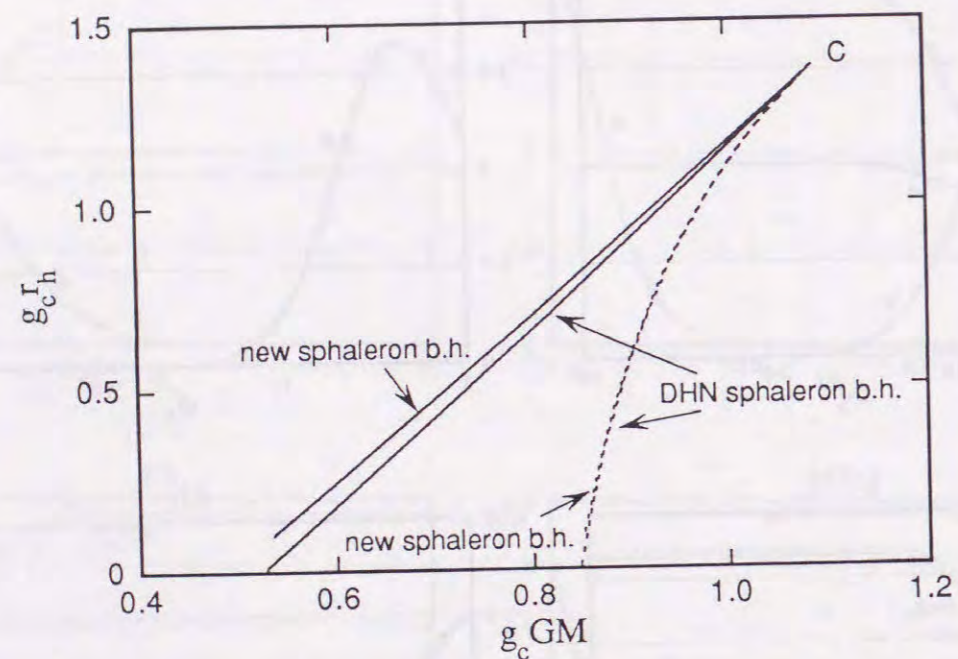


図. 3.19: new sphaleron black hole の質量 M とホライズン半径 r_h の図である. $v = 0.2$, $\lambda/g_c^2 = \infty$ にした. C にくさび構造が現れ, ここで質量が最大になっている. これを超えると非自明解は存在しない. 比較のため sphaleron black hole も描いておいた. 点線が a 型, 実線が b 型である. どちらも new sphaleron black hole の方が大きなホライズン半径を持つことがわかる.

hole に近づいていくことを確かめた. 逆に v を大きくしていくとある臨界値で非自明解はなくなった. これは非可換場の質量が $\mu = g_c v$ で与えられるため, Proca black hole の議論での低エネルギー近似, 高エネルギー近似に対応している.

3.2.4 Skyrme black hole

1960 年の初め, スキルムにより, 核子は中間子場のソリトン解として記述されるというソリトン描像に基づく核子の模型 (スキルム模型) が提案された [58]. 現在のハドロン物理学の基礎理論は量子色力学 (QCD) であると考えられているが, スキルム模型は, 低エネルギー領域で物理量が QCD と一致する有効理論という地位を持っている.

曲がった時空でのスキルム理論, つまりアインシュタイン・スキルム (ES) 系で, ブラックホール解が存在するのではないかと, 模索が始まったのが 1986 年 [59, 60, 61] ごろ, そして, 数値計算で Skyrme black hole 解が求められたのが 1991 年である [62, 63, 64, 49]. Skyrme black hole は colored black hole の次に発見された非可換な “毛” をもつブラックホールであるが, 以下で説明していくように, かなり異なった性質を持っている. その中で最も注目すべき特徴は, 動径方向の線形摂動に対して安定な解が存在することである [66, 67]. したがって, より現実味があり, Skyrme black hole はブラックホールの無毛仮説の反例になる可能性のある有力な候補といえる.

ES 方程式と境界条件

スキルム模型では次のような $SU(2) \times SU(2)$ 不変な作用を考える¹⁰.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R(g) + \frac{1}{4} f_s^2 \text{Tr} A^2 - \frac{1}{32g_s^2} \text{Tr} F^2 \right], \quad (3.84)$$

ここで F と A は, それぞれ場の強さとそのポテンシャルである. また, f_s と g_s は結合定数である. スキルム場を原子核のモデルとして扱う場合には, f_s は π 中間子の崩壊定数という物理的な意味を持つ. g_s は以前に出てきた結合定数 g_c と次の関係がある.

$$g_s^2 = 4\pi g_c^2 \quad (3.85)$$

ベクトル場の質量 μ は f_s と g_s を用いて $\mu = f_s g_s$ で与えられる.

F と A は $SU(2)$ の値を持つ関数 U を用いて

$$A = U^\dagger \nabla U \quad (3.86)$$

$$F = A \wedge A \quad (3.87)$$

¹⁰ Skyrme black hole でも $SU(3)$ 群を考え, その部分群を用いた解が考えられている [65].

と表せる。ここでは静的球対称な解を求めるので、関数 U はヘッジホッグ型

$$U(x) = \cos \chi(r) + i \sin \chi(r) \sigma \cdot \hat{r} \quad (3.88)$$

をしているとする。ここで σ_i は Pauli 行列で次の交換関係を満たす。

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (3.89)$$

χ は動径座標 r のみに依存した関数、そして $\hat{r} = \vec{r}/r$ である。(3.88)を(3.86)と(3.87)に代入すると、

$$A = i\chi' \sigma_r dr + i(\sin \chi \cos \chi \sigma_\theta + \sin^2 \chi \sigma_\phi) d\theta + i(-\sin^2 \chi \sigma_\theta + \sin \chi \cos \chi \sigma_\phi) \sin \theta d\phi \quad (3.90)$$

$$F = 4i(\chi' \sin^2 \chi \sigma_\theta - \chi' \sin \chi \cos \chi \sigma_\phi) dr \wedge d\theta + 4i(\chi' \sin \chi \cos \chi \sigma_\theta + \chi' \sin^2 \chi \sigma_\phi) dr \wedge \sin \theta d\theta - 4i \sin^2 \chi \sigma_r d\theta \wedge \sin \theta d\phi \quad (3.91)$$

となって、ポテンシャル A と場の強さ F を χ を用いて表すことができる。また、メトリックに関しては(3.1)を採用する。

作用汎関数(3.84)の変分をとると、ES方程式：

$$\bar{m}' = \kappa^2 f_s^2 \left[\frac{\bar{r}^2}{4} \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) \chi'^2 + \frac{\sin^2 \chi}{2} + \frac{1}{2\lambda_h^2} \sin^2 \chi \left\{ \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) \chi'^2 + \frac{\sin^2 \chi}{2\bar{r}^2} \right\} \right] \quad (3.92)$$

$$\delta' = -\kappa^2 f_s^2 \left[\frac{\bar{r} \chi'^2}{2} - \frac{1}{\lambda_h^2} \frac{\chi'^2}{\bar{r}} \sin^2 \chi \right] \quad (3.93)$$

$$\left\{ e^{-\delta} \bar{r}^2 \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) \chi' \right\}' - e^{-\delta} \sin 2\chi + \frac{2}{\lambda_h^2} \sin \chi \left[\left\{ e^{-\delta} \left(1 - \frac{2\bar{m}}{\bar{r}}\right) \chi' \sin \chi \right\}' - e^{-\delta} \frac{1}{\bar{r}^2} \cos \chi \sin^2 \chi \right] = 0, \quad (3.94)$$

が得られる。ここで、再びホライズン半径 r_h でスケールを規格化して、無次元変数 \bar{r} 、 \bar{m} を用いた。また、 $\lambda_h \equiv r_h/[1/f_s g_s]$ であり、この理論の典型的なスケールとホライズン半径との比を表している¹¹。 $f_s/\lambda_h = g_s r_h$ を一定のまま $f_s \rightarrow 0$ の極限をとる操作をし、 $\cos \chi$ を w とおいて、(3.85)の関係をを使うと、上の方程式系(3.92)～(3.94)はEYM方程式(3.16)～(3.18)に一致する。したがって、Skyrme black holeはこの極限でcolored black holeになるのである。

¹¹前節の λ_h とは定義が異なるので注意してもらいたい。

χ に関しては、まずホライズン上で $[-\pi, \pi]$ の範囲に限る。場の方程式(3.92)～(3.94)、または、同じことであるが作用(3.84)は

$$\chi \rightarrow \chi + 2k\pi \quad (k: \text{integer}) \quad (3.95)$$

の変換で不変である。ゆえに、 χ に関するこの条件は一般性を損なうものではない。

つぎに系のエネルギーが有限になることが必要なので、 $r \rightarrow \infty$ で漸近的に、

$$\chi(r) \rightarrow 2k\pi \quad (3.96)$$

に近づくようにする。ここで k は整数である。 $|k|$ は、粒子解であるスキルミオン解のまつわり数(winding number)を表して、ブラックホール解のときは粒子解の場合と時空のトポロジーが異なっているために、全く同じようにはまつわり数を定義できない¹²。したがって、ここでは次の量を考える。

$$W_k \equiv \frac{1}{2\pi} |\chi_h - \chi(\infty) - \sin(\chi_h)| \quad (3.97)$$

こうして定義される W_k は、粒子解に対しては整数であり、まつわり数に一致するが、ブラックホール解ではもはや整数ではない。しかし、 W_k は $|k|$ に近い値をとるので、ここではブラックホール解においても k を“まつわり数”と呼ぶことにする。

ホライズン上では(3.94)から次の関係が導ける。

$$\chi_h' = \frac{\sin 2\chi_h \left(1 + \frac{\sin^2 \chi_h}{\lambda_h^2}\right)}{\left(1 + \frac{2\sin^2 \chi_h}{\lambda_h^2}\right) \left(1 - \kappa^2 f_s^2 \sin^2 \chi_h - \frac{\kappa^2 f_s^2}{2\lambda_h^2} \sin^4 \chi_h\right)} \quad (3.98)$$

したがって、ホライズン上での自由なパラメータは χ_h ただ1つとなる。

ES方程式の解と時空の性質

上に述べた条件のもとでES方程式(3.92)～(3.94)を解く。シューティング・パラメータは χ_h ただ1つなので、colored black holeのときと同様に解を求めることができる。数値計算の結果、2つのタイプの解が存在することがわかった。これらはProca black holeのa型、b型と似た性質を持つので同様にa型、b型と呼ぶことにする。

また、他の解と同様にスキルム場 χ のノード数 n によって特徴づけられる有限個の解が、それぞれa型とb型に存在することがわかっている[64]。さらにSkyrme black holeはまつわり数 k によっても特徴づけられるために、2個の指標を持つことになる。

¹²粒子解の時空のトポロジーは R^3 である。ところがブラックホール解の場合にはホライズンがあるために、時空のトポロジーは異なって、 $R^3 - B^3$ となる。まつわり数はトポロジー不変量であるが、 $R^3 - B^3$ のトポロジーでは自明になってしまうため、通常で計算するとまつわり数はすべてゼロになる。

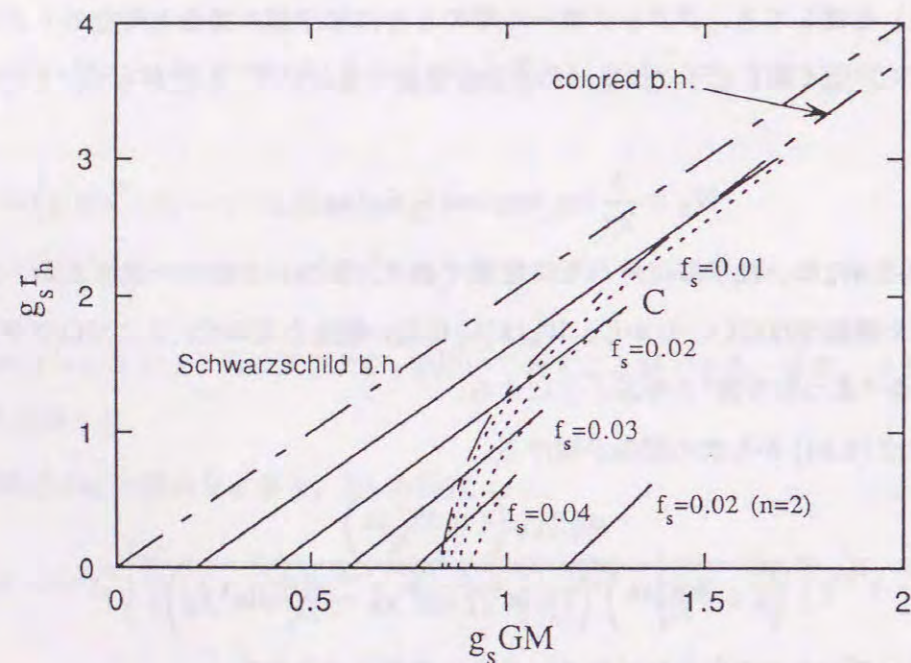


図. 3.20: $n = k = 1$ と $n = 1, k = 2$ の Skyrme black hole の質量 M とホライズン半径 r_h の図である. $k = 1$ では $f_s = 0.01m_P, 0.02m_P, 0.03m_P, 0.04m_P$, $k = 2$ では $f_s = 0.02m_P$ の解を描いた. 比較のために Schwarzschild black hole と colored black hole も記した. 実線は b 型, 点線は a 型の解である. 定性的に Proca black hole の図とよく似ている.

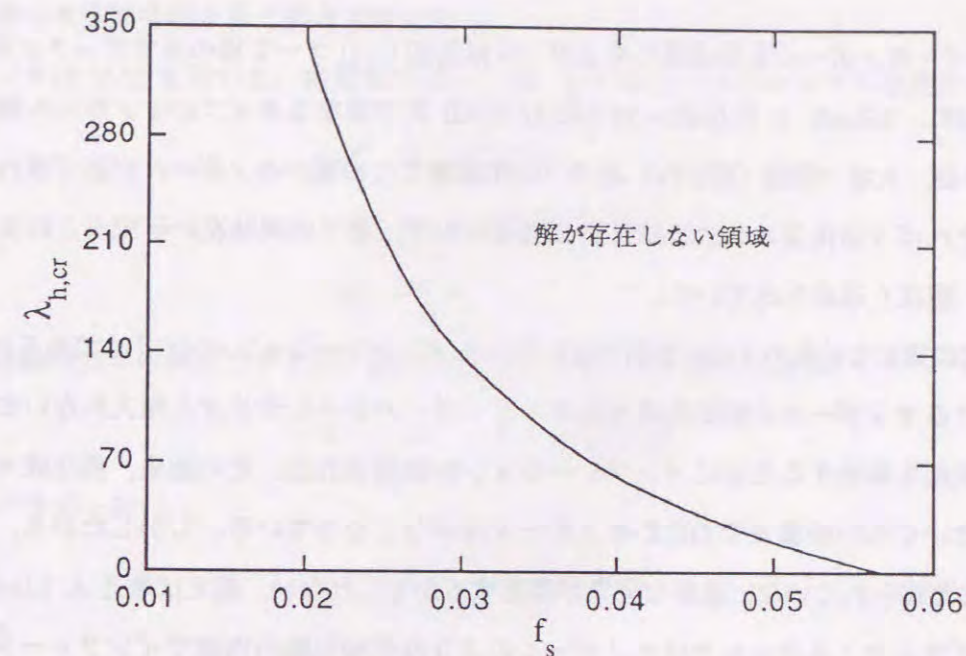


図. 3.21: $n = k = 1$ の Skyrme black hole の解が存在するパラメータを示した. 線の左側が解の存在するパラメータ領域である. $f_s \geq 0.056$ では, どのようなホライズン半径の解も存在しなくなる.

Skyrme black hole は f_s を固定したときに各ノード, 各まつわり数の解に対してホライズン半径の臨界値 $\lambda_{h,cr}$ が存在する. この $\lambda_{h,cr}$ の値を超えると非自明な, すなわち Skyrme black hole 解は存在しなくなってしまう. 図 3.20 に示したように質量とホライズン半径のグラフを見ると, この様子がよくわかる. 実線で描いたのが b 型の解, 点線で描いたのが a 型の解である. $k = 2$ に関しては b 型の解のみで, すべて $n = 1$ の解を描いている. ちょうど a 型と b 型の解一致するところでくさびの形が生じ, その先は解が消滅している. 図より, $k = 1, n = 1$ で $f_s/\sqrt{G} = 0.02$ のときは, $\lambda_{h,cr} = 340.85$ である. このとき, 対応するホライズンの半径と重力質量の大きさは $g_s = 0.1$ とすると, $r_{h,cr} = 68.17l_P$, $M_{h,cr} = 46.30m_P$ である. n が大きくなると臨界値 $\lambda_{h,cr}$ は減少し, $k = 2, n = 1$ で $f_s/\sqrt{G} = 0.02$ のとき $\lambda_{h,cr} = 109.19$ となる. $k = 1$ のときの Skyrme black hole 解の存在する結合定数 f_s とホライズン半径 λ_h の領域を図 3.21 に示す. f_s が大きくなると $r_{h,cr}$ が小さくなっていくのがよくわかる.

3.3 帯電した非可換ブラックホール [CII タイプ]

マグネティック・モノポールまたは単にモノポールは最初 U(1) ゲージ場の系でディラックによって議論された [68]. 'tHooft と Polyakov は SO(3) YMH 系で異なるタイプのモノポール解を発見した [69]. その後, 大統一理論 (GUTs) に基づいた相転移でこの種のモノポールが必ず現れることが分かった. それは YMH 系における非自明な構造なので, 多くの興味深い研究がこれまでになされ, さらに, 現在も進められている.

それらの研究の重要な結果の1つは初期宇宙におけるインフレーション・シナリオである [70, 71]. 宇宙初期におけるモノポールの熱的生成は通常のビッグ・バン・シナリオと相入れないので, このモノポール問題を解決するためにインフレーションが提案された. その結果, 現在我々の宇宙では観測できないぐらいの量まで GUT モノポールは少なくなっている. しかしながら, 宇宙の初期段階で, まだ知られていない重要な効果が存在するかもしれない. 例えば最近 A. Linde と A. Vilenkin は, プランク・スケールではモノポールのような位相欠陥の内側でインフレーションが起こるといふ新しいシナリオを提案している [72, 73].

GUTs 理論またはプランク・エネルギーでのモノポールは非常に重いので, その重力的効果を見捨てることはできない. そこで最近 P. Breitenlohner 等 [74], K. Y. Lee 等 [75], M. E. Ortiz [76] は EYMH 系で自己重力を伴うモノポールやそのブラックホール解 (monopole black hole) を発見した. 宇宙の歴史におけるこのような天体の役割はまだ明らかになっていないが, 基礎的な観点からいくつかの重要な結果が得られている. 例えば非自明な構造の存在のために, 自明な RN black hole 解は不安定になるなどである.

この節では非自明な構造の普遍的な描像を与え, 宇宙初期における役割を議論するために再解析を行う [77].

EYMH 方程式と境界条件

SO(3) EYMH 系は次の作用汎関数によって表される¹³.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2} D_\mu \Phi^a D^\mu \Phi^a - \frac{\lambda}{4} (\Phi^a \Phi^a - v^2)^2 \right] \quad (3.99)$$

ここで

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_s \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (3.100)$$

$$D_\mu \Phi^a = \partial_\mu \Phi^a + g_s \epsilon^{abc} A_\mu^b \Phi^c \quad (3.101)$$

¹³このモデルを含む別の系でもモノポールおよび monopole black hole が考えられている. それらは個々で扱う解と異なり, 位相欠陥でない解である [78, 79].

3.3. 帯電した非可換ブラックホール [CII タイプ]

である. Φ^a は実3重項のヒッグス場である. D_μ は共変微分, g_s はゲージ場の結合定数, v と λ はヒッグス場の真空期待値と自己結合定数である.

メトリックは (3.1) を用いる. 物質場に関しては, いわゆるヘッジホッグの仮定を用いる.

$$\Phi^a = v \hat{r}^a h(r) \quad (3.102)$$

$$A_i^a = \omega_i^c \epsilon^{cab} \hat{r}^b \frac{1-w(r)}{er} \quad (3.103)$$

$$A_0^a = 0 \quad (3.104)$$

ここで \hat{r}^a は動径方向の単位ベクトル, ω_i^c は3脚場である. 次の無次元変数

$$\tilde{r} = g_s v r, \quad \tilde{m} = g_s v m / m_P^2 \quad (3.105)$$

と無次元パラメータ

$$\tilde{v} = v / m_P, \quad \tilde{\lambda} = \lambda / g_s^2 \quad (3.106)$$

を導入する.

アインシュタイン方程式と場の方程式は作用汎関数 (3.99) から導かれる.

$$\frac{d\delta}{d\tilde{r}} = -8\pi \tilde{v}^2 \tilde{r} \left[\frac{1}{\tilde{r}^2} \left(\frac{dw}{d\tilde{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dh}{d\tilde{r}} \right)^2 \right], \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{m}}{d\tilde{r}} &= 4\pi \tilde{v}^2 \left[\left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) \left\{ \left(\frac{dw}{d\tilde{r}} \right)^2 + \frac{\tilde{r}^2}{2} \left(\frac{dh}{d\tilde{r}} \right)^2 \right\} + \frac{(1-w^2)^2}{2\tilde{r}^2} + w^2 h^2 \right] \\ &\quad + \pi \tilde{\lambda} \tilde{v}^2 \tilde{r}^2 (h^2 - 1)^2 \quad \left(= -\frac{4\pi G}{g_s^2 v^2} T^0_0 \tilde{r}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{d\tilde{r}^2} &= \frac{1}{\tilde{r}^2 (1 - 2\tilde{m}/\tilde{r})} \left[-w(1-w^2 - \tilde{r}^2 h^2) - 2\tilde{m} \frac{dw}{d\tilde{r}} \right. \\ &\quad \left. + 8\pi \tilde{v}^2 \tilde{r} \frac{dw}{d\tilde{r}} \left\{ \frac{(1-w^2)^2}{2\tilde{r}^2} + w^2 h^2 + \tilde{\lambda} \frac{\tilde{r}^2 (h^2 - 1)^2}{4} \right\} \right], \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h}{d\tilde{r}^2} &= -\frac{2}{\tilde{r}} \frac{dh}{d\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2 (1 - 2\tilde{m}/\tilde{r})} \left[2hw^2 + \tilde{\lambda} \tilde{r}^2 h (h^2 - 1) - 2\tilde{m} \frac{dh}{d\tilde{r}} \right. \\ &\quad \left. + 8\pi \tilde{v}^2 \tilde{r} \frac{dh}{d\tilde{r}} \left\{ \frac{(1-w^2)^2}{2\tilde{r}^2} + w^2 h^2 + \tilde{\lambda} \frac{\tilde{r}^2 (h^2 - 1)^2}{4} \right\} \right], \end{aligned} \quad (3.110)$$

境界条件を考える. まず, 正則なモノポールの場合は, 無限遠では

$$w(\infty) = 0, \quad h(\infty) = 1, \quad \tilde{m}(\infty) < \infty, \quad (3.111)$$

中心付近では

$$w(\tilde{r}) = 1 - c_w \tilde{r}^2 + \dots, \quad (3.112)$$

$$h(\tilde{r}) = c_h \tilde{r} + \dots, \quad (3.113)$$

$$\tilde{m}(\tilde{r}) = \frac{4\pi}{3} \tilde{v}^2 \left(6c_w^2 + \frac{3}{2}c_h^2 + \frac{1}{4}\tilde{\lambda} \right) \tilde{r}^3 + \dots, \quad (3.114)$$

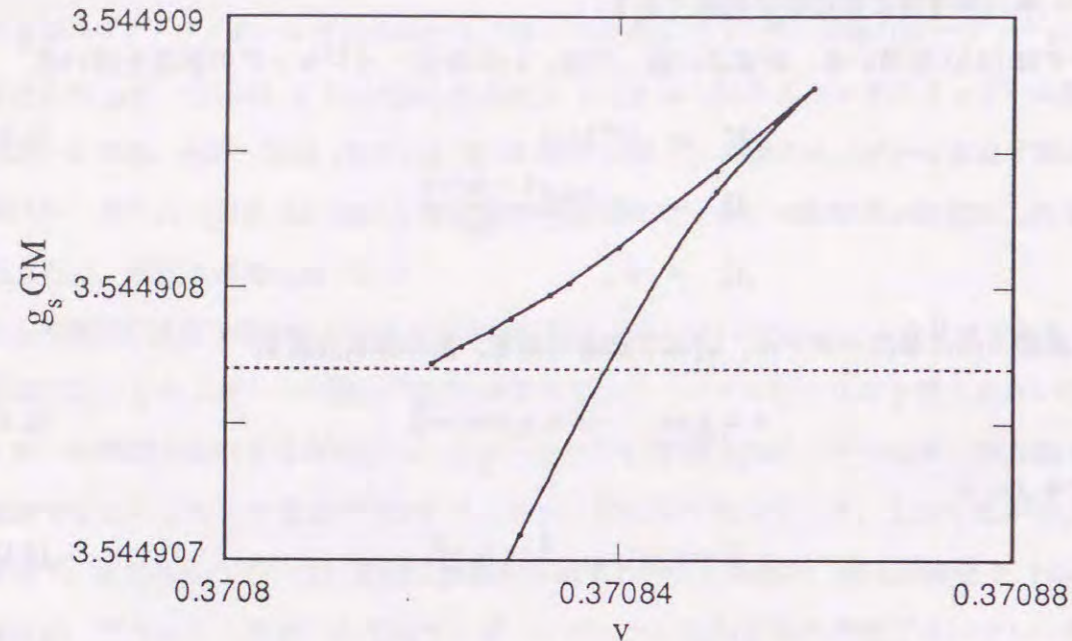


図. 3.22: $\tilde{\lambda} = 0.1$ の場合のモノポールの $\tilde{v} - M$ 図. 点線は extreme RN black hole である.

となる. ここで c_w と c_h は定数である. ブラックホール解の境界条件は, 無限遠では粒子解と同じである. ただしホライズン上では (3.4), (3.5) を採用する. さらにホライズン上では

$$w'_h = \frac{w_h(1 - w_h^2 - h_h^2 \tilde{r}_h^2)}{2\pi \tilde{v}^2 \tilde{r}_h [2\tilde{r}_h^{-2}(1 - w_h^2)^2 + 4w_h^2 h_h^2 + \tilde{\lambda} \tilde{r}_h^2 (h_h^2 - 1)^2] - \tilde{r}_h} \quad (3.115)$$

$$h'_h = \frac{-h_h[2w_h^2 + \tilde{\lambda} \tilde{r}_h^2 (h_h^2 - 1)]}{2\pi \tilde{v}^2 \tilde{r}_h [2\tilde{r}_h^{-2}(1 - w_h^2)^2 + 4w_h^2 h_h^2 + \tilde{\lambda} \tilde{r}_h^2 (h_h^2 - 1)^2] - \tilde{r}_h} \quad (3.116)$$

となる. 粒子解では c_w と c_h , ブラックホール解では w_h と h_h がシューティング・パラメータになる.

現在までに幾つかのグループが自己重力を伴うモノポールとそのブラックホール解について調べ, 複雑で微細な構造を明らかにしている. ここではそのような性質をまとめてみることにする.

モノポール解と時空構造

P. Breitenlohner 等 [74], K. Y. Lee 等 [75] と M. E. Ortiz [76] は基礎方程式 (3.107) ~ (3.110) を境界条件 (3.111) ~ (3.114) の下で解き, 自己重力を伴うモノポール解を求めている. その結果, 真空期待値 \tilde{v} には最大値 \tilde{v}_{max} があり, それ以上の値では自明な RN black hole を除いて非自明な解は存在しなくなる. $\tilde{\lambda} = 0$ の場合では $\tilde{v}_{max} \sim 0.3958$ になる¹⁴. 臨界値の存在は以下のように

¹⁴P. Breitenlohner 等が用いている真空期待値 H_0 とここで用いている v とは $H_0 = \sqrt{4\pi}v$ の関係がある.

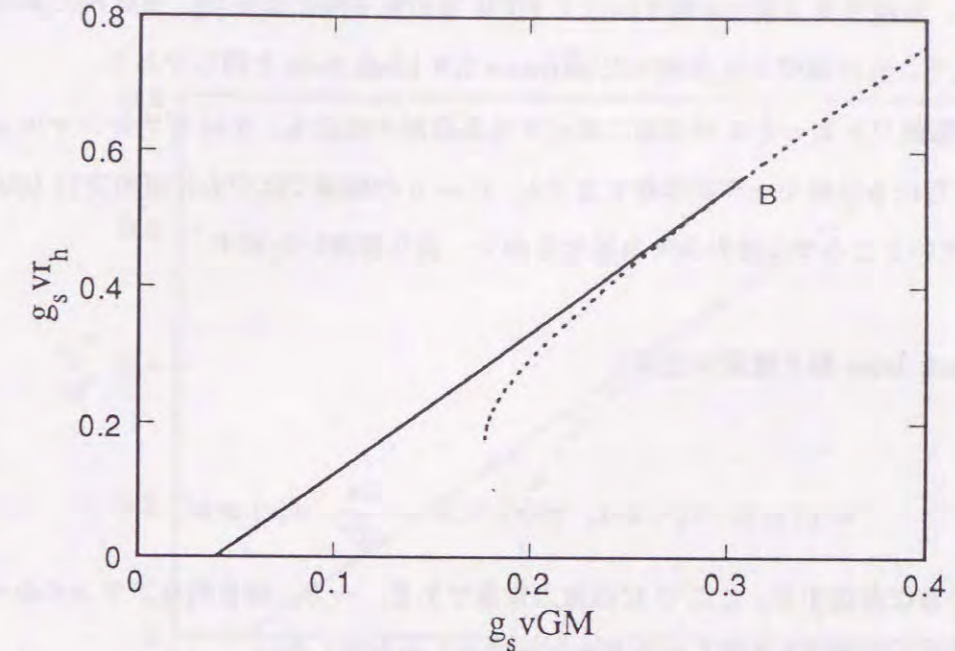


図. 3.23: monopole black hole の質量とホライズン半径の図. $\tilde{\lambda} = 1$ で $\tilde{v} = 0.05$ である. 点線は RN black hole の場合である.

考えられる. モノポールの質量とその核の半径はそれぞれ $\sim 4\pi v/g_s$ と $\sim 1/g_s v$ である. したがって v が大きくなるとモノポールの半径は小さくなり, 逆に重力半径 ($8\pi Gv/g_s$) は大きくなる. そしてモノポールの半径は実質的に重力半径より小さくなり, $v \sim m_P/\sqrt{8\pi}$ 辺りでブラックホール解へと崩壊する. $g_s \ll 1$ の場合エネルギー密度は $\sim g_s^2 v^4 \ll m_P^4$ で表されるので, 量子重力の効果を無視できる.

ビックス場の結合定数 $\tilde{\lambda}$ が小さいときには臨界値 \tilde{v}_{max} 付近では異なる質量を持ったモノポール解が存在する (図 3.22). 質量が大きい方の解は $\tilde{v} = \tilde{v}_{extreme} (< \tilde{v}_{max})$ でなくなる. このとき解は extreme black hole になる.

2つの興味深い極限的な場合が考えられる. 1つは $G = 0$ である. 基礎方程式で $\tilde{v} = 0$ にすると $G = 0$, すなわち, 重力なしのミンコフスキー空間での解になる¹⁵. $\tilde{v} = 0$ かつ $\tilde{\lambda} = 0$, すなわち Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfeld の極限では [80], 解析解

$$w(\tilde{r}) = \frac{\tilde{r}}{\sinh \tilde{r}}, \quad h(\tilde{r}) = \coth \tilde{r} - \frac{1}{\tilde{r}} \quad (3.117)$$

が得られる.

もう1つは $v \rightarrow 0$ である. 非可換場の質量は $\mu = g_s v$ なので, これは低エネルギー極限であ

¹⁵ \tilde{r} は v を含んでいるので $\tilde{v} = 0$ は $v = 0$ を表してはいない.

る. G を固定して $v \rightarrow 0$ の極限では, 上にあげた境界条件を満たす解はなくなる. そのかわりに $h \equiv 0$ とおくと, もはやモノポール解ではなく EYM 系の粒子解になる [2]. BM 解の典型的な質量は $\sqrt{4\pi}m_P/g_s$ でこれは磁荷 $1/g_s$ を持った extreme RN black hole と同じである.

動径座標 r の関数である w と h が単調に変化する基底解の他にも, YM ポテンシャル w のノード数で特徴付けられる励起モードが存在する [74]. $v \rightarrow 0$ の極限では中心付近の方は BM 解に近づくが, r が大きいところでは境界条件が異なるので, 違う振舞いを示す.

monopole black hole 解と時空の性質

RN 解

$$w(r) \equiv 0, \quad h(r) \equiv 1, \quad m(r) = M - \frac{2\pi}{g_s^2 r}, \quad \delta(r) \equiv 0 \quad (3.118)$$

は任意の \tilde{v} と $\tilde{\lambda}$ で常に存在する. ここで M は重力質量である. 一方, 非自明なブラックホール解はモノポールの場合と同様にある限られた真空期待値でしか存在しない.

P. Breitenlohner 等 [74] は基礎方程式 (3.107)~(3.110) を数値的に解き, monopole black hole 解を示した. K. Y. Lee 等 [75] は単純化したモデルにより, monopole black hole 解の存在を暗示した. 彼らはエネルギー密度分布を次のように仮定した.

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 (= \text{const.}) & (r < R) \\ 1/2g_s^2 r^4 & (r > R) \end{cases} \quad (3.119)$$

ここで R はモノポールの核半径を表す. 質量関数はこれを積分して

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' + m(0) \quad (3.120)$$

と表せる.

大まかに言うと monopole black hole はそのホライズン半径 ($\sim GM$) がモノポール半径 ($\sim 1/g_s v$) よりも小さいときに存在する. そして, パラメータ $\tilde{\lambda}$ と \tilde{v} によって様々な解が存在する. $\tilde{\lambda}$ が大きい場合, 例えば $\tilde{\lambda} = 1$ のとき (図 3.23), RN 解の枝¹⁶に加えて monopole black hole 解の枝が1つ存在する. 2つの解は分岐点 B で交わる. しかしながら, $\tilde{\lambda}$ が十分に小さい場合, 例えば $\tilde{\lambda} = 0.1$ のとき (図 3.24), monopole black hole は2つの解の枝が存在し, くさび構造を形成する. monopole black hole と RN black hole が交わる分岐点 B はこの場合も存在する. したがって $\tilde{\lambda}$ が小さいときには3種類の解があることになる.

¹⁶ $M-r_h$ 図に解をプロットすると線ができるので, これを枝と呼ぶことにする.

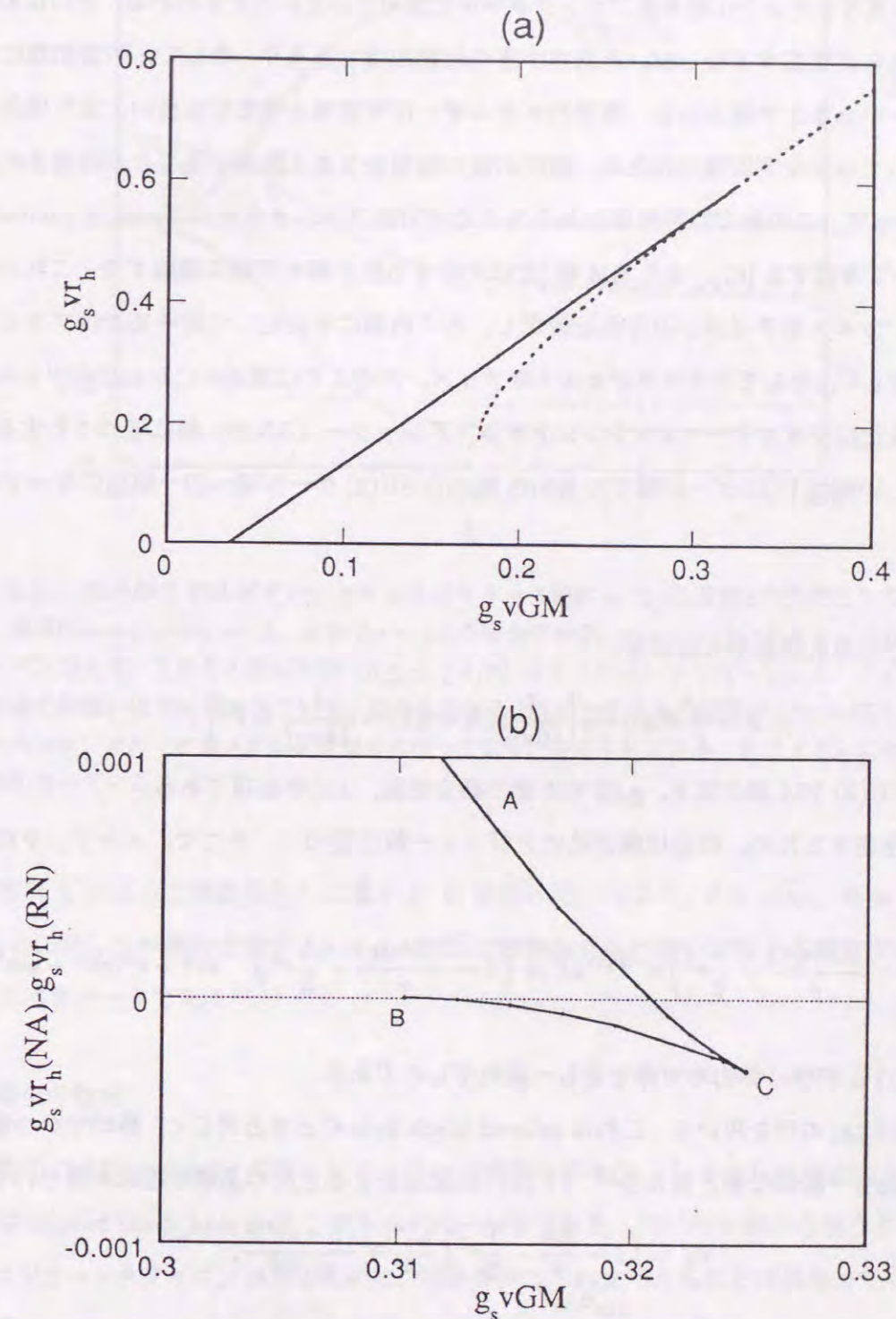


図. 3.24: (a) monopole black hole の質量とホライズン半径の図. $\tilde{\lambda} = 0.1$ で $\tilde{v} = 0.05$ である. 点線は RN black hole の場合である.

(b) 分岐点 B 付近での monopole black hole のホライズン半径と RN black hole のホライズン半径との差を示した. 小さなくさび構造 C が存在するのがわかる.

3.4 宇宙項入りの非可換ブラックホール [Λ I タイプ]

これまでに見てきたように非可換ブラックホールは極めて小さいことがわかる。そのために、もし実際にそれらが存在するならば、それは宇宙の初期の頃であろう。そして、宇宙初期には真空のエネルギーがあると予想される。真空のエネルギーは宇宙項と考えても良い。また現在の宇宙の観測において小さな宇宙項の存在が、銀河の数の観測をうまく説明することが指摘されている [81]。したがって、この節では宇宙項のある系での非可換ブラックホール (cosmic colored black hole) について考察する [82]。また BM 解 [2] に対応する粒子解も同様に議論する。これらの解ではコスモロジカル・ホライズンの存在を仮定し、その内側に局在化した粒子またはブラックホールがあるとす¹⁷。そしてコスモロジカル・ホライズンの近くでは漸近的にシュワルツシルト・ドジッター解またはライスナー・ノルトシュトルム・ドジッター (RNdS) 解に近づくとす。それゆえに、新しい解は U(1) ゲージ場での RNdS 解から SU(2) ゲージ場への一般化になっている。

基礎方程式

まず、次の作用汎関数から始める。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{16\pi g_c^2} \text{Tr} F^2 \right], \quad (3.121)$$

ここで F は SU(2) YM 場の強さ、 g_c は YM 場の結合定数、 Λ は宇宙項である。

宇宙項が存在するため、時空は漸近的にドジッター解に近づく。そこで、メトリックは次の形を用いる。

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) e^{-2\delta(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.122)$$

これは、(3.1) と同様に静的球対称で最も一般的なものである。

YM 場は (3.13) の形を用いる。これは colored black hole のときと同じく、静的でかつ電荷がない場合には最も一般的な形と言える¹⁸。(3.121) の変分をとると次の基礎方程式が得られる。

$$\tilde{m}' = \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2 \right) \frac{w'^2}{\alpha^2} + \frac{(1-w^2)^2}{2\alpha^2\tilde{r}^2}, \quad (3.123)$$

$$\delta' = -\frac{2w'^2}{\alpha^2\tilde{r}}, \quad (3.124)$$

$$\left[\left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2 \right) e^{-\delta} w' \right]' - \frac{w(1-w^2)}{\tilde{r}^2} = 0, \quad (3.125)$$

¹⁷ 同じ系でコスモロジカル・ホライズンのない解も求められている [83, 84]。それらはちょうどアインシュタイン宇宙 (Einstein Universe) に相当する解である。

¹⁸ colored black hole の場合と同様に、電荷と磁荷が両方存在するようなダイオン解は存在しないことが証明できる [85]。

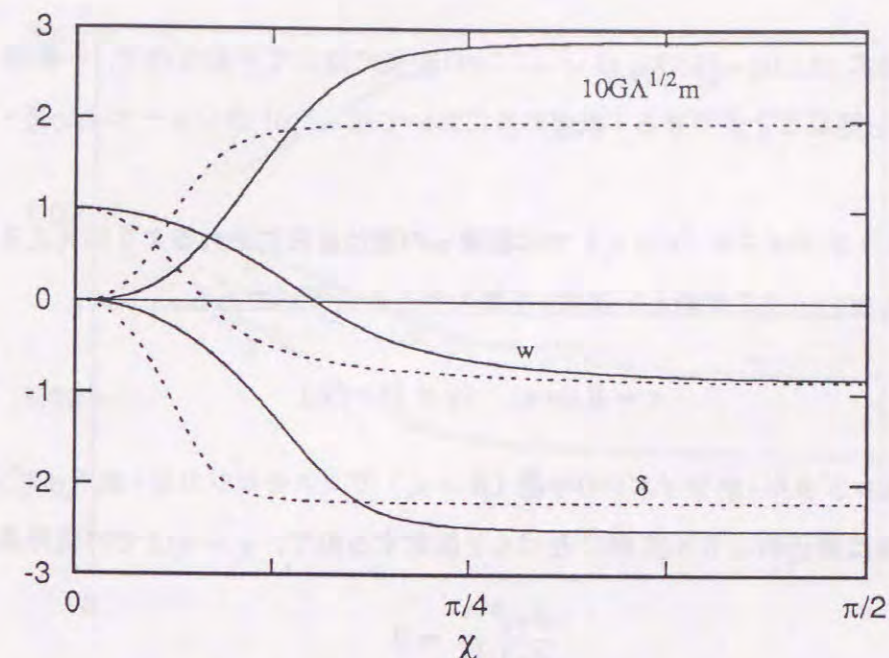


図. 3.25: 粒子解の YM ポテンシャル w とメトリック関数 m と δ を座標 χ の関数として描いた。実線は $\alpha = g/\sqrt{G\Lambda} = 2.5$ 、点線は $\alpha = 4.0$ の場合である。 $\chi = \pi/2$ はコスモロジカル・ホライズンである。これらの解は半球 ($0 \leq \chi \leq \pi/2$) で1つのノードを持っている。中心付近では場の振舞いは BM 解に似ている。図からわかるように、これらの関数の χ についての微分はコスモロジカル・ホライズン上でゼロになっており、コスモロジカル・ホライズンについて対称になっている。

ここで宇宙項 Λ によって無次元化した量 \tilde{r} と \tilde{m} を用いた。つまり、 $\tilde{r} \equiv \sqrt{\Lambda}r$ 、 $\tilde{m} \equiv \sqrt{\Lambda}Gm$ である。 $'$ は \tilde{r} についての微分を表す。 $\alpha \equiv g_c/\sqrt{G\Lambda}$ は規格化された結合定数で基礎方程式にただ1つ出てくるパラメータである¹⁹。

粒子解と時空の性質

基礎方程式 (3.123)~(3.125) の解として、2つの種類を考える。1つは BM 解のような粒子解、もう1つは colored black hole と同じブラックホール解である。先に粒子解から扱うことにする。

コスモロジカル・ホライズンがあるために、境界条件はこれまでのものとは異なってくる。 $r=0$ の中心では

$$m(0) = 0 \quad (3.126)$$

$$w(0) = \pm 1 \quad (3.127)$$

¹⁹ ブラックホール解の場合はホライズン半径もパラメータになる。

$$w'(0) = 0 \quad (3.128)$$

とする. 基礎方程式 (3.123)~(3.125) は $w \rightarrow -w$ の変換に対して不変なので, 一般性を失うことなしに $w(0) = 1$ を選ぶことができる. 数値計算においては $w''(0)$ がシューティング・パラメータになる.

コスモロジカル・ホライズン ($r = r_c$) では関数 w の値は自由にとれるように見えるが注意して扱わなければならない. ここで新しい座標 χ を導入するのが便利である.

$$r = R \sin \chi, \quad (\chi \in [0, \pi/2]) \quad (3.129)$$

ここで R はコスモロジカル・ホライズンの半径 ($R = r_c$) でコスモロジカル・ホライズンは $\chi = \pi/2$ に位置する. 時空は漸近的に RNdS 解に近づくと仮定するので, $\chi = \pi/2$ での境界条件は

$$\left. \frac{dw}{d\chi} \right|_{\chi=\pi/2} = 0 \quad (3.130)$$

となる. メトリック関数は $\delta(r_c) = \delta(\chi = \pi/2) = 0$ とおく. 実際の数値計算では $\delta(0) = 0$ とおき, 後で座標 t のスケール変換で元にもどす. また, χ 座標で書くとコスモロジカル・ホライズン上で YM 方程式は特異になっているので, 数値計算をするときには, 原点付近では r 座標で, そしてコスモロジカル・ホライズン付近ではトータス座標 (tortoise coordinate) r^* を用いる. トータス座標は

$$\frac{dr}{dr^*} = 1 - \frac{2Gm}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \quad (3.131)$$

で定義される. トータス座標を用いるとコスモロジカル・ホライズンは無限遠 ($r^* \rightarrow \infty$) になるので, 正則性を課しやすい. 基礎方程式 (3.123)~(3.125) を書き直すと

$$\frac{d\tilde{m}}{d\tilde{r}^*} = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{dw}{d\tilde{r}^*} \right)^2 + \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2 \right) \frac{(1-w^2)^2}{2\alpha^2\tilde{r}^2} \quad (3.132)$$

$$\frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{r}^*} = -\frac{2}{\alpha^2\tilde{r}} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2 \right)^{-1} \left(\frac{dw}{d\tilde{r}^*} \right)^2 \quad (3.133)$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\tilde{r}^{*2}} \right) = -\frac{2}{\alpha^2\tilde{r}} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2 \right)^{-1} \left(\frac{dw}{d\tilde{r}^*} \right)^3 - \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2 \right) \frac{w(1-w^2)}{r^2} \quad (3.134)$$

のようになる.

以上の境界条件の下で基礎方程式 (3.123)~(3.125), または (3.132)~(3.134) を解く. まず, 自明な解として,

$$w \equiv 1, \quad m \equiv 0, \quad \delta \equiv 0 \quad (3.135)$$

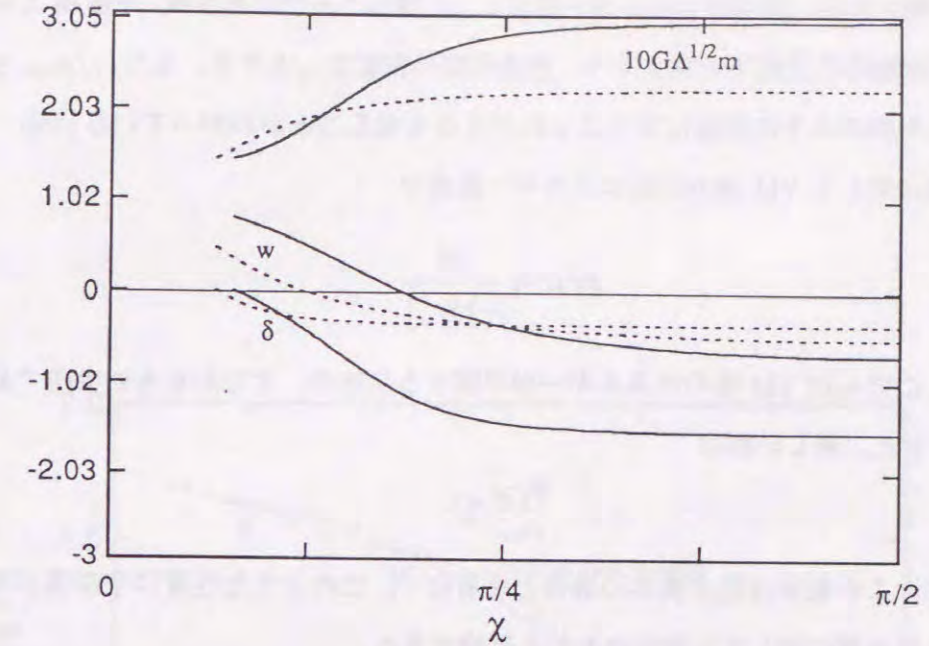


図. 3.26: cosmic colored black hole の YM ポテンシャル w とメトリック関数 m と δ を座標 χ の関数として描いた. 実線は $\alpha = g/\sqrt{G\Lambda} = 2.5$, 点線は $\alpha = 4.0$ の場合である. ホライズン半径はともに $r_h = 30\sqrt{\Lambda}$ にしている. $\chi = \pi/2$ はコスモロジカル・ホライズンである. これらの解は半球 ($0 \leq \chi \leq \pi/2$) で1つのノードを持っている. 中心付近では場の振舞いは colored black hole に似ている. 粒子解の場合と同じように, 時空はコスモロジカル・ホライズンについて対称になっている.

がある. これはドジッター解である.

図 3.25 に非自明な粒子解を示す. これは BM 解のある意味での拡張になっている. YM 場が局在している原点付近では BM 解に似ている. 解析の結果 YM ポテンシャルのノード数 n で特徴付けられる離散的な解の族を発見した. 漸近的振舞いは宇宙項の存在のために BM 解とはかなり異なるものとなった. BM 解の YM 場は r^{-2} よりも速いべきで減衰して, そのために大域的な磁荷を持たなかった. しかしながら新しい解では YM 場は消えず, コスモロジカル・ホライズンを越えて分布し続ける. そのために $r = r_c$ で次の有効磁荷が定義される.

$$Q_{eff} = \int_{r_c} \sqrt{\text{tr} F^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.136)$$

したがって実際に時空は漸近的に RNdS 解に近づいていくのがわかる. また, 結合定数 α が小さくなると有効磁荷が大きくなることを確かめた. α が小さくなるのは g_c が減少するか, Λ が大きくなることと同等である.

新しい解には臨界結合定数 $\alpha_{cr} \sim 1.75$ が存在し, これよりも小さい値では解は存在しなくなる.

つまり、宇宙項が大きくなるか、結合定数 g_c が小さくなると非自明な解はなくなってしまう。これは次のように理解される。真空のエネルギー密度 ρ_{vac} と同じことではあるが、宇宙項 $\Lambda = 8\pi G\rho_{vac}$ を持った一般相対論的完全流体を考えよう。完全流体の密度を ρ_f とする。もし $\rho_f/\rho_{vac} \leq 2$ の場合は流体は孤立した星のように局在化することはできなくなることがわかっている [86].

では新しい解に対して YM 場の平均エネルギー密度を

$$\bar{\rho}_{YM} \equiv \frac{M}{\left(\frac{4}{3}\pi r_0^3\right)} \quad (3.137)$$

を導入する。ここで r_0 は YM 場のエネルギーが半減する半値巾、すなわち有効半径である。 $\bar{\rho}_{YM}$ と ρ_{vac} を比較すると、新しい解は

$$\frac{\bar{\rho}_{YM}}{\rho_{vac}} \lesssim 5 \quad (3.138)$$

で解がなくなる。この結果は完全流体の場合と矛盾なく、このような性質は宇宙項が存在する場合にはどのような物質に対しても普遍なものと結論できる。

α に臨界値が存在する物理的な説明は以下の様である。自己重力をもつ非自明な構造のサイズは $r_0 \sim \sqrt{G/g_c}$ 、一方、コスモロジカル・ホライズンの半径は $r_c \sim \sqrt{(3\Lambda)}$ である。もし $r_0 > r_c$ つまり $\alpha \lesssim O(1)$ のとき、粒子解はコスモロジカル・ホライズンの中に存在し得なくなるのである。

ブラックホール解と時空の性質

次にブラックホール解を求める。コスモロジカル・ホライズン上での境界条件は粒子解の場合と同じである。事象の地平線上では関数 δ には (3.5) を用いる。また、 m_h は

$$m_h = \frac{r_h}{2} \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r_h^2\right) \quad (3.139)$$

となる。 w_h と w'_h の関係は (3.125) から、

$$w'_h = \frac{-w_h(1-w_h^2)}{1+\Lambda - \frac{1}{\lambda_h^2}(1-w_h^2)^2} \quad (3.140)$$

が得られる。

さて、以上の境界条件の下で、基礎方程式系 (3.123)~(3.125) はシュワルツシルト・ドジッター解 ($w \equiv \pm 1$) と RNdS 解 ($w \equiv 0$) を自明解として持つ。

非自明なブラックホール解の場の振舞いを図 3.26 に示す。ホライズン付近では colored black hole の時空とよく似ているが、粒子解と同様に YM ポテンシャル w は -1 にはならず、ある値に収束している。

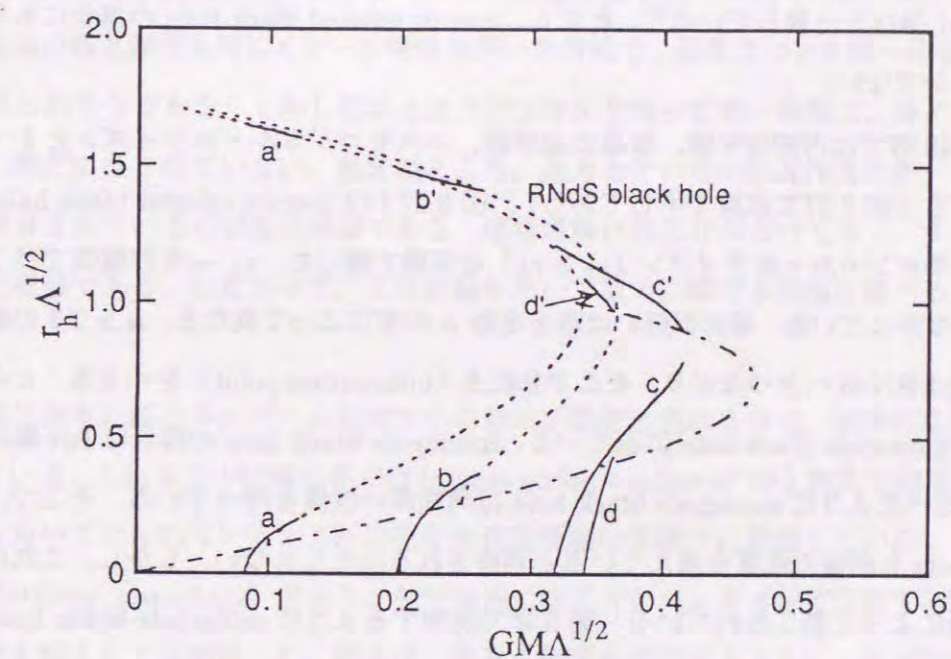


図 3.27: cosmic colored black hole の質量 M とホライズン半径との関係の図である。 a, b, c, d はそれぞれ $\alpha = g/\sqrt{G\Lambda} = 10.0, 4.0, 2.2, 1.9$ で、'がついていないのが事象の地平線 r_h 、ついているのがコスモロジカル・ホライズン r_c である。また、比較のために $\sqrt{G\Lambda}Q = 0.1$ と 0.25 の RNdS black hole のホライズン半径を点線で、extreme RNdS black hole を一点鎖線で描いた。 a, a' と b, b' の線は同じ磁荷を持った RNdS black hole につながっているが、 c', d' は extreme の線上で消えているのがわかる。

次に質量とホライズンの関係を図 3.27 に示す. ここでブラックホールの質量 M を

$$M = m(r_c) + \frac{Q_{eff}^2}{2r_c} \quad (3.141)$$

で定義した. cosmic colored black hole は粒子解と同様にコスモロジカル・ホライズン上で有効磁荷を持ち, 漸近的に RNdS 時空に近づく. そのため質量関数 m はゲージ場の寄与も含んでいる. ここでブラックホール質量の定義には, RNdS 解のように, その分を差し引くのが最もらしいと思われるからである. さらに, こうして定義した質量 M は RNdS black hole の場合には Abbott-Deser 質量 (AD mass) [87] と一致している²⁰. ただし, cosmic colored black hole の場合にもそうになっているかは明らかでない.

一般的に RNdS 解では内部地平線, 事象の地平線, コスモロジカル・ホライズンと 3 つのホライズンが存在する (図 3.27 で点線で示してある). 図 3.27 では cosmic colored black hole の地象の地平線とコスモロジカル・ホライズン ($r_c > r_h$) を実線で描いた. $r_h \rightarrow 0$ の極限ではこれらの解は粒子解につながっている. 場の振舞いは結合定数 α の値によって異なる. $\alpha > 2.3$ の値では地象の地平線の枝は RNdS へとつながり, そこで分岐点 (bifurcation point) をつくる. この振舞いは EYM 系の monopole black hole に似ている. monopole black hole の場合は RN 解に続いている. 3.3 節で述べたように monopole black hole は興味深い性質を持っている. そこで, cosmic colored black hole も同様の性質を備えていると期待されるかもしれない. しかし, これはカタストロフィー理論によって禁じられている. 第 5 章で説明するように monopole black hole はつばめの尾カタストロフィーに分類されている. これは 3 つの独立なパラメーターを必要とする. しかしながら cosmic colored black hole の場合はそのようなパラメーターは結合定数 α とホライズン半径 r_h の 2 つしかないのである.

$\alpha < 2.3$ の値では cosmic colored black hole の地象の地平線の枝はもはや RNdS 解に届かずに, 途中で切れてしまう. これはコスモロジカル・ホライズンの枝を見ると理由がわかる. 枝の端は extreme RNdS 解の線に一致している. extreme RNdS 解の線では地象の地平線とコスモロジカル・ホライズンとが縮退しているのである. cosmic colored black hole の質量が大きくなると, そのコスモロジカル・ホライズンの半径は RNdS 解のそれよりも小さくなる. ところで, cosmic colored black hole は RNdS 解と漸近的な振舞い, つまり境界条件が同じである. したがって, cosmic colored black hole も extreme RNdS 解の点で消えるのが自然である.

さらに結合定数 α が小さくなり $\alpha < 1.75$ では cosmic colored black hole 解は存在しなくなる.

²⁰ AD mass は漸的にドジッター解になる時空で定義される保存する質量で, 漸的に平坦な時空での ADM mass に相当する.

3.5 Higher Curvature 入りの理論の非可換ブラックホール [R²I タイプ]

アインシュタインが提唱した一般相対性理論は, 古典的な重力を記述する理論として信じられ, 今のところ, この重力理論に対する直接の反例はなく成功を修めている. しかし, 量子化をしようとくり込みが不可能であることがわかっており, 重力の量子化が必要なプランク・スケールの物理学を扱うことはできない. 一方, 物理学の大きな夢として相互作用の統一がある. その中で電磁相互作用と弱い相互作用はワインバーグ・サラム理論として統一されている. また量子色力学で記述される強い相互作用も同じくゲージ理論を用いた方式で, 前者 2 つと大統一理論 (GUTs) としてまとめられそうである. しかしながら重力相互作用を含んだ統一理論は, 多くの努力にもかかわらず, 未だになされていない. 現在のところ, 重力とその他の相互作用を統一するモデルとして最も注目されているのが超弦理論である. 超弦理論は相互作用だけでなく, すべての物質を取り込んだ理論である. したがって, この理論を用いて重力に関する現象を調べるのは大切なことである.

超弦理論は非常に高エネルギーの領域でその効果が顕著に現れるので, 極限的な状況での応用がなされている. これまでの仕事の多くは inverse string tension α' の 1 次までの項のみを含んだ有効理論を用いて行われている. これは完全な超弦理論の複雑さに起因している. 1 つの応用は弦宇宙論 (stringy cosmology) である. 弦宇宙論ではアインシュタイン宇宙論でのいくつかの未解決の問題を解くことに成功した. 例えば, 特異点定理が要求するように, アインシュタイン理論で必ず現れる初期特異点を弦理論では取り除くことができるのである.

またもう 1 つの応用としては, この節でも考察するブラックホールがある. 有効理論は重力 (アインシュタイン・ヒルベルト作用とガウス・ボンネ項), ディラトン場, アクシオン場, ゲージ場を含んでいる. いくつかの項を無視すれば 3.2.1 節の dilatonic colored black hole と同じ解になる. これまで, この有効理論を用いてブラックホールに関係した多くの仕事がなされている. 例えば, 3.1 節に出てきた EMD 系 [45, 46], アインシュタイン・ヒルベルト作用にディラトン場とリッチ・スカラーの 2 次の項が入った系 [88], アインシュタイン・ヒルベルト作用にディラトン場と U(1) ゲージ場, ガウス・ボンネ項の系 [89], 同じ系で α' を展開係数にして漸化式を求めて解く方法 [90], さらにアクシオン場が入った系 [91, 92] などがある. また, 軸対称な系での解析 [93], α' の高次の項まで取り入れたもの [94] などもある. ただしこれらのほとんどは α' の自乗以上の項を手で落とした近似を用いていることを注意しておく. また, SU(2) YM 場とガウス・ボンネ項が入ったモデルでのブラックホール解は求められていない. 最近, このような系では球対称な粒

子解は存在しないことが報告されている [95].

基礎方程式

ヘテロティックな超弦理論で α' の1次までを含んだ作用汎関数は

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R(g) - \frac{1}{2\kappa^2} (\nabla\sigma)^2 - \frac{1}{6} e^{-2\gamma\sigma} H^2 + \frac{\alpha'}{16\kappa^2} e^{-\gamma\sigma} (\hat{R}^2 - \text{Tr} F^2) \right], \quad (3.142)$$

となる。(3.142) はボソンの部分のみである。 σ はディラトン場, F はゲージ場であり, 後で見るとように U(1) ゲージ場と SU(2) ゲージ場の両方を扱う。 H は 3-form で, 反対称テンソル $B_{\mu\nu}$ を用いて,

$$H = dB + \frac{\alpha'}{8\kappa} (\Omega_{3L} - \Omega_{3Y}), \quad (3.143)$$

と表せる。 Ω_{3L} と Ω_{3Y} はそれぞれ Lorentz Chern-Simon 項と YM Chern-Simon 項で

$$\Omega_{3L} = \text{tr} \left(\omega \wedge R - \frac{1}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega \right), \quad (3.144)$$

$$\Omega_{3Y} = \text{Tr} \left(A \wedge F - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A \right), \quad (3.145)$$

である。ここでトレースは時空の添字とゲージの添字でとるものとする。 $\omega_{a\mu\nu} = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b$ はスピン接続である。

\hat{R}^2 はガウス・ボンネ項と呼ばれ,

$$\hat{R}^2 = R^2 - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (3.146)$$

である。この組み合わせは, くり込み可能な条件から出てくる²¹。また, メトリックの高階微分が出てこないという利点もある。 γ はディラトン場の結合定数で $\gamma = \sqrt{2}$ である。

時空は静的球対称とする。メトリックは (3.1) を用いるが, 基礎方程式を導くまでは, 計算の簡単化のため次の形のメトリックを用いる。

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)} e^{-2\delta(r)} dt^2 + e^{-2\nu(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.147)$$

(3.1) と比較すると

$$e^{2\nu(r)} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right) \quad (3.148)$$

となる。(3.147) を用いるとガウス・ボンネ項は

$$\hat{R}^2 = \frac{8}{r^2} e^{2\nu} \left\{ e^{2\nu} (4\nu'^2 - 5\nu'\delta' + \delta'^2 + \nu'' - \delta'') - (2\nu'^2 - 3\nu'\delta' + \delta'^2 + \nu'' - \delta'') \right\} \quad (3.149)$$

²¹ R^2 の項の前に定数倍がかかってもくり込みは可能である。

となる。メトリックに関する境界条件には (3.2)~(3.6) を適用する。

ゲージ場は U(1) ゲージ場と SU(2) ゲージ場の2つの場合を考える。まず, U(1) ゲージ場の場合であるが, ベクトル・ポテンシャルは次の形を仮定する。

$$A = a(r) dt \quad (3.150)$$

これは電場のみが存在する形である。場の強さ F を計算すると

$$F = -a' dt \wedge dr \quad (3.151)$$

になる。境界条件は

$$a \sim \frac{Q_e}{r} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (3.152)$$

となる。 Q_e は定数で, 電荷である。

次に SU(2) ゲージ場であるが, (3.39) のベクトル・ポテンシャルを用いる。さらに, ゲージ変換により $b \equiv 0$ とし, また場の方程式を用いると一般性を失うことなく $d \equiv 0$ とおける。こうして,

$$A = a(r) \tau_r dt - \{1 + w(r)\} \tau_\theta d\theta + \{1 + w(r)\} \tau_\phi \sin \theta d\phi \quad (3.153)$$

となる²²。場の強さを計算すると,

$$F = a' \tau_r dr \wedge dt + w' \tau_\phi dr \wedge d\theta + w' \tau_\theta dr \wedge \sin \theta d\phi - (1 - w^2) \tau_r d\theta \wedge \sin \theta d\phi + aw \tau_\theta dt \wedge d\theta + aw \tau_\phi dt \wedge \sin \theta d\phi \quad (3.154)$$

になる。

3-form の場 $H_{\mu\nu\rho}$ はスカラー場 (アクシオン場) b を用いて次のように書き換えられる。

$$H_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2\kappa} e^{2\gamma\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\sigma b. \quad (3.155)$$

さらにビアンキ恒等式の双対を使うと, 作用汎関数 (3.142) の一部は

$$-\frac{1}{6} e^{-2\gamma\sigma} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} = -\frac{1}{2} e^{-2\gamma\sigma} \partial_\mu b \partial^\mu b + \frac{\alpha'}{16} \left[b \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} (R_{\alpha\beta\rho\sigma} R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu}) \right]. \quad (3.156)$$

となる。ここで, 時空が球対称でかつゲージ場がダイオンでなくモノポールのみを持つている場合には, 式 (3.156) の第2項はゼロになる。SU(2) ゲージ場では電荷と磁荷に相当するものを両方残していたが, 後で $a = 0$ にするので, 上の条件が満たされる。そのためにアクシオン

²² 後で $a \equiv 0$ にするが, ダイオン解を出すためには必要なので基礎方程式を導くまでは a を入れておく

場はただの質量を持たないスカラー場とみなせる。ところが、このようなスカラー場の毛はブラックホールの無毛定理で存在が禁止されているので、ここではアキオン場を省略することにする。

以上の仮定により次の基礎方程式が導ける。

$$\delta' = \left[-\frac{\kappa^2}{2} \tilde{r} \sigma'^2 - \frac{\tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}}{4\tilde{r}} \left\{ e^{2\delta} e^{-4\nu} \tilde{a}^2 w^2 + w'^2 - e^{2\nu} (\gamma^2 \sigma'^2 - \gamma\sigma'') + (\gamma^2 \sigma'^2 - \gamma\sigma'') \right\} \right] / \left[1 + \frac{\tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}}{4\tilde{r}} \gamma\sigma' (3e^{2\nu} - 1) \right] \quad (3.157)$$

$$\left\{ 2\tilde{r} e^{2\nu} \nu' - (1 - e^{2\nu}) \right\} + \frac{\tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}}{2} e^{2\nu} (3e^{2\nu} - 1) \gamma\sigma' \nu' + \frac{\kappa^2}{2} e^{2\nu} \tilde{r}^2 \sigma'^2 + \frac{\tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}}{8} \left\{ e^{2\delta} (\tilde{r}^2 \tilde{a}'^2 + 2e^{-2\nu} \tilde{a}^2 w^2) + 2e^{2\nu} w'^2 + \frac{(1-w^2)^2}{\tilde{r}^2} - 4e^{4\nu} (\gamma^2 \sigma'^2 - \gamma\sigma'') + 4e^{2\nu} (\gamma^2 \sigma'^2 - \gamma\sigma'') \right\} = 0 \quad (3.158)$$

$$\left[e^{-\delta} \tilde{r}^2 e^{2\nu} \sigma' \right]' - \frac{\tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}}{8\kappa^2} \gamma e^{-\delta} \tilde{r}^2 \left[e^{-2\delta} \left(\tilde{a}'^2 + \frac{2e^{-2\nu} \tilde{a}^2 w^2}{\tilde{r}^2} \right) - \left(\frac{2e^{2\nu} w'^2}{\tilde{r}^2} + \frac{(1-w^2)^2}{\tilde{r}^4} \right) + \frac{4e^{4\nu}}{\tilde{r}^2} (4\nu'^2 - 5\nu'\delta' + \delta'^2 + \nu'' - \delta'') - \frac{4e^{2\nu}}{\tilde{r}^2} (2\nu'^2 - 3\nu'\delta' + \delta'^2 + \nu'' - \delta'') \right] = 0 \quad (3.159)$$

$$\left[e^{\delta} \tilde{r}^2 e^{-\gamma\sigma} \tilde{a}' \right]' - 2e^{\delta} e^{-\gamma\sigma} e^{-2\nu} \tilde{a} w^2 = 0 \quad (3.160)$$

$$\left[e^{-\delta} e^{2\nu} e^{-\gamma\sigma} w' \right]' + e^{\delta} e^{-\gamma\sigma} e^{-2\nu} \tilde{a}' w + e^{-\delta} e^{-\gamma\sigma} \frac{w(1-w^2)}{\tilde{r}^2} = 0 \quad (3.161)$$

メトリックを (3.147) から (3.1) にすると、基礎方程式は次のようになる。

$$\delta' = \left[-\frac{\kappa^2}{2} \tilde{r} \sigma'^2 - \frac{\tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}}{4\tilde{r}} \left\{ e^{2\delta} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right)^{-2} \tilde{a}^2 w^2 + w'^2 - \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) (\gamma^2 \sigma'^2 - \gamma\sigma'') + (\gamma^2 \sigma'^2 - \gamma\sigma'') \right\} \right] / \left[1 + \frac{\tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}}{4\tilde{r}} \gamma\sigma' \left\{ 3 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) - 1 \right\} \right] \quad (3.162)$$

$$\tilde{m}' = \left[\frac{\kappa^2}{4} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) \tilde{r}^2 \sigma'^2 + \frac{\tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}}{16} \left\{ e^{2\delta} \left(\tilde{r}^2 \tilde{a}'^2 + 2 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right)^{-1} \tilde{a}^2 w^2 \right) + 2 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) w'^2 + \frac{(1-w^2)^2}{\tilde{r}^2} - 4 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right)^2 (\gamma^2 \sigma'^2 - \gamma\sigma'') + 4 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) (\gamma^2 \sigma'^2 - \gamma\sigma'') + 4\gamma\sigma' \frac{\tilde{m}}{\tilde{r}^2} \left(3 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) - 1 \right) \right\} \right] / \left[1 + \frac{\tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}}{4\tilde{r}} \gamma\sigma' \left\{ 3 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) - 1 \right\} \right] \quad (3.163)$$

$$\left[e^{-\delta} \tilde{r}^2 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) \sigma' \right]'$$

$$-\frac{\tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}}{8\kappa^2} \gamma e^{\delta} \tilde{r}^2 \left[e^{-2\delta} \left\{ \tilde{a}'^2 + \frac{2\tilde{a}^2 w^2}{\tilde{r}} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) \right\} - \left\{ \frac{2\tilde{w}^2}{\tilde{r}^2} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) + \frac{(1-w^2)^2}{\tilde{r}^4} \right\} + \frac{4}{\tilde{r}^2} \left\{ 2f^2 + \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) \delta f + \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) f' \right\} + \frac{4}{\tilde{r}^2} (-\delta f + f') \right] = 0 \quad (3.164)$$

$$\left[e^{\delta} \tilde{r}^2 e^{-\gamma\sigma} \tilde{a}' \right]' - 2e^{\delta} e^{-\gamma\sigma} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right)^{-1} \tilde{a} w^2 = 0 \quad (3.165)$$

$$\left[e^{-\delta} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) e^{-\gamma\sigma} w' \right]' + e^{\delta} e^{-\gamma\sigma} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right)^{-1} \tilde{a}' w + e^{-\delta} e^{-\gamma\sigma} \frac{w(1-w^2)}{\tilde{r}^2} = 0 \quad (3.166)$$

ここで次の無次元量を用いた。

$$\tilde{r} = \frac{r}{r_h}, \quad \tilde{m} = \frac{m}{r_h}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{r_h}, \quad \tilde{\alpha}' = \frac{\alpha'}{r_h^2} \quad (3.167)$$

また

$$f = \left[\frac{m}{\tilde{r}^2} + \frac{\kappa^2}{4} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) \tilde{r} \sigma'^2 - \frac{\tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}}{16\tilde{r}} \left\{ e^{2\delta} \left(\tilde{r}^2 \tilde{a}'^2 - 2 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right)^{-1} \tilde{a}^2 w^2 \right) - 2 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) w'^2 + \frac{(1-w^2)^2}{\tilde{r}^2} \right\} \right] / \left[1 + \frac{\tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}}{4\tilde{r}} \gamma\sigma' \left\{ 3 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) - 1 \right\} \right] \quad (3.168)$$

である。プライムは \tilde{r} に関しての微分になっていることに注意してもらいたい。これらはSU(2)ゲージ場の場合であるが、形式的に

$$w \pm 1 \quad (3.169)$$

$$\tilde{a} w = 0 \quad (3.170)$$

とおけば、電荷を持ったU(1)ゲージ場の基礎方程式になる。(3.170)は非可換の項をゼロにする事に相当している。U(1)ゲージ場の場合 a の式は

$$\left[e^{\delta} \tilde{r}^2 e^{-\gamma\sigma} \tilde{a}' \right]' = 0 \quad (3.171)$$

となり、これは積分できて、

$$\tilde{a}' = e^{-\delta} e^{\gamma\sigma} \frac{Q_e}{\tilde{r}^2} \quad (3.172)$$

となる。これは境界条件(3.152)を満たしている。

物質場の境界条件を考える。他の非可換ブラックホールと同じように、ホライズン上ではディラトン場 σ もYMポテンシャル w も、場の方程式からそれらの1階微分はゼロ階微分で表すこと

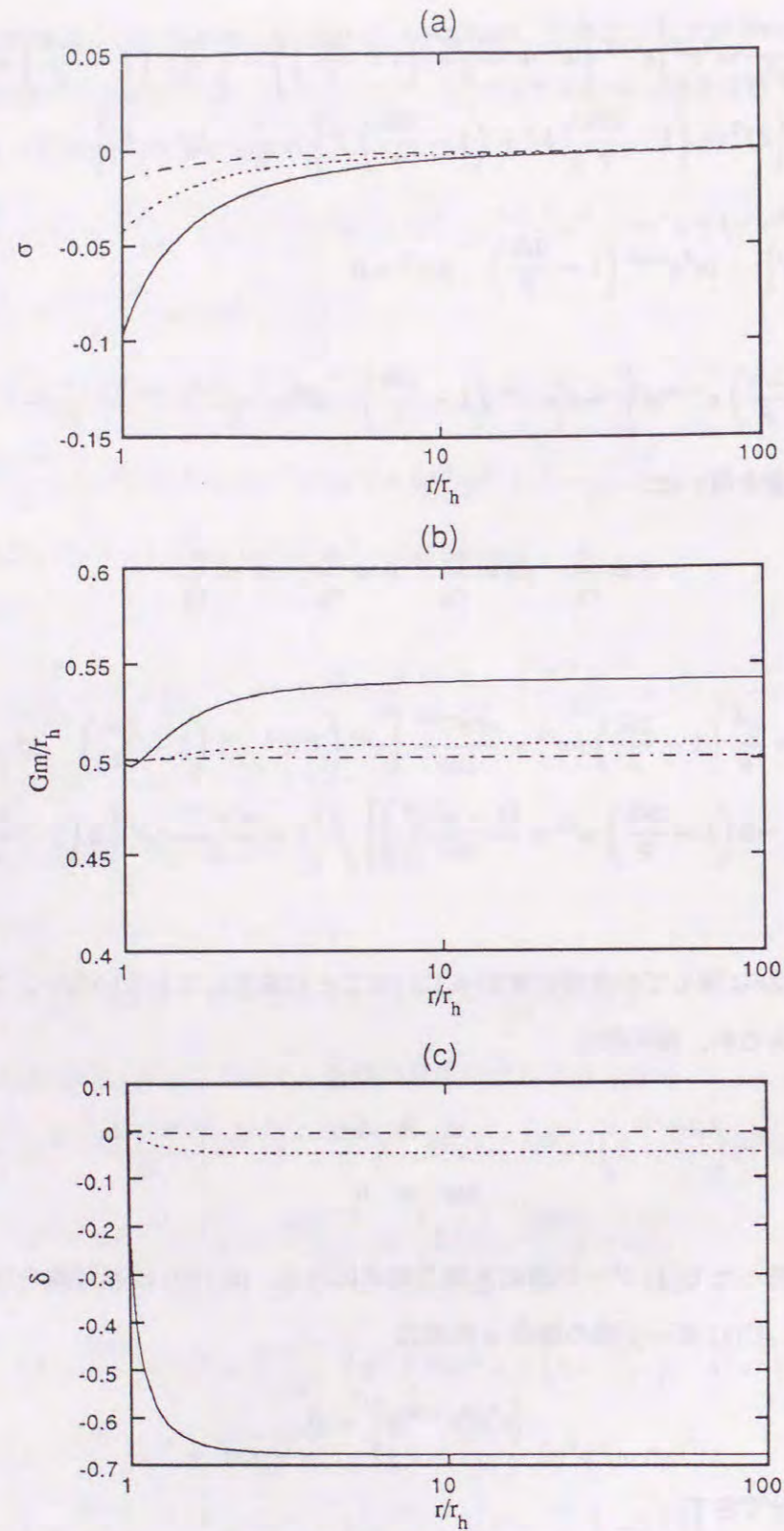


図. 3.28: ゲージ場なしの stringy black hole の場の振舞いを描いた. 実線, 点線, 一点鎖線はそれぞれ $r_h/\sqrt{16\pi/\alpha'} = 1.5704, 1.9784, 3.0556$ にした. (a) はディラトン場 σ , (b) は質量関数 m , (c) は関数 δ である. 質量関数 m の傾きがホライズン付近で負になっている. また, ホライズン半径が小さくなると関数 δ の値が非常に大きくなる.

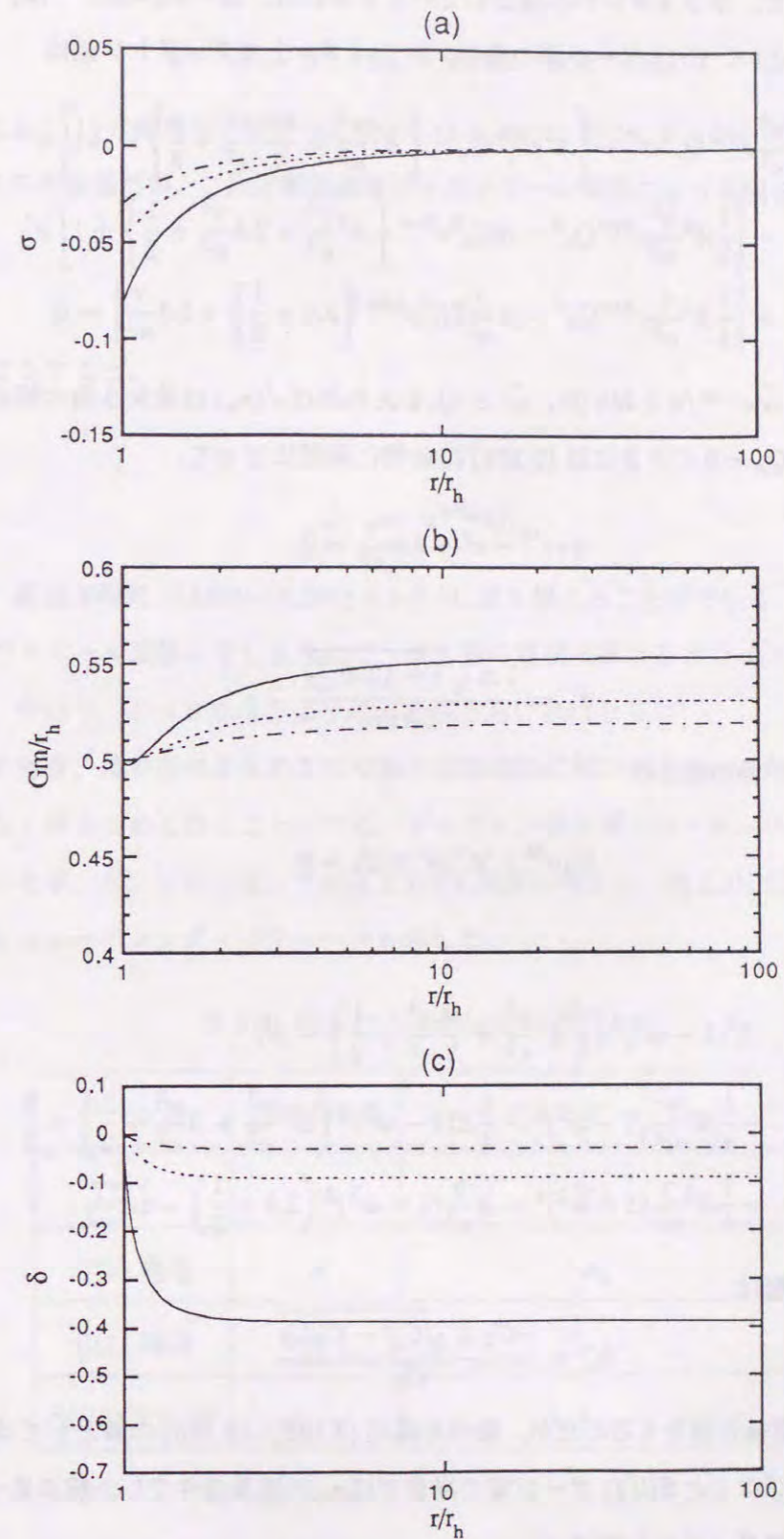


図. 3.29: U(1) の電荷 $Q_e = 1.0$ を持った stringy black hole の場の振舞いを描いた. 実線, 点線, 一点鎖線はそれぞれ $r_h/\sqrt{16\pi/\alpha'} = 1.52, 1.70, 2.00$ にした. (a) はディラトン場 σ , (b) は質量関数 m , (c) は関数 δ である.

ができる。したがって、ホライズンから積分していくときには、場の式に関しては、その関数の値だけを指定すればよい。U(1) ゲージ場の場合、ホライズン上でディラトン場は

$$\begin{aligned} & A^4 \frac{\gamma^4}{\kappa^2} e^{2\gamma\sigma} Q_e^2 \sigma'^3 - \left[A^2 e^{2\gamma\sigma} Q_e^2 \gamma \left\{ A^2 \frac{\gamma^2}{\kappa^2} + \frac{5A}{2} \frac{\gamma^2}{\kappa^2} + \frac{1}{2} \right\} - A\gamma \right] \sigma'^2 \\ & - \left[\frac{1}{2} A^4 \frac{\gamma^2}{\kappa^2} e^{4\gamma\sigma} Q_e^4 - A Q_e^2 e^{2\gamma\sigma} \left\{ A^2 \frac{\gamma^2}{\kappa^2} + 2A \frac{\gamma^2}{\kappa^2} + \frac{1}{2} \right\} + 1 \right] \sigma' \\ & + \left[\frac{1}{4} A^3 \frac{\gamma}{\kappa^2} e^{4\gamma\sigma} Q_e^4 - A \frac{\gamma}{\kappa^2} Q_e^2 e^{2\gamma\sigma} \left\{ 3A + \frac{1}{2} \right\} + 3A \frac{\gamma}{\kappa^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.173)$$

となる。ここで $A = \tilde{\alpha}' e^{-\gamma\sigma}/4$ とおいた。 $\tilde{\alpha}'$ と Q_e を決めれば $\sigma'(r_h)$ は最大3個の解 $\sigma'_1 < \sigma'_2 < \sigma'_3$ を持つことになる。 $Q_e = 0$ のときには (3.173) は非常に単純になって、

$$A\gamma\sigma'^2 - \sigma' + 3A \frac{\gamma}{\kappa^2} = 0 \quad (3.174)$$

となる。この解は

$$\sigma'_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12A^2 \frac{\gamma^2}{\kappa^2}}}{2A\gamma} \quad (3.175)$$

である。SU(2) ゲージ場の場合は

$$C_1 \sigma'^2 + 2C_2 \sigma' + C_3 = 0 \quad (3.176)$$

となる。ここで

$$C_1 = A^2(1-w^2)^2 \gamma \left(A^2 \frac{\gamma^2}{\kappa^2} + \frac{A}{2} \frac{\gamma^2}{\kappa^2} + \frac{1}{2} \right) - A\gamma \quad (3.177)$$

$$C_2 = -\frac{1}{4} A^4 \frac{\gamma^2}{\kappa^2} (1-w^2)^4 - \frac{1}{2} A(1-w^2)^2 \left(A^2 \frac{\gamma^2}{\kappa^2} + A \frac{\gamma^2}{\kappa^2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \quad (3.178)$$

$$C_3 = -\frac{1}{4} A^3 \frac{\gamma}{\kappa^2} (1-w^2)^4 + A \frac{\gamma}{\kappa^2} (1-w^2)^2 \left(3A + \frac{1}{2} \right) - 3A \frac{\gamma}{\kappa^2} \quad (3.179)$$

である。したがって解は

$$\sigma'_\pm = \frac{-C_2 \pm \sqrt{C_2^2 - C_1 C_3}}{C_1} \quad (3.180)$$

となる。後で実際に数値計算をするのだが、場の方程式 (3.162)~(3.166) の解としては、U(1) ゲージ場では σ'_3 、チャージなしと SU(2) ゲージ場の場合では σ_+ の境界条件でしか解が見つからなかった。一方、YM 場はホライズン上では

$$w' = -\frac{w(1-w^2)}{2f} \quad (3.181)$$

の関係がつく。

無限遠では、

$$w \rightarrow \pm 1, \quad \sigma \rightarrow \sigma_\infty = \text{const. as } r \rightarrow \infty \quad (3.182)$$

となる。ただし、U(1) の磁荷だけを持った場合には $w \equiv 0$ とする。ディラトン場に関しては無限で $\sigma = 0$ とするのが普通だが、これは動径座標の r のスケール変換により実現される。つまり、新しい関数

$$\bar{\sigma} \equiv \sigma - \sigma_\infty \quad (3.183)$$

を定義する。こうすると、

$$\bar{r}_h = e^{\frac{\gamma\sigma_\infty}{2}} r_h \quad (3.184)$$

$$\bar{Q}_e = e^{\gamma\sigma_\infty} Q_e \quad (3.185)$$

にすることで、基礎方程式 (3.162)~(3.166) の σ を $\bar{\sigma}$ に置き換えることができる。ただし (3.185) のように電荷までスケール変換してしまうので、同じ値の電荷で異なるホライズン半径をもった解を求めるには、やはり、 $\sigma \rightarrow 0$ になるように σ_h を探さなければならない。

基礎方程式を導き、境界条件を決めたのであとは数値的に解けばよい。しかし、その前に扱うモデルを、もう1度まとめておくことにする。ディラトン場とガウス・ボンネ項についてはすべてに共通しているが、ゲージ場に関しては表 3.3 の4種類を考える。表 3.3にはそれぞれのモデルの力学的な場とシューティング・パラメータも記した。

表 3.3: stringy black hole のモデル

ゲージ場	力学的な場	シューティング・パラメータ
なし	σ	なし
U(1) 電場	σ	σ_h
U(1) 磁場	σ	なし
SU(2) YM 場	σ, w	w_h

(i) チャージなしの解

まず、一番簡単なチャージなしの解を見ることにする。ゲージ場は $a \equiv 0, w \equiv \pm 1$ となる。図 3.28に場の振舞いを示した。それぞれの図に3本ずつ曲線があるが、異なるホライズン半径の解

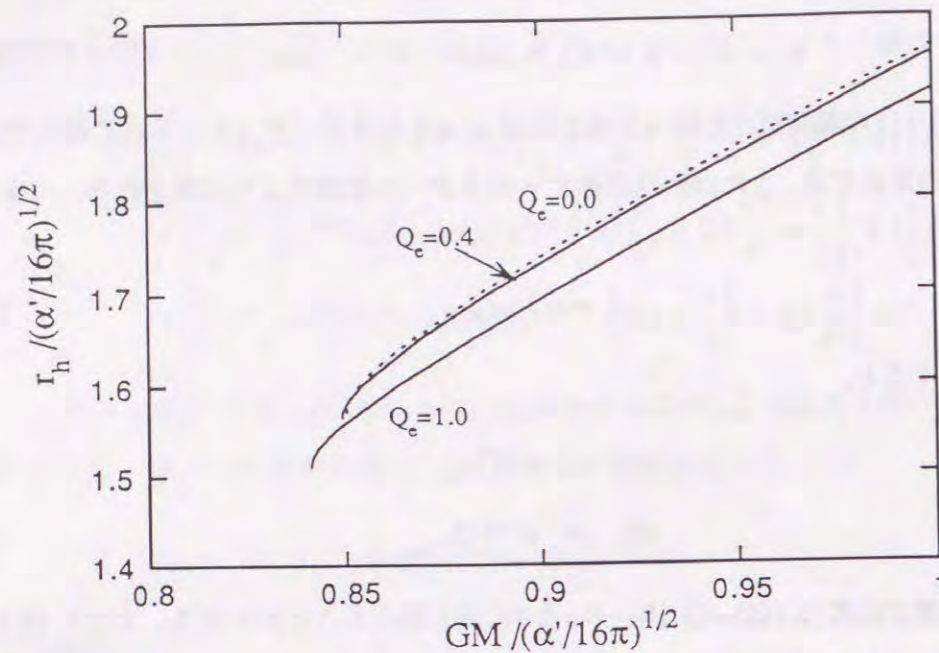


図 3.30: stringy black hole の質量 M とホライズン半径 r_h の図である。U(1) の電荷を持った解で、 $Q_e = 0.0, 0.4, 1.0$ の解を描いた。どの解も臨界質量が存在し、それよりも小さな解は存在しない。また、臨界質量では裸の特異点が現れる。

を描いている。それぞれの図を見ると、ホライズン半径の小さい解の方がディラトン場が大きく変化しているのがわかる。つまり小さいブラックホールの方がガウス・ボンネ項が効いてくるのである。これは予想されていたことである。というのは、スケールが大きくなれば当然、系はアインシュタイン重力で記述されるべきで、Schwarzschild black hole に近づくのが自然だからである。また、作用汎関数 (3.142) のモデルは inverse string tension α' の 1 次まで考慮した理論であるが、厳密に言えば、系の典型的な質量を m_{sys} とすると、 α'/m_{sys}^2 で展開したことになっている。そこで m_{sys} が大きくなるとガウス・ボンネ項が効かなくなって、アインシュタイン重力が再現されるのである。

図 3.28(b) をみると、 m はホライズン付近で 1 度減少してから増加している。つまり、ホライズン付近ではエネルギー密度が負になっているのである。これは数値誤差などではなくて、解析的に基礎方程式から導くことができる。これをみてみよう。関数を次のようにホライズン上で展開する。

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1(r - r_h) + \frac{1}{2}\sigma_2(r - r_h)^2 + \dots \quad (3.186)$$

$$m = m_0 + m_1(r - r_h) + \frac{1}{2}m_2(r - r_h)^2 + \dots \quad (3.187)$$

これを基礎方程式 (3.162)~(3.166) に代入すると

$$\sigma_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12A^2 \frac{\gamma^2}{\kappa^2}}}{2A\gamma} \quad (3.188)$$

$$m_1 = -\frac{A\gamma\sigma_1}{2(1 - A\gamma\sigma_1)} \quad (3.189)$$

となる。(3.188) を (3.189) に代入すると

$$m_1 = -\frac{\kappa^2}{24A^2\gamma^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 12 \frac{A^2\gamma^2}{\kappa^2}} \right)^2 \quad (3.190)$$

となる。この式の右辺は必ず負なので m_1 は負になる。これは関数 m の傾きがホライズン付近ではマイナスになることを表している。エネルギー密度が負になることはチャージなしの解の存在の本質的な点である。ガウス・ボンネ項をアインシュタイン方程式のエネルギー運動量テンソルの源の項とみなしてみよう。もしエネルギー条件が満たされていると、スカラー場に関する無毛定理によって非自明な解は存在しないことが導かれる。しかし、今の場合はそうではない。そのためにゲージ場がなくても新しい解を得ることができたのである。

図 3.28(c) より、ホライズン半径の小さなブラックホールでは、ホライズン付近で δ の傾きが発散しているようになっている。これは後の議論で大切になる。

(ii) U(1) 電荷を持った解

図 3.29 に U(1) の電荷を持った解の場の振舞いを示す。 $Q_e = 1.0$ とし、ホライズン半径を変化させた。ディラトン場を見ると、チャージなしの場合とほとんど r 依存性は変わらない。質量関数はやはりホライズン付近で減少しているのが見受けられる。また、遠方ではチャージなしの場合と比べてなだらかに増加している。これはチャージがあるためにゲージ場が $\sim 1/r^2$ で減衰しているからである。

図 3.30 にブラックホールの質量 M とホライズン半径 r_h の関係を示した。同時にチャージなしの解も描いてある。GM と書いてあるのは Gibbons-Maeda 解 [45] で、EMD 系での解である。つまり、ガウス・ボンネ項を無視したものである。まず、質量の大きい解を見てみると、チャージなしの解はシュワルツシルト解に、そして電荷を持った解は GM 解に漸近的に一致しているのが分かる。これは $M \rightarrow \infty$ ではガウス・ボンネ項が効かなくなることを表している。

最も注目すべき点は質量が小さくなっていくと、ある臨界質量で解がなくなることである。これはチャージが存在しても、しなくても変わらない性質である。臨界質量付近では、どの解の曲線も垂直になっているのがわかる。これは RN black hole の extreme 付近の様子と同じである。

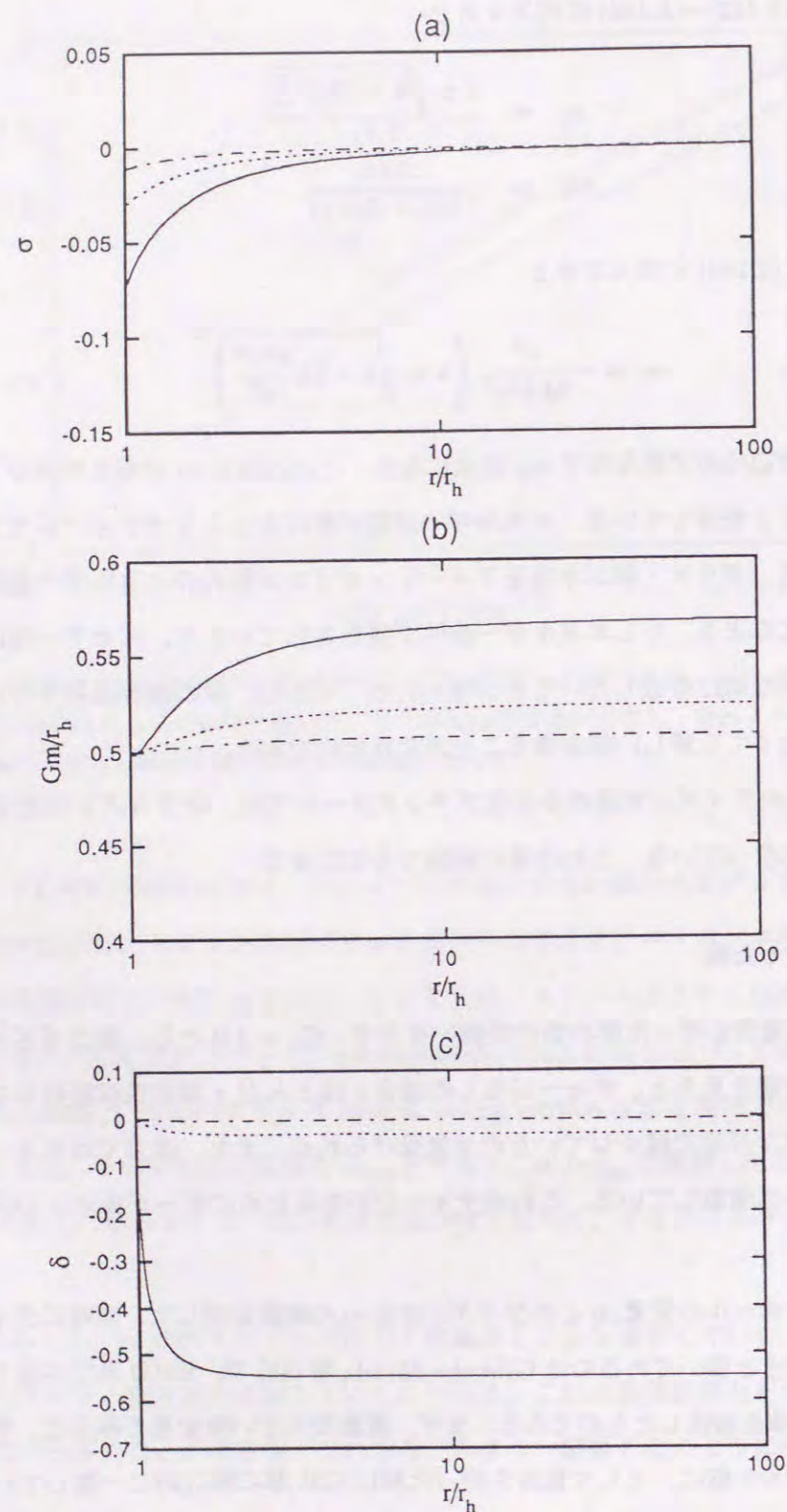


図. 3.31: U(1) の磁荷 $Q_m = 1.0$ を持った stringy black hole の場の振舞いを描いた。実線、点線、一点鎖線はそれぞれ $r_h/\sqrt{16\pi/\alpha'} = 1.3864, 1.8929, 3.0101$ にした。(a) はダイラトン場 σ , (b) は質量関数 m , (c) は関数 δ である。

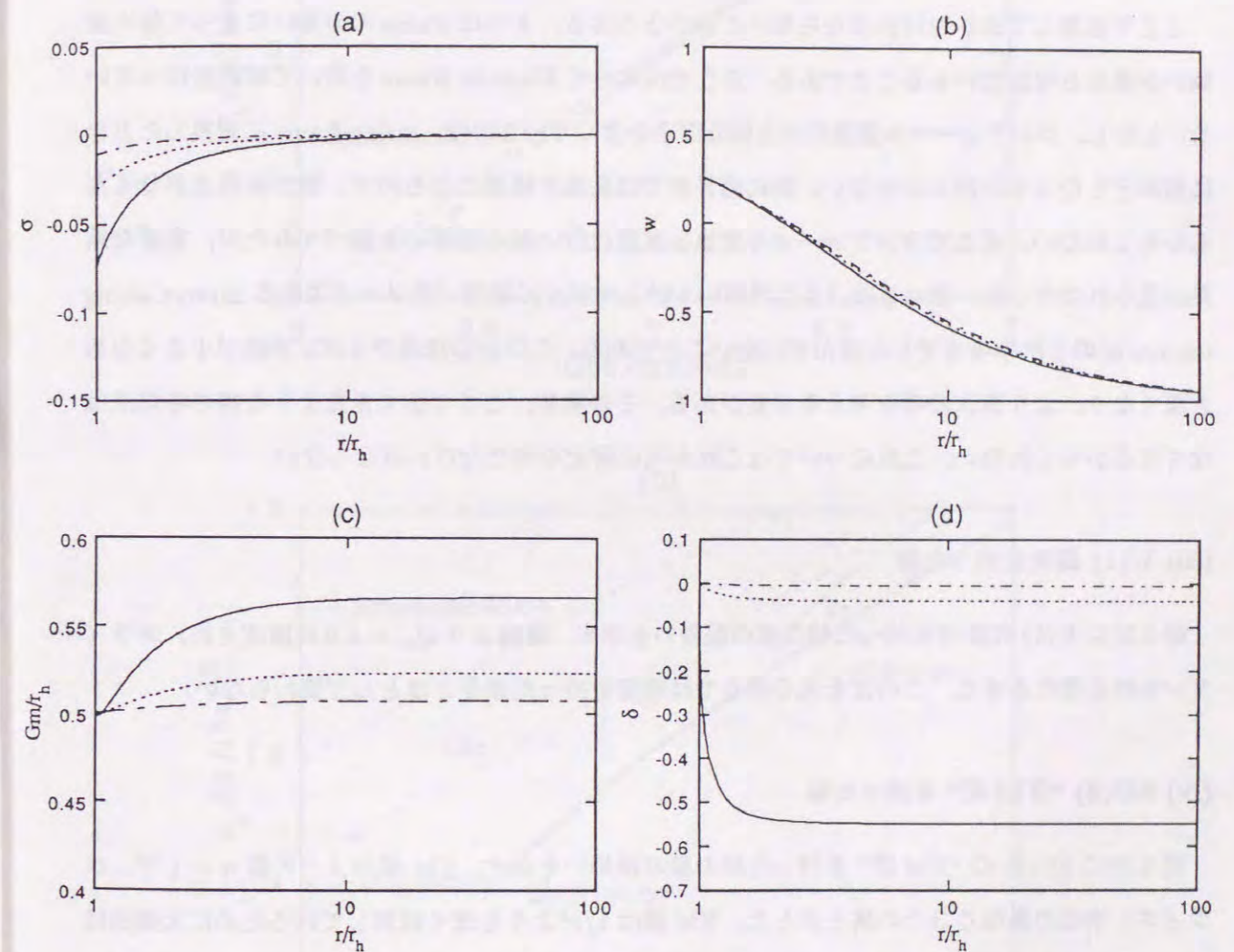


図. 3.32: SU(2) の“YM 荷”を持った stringy black hole の場の振舞いを描いた。 $n = 1$ の解である。実線、点線、一点鎖線はそれぞれ $r_h/\sqrt{16\pi/\alpha'} = 1.4007, 1.8964, 3.0117$ にした。(a) はダイラトン場 σ , (b) は YM ポテンシャル w , (c) は質量関数 m , (d) は関数 δ である。定性的にはゲージ場なしの解や、U(1) ゲージ場の解と同じである。また、YM 場はホライズン半径にほとんど依存していない。

したがって、新しい解も臨界質量で extreme 解になっていると期待される。しかし、解析の結果、extreme 解になるのではなく、裸の特異点が現れることがわかった。臨界点では、ホライズン上でディラトン場の1回微分 $\sigma'(r_h)$ は式(3.173)または式(3.174)の重解になっており、この条件を用いると $\sigma''(r_h)$ 、そして $\delta'(r_h)$ が発散することがわかる。その結果、同様に $I = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ も発散することが確かめられる。つまり、ホライズンが存在していたところに球殻状に裸の特異点が現れるのである。

ここで注意しておかなければならないことが2つある、1つは frame のの違いによって解の振舞いが異なる可能性があることである。ここではすべて Einstein frame を用いて解析を行っている。しかし、コンフォーマル変換が非自明な因子を含んでいるので、string frame に変換したときに解がどうなるかは明らかでない。特に臨界点では変換が特異になるので、裸の特異点がなくなるかもしれない。そこでコンフォーマル変換を実際に行い解の振舞いを調べてみたが、重要な結果は得られなかった。2つ目は、ここで用いているモデルは展開パラメータである inverse string tension α' の1次の項までしか含んでいないことである。この近似はホライズン半径が小さくなると悪くなり、より高次の項を考える必要がある。その結果、ここで出てきたような裸の特異点はなくなるかもしれない。これについてはこれからの研究を待たなければならない。

(iii) U(1) 磁荷を持った解

図3.31にU(1)の磁荷を持った解の場の振舞いを示す。理論より $Q_m = 1.0$ に固定され、ホライズン半径を変化させた。この図を見る限りでは電荷を持った場合とほとんど変わらない。

(iv) SU(2) “YM 荷”を持った解

図3.32にSU(2)の“YM 荷”を持った解の場の振舞いを示す。YM場のノード数 $n = 1$ で、ホライズン半径の異なる3つの解を示した。YM場は $1/r^2$ よりも速く減衰しているために大域的はチャージは持たない。ここで注目すべきは、ホライズン半径が変わってもYMポテンシャルのホライズン上で値がほとんど一定で、その後の振舞いもホライズン半径にはあまり依存しないことである。 $r_h \rightarrow \infty$ の極限では場の方程式は

$$\delta' = -\frac{\kappa^2}{2}\tilde{r}\sigma'^2 + O\left(\frac{1}{\tilde{r}_h^2}\right) \quad (3.191)$$

$$\tilde{m}' = \frac{\kappa^2}{4}\left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}}\right)\tilde{r}^2\sigma'^2 + O\left(\frac{1}{\tilde{r}_h^2}\right) \quad (3.192)$$

$$\left[e^{-\delta}\tilde{r}^2\left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}}\right)\sigma'\right]' + O\left(\frac{1}{\tilde{r}_h^2}\right) = 0 \quad (3.193)$$

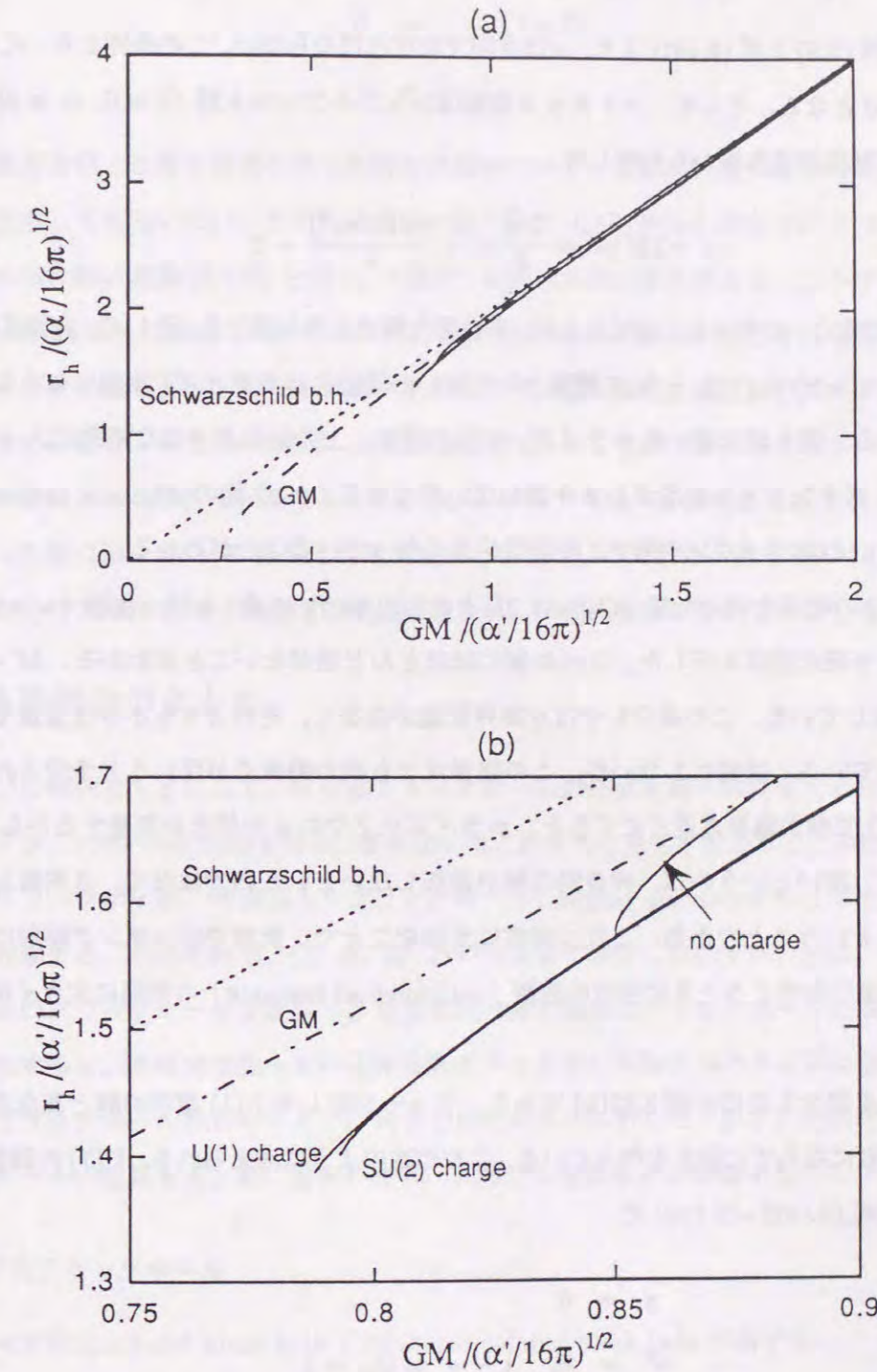


図. 3.33: (a) $n = 1$ の stringy black hole の質量 M とホライズン半径 r_h の図である。U(1) の磁荷と SU(2) “YM 荷” を持った解で、 $Q_m = 1.0$ である。どの解も臨界質量が存在し、それよりも小さな解は存在しない。また、臨界質量では裸の特異点が現れる。比較のために Schwarzschild black hole 解と GM 解を描いた。(b) 臨界質量付近を拡大した図である。

$$\left[e^{-\delta} e^{-\gamma\sigma} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} \right) w' \right]' + e^{-\delta} e^{-\gamma\sigma} \frac{w(1-w^2)}{\tilde{r}^2} + O\left(\frac{1}{\tilde{r}_h^2}\right) = 0 \quad (3.194)$$

となる。境界条件 (3.5) と式 (3.191) より, σ' は有限でなければならない。この条件より, 式 (3.193) は解けて, $\sigma \equiv 0$ となる。そして, メトリック関数はシュワルツシルト解 ($\delta \equiv 0, \tilde{m} \equiv \tilde{M}$) になる。YM 場の方程式は重力場から分離して

$$(\tilde{r} - 2\tilde{M})w'' + \frac{2\tilde{M}}{\tilde{r}}w' + \frac{w(1-w^2)}{\tilde{r}} = 0 \quad (3.195)$$

となる。YM 場は重力への寄与をしなくなるが, 非自明な構造を持ち続ける。そして, 方程式 (3.195) の解 $w = w^*(\tilde{r}) = w^*(r/r_h)$ は, r/r_h の関数として描いた場合にはホライズン半径に依らない分布をする事がわかる。図 3.32 に描いたホライズン半径の値は, 上の近似が有効な範囲に入っており, そのために YM ポテンシャルの形があまり変わらないのである。3.1.2 節の dilatonic colored black hole も同じくらいのホライズン半径でこの近似が良くなっていることがわかる。

図 3.33 に U(1) の磁荷を持った解 ($Q_m = 1.0$) と SU(2) の “YM 荷” を持った解 ($n = 1$) の質量とホライズン半径の関係を示した。2つの解にはほとんど差がないことがわかる。 $M \rightarrow \infty$ では GM 解に一致している。この場合もやはり臨界質量が存在し, それよりも小さな質量では解が存在しなくなっている。証明はしないが, この臨界点でも裸の特異点が現れると予想される。なぜなら図 3.32(d) で解が臨界点近くにくると, ホライズン上での δ の傾きが発散するからである。ここで解が存在しないというのは, 非自明な解が存在しないというのではなく, 自明解も含めて存在しなくなるということである。これは非常に大切なことで, 次章でホーキング放射によるブラックホールの進化を考えると宇宙の残骸 (cosmological remnant) の問題に大きく関わってくる。

臨界質量付近を拡大したのが図 3.33(b) である。チャージなしや U(1) 電荷の解と異なり, 臨界質量で曲線は垂直にならずに傾きを持っている。これは次のように考えられる。U(1) の磁荷を持った解は場の方程式 (3.162)~(3.166) で

$$a = 0 \quad (3.196)$$

$$w' = 0, \quad 1 - w^2 \equiv Q_m = 1 \quad (3.197)$$

と置くことによって得られる。ここで, さらに

$$Q_m = e^{\gamma\sigma} \hat{Q}_e \quad (3.198)$$

と置き換えをすると, “U(1) の電荷” \hat{Q}_e を持った解が得られることが確かめられる。ガウス・ボ

ンネ項がないときは双対変換

$$\bar{F} = -e^{-2\gamma\sigma} * F \quad (3.199)$$

$$\bar{\sigma} = -\sigma \quad (3.200)$$

によって電荷を持った解と磁荷を持った解とが結びついてきたが, いまの場合はこれが成立しないことに注意してもらいたい。さて, 磁荷が一定でホライズン半径の異なるいくつかの解を考えよう。これらの解に変換 (3.198) を行い, “電荷” を持った解に置き換える。こうするとディラトン場 σ が動径座標 r に依存しているために “電荷 \hat{Q}_e ” も r に依存することになる。ディラトン場はホライズン半径によって異なる振舞いを示すので, この依存性はそれぞれのブラックホールで違ったものになる。つまり, “電荷” は無限遠では $\hat{Q}_e = 1$ を持つが, ホライズン付近では, ホライズン半径によってそれぞれ異なる “電荷 $\hat{Q}_e = e^{-\gamma\sigma(r_h)} Q_m$ ” を持つことになる。したがって, 磁荷を持った解は図 3.33(b) の臨界点付近で垂直にならないのである。もちろん U(1) 磁荷を持った解と SU(2) “YM 荷” を持った解では構造は違うが, 同様の機構が働いているものと思われる。

3.6 時空構造のまとめ

これまでの解析をもとにして, 非可換ブラックホールの性質を統一的にまとめたいと思う。まず非可換ブラックホールの分類を行う。基本的にはこれまでに見てきたように, 中性ブラックホール, 帯電ブラックホール, 宇宙項入りブラックホール, higher curvature のモデルでのブラックホールに分類する。それぞれ N, C, A, R² という文字で表すことにする。次に, 質量を持たない非可換場のブラックホールを種族 I, 質量を持つ非可換場のブラックホールを種族 II とする。このようにすると, 本研究で扱っている非可換ブラックホールを5つのタイプに分類できる。どの非可換ブラックホールがどのタイプに属するかを表 3.4 に示した。以下にそれぞれのタイプのブラックホールの性質をまとめ, 固有の性質, 共通した性質などを議論する。

NI タイプのブラックホール

このタイプには colored black hole と dilatonic colored black hole が属する。

- (1) このタイプのブラックホールはゲージ場の斥力と重力の引力とが釣り合った平衡状態と考えられる。そのために重力がゼロの近似では解が存在しなくなる。
- (2) ブラックホールの質量には上限がない, これは質量を持たない非可換場のブラックホールの本質といえる。しかし, ブラックホールの質量が大きくなると時空はシュワルツシルト時空に近づく。

(3) ホライズン上での場の強さ

$$B_h \equiv \left(\text{Tr} F^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Big|_{\text{horizon}} \quad (3.201)$$

を見ると、ブラックホールが局所的にどれだけ帯電（帯磁）しているかがわかる。ここで B_h という記号を用いたのは、非可換場の場の強さで磁場の動径成分だけがホライズン上で値を持つからである。図 3.34 にブラックホールの質量 M と B_h の関係を示した。これより colored black hole は局所的に帯磁していることがうかがえる。colored black hole は大域的な磁荷は持っていないが、ホライズンの近くの構造は RN black hole の構造と似ているのである [42]。ブラックホールが大きくなると B_h は減少する。これはブラックホールが Schwarzschild black hole に近づくために局所的な磁荷を失っていくためである。

(4) ホライズン上での δ の値が大きく、したがってホライズン近くでの重力ポテンシャルが深くなっている。

(5) YM ポテンシャルのノード数によって特徴づけられる無限可算個の解が存在する。ノード数が大きくなるほど、ブラックホールの質量が大きくなる。

NII タイプのブラックホール

このタイプには Proca black hole, sphaleron black hole, new sphaleron black hole, Skyrme black hole が属する。

(1) この種類のブラックホールには質量に上限がある。証明されてはいないが、これは非可換場に質量があるためだと予想される。ゲージ場の斥力と重力の引力が釣り合った非自明な構造はコンプト波長 $\sim 1/\mu$ という典型的なサイズを持っている。非可換ブラックホールのホライズンはこの構造の内側に存在しなくてはならない。そうでないとブラックホールがすべての非可換な構造を飲み込んで、結果的に自明な Schwarzschild black hole になってしまうからである。そのため $r_h \lesssim 1/\mu$ という条件がブラックホールの上限を決めていると考えられる。

(2) 2つのタイプの解が存在する。それらを NIIa 型と NIIb 型と名付けた。低エネルギー極限 ($\mu \rightarrow 0$) をとると NIIa 型は colored black hole に、NIIb 型は Schwarzschild black hole になる。NIIa 型の粒子の典型的な質量の大きさは m_P/g である²³。逆に高エネルギー極限 ($\mu \rightarrow m_P$) では非自明な解はなくなる。それは μ が大きくなると $r_h \lesssim 1/\mu$ という条件が満たされなくなり、構造がブラックホールに飲み込まれてしまうからである。

(3) 弱い重力の極限では NIIa 型の解は存在しなくなる。一方、NIIb 型の解は重力なしのソリ

²³ g はモデルによって g_c または g_s になる。

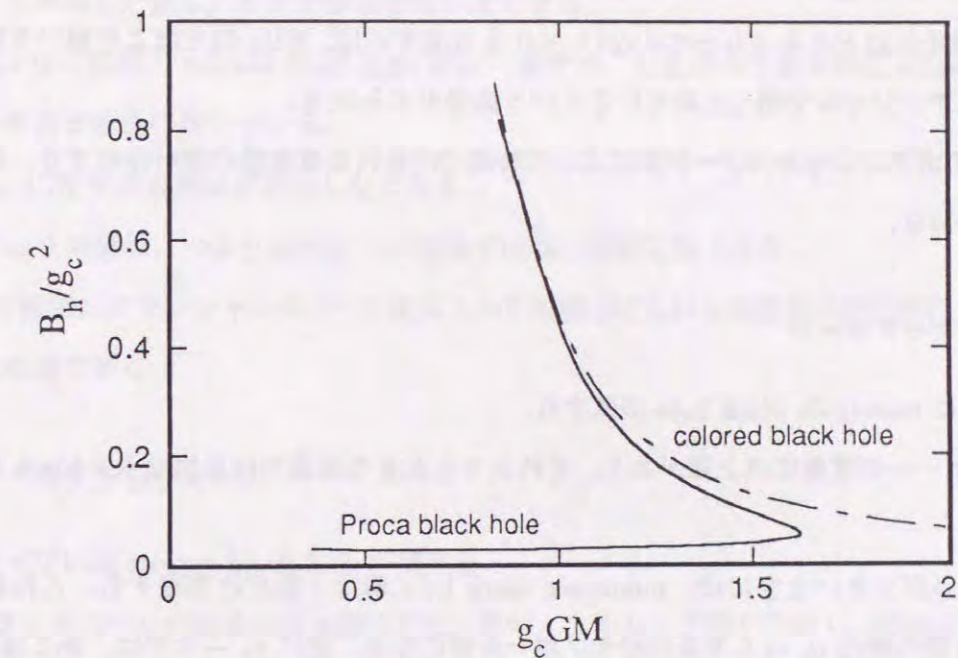


図 3.34: ブラックホールの質量 M とホライズン上での場の強さ B_h の図である。一点鎖線は colored black hole (NI タイプ)、実線は $\mu = 0.05g_c m_P$ の Proca black hole (NII タイプ) である。NI タイプと NIIa タイプは B_h が比較的大きく、ブラックホールはホライズン近くで局所的に帯磁している。ブラックホールの質量が大きくなるとシュワルツシルト解に近づくので、 B_h は小さくなる。NIIb タイプでは B_h は小さい。このタイプはほとんど至るところで中性である。

トンの粒子解（それぞれプロカオン，スファレロン，スキルミオン）になる．これから NIIa 型の解は非可換場の斥力と重力が釣り合ってきた構造物であるが，NIIb 型の解は重力なしでも存在していたものに，ただ重力的效果が付随して自己重力的な粒子，もしくはブラックホールになったものと考えられる．

- (4) NIIb 型の解は B_h が小さく，局所的にも中性とみなせる．一方，NIIa 型の解は B_h が大きい（図 3.34）．したがって NIIa 型は colored black hole のように，大域的には中性だがホライズンの近くでは局所に帯磁している．
- (5) NIIa 型ではホライズン上での δ の値が大きく，重力ポテンシャルが深くなっている．逆に NIIb 型では δ_h はそれほど大きくなっていない．(4) も考慮すれば，NIIa 型ではより強い YM 場をより深い重力ポテンシャルで閉じこめているという描像がえられる．
- (6) 非可換場のポテンシャルのノード数によって特徴づけられる複数個の解が存在する．しかし，その数は有限である．

CII タイプのブラックホール

このタイプには monopole black hole が属する．

- (1) ブラックホールの質量には上限があり，それよりも大きな質量では自明な RN black hole 解のみ存在する．
- (2) 比較的 v と λ が大きいときには，monopole black hole 解は 1 個だけ存在する．これを CIIb 型と呼ぶ．CIIb 型の解は $r_h \rightarrow 0$ で正則なモノポール解になる．逆に $r_h \rightarrow$ 大では，ある臨界値で RN black hole に一致する． v と λ が小さくなると，新たな解の枝が現れ，monopole black hole 解は 2 個になる．新しい解を CIIa 型と呼ぶ．CIIa 型と CIIb 型の解は $M - r_h$ 平面でくさび構造を形成し，その点が質量およびホライズン半径の最大値になる．CIIa 型の解はある特定のパラメータの範囲でしか解が存在しない．そして， r_h を小さくしていくと CIIa 型の解は RN black hole に一致する．
- (3) 重力ゼロの極限では，CIIb タイプの解は重力なしの通常モノポール解になる．一方 CIIa タイプの解は存在しなくなる．
- (4) 低エネルギー極限 ($\mu \equiv g_s v \rightarrow 0$) では，中心付近がシュワルツシルト解，遠方が RN 解という近似がよくなる．
- (5) 高エネルギー極限 ($\mu \rightarrow m_p$) では，非自明な解が存在しなくなる．
- (6) 非可換場のポテンシャルのノード数によって特徴づけられる複数個の解が存在する．しかし，その数は有限である．

Λ II タイプのブラックホール

このタイプには cosmic colored black hole が属する．

- (1) コスモロジカル・ホライズンが存在し，漸近的に RNdS 解に近づく．そのために大域的な有効磁荷が定義される．
- (2) ブラックホールの質量には上限が存在する．パラメータの値によりその上限には 2 種類ある．つまり， $\alpha (\equiv g_c / \sqrt{G\Lambda}) > 2.3$ では，質量が大きくなると分岐点をつくって RNdS black hole につながる．一方， $\alpha < 2.3$ ではコスモロジカル・ホライズンが extreme RNdS black hole の縮退したホライズン半径と一致し，そこで解は存在しなくなる．
- (3) $\Lambda \rightarrow 0$ の極限で colored black hole 解に一致する．したがって基本的に colored black hole の性質をそのまま受け継いでいる，
- (4) $\alpha < 1.75$ で非自明解が存在しなくなる．
- (5) $G \rightarrow 0$ の極限，つまり重力なしの極限では解は存在しなくなる．
- (6) 非可換場のポテンシャルのノード数によって特徴づけられる複数個の解が存在する．しかし，その数は有限である．

R^2I タイプのブラックホール

このタイプには stringy black hole が属する．

- (1) ブラックホールの質量には上限は存在しない．しかし，下限が存在し，それよりも小さなブラックホール解は，自明なものも含めて存在しなくなる．
- (2) BM 解，またはプロカオンのような粒子解は存在しない．
- (3) YM 場による重力への寄与はかなり小さく，そのために，ゲージ場がない場合の解と似た時空構造をしている．
- (4) $G \rightarrow 0$ の極限，つまり重力なしの極限では解は存在しなくなる．
- (5) YM 場のポテンシャルのノード数によって特徴づけられる無限個の解が存在する．

まとめ

上で分類した非可換ブラックホール解の性質を表 3.4 にまとめた．それぞれのタイプにはもちろん特徴的な性質があるが，異なるタイプ同士でも共通の性質が見受けられる．特に，重力なしの理論ですでにソリトンの解が存在していて，それに自己重力を考慮した b 型のブラックホール (NIIb, CIIb) と，アインシュタイン重力と非可換場が存在して初めて解が存在する a 型のブ

ラックホール (NI, NIIa, CIIa, AI, R²I) がある. この観点から見ると. いずれもそのグループ
ないで大体似た性質を持っていることがわかる.

表3.4: 非可換ブラックホールの分類とそれぞれの性質

タイプ 型	NI	NII		CII		AI	R ² I
	(a型)	a型	b型	a型	b型	(a型)	(a型)
非可換ブラックホールの種類	(dilatonic) colored BH	Proca BH, sphaleron BH Skyrme BH	monopole BH	cosmic colored BH	stringy BH		
非可換場の質量	なし	$\mu = \mu, g_e v, g_s f_s$	$\mu = g_s v$	なし	なし		なし
質量	$M < \infty$	有限 ($M < M_{cr}$)	有限	有限 ($M < M_{cr}$)	有限 ($M < M_{cr}$)		$M < \infty$
粒子解	BM タイプ	Procaon sphaleron Skyrmion	Procaon sphaleron Skyrmion	なし	monopole	BM タイプ	なし
重力ゼロの極限	解なし	解なし	粒子解	解なし	monopole	解なし	解なし
大域的な磁化	×	×	×	○	○	○	×
B_h の値 (局所的に帯磁)	大 (帯磁)	大 (帯磁)	小 (中性)	-	-	大 (帯磁)	?
低エネルギー極限 ($\mu \rightarrow 0$)	-	colored BH	Schwarzschild BH	解なし	?	-	-
高エネルギー極限 ($\mu \rightarrow m_p$)	-	解なし	解なし	解なし	?	-	-
δ_h の値 (重力ポテンシヤル)	大 (深い)	大 (深い)	小 (浅い)	小? (浅い)	大? (深い)	大 (深い)	? ?
励起解	無限個	有限個	有限個	有限個	有限個	有限個	?

解	質量	角運動量	電荷	磁気的荷	非可換パラメータ	特徴
Reissner-Nordström	M	0	Q	0	0	静的、球対称
Kerr	M	J	0	0	0	回転、球対称破綻
Kerr-Newman	M	J	Q	0	0	回転、球対称破綻、電荷あり
Reissner-Nordström-de Sitter	M	0	Q	0	0	静的、球対称、宇宙定数あり
Kerr-de Sitter	M	J	0	0	0	回転、球対称破綻、宇宙定数あり
Kerr-Newman-de Sitter	M	J	Q	0	0	回転、球対称破綻、電荷あり、宇宙定数あり
非可換解	M	J	Q	P	α	非可換パラメータあり

第4章

熱力学的性質からみた非可換ブラックホール

非可換ブラックホールの典型的な大きさは l_P/g であるために、結合定数 g_c または g_g が 1 よりもかなり小さくない限り、その大きさは非常に小さいものになる。したがって、非可換ブラックホールが存在したとしてもそれは宇宙の初期段階で形成され则认为られる。そこでは量子論的な効果がきいてくるので非可換ブラックホールの熱力学的性質が重要になる。

そこで、この章ではブラックホール熱力学を用いて、エキゾティック・ブラックホールの熱力学的性質を調べる。通常のカール・ニューマン解に対しては 2.3 節で見たようなブラックホールの熱力学が成立する。同じように非可換ブラックホールに対してもブラックホール熱力学を適応できるかどうかは現在研究が進んでいる [96, 97, 98, 99]。それらによると、すべて説明されたわけではないが、第 0 法則と第 1 法則は問題なく成立する。

ここでは、それぞれの非可換ブラックホールについてエントロピーと温度、熱容量を調べていくことにする。

4.1 エントロピー

最初にエントロピーについて考察する。ブラックホール熱力学によるとエントロピーは

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_h^2 \quad (4.1)$$

となる。ホライズン半径は負にならないので、エントロピーとホライズン半径は 1 対 1 に対応していることがわかる。したがって、ブラックホールの質量 M とエントロピー S との関係は定性的には質量とホライズン半径 r_h の図と等しい。3 章の各節でそれぞれの非可換ブラックホールの $M-r_h$ 図をあげており、それで議論ができるのだが、便利のためもう一度すべてのタイプの非可換ブラックホールに対して $M-S$ 図に直して示すことにする (図 4.1)。

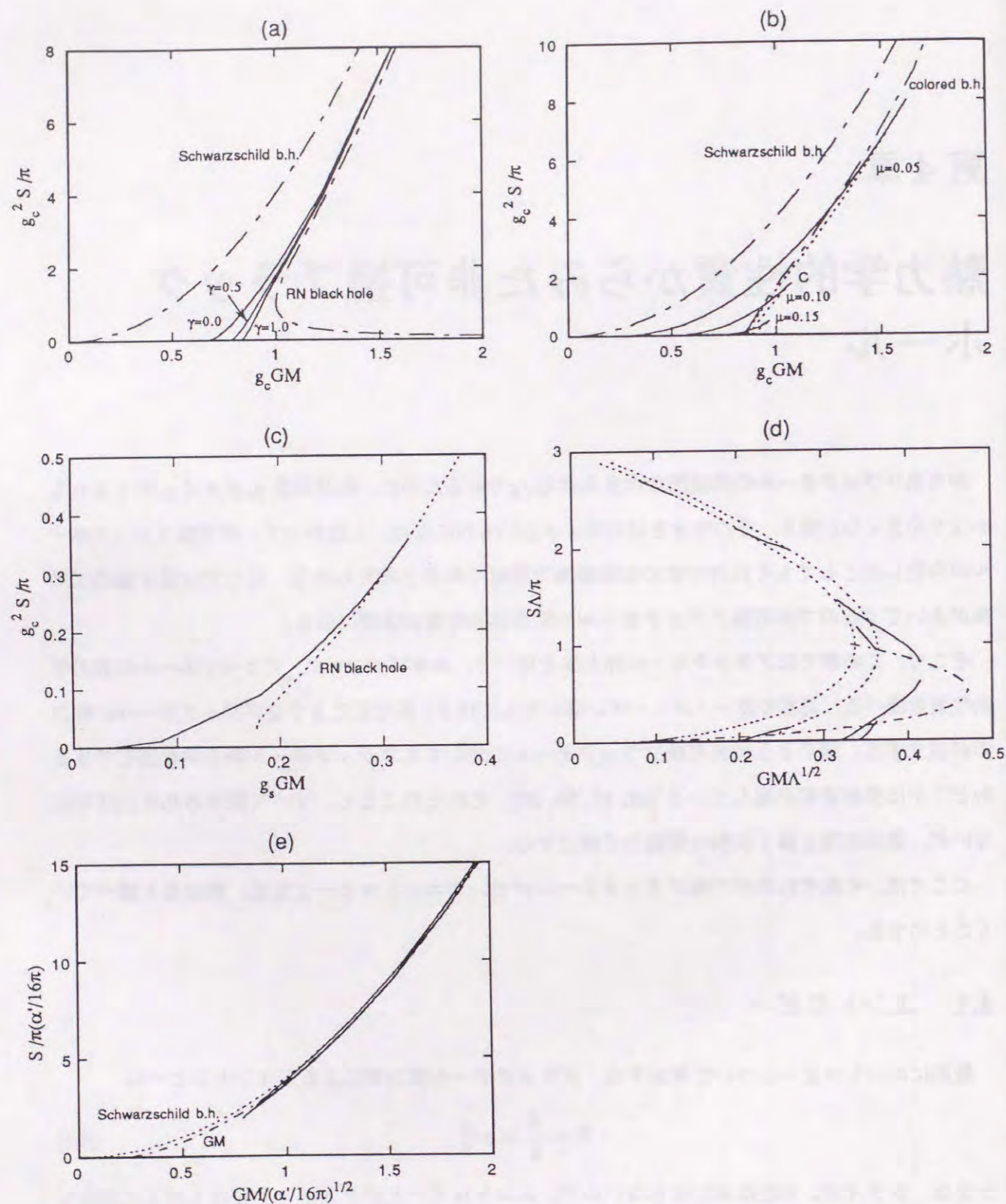


図. 4.1: 非可換ブラックホールのエントロピー S を質量 M の関数として表した. (a) NI タイプの dilaton colored black hole, (b) は NII タイプの Proca black hole, (c) は CII タイプの monopole black hole, (d) は AI タイプの cosmic colored black hole, (e) は R^2I タイプの stringy black hole である. b 型の解は a 型の解よりもエントロピーが大きくなっている.

まず注目してもらいたいのは NII タイプに属するブラックホール (b) である. NIIa 型と NIIb 型の解が存在するが, NIIa 型の方がエントロピーが小さく, NIIb 型の方が大きい. 熱力学の第 2 法則を考えると, NIIa 型から NIIb 型へ古典的に遷移する可能性はあるが, その逆はないことがわかる. これは第 5 章の安定性の議論と深く結びついている. NII タイプの 4 つの非可換ブラックホールでは定性的な違いはない.

NI タイプのブラックホール (a) ではエントロピーは, NIIa 型と同じくらいの大きさになる. つまり高エントロピーといえる. dilaton colored black hole の場合, デイラトン場の結合定数 γ によって異なる値をとるが, 同じ重力質量で比較した場合, γ が大きい方がエントロピーが大きくなっている. ただし, 定性的に見ると大した違いはないといえる. YM ポテンシャルのノード数が大きくなるとエントロピーは大きくなっている.

CII タイプのブラックホール (c) では, 図 4.1 では判別できないかもしれないが, NII タイプと同様に b 型の解の方が a 型の解よりもエントロピーが大きくなっている. さらに, ある質量の範囲では b 型の解は自明な RN black hole 解よりもエントロピーが大きい. この事実は安定性とも関係しており, 非常に重要なことである.

AI タイプの cosmic colored black hole (d) は高エントロピー・タイプになる. 結合定数 α の値が小さくなるとエントロピーも小さくなる. つまり, 宇宙項 Λ や有効磁荷 Q_{eff} が小さくなるとエントロピーは小さくなるのである. これは RNdS black hole と同じ性質である. また, 同じ結合定数 α のときには RNdS black hole よりも cosmic colored black hole のほうがエントロピーが大きいということは大切である.

R^2I タイプの stringy black hole (e) では, higher-curvature の項が入っているためにアインシュタイン重力理論とは異なり, ブラックホールのエントロピーは $A/4$ で表せない. これについては現在研究中である.

4.2 温度・熱容量

ブラックホールの温度 T は 2.3 節でやったように表面重力

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow r_h} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial_r g_{tt}}{\sqrt{g_{tt} g_{rr}}} \right\} \quad (4.2)$$

を直接計算することによって $T = \kappa/2\pi$ から求めることもできるが, ここでは (3.1) のメトリックに対して時空多様体を解析接続してユークリッド化し, その周期から温度を求めることにする [100, 101]. まず, 必要になる (t, t) 成分と (r, r) 成分だけ考え, ユークリッド化する.

$$d\tilde{s}^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) e^{-2\phi} dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2$$

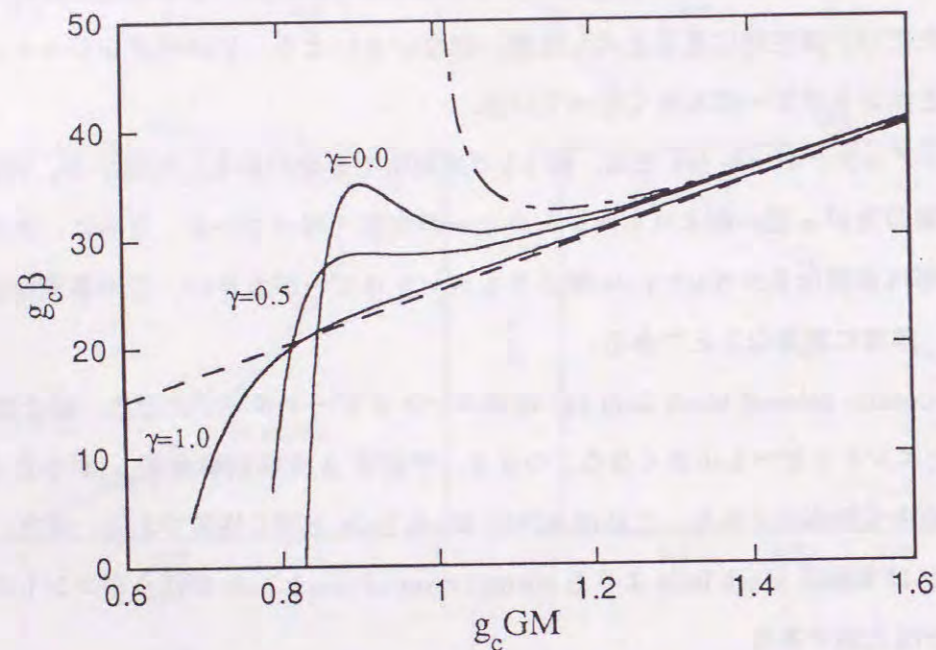


図. 4.2: dilaton colored black hole の温度の逆数 β を質量 M の関数として表した. すべて YM ポテンシャルのノード数は $n = 1$ の解である. $\gamma = 1$ (colored black hole) では熱容量の符号は $0.905m_P/g_c < M < 1.061m_P/g_c$ で正になる. $\gamma < \gamma_{cr}$ (~ 0.5) では同様の性質を持つ. 比較のために Schwarzschild black hole と RN black hole をそれぞれ一点鎖線と点線で示しておいた.

$$= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) e^{-2\delta} d\tau^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (4.3)$$

次に変数変換 $\xi = r - r_h$ をし, ホライズン上で展開する.

$$\begin{aligned} \bar{d}s^2 &= \left\{1 - \frac{2(m_h + m'_h \xi)}{r_h + \xi}\right\} e^{-2(\delta_h + \delta'_h \xi)} d\tau^2 + \left\{1 - \frac{2(m_h + m'_h \xi)}{r_h + \xi}\right\}^{-1} dr^2 \\ &= \left\{1 - (1 + 2m'_h \xi) \left(1 - \frac{\xi}{r_h}\right)\right\} e^{-2\delta_h} (1 - 2\delta'_h \xi) d\tau^2 + \left\{1 - (1 + 2m'_h \xi) \left(1 - \frac{\xi}{r_h}\right)\right\}^{-1} dr^2 \\ &= \frac{r_h}{1 - 2r_h m'_h} \left\{ \frac{1}{\xi} d\xi^2 + \frac{1}{r_h^2} (1 - 2r_h m'_h)^2 e^{-2\delta_h} \xi d\tau^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

さらに ξ を次のように変換する.

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = d\eta \quad \text{i.e.} \quad \eta^2 = 4\xi \quad (4.5)$$

こうするとユークリッド化されたメトリックは

$$ds^2 = \frac{r_h}{1 - 2r_h m'_h} \left\{ d\eta^2 + \frac{\eta^2}{4r_h^2} (1 - 2r_h m'_h)^2 e^{-2\delta_h} d\tau^2 \right\} \quad (4.6)$$

となり, これからユークリッド時間 τ の周期を求めると,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2r_h} (1 - 2r_h m'_h) e^{-\delta_h} \tau < 2\pi \\ 0 &\leq \tau < \frac{4\pi r_h e^{\delta_h}}{1 - 2r_h m'_h} \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる. ブラックホールの温度はこの周期の逆数として得られるので次ようになる.

$$T = \frac{1}{4\pi r_h} e^{-\delta_h} (1 - 2r_h m'_h) \quad (4.8)$$

4.2.1 NI タイプのブラックホール

図 4.2 に colored black hole と dilaton colored black hole の質量 M に対する温度の逆数 β ($1/T$) の関係を示す. ここでは結合定数 γ を 0, 0.5, 1.0 として 3 本の曲線を描いた. $\gamma = 0$ が colored black hole に相当している. また比較のために Schwarzschild black hole と RN black hole の場合も描いておいた. 2.3 節で見たように Schwarzschild black hole では良く知られているように

$$T = \frac{1}{8\pi M} \quad (4.9)$$

が成り立つので $\beta (= 1/T)$ は M に比例する. RN black hole の場合は M が大きいところから小さい方へくると β は減少する. ところが, $M = 2Q/\sqrt{3}G$ で β は最小となり, その後増加するようになる. そして extreme RN black hole で β は発散する. つまり温度がゼロになっている.

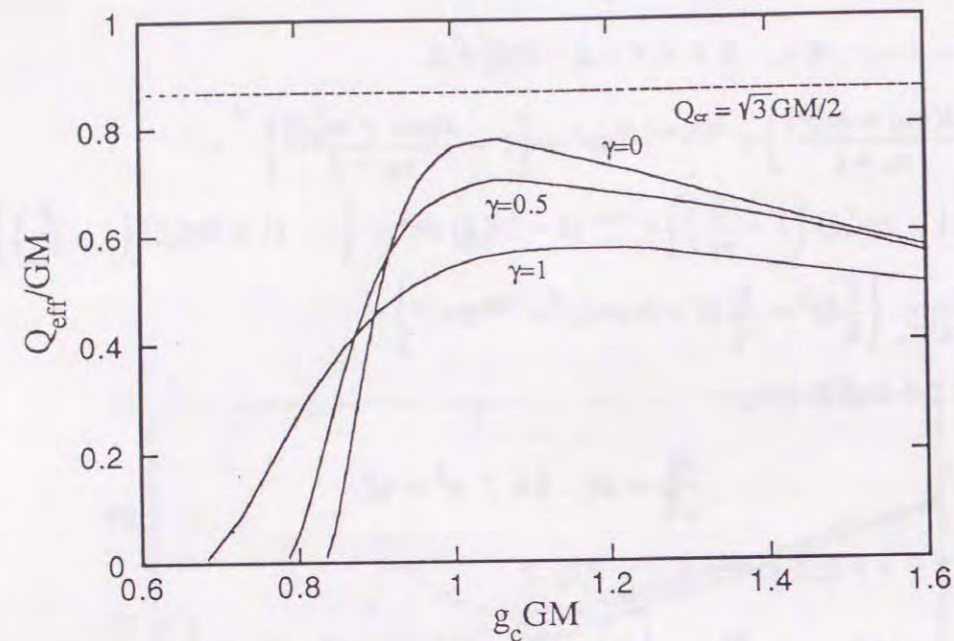


図. 4.3: dilatonic colored black hole の有効磁荷 Q_{eff} を示した. $\gamma=0$ の colored black hole も含めて, $\gamma < \gamma_{cr} \sim 0.5$ では同じような質量の範囲で Q_{eff} が $Q_{cr} = \sqrt{3}GM/2$ に近づいているのがわかる.

colored black hole の場合 ($\gamma=0$) は図 4.2 より, 1 回ずつ極大と極小を持つ. そのときの質量をそれぞれ $M_{1,cr}$, $M_{2,cr}$ とする. 解析の結果, $M_{1,cr} = 0.905m_P/g_c$, $M_{2,cr} = 1.061m_P/g_c$ となった. $M_{1,cr} < M < M_{2,cr}$ では β の傾きが負なので熱容量は正になる. これはそう驚くものではない. というのは RN black hole も同様の性質があるからである. RN black hole ではその電荷がある臨界値 ($Q_{cr} \equiv \sqrt{3}GM/2$) を超すと熱容量の符号が変わる. このとき熱容量は正の無限大と負の無限大との間を不連続に飛び移る¹. colored black hole の場合でも質量が減少するにつれて YM 場の有効磁荷が増加するので同じようなことが生じているのである. しかしながらここで新しい性質が見られる. それは質量 M が $M_{1,cr}$ よりも小さくなると再び熱容量の符号が変化するのである. $M < M_{1,cr}$ では M が小さくなると β も減少し, 熱容量の符号は負になる. $M = 0.829m_P/g_c$ でホライズン半径はゼロになり, 粒子解となる.

この振舞いをよりよく理解するには (3.35) で定義した有効磁荷 Q_{eff} を見ると良い. そこで重力質量 M と有効磁荷 Q_{eff} のグラフを図 4.3 に示す. colored black hole ($\gamma=0$) では Q_{eff}/GM は $M = M_{max} = 1.048m_P/g_c$ で最大値を持つ. このとき, Q_{eff}/GM は Q_{cr}/GM にかなり近づく.

¹したがって, ここでは 2 次の相転移が起こっているのだが, 実際にはブラックホールにはなにも変化は生じない [102, 103, 104].

M_{max} は $M_{1,cr}$ と $M_{2,cr}$ の区間に存在し, Q_{eff}/GM は質量が M_{max} から両端, つまり質量の小さい方と大きい方に行くにつれて単調に減少している. したがって, 熱容量が正になるようなこの領域では YM 場が優勢になっている. これが熱容量の相転移が 2 箇所が生じる理由である. ただ有効磁荷が大きいところがちょうど $M_{1,cr}$ と $M_{2,cr}$ の区間に対応しているわけではない. これはブラックホールの重力と YM 場が複雑に影響を及ぼし合っているからである.

γ を大きくしていくと β の極大と極小は $\alpha \sim 0.5$ で一致し, さらに大きくするとグラフは単調になる. こうして γ が大きくなると Schwarzschild black hole に近づいていく. これも図 4.3 から物理的な理解が可能である. γ が大きくなると Q_{eff} はより小さくなって, YM 場の影響は弱くなり, 相転移が生じなくなるのである.

dilatonic colored black hole は EYMD 系のブラックホール解であるが, YM 場の対称性を $SU(2)$ から $U(1)$ に落とした EMD 系のブラックホール解が以前に議論されている [45]. 実は EMD 系のブラックホールでは $M-r_h$ 図を描くと, 極値は RN black hole と同じく 1 つであるが, 結合定数を大きくしていくとこれがなくなるという, dilatonic colored black hole と同様の性質があることが確かめられている. EMD 系のブラックホールは解析的に求められるので, その臨界の結合定数は $\gamma=1$ と正確に求められている. 一方, dilatonic colored black hole 解は数値的にしか求められないので $\gamma \sim 0.5$ とだいたいの値しか求められない. しかし, ゲージ場を拡張しても似たような性質を持ち, その変化の生じる結合定数の値が近いことは興味深い.

4.2.2 NII タイプのブラックホール

図 4.4 に種類 2 の非可換ブラックホールの質量 M と温度 β の逆数の関係を示す. どのブラックホールでも NIIb 型の解は Schwarzschild black hole のように常に熱容量が負になっている. 一方 NIIa 型の解では熱容量の符号が数回入れ替わっているのがわかる. 低エネルギーの方, すなわち, 非可換場の質量が小さいときには 3 回符号が変わっている. そのときの質量を $M_{1,cr}$, $M_{2,cr}$, $M_{3,cr}$ とする. Proca black hole の場合 $\mu = 0.05m_P g_c$ とすると,

$$M_{1,cr} = 0.909 \left(\frac{m_P}{g_c} \right) \quad (4.10)$$

$$M_{2,cr} = 1.06 \left(\frac{m_P}{g_c} \right) \quad (4.11)$$

$$M_{3,cr} = 1.62 \left(\frac{m_P}{g_c} \right) \quad (4.12)$$

となる. 2 番目の臨界点 $M_{2,cr}$ は RN black hole と同じ性質のもの, 1 番目の臨界点 $M_{1,cr}$ は colored black hole や dilatonic black hole と同じ性質のものと考えられる. $\mu \rightarrow 0$ の極限ではこれらが NI タイプのブラックホールの臨界点と一致するからである. $M_{1,cr}$ と $M_{2,cr}$ の間では熱容量は正にな

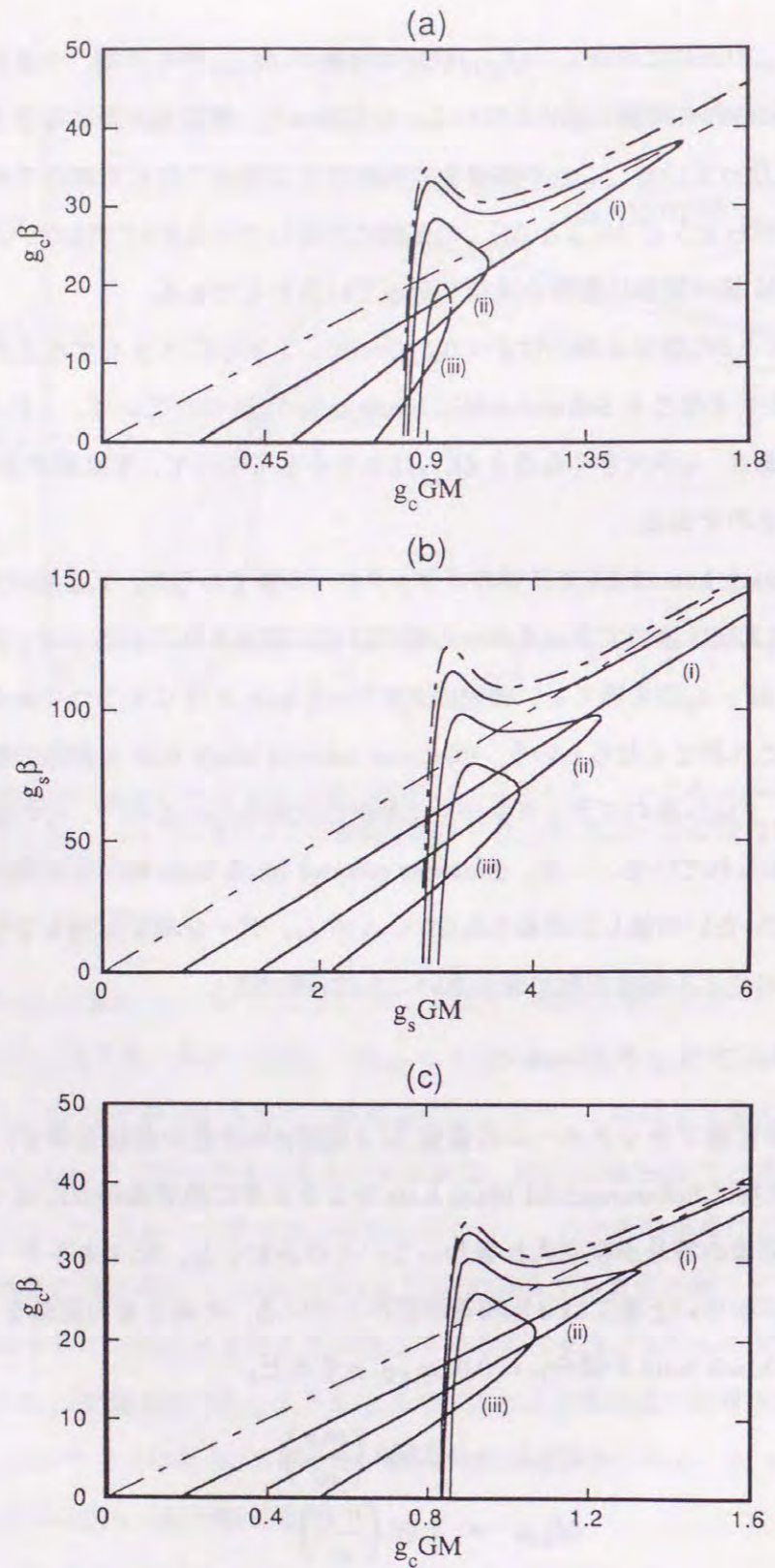


図. 4.4: NII タイプの非可換ブラックホールの温度の逆数 β を質量 M の関数として表した。すべて YM ポテンシャルのノード数は $n = 1$ の解である。(a) は Proca black hole で $\mu/g_c m_P = (1)0.05, (2)0.10, (3)0.15$ である。(b) は Skyrme black hole で $\mu/g_s m_P = (1)0.01, (2)0.02, (3)0.03$ である。(c) は sphaleron black hole で $\mu/g_c m_P = (1)0.1, (2)0.2, (3)0.3$ である。b 型の解では熱容量は常に負であるが、a 型の解では小さな μ の値では 3 回、大きな値では 1 回熱容量の符号が変化する。

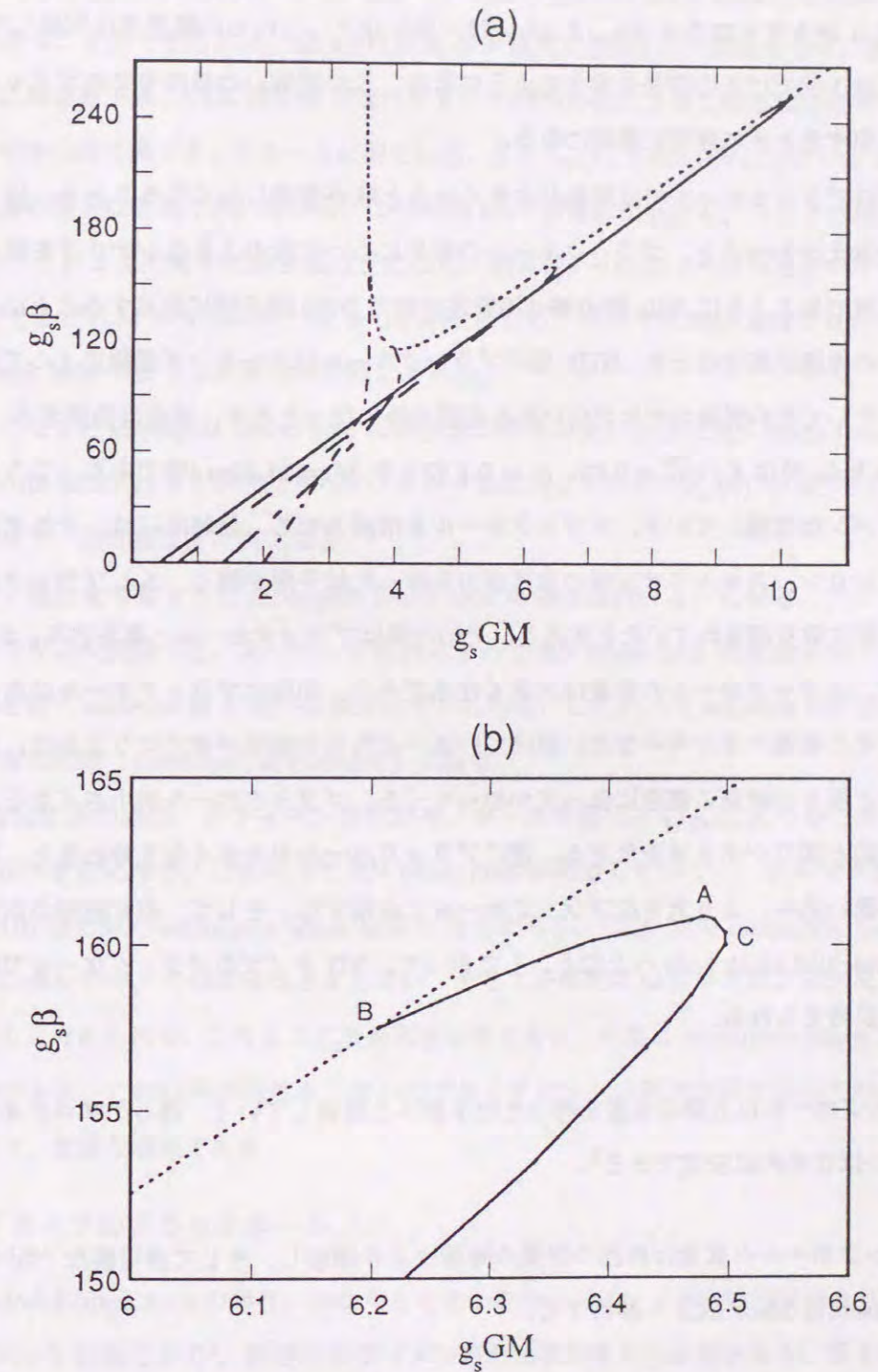


図. 4.5: monopole black hole の質量 M と温度の逆数 β の図である。(a) すべて $\bar{\lambda} = 0.1$ で $\bar{v} = 0.03$ (実線), $\bar{v} = 0.05$ (鎖線), $\bar{v} = 0.1$ (一点鎖線), $\bar{v} = 0.15$ (一点鎖線) にとった。点線は RN black hole である。(b) $\bar{\lambda} = 0.1, \bar{v} = 0.05$ の monopole black hole と RN black hole の分岐点を拡大したものである。

り、同時にホライズンでの有効磁荷が大きくなっている。 $M_{3,cr}$ はNIIa型のブラックホールにだけ現れるものである。ブラックホールの質量がこれより大きくなると、熱容量は再び正になる。比可換場の質量 μ が大きくなると $M_{2,cr}$ と $M_{3,cr}$ は一緒になり、これらの臨界点は消滅してしまう。そして熱容量は1回だけその符号を替えるようになる。この振舞いは熱浴中でのブラックホールの安定性を考察するときに非常に重要になる。

NIIタイプのブラックホールでは質量が大きくなると解が存在しなくなることで、以上の熱力学的な性質を考え合わせると、ブラックホールの進化について次のようなシナリオを描くことができる。第5章で見るようにNIIa型の解は不安定なのでNIIb型の解に注目することにする。ブラックホールの周囲が真空のとき、NIIb型のブラックホールはホーキング過程によって蒸発し続けるだろう。そしてその質量がゼロでないある有限の値になったとき、温度は発散する。例えば、Skyrme black holeでは $f_s/\sqrt{G} = 0.02$, $g_s = 0.1$ のとき $M = 14.50m_P$ 等である。こうして蒸発によりホライズンは収縮していき、ブラックホールを消滅させる。最終的には、それぞれプロカオン、スファレロン、スキルミオン等の自己重力を伴った粒子解が残る。もしブラックホールが十分多くの物質に取り囲まれていたとすると、その一部はブラックホールへ落ち込み、3.2節で議論したように、ブラックホールの質量は大きくなるだろう。同時にブラックホールはホーキング過程によってその質量エネルギーを失い続けている。どちらの過程が有力になるかは、ブラックホールの質量と周りの物質の密度によってかわってくる。ブラックホールが小さくなると蒸発が進み、上の議論と同じシナリオをたどる。逆にブラックホールが大きくなり始めると、周囲の物質をどんどん吸い込み、より大きなブラックホールに成長する。そして、非自明解が存在しなくなり、Schwarzschild black holeへととなる。したがって、NIIタイプのブラックホールでは次の単純なシナリオが考えられる。

1. ブラックホールは有限の質量を持った粒子解へと蒸発していく。残ったプロカオンやスキルミオンは古典的に安定である²。
2. ブラックホールの質量は周囲の物質の降着により増加し、そして非可換な“毛”を失ってSchwarzschild black holeへ移行する。

非可換な“毛”がブラックホールに落ち込むときは、ブラックホールの表面積が不連続に増大する。つまりエントロピーが不連続に変化するので、NIIタイプのブラックホールからSchwarzschild black holeへの変化は一種の1次相転移と考えられる。

²スファレロンは第5章で見るようにトポロジ的に不安定である。

4.2.3 CIIタイプのブラックホール

monopole black holeは磁荷を持っているので、中性のcolored black hole等とは異なった熱力学的性質を持つことが予想される。図4.5に質量 M と温度の逆数 β との関数を示す。図よりCIIb型の解は常に熱容量が負、CIIa型の解ではパラメータ \tilde{v} や $\tilde{\lambda}$ の値によって熱容量の符号が数回変わる。これは中性の非可換ブラックホールに似ている。 $\tilde{\lambda} < \tilde{\lambda}_{cr}(\tilde{v})$ で \tilde{v} が十分に小さいとき、CIIa型の解の熱容量の符号は2点で入れ替わる。1つは図4.5で垂直になる点C、もう1つは水平になる点Aである。この2点の間では熱容量は正になる。例えば $\tilde{v} = 0.05$ かつ $\tilde{\lambda} = 0.1$ のモデルでは点Cと点Aでそれぞれ $\tilde{M} = 0.32495$ と $\tilde{M} = 0.32401$ になる。点Cでの熱容量はゼロになるが点AではRN black holeのように熱容量が発散している。

\tilde{v} が大きくなるとmonopole black holeは熱容量の符号が変わる前にRN black holeと交わり、1度だけしか符号の入れ替えが起こらない。 \tilde{v} がさらに大きくなり、 $\tilde{\lambda}_{cr}(\tilde{v}) < \tilde{\lambda}$ になるとCIIb型の解はなくなり、熱容量は常に負になる。

ホーキング輻射を考慮するとmonopole black holeの運命は次のようになる。アインシュタイン・マックスウェル理論では、ホーキング輻射によってRN black holeが質量を失うと、無限回の物理過程を経てextreme解に近づき温度はゼロになる。したがってextreme RN black holeは安定で、宇宙の残骸(cosmological remnant)になる。

一方、EYMH系の場合、ホライズン半径がモノポール半径($\sim 1/g_s v$)より小さくなるとRN black holeは不安定になる。したがってRN black holeが蒸発していくと、途中で不安定になり、おそらくCIIb型の解のmonopole black holeに移るだろう。CIIb型のmonopole black holeの熱容量は常に負なので、その蒸発は止まらない。そして最終的にはホライズンが消え正則なモノポールが残ると考えられる。このように蒸発過程を考えると、自然にmonopole black holeを形成することができる。これは形成過程まで含んだブラックホールの無毛仮説の初めての反例を示したことになり、重要な結果である。

4.2.4 AIタイプのブラックホール

cosmic colored black holeの場合、少なくとも2つのホライズン(事象の地平線とコスモロジカル・ホライズン)があるので³、両方のホライズンの熱力学を考える必要がある。図4.6に質量 M と温度 T の関係を示す。コスモロジカル・ホライズンの温度の振舞いはRNdS black holeと定性的に同じで、ブラックホールが大きくなっていくと単調に減少していく。一方、事象の地平線の温度の振舞いには大きな違いがある。RNdS black holeの場合、質量が小さくなると熱容量の符号

³内部地平線が存在するかどうかはわかっていない。

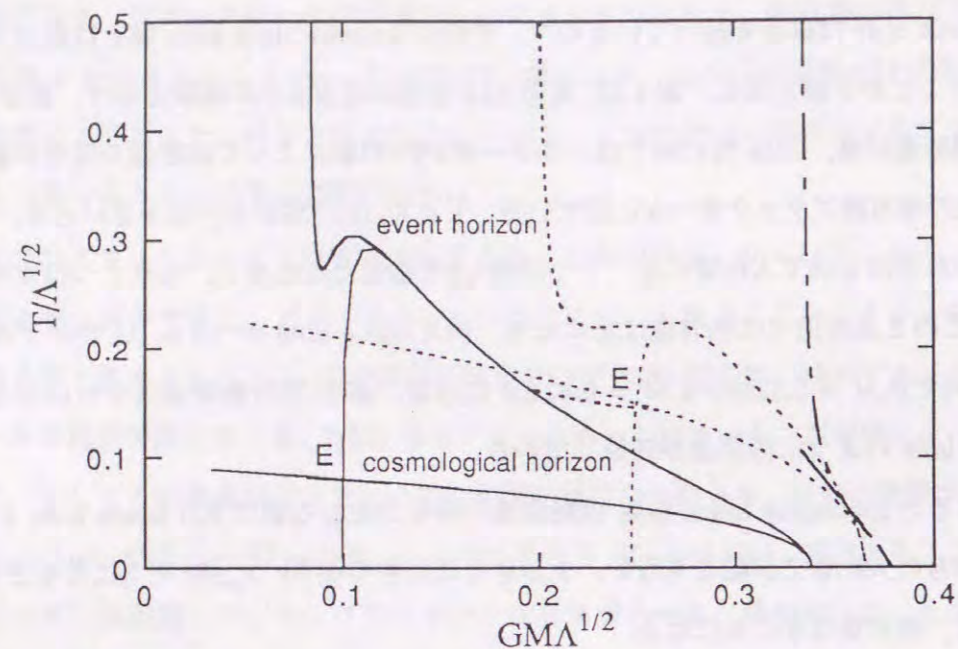


図. 4.6: cosmic colored black hole の質量 M と温度 T の図である. 実線は $\alpha (\equiv g_c/\sqrt{G\Lambda}) = 10.0$, 点線は $\alpha = 4.0$, 一点鎖線は $\alpha = 2.0$, である. また同じ RNdS black hole も描いておいた. α が大きいとき (たとえば $\alpha = 10.0$) は熱容量の符号が2度変わるが, α が小さくなると ($\alpha = 2.0$) 1度も変わらなくなる. RNdS black hole の2つのホライズンの温度は点 E で等しくなるが, cosmic colored black hole ではそのような点は見られない. これは black hole の進化に違いをもたらす.

が負から正にかわる. そして図 4.6 の E 点で両方のホライズンの温度が一致する. そして extreme RNdS black hole の極限では地象の地平線の温度はゼロになる. cosmic colored black hole では, ブラックホールの質量が小さくなると, その温度は発散しているのがわかる. その途中には熱容量の符号が正になる範囲が存在する. これは colored black hole と同じ振舞いであり, 同様の機構で理解できる.

結合定数 α を小さくしていくと事象の地平線の熱容量の符号の変化はなくなる. $\alpha \sim 4.0$ がその臨界値になっている. これは質量を大きくしていったときに, cosmic colored black hole が RNdS black hole へと移行するか, それとも途中で終わっているかに関係している可能性がある. これについては現在解析中である.

以上の熱力学的性質より cosmic colored black hole の進化が議論できる. 最初にある程度大きな質量の RNdS black hole があるとしよう. このときコスモロジカル・ホライズンの温度よりも事象の地平線の温度の方が高いのでホーキング過程によってブラックホールの質量は徐々に小さ

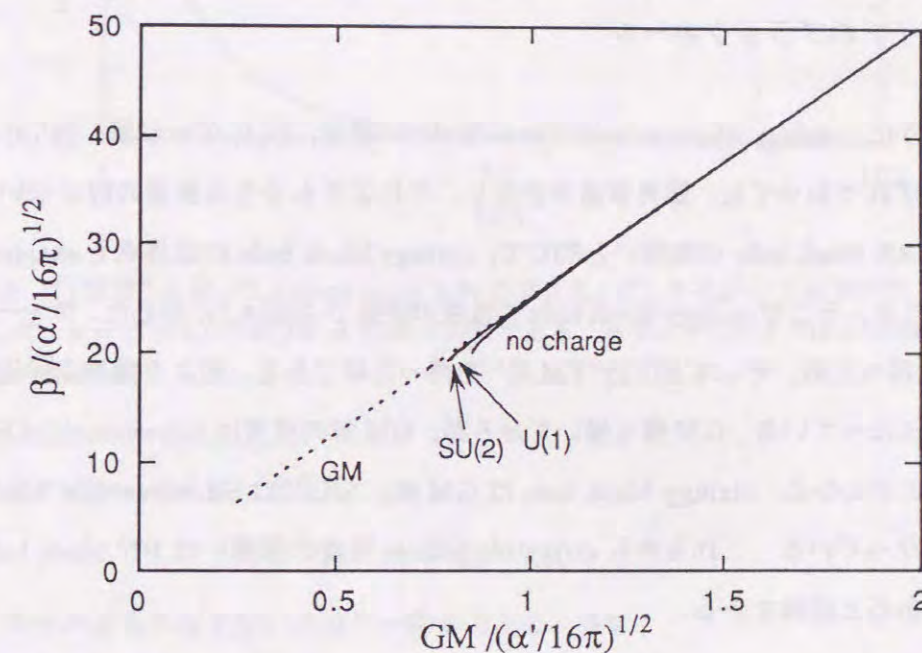


図. 4.7: stringy black hole の温度の逆数 β を質量 M の関数として表した. ゲージ場なしの解, $U(1)$ の磁荷 $Q_m = 1$ を持った解, そして $SU(2)$ の “YM 荷” を持った解を示した. すべて YM ポテンシャルのノード数は $n = 1$ の解である. $U(1)$ と $SU(2)$ の解はほとんど一致しており, 見分けがつかなくなっている. すべての解で熱容量は負になっている. また, 臨界質量で温度は有限のままである.

くなっていく。そして、図4.6の点Eでは2つのホライズンの温度が等しくなるので、両ホライズンからのエネルギー流束は釣り合い、それ以上ブラックホールは進化しなくなる。これが最終状態である。しかしSU(2) YM場の系では cosmic colored black hole 解が存在するのでこのシナリオは適応できない。というのは同じ質量では cosmic black holeの方が RNdS black holeよりエンタロピーが大きいので、分岐点で RNdS black hole から cosmic colored black hole に移行するからである。これ以降は2つの温度曲線が交わらず、蒸発が止まることはない。逆に蒸発はいつそう速く進み、最終的には粒子解が残ることになる。

4.2.5 R²I タイプのブラックホール

前章で見たように、stringy black hole はゲージ場がない場合、U(1) ゲージ場、SU(2) ゲージ場がある場合のいずれであっても、臨界質量が存在し、それよりも小さな質量の解がないことがわかった。これは RN black hole の振舞いと同じで、stringy black hole の臨界点も extreme 解ではないかと予想される。そこで stringy black hole の温度の逆数 β を図4.7に示した。チャージなしの解、U(1) 磁荷を持った解、そしてSU(2) “YM 荷” を持った解である。図より臨界点付近ではどの解も温度が有限になっている。GM 解も描いてあるが、GM 解の温度は Schwarzschild black hole と同じであることがわかる。stringy black hole は GM 解、もしくは Schwarzschild black hole よりも β が小さくなっている。これらから stringy black hole 温度の振舞いは RN black hole と全く異なったものであると結論できる。

ここで1つ重大な問題が生じる。remnant の問題である [105, 106]。RN black hole の場合、ホーキング輻射によって質量を失っていき、extreme 付近では徐々に温度が低くなっていき、無限回の物理過程を経て温度ゼロの extreme 解に達する。そして、それ以上の蒸発はとまり、最終的に remnant として残るのである。しかし、stringy black hole の場合、話は違う。ホーキング輻射により、質量が減っていきと臨界質量付近では逆に温度が上昇していくのである。そして、有限時間のうちに有限温度の臨界点に達し、裸の特異点が出現する。裸の特異点は物理的に好ましくないので、蒸発の過程をもう少し詳しく調べることにする。以前に次のような興味深い例がある。EMD 系では $\gamma > \sqrt{2\kappa}$ の extreme black hole は (4.8) で計算した温度が無限大になる。ところが、C. F. E. Holzhey と F. Wilczek は extreme 解に近づくにつれてポテンシャル障壁が無限に高くなり、輻射率が有限に抑えられると結論した。stringy black hole の場合は臨界点でポテンシャル障壁が無限に高くなり、輻射率がゼロになると期待される。そして、裸の特異点が現れる前に輻射が止まる可能性が出てくる。

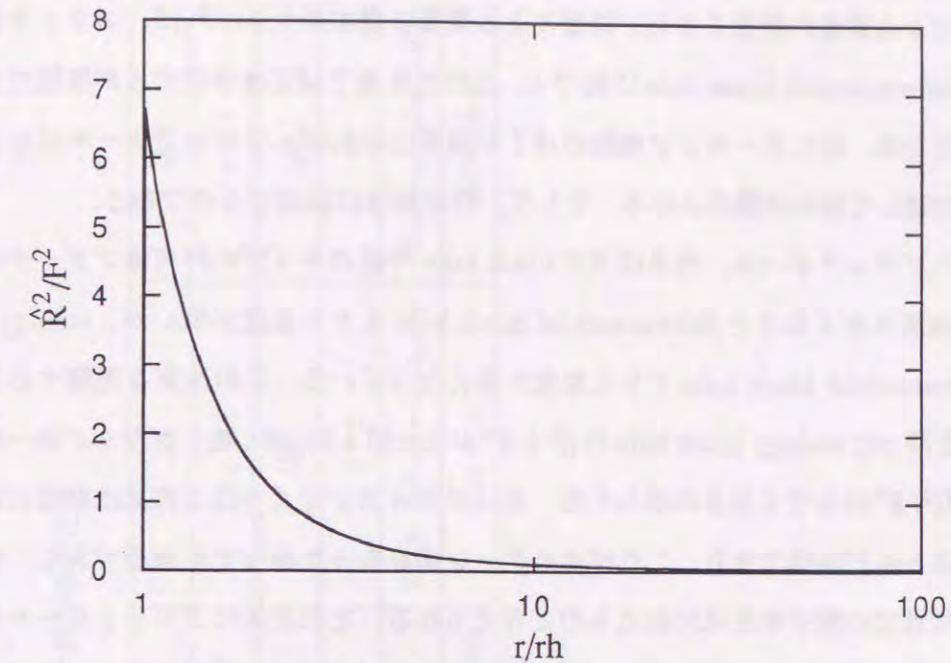


図. 4.8: “YM 荷” を持った stringy black hole の Gauss・ボンネ項 \hat{R}^2 と YM 場の強さ F^2 の比を示した。 $n=1$ で $r_h/\sqrt{16\pi/\alpha'} = 1.8964$ の解である。ホライズン近くでは \hat{R}^2 が優勢になっているのがわかる。

ここではクライン・ゴールドン方程式

$$\Phi_{;\mu}{}^{;\mu} = 0 \quad (4.13)$$

にしたがう中性の質量を持たないスカラー場を考える。 Φ を

$$\Phi = \frac{\chi(r)}{r} e^{-i\omega t} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.14)$$

とおくと、方程式 (4.13) は変数分離可能になる。動径座標の方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dr^{*2}} + \omega^2 - V^2(r) \right] \chi(r^*) = 0 \quad (4.15)$$

となる。ここで

$$\frac{d}{dr^*} \equiv \left(1 - \frac{2m}{r} \right) e^{-\delta} \frac{d}{dr} \quad (4.16)$$

で定義される tortoise 座標を導入した。ポテンシャル関数は

$$V^2(r) = \frac{e^{-2\delta}}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left[l(l+1) + \frac{2m}{r} - 2m' - r\delta' \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \right] \quad (4.17)$$

となる。そこで、臨界点付近でこのポテンシャル関数を描いてみると、予想に反して、常に有限の高さを持つことが確かめられた。

以上の解析より stringy black hole の進化は次のようになる。まず、周りに十分な物質が存在し、ホーキング放射による質量の開放よりも、降着による質量の増加が大きければ、ブラックホールは大きくなり、Schwarzschild black hole に近づく。このとき量子補正は存在するが無視できるくらい小さなものとなる。逆にホーキング放射のほうが優勢になれば、ブラックホールは小さくなり、更に放射が加速して裸の特異点になる。そして、時空構造は破綻するのである。

ゲージ場を伴うブラックホール、例えば RN black hole や他のタイプの非可換ブラックホールでは質量がある程度大きくなると Schwarzschild black hole よりも温度が低いが、stringy black hole は常に Schwarzschild black hole よりも温度が高くなっている。この性質を理解するために SU(2) “YM 荷” を持った stringy black hole の \hat{R}^2 と F^2 の比を図 4.8 に示した。ブラックホールから離れるにつれて \hat{R}^2/F^2 は小さくなるのがわかる。逆にホライズン近くではこの比は非常に大きくなり、YM 場はほとんど無視できる。これは他のゲージ場を持った場合でも同様である。放射過程はホライズン付近での粒子対生成に因るものと考えられる。そのためにブラックホールの温度はゲージ場にはあまり影響されず、ガウス・ボンネ項によって支配されているのである。チャージなしの解を見るとガウス・ボンネ項は温度を上げる傾向があるので、どのようなゲージ場が存在する場合でも Schwarzschild black hole より温度が高くなるのである。また熱容量を見ても常に符号が負になっており、ここにもガウス・ボンネ項が優勢になっている影響が現れている。

4.3 熱力学的性質のまとめ

それぞれのタイプの非可換ブラックホールの熱力学的性質をあげると以上のようになる。これらをいくつかの項目に分けて表 4.1 にまとめた。

非可換場が質量を持つ種族 II の解で、重力なしの平坦な時空でもソリトンのような構造をつくる b 型は、常に熱容量が負になっているのがわかる。これは低エネルギー近似で Schwarzschild black hole に近づくからと思われる。一方、重力が存在して初めて構造が形成される a 型は熱容量の符号が数回変わっている。大まかな議論では、通常物質は熱容量が正であり、逆に重力系では負になることもある。したがって、熱容量の符号が数回変化することは、物質と重力が複雑に影響を及ぼしあっていると考えられる。これは重力と非可換場が存在して初めて解が構成される a 型の解の特徴といえる。進化 ($M \rightarrow$ 大) の項目で NI タイプと R²I タイプの Schwarzschild black hole というところにダブル・クォーテーション・マークがついているが、これは YM 場は非自明のまま残るという意味である。しかし、YM 場は時空構造に影響を及ぼさなくなるので Schwarzschild black hole に近づくのである。また a 型のブラックホールは b 型よりもエントロピーが大きくなっている。これは次章の孤立系での安定性の議論に深く関係している。

表4.1: 非可換ブラックホールの熱力学的性質

タイプ 型	NI (a 型)		NII		CII		AI (a 型)	R ² I (a 型)
	a 型	b 型	a 型	b 型	a 型	b 型		
エントロピー	低	高	低	高	低	高	(低)	(低)
熱容量の不連続変化の回数	1, 3	0	0, 1	0	0	0	0, 2	0
進化 ($M \rightarrow$ 大)	Schwarzschild BH	Schwarzschild BH	RN BH	RN BH	RN BH or extreme 解	“Schwarzschild BH”		
進化 ($M \rightarrow$ 小)	BM タイプ	粒子解	RN BH	monopole	BM タイプ	裸の特異点		

第5章

安定性からみた非可換ブラックホール

第3章で様々な非可換ブラックホールのモデルを紹介して解析を行った。これらはアインシュタイン方程式の新しい解で、非可換場が一般相対論においてどのような働きをするのかという興味もあるだろう。しかし、非可換ブラックホール解がブラックホールの無毛仮説の反例になり得るという興味も大きな部分を占めているに違いない。そこで問題になるのが、実際にこのようなエキゾチックなブラックホールが我々の宇宙に存在するか、もしくは存在していたかということである。これまでに見てきたように非可換ブラックホール解はすべて静的な解のみで、時間発展を追ってその形成等を調べたわけではない。そのために実際に非可換ブラックホールが存在するための必要条件として、解が安定でなくてはならない。そこでこの章では非可換ブラックホール解の安定性を考察する。

本研究以前にもいくつかの非可換ブラックホール解の安定性を議論した論文はある。そのほとんどは球対称の線形摂動による方法を用いている。それらをまとめてみる。

1. colored black holes

N. Straumann 等によって粒子解とブラックホール解に対して解析がなされ、球対称の線形摂動に対して不安定であることが示された [43, 44]。その後、ノード数がゼロの基底状態の解に対して込み入った議論が行われたが、最初の不安定という結論は変わらなかった [107, 108, 109, 110]。その中には BM 解に摂動を与えて、その非線形な時間発展を追い、YM 場は無限遠へ飛び去るか、ブラックホールに落ち込んでしまうのかのどちらかで、最終的には Schwarzschild black hole になることをシュミレーションしたものもある [111]。数学的には証明されていないが、YM ポテンシャルのノード数が n の解では偶関数モード (even mode) に n 個の不安定モードがあると考えられている。また、奇関数モード (odd mode) にも n 個の不安定モードがあり、colored black hole はスファレロンの不安定性があることが確かめられた [112, 113, 114, 115, 116, 117]。

2. Skyrme black holes

粒子解であるスキルミオンはトポロジ的に安定であることがわかっているが、ブラックホール解はホライズンが存在するためにトポロジ的には安定ではない。しかし、Skyrme black hole の b 型の解は球対称の線形摂動に対して安定であることが確かめられている [66, 67].

3. monopole black holes

ヒッグス場の結合定数 λ が無限大のときに限り解析がされており、安定な解が存在する [74]. 自明な RN black hole は安定のように思えるが、球対称な線形摂動に対して不安定になる臨界パラメータが存在する [75]. その臨界点で monopole black hole が枝分かれして出現するので、 $\lambda < \infty$ の monopole black hole も安定なものがあると考えられている。また、別の方法を用いた解析で、安定なモノポールの存在が確かめられている [118].

ここでは非可換ブラックホールの安定性を調べるために、これまでの摂動による解析を用いずにカタストロフィー理論を用いることにする [119, 49, 77]. カタストロフィー理論は自然における状態の変化を説明する新しい数学的手段で、特にゆるやかな変化よりも不連続な変化の解析に向いている。カタストロフィー理論はその単純さからいろいろな分野に応用されている。例えば、工学的構造体、天体物理、原子格子、流体、カオス、発生生物学、生態学、宇宙船姿勢制御、脳神経、そして天体物理学 [120, 121] などである。

カタストロフィー理論で安定性を調べるには、まず非可換ブラックホールのコントロール・パラメーター、状態変数そしてポテンシャル関数を決めなければならない。それらはブラックホールの種類や周囲の環境によって異なってくる。

次の段階は平衡空間 M_V をコントロール・パラメーターと状態変換の関数として描くことである。それからカタストロフィー射像

$$\chi_V : M_V \rightarrow R^N \quad (5.1)$$

を使って、平衡空間をコントロール・パラメーターのつくる空間へと射影する。 N はコントロール・パラメーターの数である。 $N = 2$ の時、コントロール・パラメーターのつくる空間をコントロール空間という。平衡空間には、射像 χ_V のヤコビアンがゼロになる特異点が存在する場合がある。そのような特異点の集合の像は分岐集合 B_V と呼ばれる。特異点が存在するとき、射像 χ_V は特異であるといい、コントロール・パラメーターが分岐集合 B_V を超えて変化していくと解の個数が変わり、また安定性も変化する。したがって分岐集合を調べることによって、モデルをいくつかの初等カタストロフィーに分類でき、その安定性を示すことができるのである [122].

カタストロフィー理論についてはもう少し詳しく付録 B にまとめておく。

5.1 NIタイプのブラックホール

まず NIタイプのブラックホールについて調べる [119, 49]. ここではブラックホールが孤立系の場合と熱浴中にある場合を考える。表 5.1 にコントロール・パラメータ等をまとめて示す。

表 5.1: NIタイプのブラックホールのカタストロフィー変数

系	孤立系	熱浴系
コントロール・パラメータ	ブラックホールの質量 M	ブラックホールの温度 T
	結合定数 γ	
状態変数	ホライズン上での場の強さ B_h	
ポテンシャル関数	エントロピー S	ヘルムホルツの自由エネルギー F
カタストロフィーの型	自明	くさびカタストロフィー

5.1.1 孤立系

状態変数をホライズン上での場の強さ B_h 、コントロール・パラメータをブラックホールの質量 M と結合定数 γ としてポテンシャル関数をエントロピー S とする。こうしてカタストロフィー理論を用いて安定性の解析をすると、分岐集合は空集合になることがわかる。つまり、平衡空間におけるすべての点は正則になる。したがって NIタイプのブラックホールはどのような質量、どのような結合定数でも安定性は変化しないことがわかる。これは線形摂動を用いた解析で colored black hole が常に不安定であるという結果と一致する。

5.1.2 熱浴系

熱力学ではよく2つの対称的な状況を考える。1つは孤立した断熱系であり、もう1つは熱浴中の等温のものである。前者ではエントロピー S が本質的な量であり、安定な熱平衡状態はエントロピーの極大点として理解される。一方、後者ではヘルムホルツの自由エネルギー F が本質的

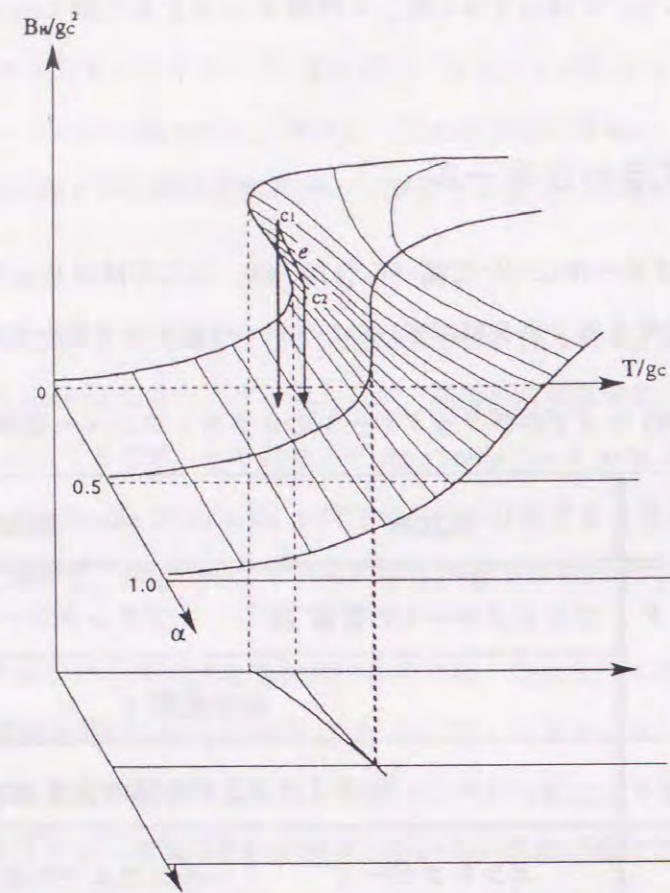


図. 5.1: 熱浴系の dilatonic colored black hole の平衡空間と分岐集合である. 分岐集合の形より, この系はくさびカタストロフィーに分類される.

な量になり, 平衡状態は自由エネルギーの極小点として表される.

2.3 節や第4章に記したように, ブラックホール物理学では, ブラックホールは熱力学法則を満たすことがわかっており, エネルギー M , エントロピー $S = A/4$, そして温度 $T = \kappa/4\pi$, を持った熱力学的对象とみなすことができる. 実際にはブラックホールは厳密に熱力学を再現しているわけではないが, 熱浴中にあるブラックホールがどのような性質を持つかを調べることは興味深い.

ここでは理想的な状況を考え, 熱浴は自分自身の温度を変えずに, ブラックホールの温度を一定に保つとする. ブラックホールの周りの熱輻射や, ホーキング輻射が温度を調節するのである. 例えば, 孤立系の Schwarzschild black hole は常に安定である. しかし, 輻射で満たされた無限に大きな箱の中にある Schwarzschild black hole は常に不安定である [123]. なぜそのようなものかは熱容量が負になることから理解される. RN black hole では, $Q = \sqrt{3}M/2$ で熱容量の符号が入れ変わる. この変化は一種の相転移と考えられる [124]. すなわち, $Q < \sqrt{3}M/2$ の RN black hole は熱浴中では不安定であるが, $Q > \sqrt{3}M/2$ では安定に変わるのである.

このような熱容量の符号や安定性の変化の解釈については, 未だ解明されていない問題が残っ

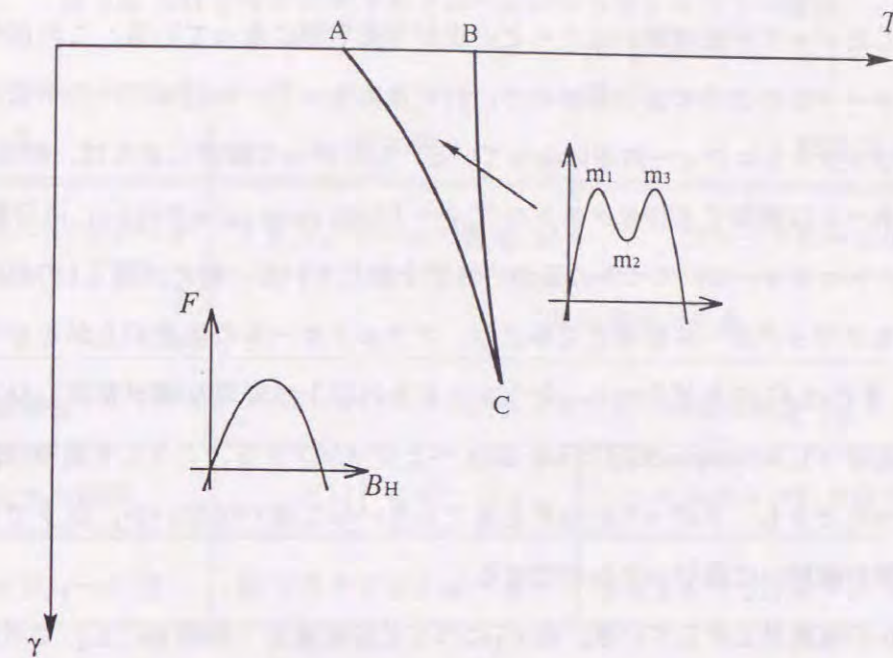


図. 5.2: 熱浴系の dilatonic colored black hole ポテンシャル関数 F を示した. 領域 ABC の内部には, 1 個の安定解と 2 個の不安定解が存在する. しかし, その他の領域では 1 個の不安定解しか存在しない. これは双対くさびカタストロフィーに見られる性質である.

ているが [125], ここではブラックホールを通常の熱力学的对象として扱うことにする. ヘルムホルツの自由エネルギーは

$$F = M - TS \quad (5.2)$$

である. この極値が平衡点を表し, 極小が安定, 極大が不安定に対応している. ヘルムホルツの自由エネルギーを用いて熱浴に非可換ブラックホールを浸したときにどのような性質を持つのかを調べることにする.

まず, ブラックホールの温度 T と結合定数 γ をコントロール・パラメータにする. そしてヘルムホルツの自由エネルギー F をポテンシャル関数, ホライズン上での場の強さ B_h を状態変数にとる (表 5.1 参照). 図 5.1 に平衡空間を示す. colored black hole 解 ($\gamma = 0$) を含んだ γ が小さい領域では, 2 つの折れ目が現れるが, 大きな γ に対しては折れ目は 1 つも見られない. これをカタストロフィー写像でコントロール平面上に写すとくさび型が見られる. コントロール平面は見やすいように図 5.1 の元の位置よりも下の方に示しておいた. したがって, このタイプの解の安定性はくさびカタストロフィーに分類される. 図 5.2 に描いたポテンシャル関数の振舞いから安定解は曲線 AC と曲線 BC に挟まれた三角形に似た領域 ABC の内側にだけ存在することがわかる. 同時に

ABC内には2つの不安定解も存在する。安定解は平衡空間上で $\partial B_h/\partial T$ が負になることで判断されるのである。したがって平衡空間のほとんどの点が不安定解になっている。これは任意のコントロール・パラメータのところ安定解があり、折り目になっている領域だけに不安定解が存在する通常のくさびカタストロフィーの逆になっている。したがって厳密に言えば、熱浴中のNIタイプのブラックホールは双対くさびカタストロフィー (dual cusp catastrophe) に分類される。

この種のカタストロフィーはいくつかの面白い性質を備えている。例えば図5.1の曲線eで表されるような安定なブラックホールを考えてみよう。ブラックホールの温度が上がるか下がるかすると解は点 C_1 、または C_2 にたどりつく。そうするとそれ以上は安定な解が存在しないので、解を表す点は矢印に沿ってSchwarzschild black holeへとジャンプする。こうして最終段階では、温度が上がっていったときも、下がっていったときでもたいして違いはないが、以下で見るようにポテンシャル関数の振舞いは異なったものになる。

ブラックホールの温度が上昇していき、点 C_1 につくと分岐集合(曲線BC上)でポテンシャルの最大の点 m_1 と最小の点 m_2 が一致し、最大点 m_3 を残す。しかしながら、それは不安定点なのでブラックホール解は m_3 へは移らない。そのかわりに、単純なSchwarzschild black holeに移るのである。逆に温度が下がると、解の点は曲線ACを横切り、ポテンシャルの最小の点 m_2 と最大の点 m_3 が一致する。そして最大の点 m_1 を残すことになる。そして同様にSchwarzschild black holeへとジャンプする。

前述したように、カタストロフィーは分岐集合上で生じる。では、今のモデルで分岐集合を特徴づけるような物理的な変化はあるのだろうか。熱浴中のRN black holeでは、分岐集合は $Q = \sqrt{3}M/2$ をみたし、ここでは熱容量の符号が変化して、一種の2次相転移が生じる。非可換ブラックホールの場合でも、数値計算から分岐集合は熱容量の符号が変化するところと考えられる。この結果は結合定数 γ が小さいときには2度符号を変え、大きくなると1度も無くなることと一致している。

5.2 NIIタイプのブラックホール

この節ではNIIタイプのブラックホールの安定性を調べる[119, 49]。NIIタイプのブラックホールは $M-r_h$ 平面でカタストロフィー理論による現れるくさび構造を示すので、NIタイプの場合より興味深い。NIタイプのときと同様に孤立系と熱浴系を考える。表5.2にそれぞれの変数を示す。

5.2.1 孤立系

図5.3にSkyrme black holeの平衡空間と分岐集合を示す。ここで非可換ブラックホールの質量 M と非可換場の質量 μ をコントロール・パラメータ、ホライズンでの場の強さ B_h を状態変数、エ

表 5.2: NIIタイプのブラックホールのカタストロフィー変数

系	孤立系	熱浴系
コントロール・パラメータ	ブラックホールの質量 M	ブラックホールの温度 T
	非可換場の質量 μ	
状態変数	ホライズン上での場の強さ B_h	
ポテンシャル関数	エントロピー S	ヘルムホルツの自由エネルギー F
カタストロフィーの型	折り目カタストロフィー	折り目+くさびカタストロフィー c ??

ントロピー S をポテンシャル関数とした。平衡空間は折りたたまれた布のような形をしており、コントロール平面への写像は1本の線を示している。これは折り目カタストロフィーに分類される。

考察している系に2つのコントロール・パラメータが存在するときには、2種類のカタストロフィーが考えられる。1つはくさびカタストロフィー、もう1つは折り目カタストロフィーである。後者はコントロール・パラメータが1つしかない系でも存在する。したがって、ここでは非可換場の質量 μ を固定しておいて、1つのパラメータ、 M のみに注目することにする。

μ の方を固定するには2つの理由がある。1つはラグランジュアンの中で基本的なパラメータ、例えば、粒子の質量、結合定数、真空期待値等はそれぞれの理論で固定された値を持つ。したがって非可換場の質量 μ を変化されるのは、数学的には興味はあるが、物理的には意見がない¹。もう1つはブラックホールの周囲の物質の降着や、ホーキング輻射等でブラックホールの質量が変化したときに、そのブラックホールの性質がどのように変化するか、特にその安定性はどうかに興味があるからである。

コントロール・パラメータ μ を固定すると、平衡空間上になめらかな解曲線が得られる。それぞれの質量の値に対して、その曲線上に2つの解が存在している。 B_h が小さい方の解、つまりb型の解は線形摂動に対して安定であることが示されている。一方 B_h が大きい方の解(a型)は不安定になることがわかる。

ここで1つ注意しておく。今、b型のブラックホールは安定、a型のブラックホールは不安定

¹もし running coupling constant のように結合定数が温度やエネルギーによって変化する場合には、ここで議論したものと異なる性質を持つことになる。

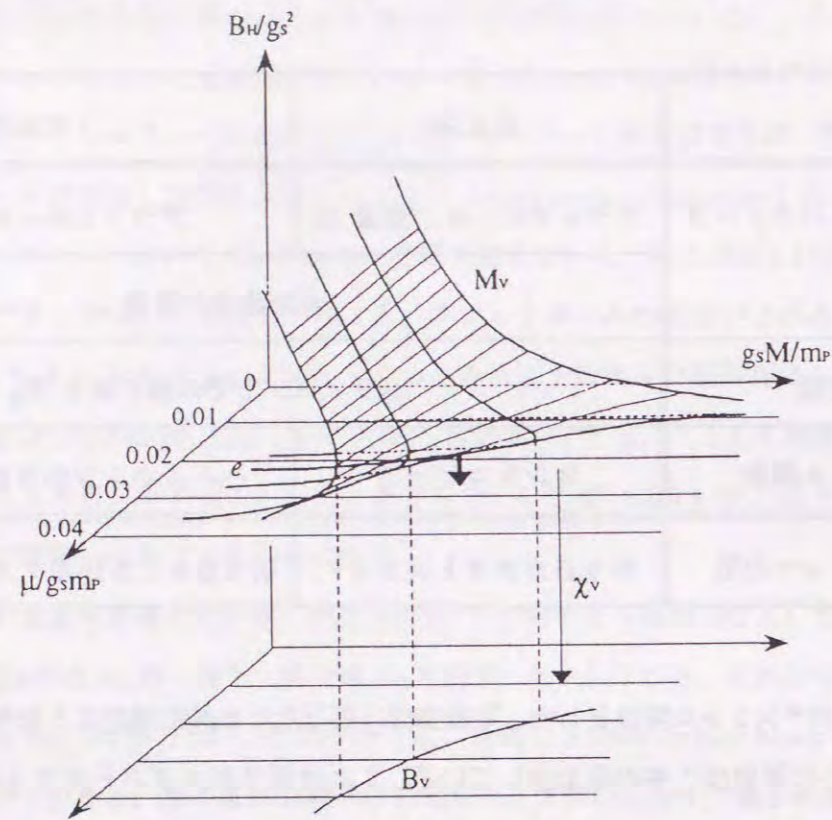


図. 5.3: Skyrme black hole の平衡空間の図である。平衡空間の上側と下側はそれぞれ a 型と b 型で、不安定解と安定解になっている。曲線 e に沿ってブラックホールの質量が大きくなると、ある臨界質量で安定解と不安定解が一致する。この点でカタストロフィーが生じ、Skyrme black hole は矢印に沿って Schwarzschild black hole へとジャンプする。コントロール平面上に分岐集合 B_V を描いた。これは折り目カタストロフィーになっている。

と述べたが、sphaleron black hole の場合、この規則は成立しない。というのはトポロジ的な理由から sphaleron black hole は常に不安定だからである。一般的に安定性を議論するときには、いろいろなモードについて調べなければならない。スファレロンの安定性に関する多くの議論はトポロジーの解析に基づいており、特定のモードを調べるわけではない。重力がない場合のスファレロンに対しては球対称の仮定の下で安定性の解析がなされている [126]。そこでは1つの不安定モードの存在が明らかにされている。自己重力を伴ったスファレロンの粒子解や sphaleron black hole の b 型の解はこの1つのモード以外に対しては安定であり、a 型の解ではさらにもう1つの不安定モードが現れるのだろう [115]。この意味においては b 型の解は a 型の解より安定である。したがって、b 型を“安定”，a 型を不安定と言うことにする。こうすると sphaleron black hole も統一的に議論に加えることができるのである。

a 型と b 型の解の安定性を時空の構造から説明できないだろうか。そこで非可換場のエネルギー

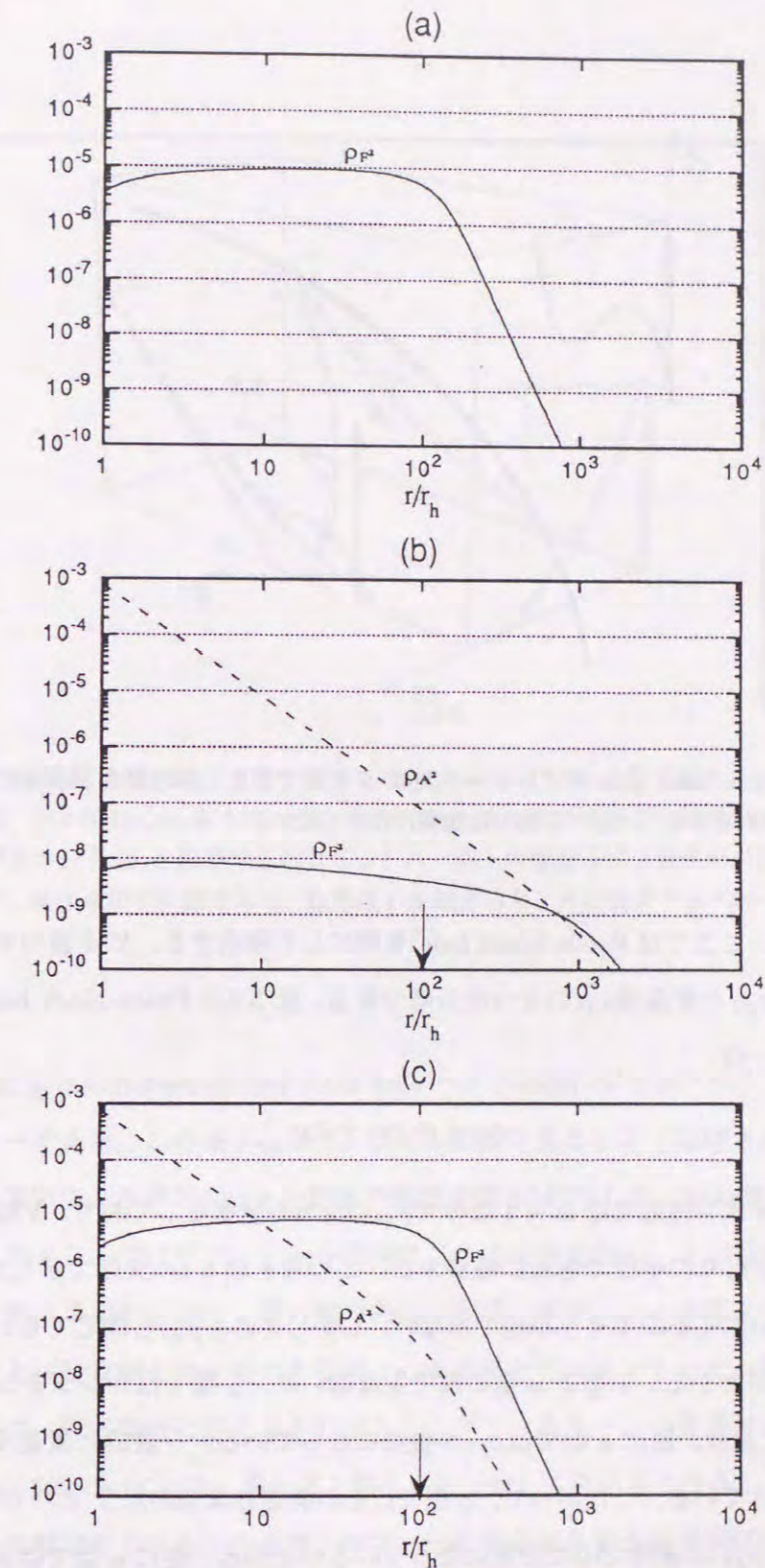


図. 5.4: 中性の非可換ブラックホールのエネルギー分布を描いた。(a) は colored black hole (NI タイプ)、(b) は Proca black hole の b 型 (NIIb タイプ)、(c) は Proca black hole の a 型 (NIIa タイプ) である。 $\mu = 0.05g_c m_P$ にした。また、それぞれのブラックホールのホライズン半径は $0.01g_c/l_P$ にした。運動エネルギーの項 ρ_{F^2} と質量項 ρ_{A^2} を別々に示した。非可換場のコンプトン波長 ($\sim 1/\mu$) を矢印で示したが、その点で、NIIb タイプでは ρ_{A^2} が優勢であり、一方、NIIa タイプでは ρ_{F^2} が優勢である。

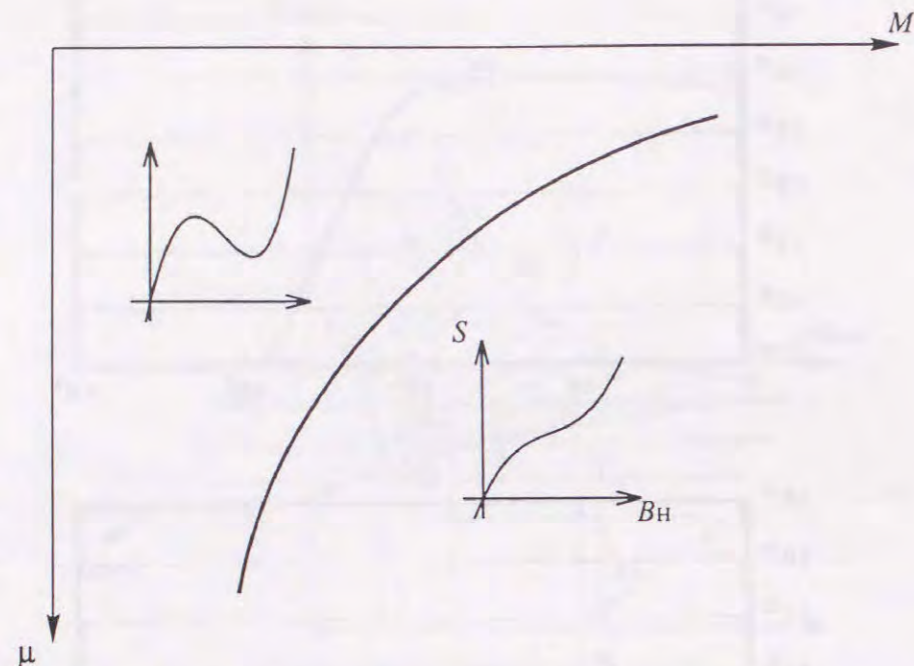


図. 5.5: Skyrme black hole ポテンシャル関数 S の図である. 分岐集合 B_V の左側では最大点と最小点が存在する. 一方, 右側では極値は存在しない.

分布を見てみよう. ここでは Proca black hole を例にして考察する. YM 場のエネルギーは, 運動エネルギーの項 ρ_{F^2} と質量項 ρ_{A^2} の 2 つに分離できる. 図 5.4 に Proca black hole の ρ_{F^2} と ρ_{A^2} を示す. 全エネルギーは

$$\rho_{total} = \rho_{F^2} + \rho_{A^2} \quad (5.3)$$

で表される. ホライズン付近では $w \sim 1$ なので ρ_{A^2} は r^{-2} の分布をしており, YM 場のコンプトン波長 ($\sim 1/\mu$) のあたりの半径で急激に減衰する. この点を図 5.4 の矢印で示した. ρ_{F^2} に関しては様々な因子が効いてくるのでそう単純ではない. しかしこれも ρ_{A^2} と同じくらいのところで急激に減衰していくのがわかる. a 型と b 型の解で主な違いは, b 型ではコンプトン波長のところで ρ_{A^2} が優勢になっており, 逆に a 型では ρ_{F^2} が優勢になっている. 一般的に質量項は構造を安定化させることが知られている. したがって, b 型ではその構造の典型的なサイズ ($\sim 1/\mu$) であるコンプトン波長まで ρ_{A^2} が優勢なので安定になっているのである. 逆に a 型では安定化させることができない. colored black hole は極端な場合 ($\rho_{A^2} \equiv 0$) になっている.

この系ではどのようにカタストロフィーが生じるのだろうか. 最初に安定なブラックホールが存在したとしよう. 図 5.3 では曲線 e 上の 1 点で表される. 質量が大きくなると解の点は曲線 e に沿って右側へと移動していき, 右端の点 (特異点) に到達する. ここで解の点は行くところがなく

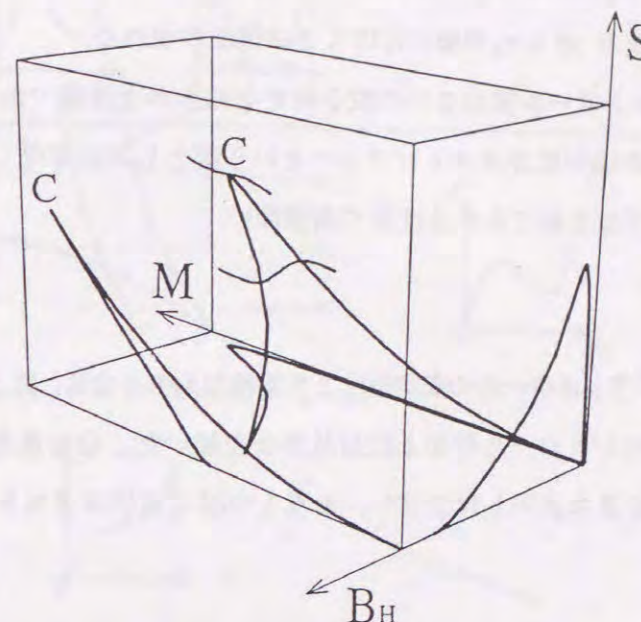


図. 5.6: 3次元空間 (M, B_h, S) における Skyrme black hole の解曲線と各 2次元平面への射影である. $\mu = 0.02g_s m_P$ にした. $M-S$ 面におけるくさび構造 C は臨界点である. コントロール・パラメータ M を固定するとホイットニー面上の極値点に 2 個の解が存在する. 極大点が安定で, 極小点が不安定である. 臨界点 C を越えると, 非可換ブラックホール解は存在しなくなる.

なり, 矢印で示したように Schwarzschild black hole へと不連続にジャンプすることになる. これがカタストロフィーである. この様子はポテンシャル関数を見るとよく理解される. コントロール・パラメータの違いによるポテンシャル関数の概形を図 5.5 に示した. 分岐集合 B_V の左側, つまり μ と M が小さくのところではポテンシャル関数は 2 つの極値を持つ. 1 つは最大点で安定な b 型で, もう 1 つは最小点で不安定な a 型の解である. 普通, ポテンシャル関数の最小点と最大点はそれぞれ安定解と不安定解を表すのであるが, いまの場合ではエントロピーをポテンシャル関数に選んでいるので, 対応関係は逆になるのである. ブラックホールの質量が大きくなると, 解の点は分岐集合 B_V に近づいていき, 最大点と最小点が一致して変曲点になる. さらに質量が大きくなると極値つまり解はなくなる. カタストロフィーは最大点と最小点が消滅することによって生じるのである.

次に図 5.6 に Skyrme black hole の解を $M-B_h-S$ の 3次元空間に描いた. またそれぞれの 2次元平面への射影も記した. 3次元の図はよりよい理解と新しい結果を与えてくれる. カタストロフィー理論では, 解はコントロール・パラメータ M を固定したときに, ホイットニー面 $S = S(M, B_h)$

の極値の点とみなせる. 図 5.6 の最大エントロピーのところでは解は変曲点になり, それ以上は解がなくなっている. $M - B_h$ 平面と $B_h - S$ 平面, そしてもとの 3 次元の曲線はすべてなめらかであり, $M - S$ 平面つまり $M - r_h$ 平面にだけくさび構造が現れる.

図 5.6 をみると, ブラックホール解は 2 つの粒子解をなめらかな曲線であたかも “橋” のようにつないでいる. そしてその途中にカタストロフィーという落とし穴が存在している. これはカタストロフィー理論を用いてはじめてわかる性質で興味深い.

5.2.2 熱浴系

熱浴中の NII タイプのブラックホールの安定性はより複雑なものとなる. 例として図 5.7 に Skyrme black hole の平衡空間とコントロール平面上に分岐集合を描いた. 分岐集合は 2 つの成分から構成されており, 1 つは折り目カタストロフィー, もう 1 つはくさびカタストロフィーである.

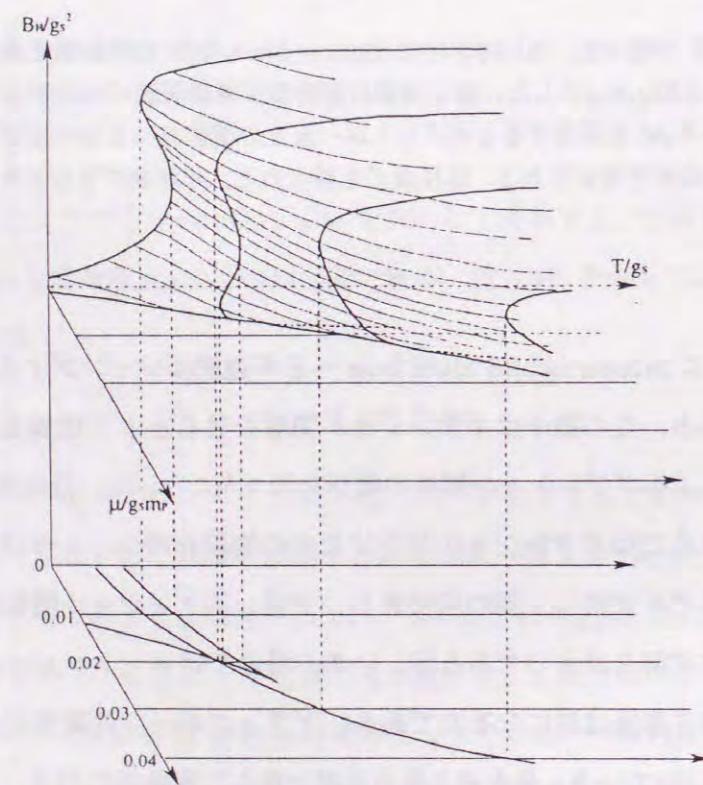


図 5.7: 熱浴中の Skyrme black hole の平衡空間と分岐集合である. 分岐集合はくさび構造 ECD (図 5.8) となめらかな曲線 ABF (図 5.8) からなっている. くさびと曲線が同時に現れるカタストロフィーは, コントロール・パラメータが 2 個しか存在しない初等カタストロフィーには分類できない. そのために, つばめの尾カタストロフィーや蝶のカタストロフィーのようにコントロール・パラメータが 3 個以上のものに分類される可能性がある.

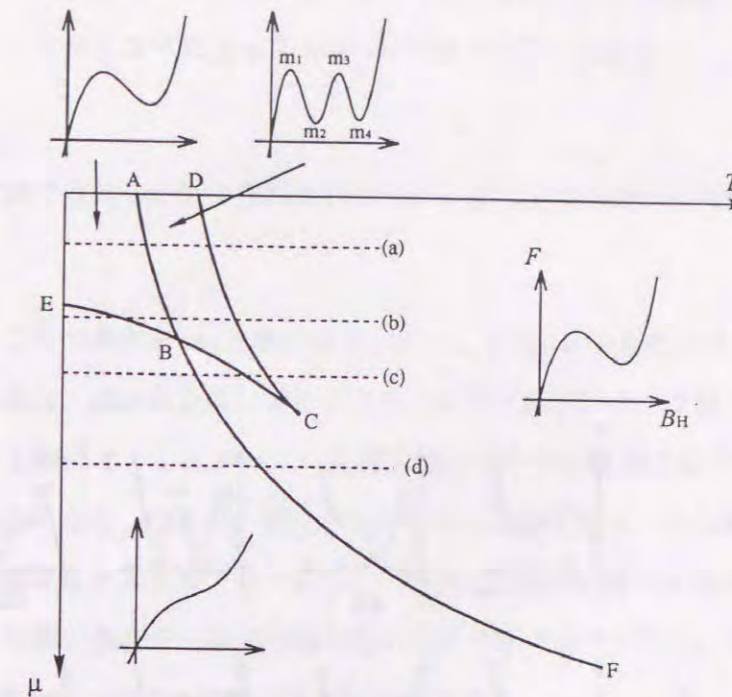


図 5.8: 熱浴中の Skyrme black hole のポテンシャル関数 F を示した. 領域 ABCD には 2 個の極大と 2 個の極小が存在する ($m_1 \sim m_4$). (a)~(d) の 4 本の線はブラックホールの進化を議論するのに用いる.

図 5.8 にポテンシャル関数の概形を示した. μ を固定しておいて, ブラックホールの温度が変化することによって, ポテンシャル関数がどのように形が変わっていくのを見ることにする. この様子は図 5.9 に示してある. μ の値によって 4 つの場合が存在している. それぞれの場合を見ることにする.

1. (a) の場合

温度が低いときには最大点 m_1 と最小点 m_2 が存在している. 温度が高くなっていき解を表す点が右の方に移動していくと, 曲線 AB に当たる. そこで変曲点が現れる. この点を越えると別の最大点 m_3 と最小点 m_4 が現れ, ABCD で囲まれる領域の中では 2 つの最大点と 2 つの最小点が存在することになる. さらに温度が上昇すると, 曲線 CD 上で最小点 m_2 と最大点 m_3 が一致して変曲点にかわる. そして最大点 m_1 と最小点 m_4 が残される. ここで初期に m_2 に安定な解があったとしよう. 温度が上がり, 曲線 CD を越えるとその解はなくなってしまい, 最小点 m_4 にジャンプする. ここでカタストロフィーが生じるのである. 曲線 CD の前ですでに最小点 m_4 での自由エネルギーは m_2 のものよりも小さくなるが, m_2 は局所的に安定 (準安定) なので, このときはまだ m_4 は移れない. カタストロフィー理論ではこれ

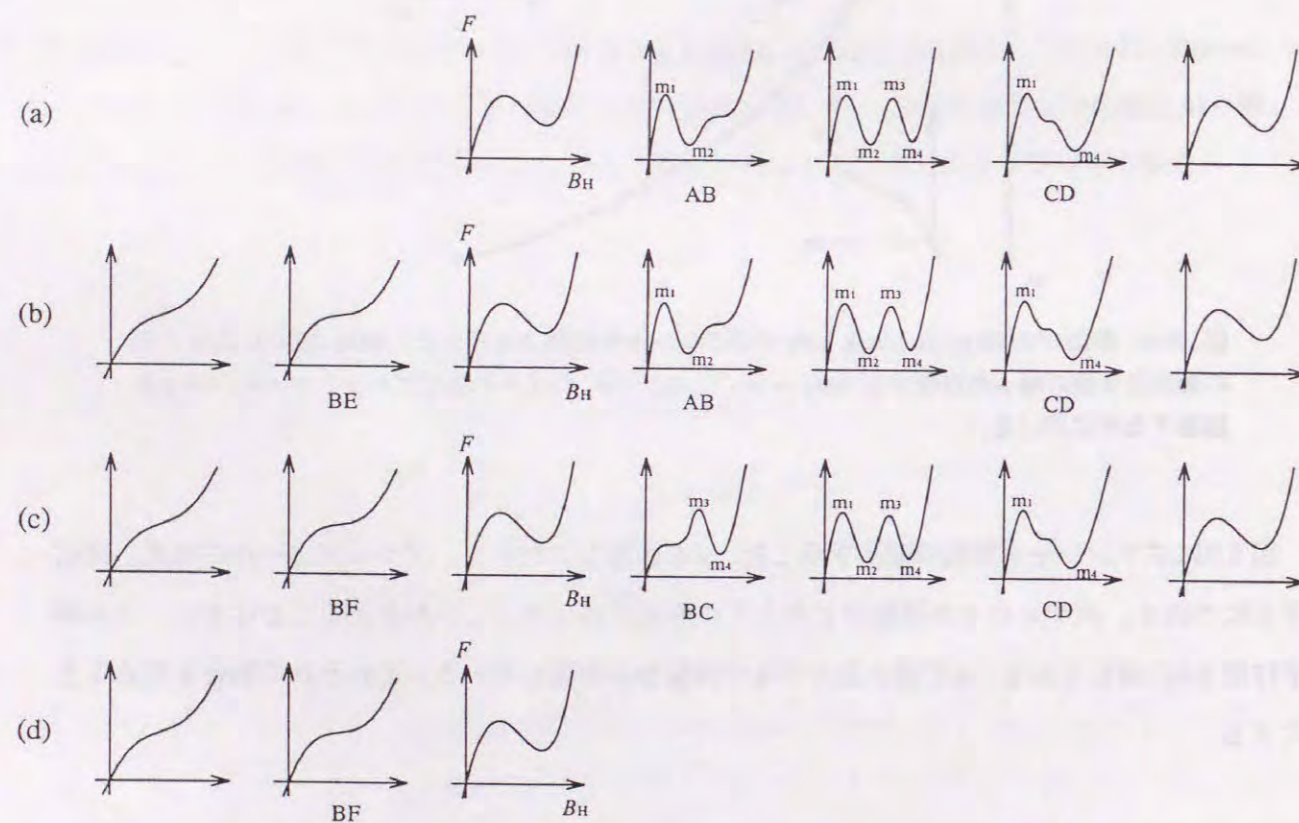


図. 5.9: 熱浴中の Skyrme black hole のポテンシャル関数の振舞いを示した. (a)~(d) の4つの場合がある. これらは図 5.8の直線 (a)~(d) に対応している. いくつかの図の下に, AB や CD などの文字があるが, これらは 図 5.8の分岐集合の曲線を表している.

を(完全)遅れの規則という. しかし, これは古典系で成立する規則で, 量子的効果を考慮したときにはトンネリングによって m_4 へすり抜けることもある.

2. (b) の場合

曲線 EC より前では新しい形が現れるが, それ以後は (a) の場合と同様である.

3. (c) の場合

曲線 BF のところで最大点 m_3 と最小点 m_4 が, m_1 と m_2 よりも先に現れる. 初期に m_4 に安定解があった場合, 温度が上昇していても, カタストロフィーは起こらずに, その解は安定のまま存在し続ける. したがって, 温度が低いときの安定解は非可換場の質量 μ によって異なったものになる. つまり, 温度が上がっていったときに, ある解はそのまま存在し続け, また別の解はカタストロフィーが生じ, 時空は不連続に変化するのである. これは興味深い. なぜなら低い温度のときに存在しているブラックホールが (a) または (b) に属しているのか (c) に属しているのか区別できないからである.

4. (d) の場合

この場合は単純で曲線 BF 上でポテンシャルの形が変化するだけである.

分岐集合をみると2つの初等カタストロフィー(折り目カタストロフィーとくさびカタストロフィー)が組み合わさっているのがわかる. しかしながら, トムの定理 [127] より, コントロール・パラメータが3つ以上でないことのようなカタストロフィーは現れない. したがってこの系はより高次の初等カタストロフィーに属しており, 図 5.7の分岐集合はその断面を見ているものと予想される. それはつばめの尾カタストロフィーか蝶のカタストロフィーまたは別のものかもしれない.

5.3 CII タイプのブラックホール

この節ではカタストロフィー理論を用いて monopole black hole の安定性を調べるが, 平衡空間を描いて分岐集合を写し出すという手法はとらずに, ポテンシャル関数を見ることによって議論することにする [77].

monopole black hole では質量 \bar{M} , 真空期待値 \bar{v} , ビッグス場の自己結合定数 $\bar{\lambda}$ をコントロール・パラメータ, ホライズン半径 r_h (同じことだがエントロピー S) をポテンシャル関数にする (表 5.3).

図 3.23 に $\bar{\lambda} = 1$ で $\bar{v} = 0.05$ の場合の monopole black hole の $M - r_h$ 図が示してある. RN black hole の磁荷は $1/g_s$ に固定されているので, 質量に下限が存在する. 図 3.23 より, くさび構造は見

表 5.3: CII タイプのブラックホールのカタストロフィー変数

系	孤立系
コントロール・パラメータ	ブラックホールの質量 M
	真空期待値 \bar{v}
	ビッグス場の自己結合定数 $\bar{\lambda}$
状態変数	δ のホライズン上での値
ポテンシャル関数	エントロピー S
カタストロフィーの型	つばめの尾カタストロフィー

られない。一方、 $\bar{\lambda} = 0.1$ で $\bar{v} = 0.05$ のときは図 3.24 のようになる。一見、図 3.23 (a) と変わらないように見える。しかしながら図 3.24 (b) からわかるようにくさび構造が現れている。

そこで $\bar{\lambda}$ の値に応じて 2 つの振舞いを考える。中性ブラックホールの場合と K. Y. Lee 等の解析 [75] より次のようになる。第 1 の場合は図 3.23 に示したように monopole black hole は常に安定である。一方 RN black hole は分岐点よりも大きな質量では安定、小さな質量では不安定になる。第 2 の場合は、図 3.24 から判るように、より大きなホライズン半径を持つ CIIb 型の解: AC が安定、そしてくさび型をした点 C で安定性がかわる。より小さなホライズン半径を持つ CIIa 型の解: CB は不安定になる。RN black hole は 1 番目のときと同様で分岐点 B で安定性が変化する。これらの振舞いはカタストロフィー理論で確かめられる。

これまでの理論で解を 2 つの種類に分けていたが、解析はすべて数値計算によっていたものなので、図 3.23 の方にくさび構造が全くないと言うことはできない。というのは非常に小さなくさび構造があるが数値誤差に埋もれている可能性があるからである。しかしながらカタストロフィー理論はパラメータの値によって 2 つの種類が解が存在することを自然に説明することができる。ではどのような初等カタストロフィーが monopole black hole の振舞いを説明するのだろうか。考察の結果、それはつばめの尾カタストロフィーであることが分かった。

つばめの尾カタストロフィーは 3 つのコントロール・パラメータ a , b , c と 1 つの状態変数 x

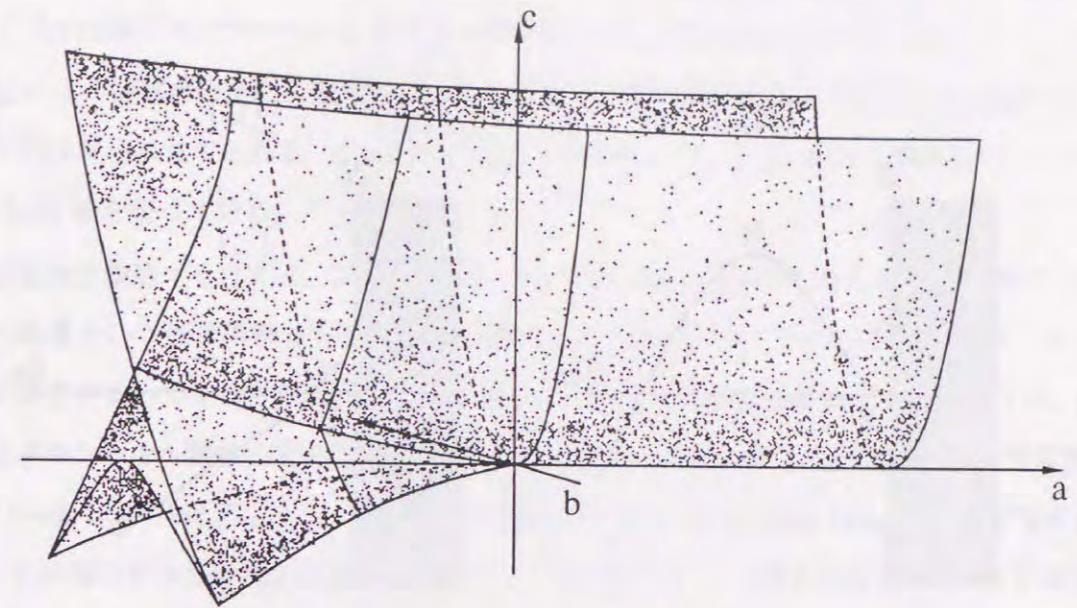


図 5.10: つばめの尾のカタストロフィーのカタストロフィー集合である。

を持ち、そのポテンシャル関数は

$$V = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx \quad (5.4)$$

と表される。カタストロフィーが生じる点の集合のカタストロフィー集合は模式的に図 5.10 のようになる。これがつばめの尾に似ているのでその名前がついた。monopole black hole のモデルでは $c = 0$ で、3次元のコントロール空間の断面の 2次元コントロール空間を扱う。これは自明な RN black hole 解 ($x = 0$) が常に存在するために必要な条件である。コントロール・パラメータ a は $\bar{\lambda}$ と \bar{v} に、 b は M ($\equiv g_s v M / m_p^2$) と \bar{v} に依存している。

$$a = a(\bar{\lambda}, \bar{v}), \quad b = b(\bar{M}, \bar{v}) \quad (5.5)$$

すぐ下で見るように $a = 0$ の条件はくさび構造が存在するかしないかで解を 2 つの種類に分ける条件になっている。つまりくさび構造はつばめの尾の部分では生じ、胴体の部分では存在しないのである。

$a = 0$ のときの $\bar{\lambda}$ の値を $\bar{\lambda}_{cr}$ と書くことにする。もちろん $\bar{\lambda}_{cr}$ は \bar{v} の関数である。図 5.11 に $a > 0$ つまり $\bar{\lambda} > \bar{\lambda}_{cr}$ のポテンシャル関数を模式的に表した。このときは CIIb 型の解だけが存在する。ここでブラックホールのエントロピーをポテンシャル関数にした。そのために最大点が安定を表している。縦軸がエントロピー、横軸が状態変数である。状態変数には δ_h を用いた。微分同相射像

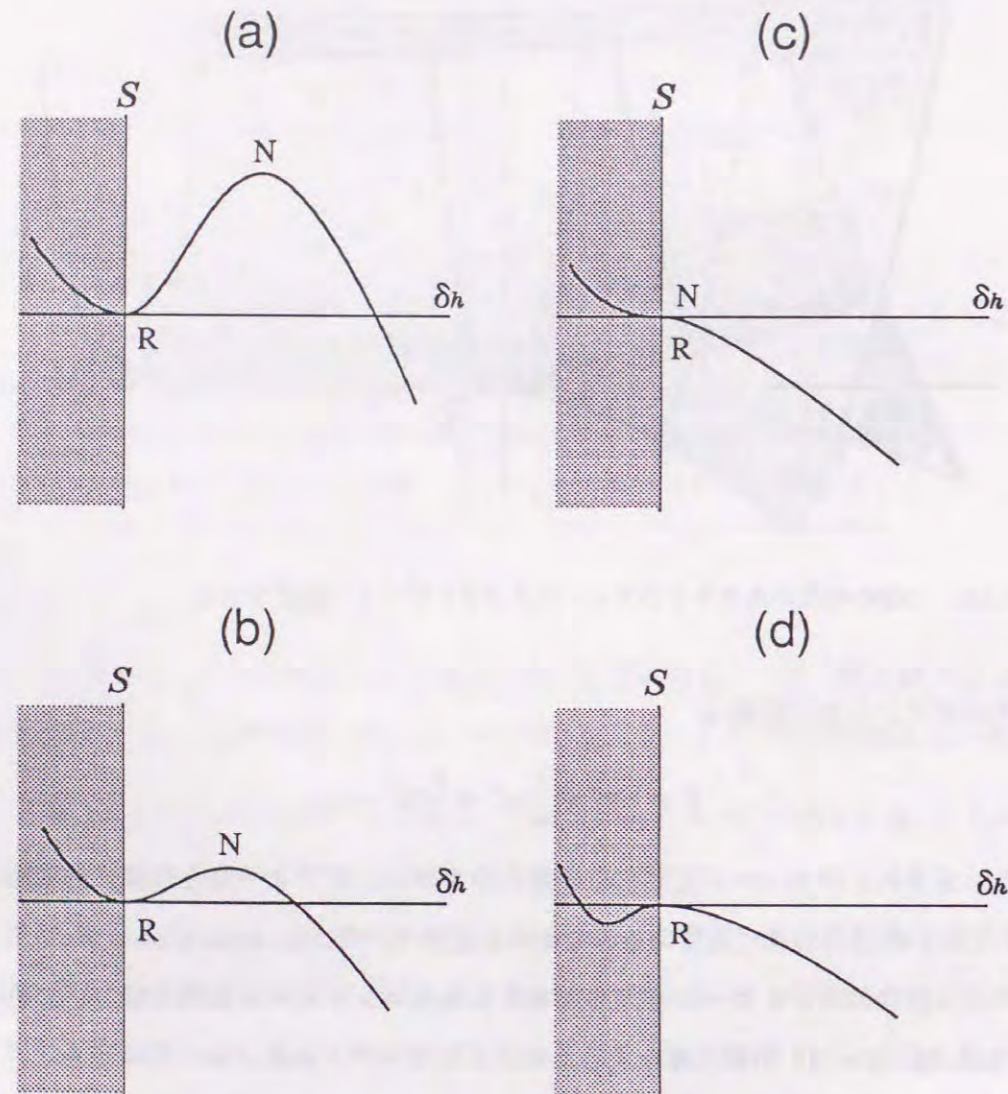


図. 5.11: $\bar{\lambda} > \bar{\lambda}_{cr}$ の monopole black hole のポテンシャル関数の振舞いを示した. 最大と最小はそれぞれ安定, 不安定な解に対応している. R (RN black hole) と N (非可換ブラックホール) の2個の解が存在する.

によって δ_h に写すことのできる変数ならば, どれを状態変数にとってもかまわない. 例えば中性の非可換ブラックホールのときのように, ホライズン上で定義される有効磁荷 B_h を用いてもよい. ただしここでは正則なモノポールのときにも定義される δ_h , または $\delta(0)$ を使用した.

さらに $\delta_h < 0$ の領域は物理的に意味のないところなので切り落とすことにする. (3.107) から δ_h が正定値なのは容易に見てとれる. $c = 0$ にしたおかげで原点 ($\delta_h = 0$) は常に極値になっており, RN black hole 解を表している.

動的な安定性を議論するために, ブラックホールの質量が増える過程を考えよう. 物理的にはこれは物質の降着という形で再現される. そこで理論からくるパラメータ \bar{v} と $\bar{\lambda}$ を固定する. そうすると質量の変化によって b だけが変わる. \bar{M} が増すと $b(\bar{M}, \bar{v})$ は単調に変化すると仮定する. b が負のときはポテンシャル関数の形は図 5.11(a) のようになる. このとき RN black hole は不安定で, monopole black hole が安定になる. したがって実際には monopole black hole だけが存在することになる. b が増加すると最大点は減少し, 原点へと近づいていく (図 5.11(b)). $b = 0$ になると最大点は最小点と一致する (図 5.11(c)). これが図 3.23 の分岐点 B である. この点で monopole black hole は連続的に RN black hole に変わる. そして monopole black hole 解は消え, RN black hole が安定になる (図 5.11(d)).

ホーキング輻射によってブラックホールの質量が減少していく逆過程も考えられる. 分岐点 B における質量よりも重い RN black hole があるとしよう. その質量が減っていくと RN black hole は分岐点 B に達し, 連続的に monopole black hole へと移る. ブラックホールは蒸発を続け, 最終的には粒子解のモノポールへとなる [75].

次に $a < 0$ ($\bar{\lambda} < \bar{\lambda}_{cr}$) の場合を考えよう. このときは CIIa 型と CIIb 型の両方の解が存在し, くさび構造を形成する. 再び b が負の値から増えていく場合を考える. ポテンシャル関数の形の変化を図 5.12 に示す. 最初, 不安定な RN 解 (R) と不安定な monopole 解 (N_1) が1つずつ存在する (図 5.12(a)). b が増加すると非物理的な領域に1対の最大点 (N_2) と最小点 (S) が出現する (図 5.12(b)). それから $b = 0$ で最大点 (N_2) と最小点 (R) とが一致する (図 5.12(c)). その後, RN 解は安定になるが, monopole 解 (N_1) は安定のままなので, このときは何も生じない. monopole 解 (N_2) は RN 解から分岐して, 2つの安定解 (R, N_1) と1つの不安定解 (N_2) が同時に存在するようになる. これは, ブラックホールの大域的な物理量が固定されても2つの安定な解が存在することになる. したがって弱い無毛仮説 (weak no-hair conjecture) が破れていることを意味している [128, 129]. b がさらに増加すると, 安定と不安定の2つの monopole black hole 解はお互いに近づき, そして一致して変曲点になる (図 5.12(d)). このときカタストロフィーが生じる. monopole black hole は矢印で示したように不連続に RN black hole へとジャンプする.

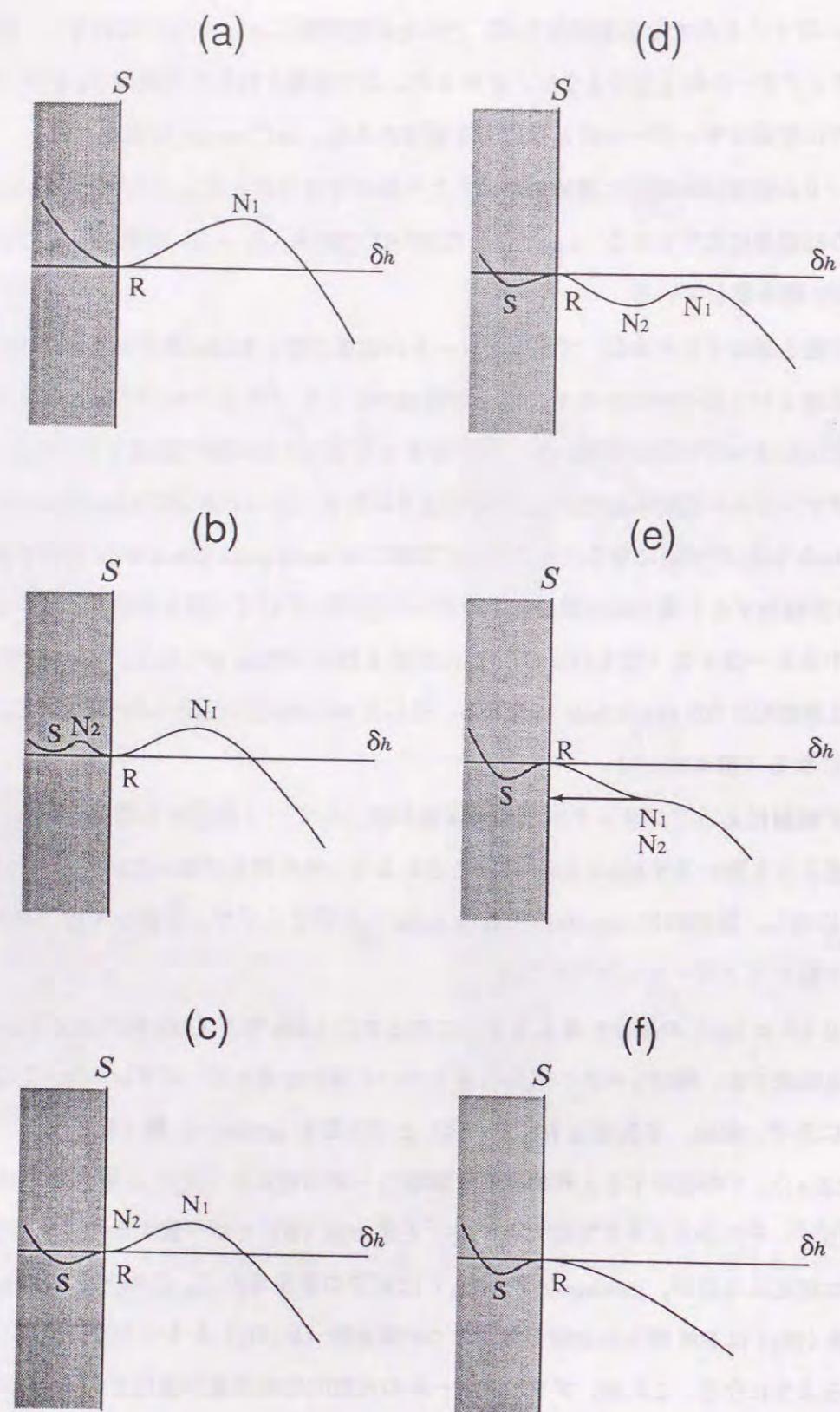


図. 5.12: $\tilde{\lambda} < \tilde{\lambda}_{cr}$ の monopole black hole のポテンシャル関数の振舞いを示した. R (RN black hole) と N_1, N_2 (安定と不安定の非可換ブラックホール) の3個の解が存在する.

その後安定な RN 解だけが残る (図 5.12(f)).

逆プロセス, すなわち $b(\tilde{M}, \tilde{v})$ が減少する場合は次のようになる. 最初に安定な RN 解 (R) があったとしよう. b が減少すると安定と不安定な1対の monopole black hole 解 (N_1, N_2) が現れる (図 5.12(b)). この点では RN 解は安定なので, 何も生じない. b がさらに小さくなり, ゼロになると安定な RN black hole (R) と不安定な monopole black hole (N_2) は一致する. このとき RN black hole は不安定になる (図 5.12(c)). RN black hole (R) は点線の矢のように不連続に monopole black hole へとジャンプする (図 5.12(b)). そして, monopole black hole 解だけが安定な解として残る. それから $\tilde{\lambda} > \tilde{\lambda}_{cr}$ の場合と同じように monopole black hole は安定なモノポールへと蒸発していく.

このように, つばめの尾カタストロフィーは解の振舞いを説明することができる. さらに RN black hole と monopole black hole は $\tilde{\lambda}$ の値と無関係に常に $b = 0$ (つまり $\tilde{M} = \tilde{M}_{N-R}$) で一致する. 図 5.13 に分岐点での質量の臨界値を示した. 図 5.13 から \tilde{M}_{N-R} は $\tilde{\lambda}$ の値にほとんど依らないことが分かる. $\tilde{\lambda} < \tilde{\lambda}_{cr}$ のときには \tilde{M}_{N-R} と \tilde{M}_{N-N} の2つの臨界値が存在する. 前者は R と N_2 (図 5.12(c)) の分岐点, 後者は N_1 と N_2 (図 5.12(e)) の分岐点を表している. 一方, $\tilde{\lambda} > \tilde{\lambda}_{cr}$ では \tilde{M}_{N-R} つまり R と N の1つの分岐点しかない.

\tilde{M}_{N-R} の \tilde{v} 依存性を図 5.14 に示した. これは近似的に

$$\tilde{M}_{N-R} = 7.256\tilde{v}^{1.745} + 0.273. \quad (5.6)$$

で表される.

以上の結果を P. C. Aichelburg と P. Bizon[128] の結果と比較してみよう. 彼らは $\tilde{\lambda} = \infty$ の場合のみを扱っている. 彼らの結果によれば, $\tilde{v} = 0.288/\sqrt{4\pi} \approx 0.0812$ で $\tilde{M}_{N-R} = 1.25 \times 0.288 \approx 0.360$ になる. また (5.6) より同じ \tilde{v} での \tilde{M}_{N-R} を計算すると

$$\tilde{M}_{N-R} = 7.256 \times (0.288/\sqrt{4\pi})^{1.745} + 0.273 \approx 0.363 \quad (5.7)$$

となり, 2つの \tilde{M}_{N-R} の値はよく一致する. したがって $\tilde{\lambda} = \infty$ まで \tilde{M}_{N-R} は $\tilde{\lambda}$ に依存しないことが分かる. こうして $0 \leq \tilde{\lambda} < \infty$ にわたって1つのつばめの尾カタストロフィーのポテンシャル関数での議論が可能なのである.

\tilde{M} と \tilde{v} を固定し, $\tilde{\lambda}$ をゼロから無限大まで変えたときに安定な monopole black hole の解の枝は他の枝から分岐したり, 交わったりしない. これは安定な monopole black hole の安定性は変化しないことを意味している. P. C. Aichelburg と P. Bizon は $\tilde{\lambda} < \infty$ で CIIb 型の monopole black hole は安定であることを示している [128], CIIb 型の解の枝は常に安定であると結論できる.

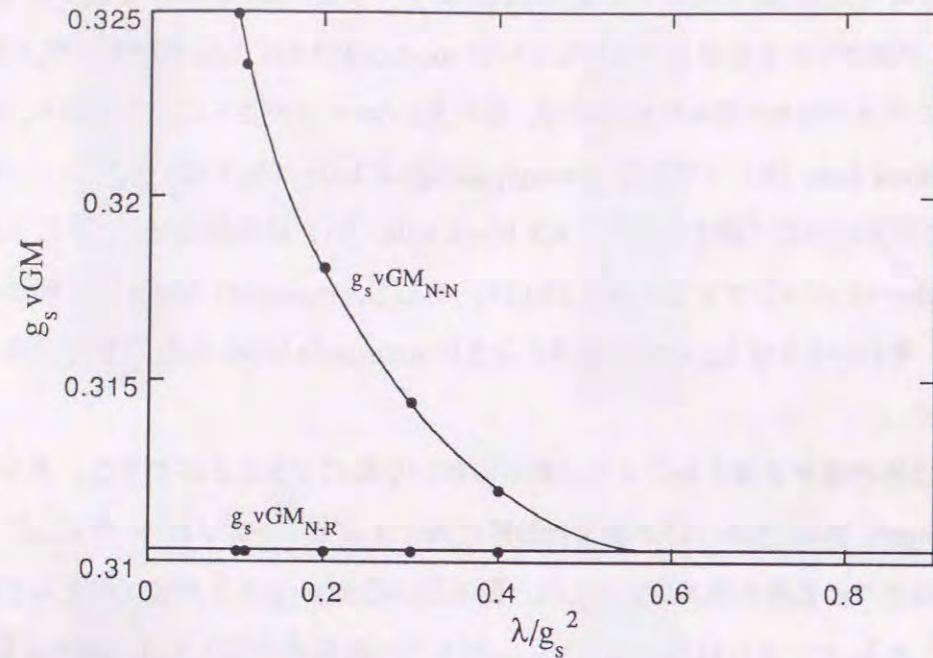


図. 5.13: RN black hole と monopole black hole が一致する質量 \tilde{M}_{N-R} と 2つの monopole black hole が一致する質量 \tilde{M}_{N-N} を λ の関数として示した. \tilde{M}_{N-R} は λ に依存しないことがわかる.

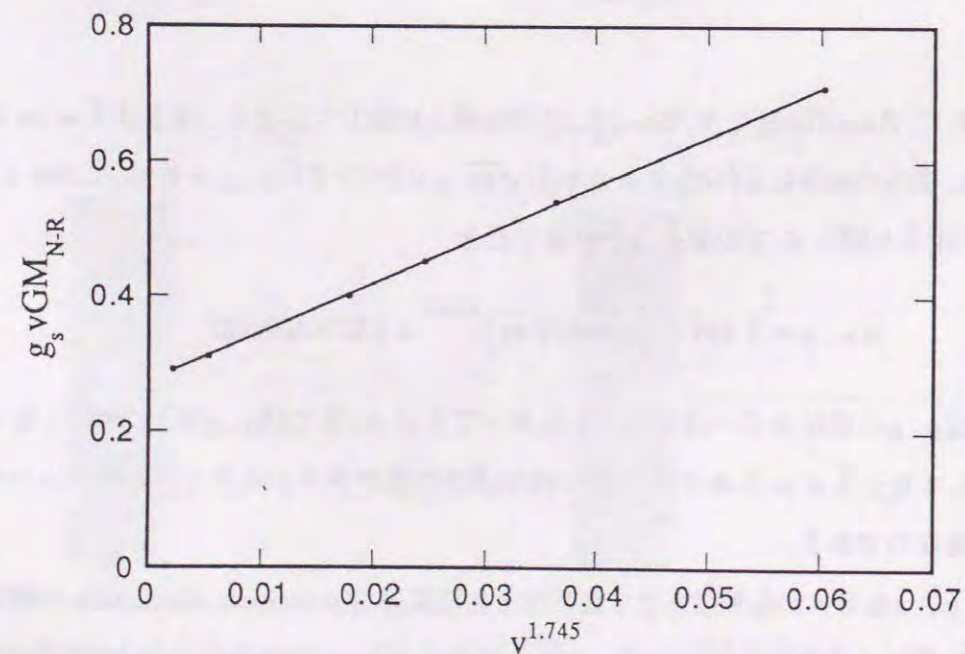


図. 5.14: \tilde{M}_{N-R} の v 依存性を示した. 実線は $\tilde{M}_{N-R} = 7.256v^{1.745} + 0.273$ である.

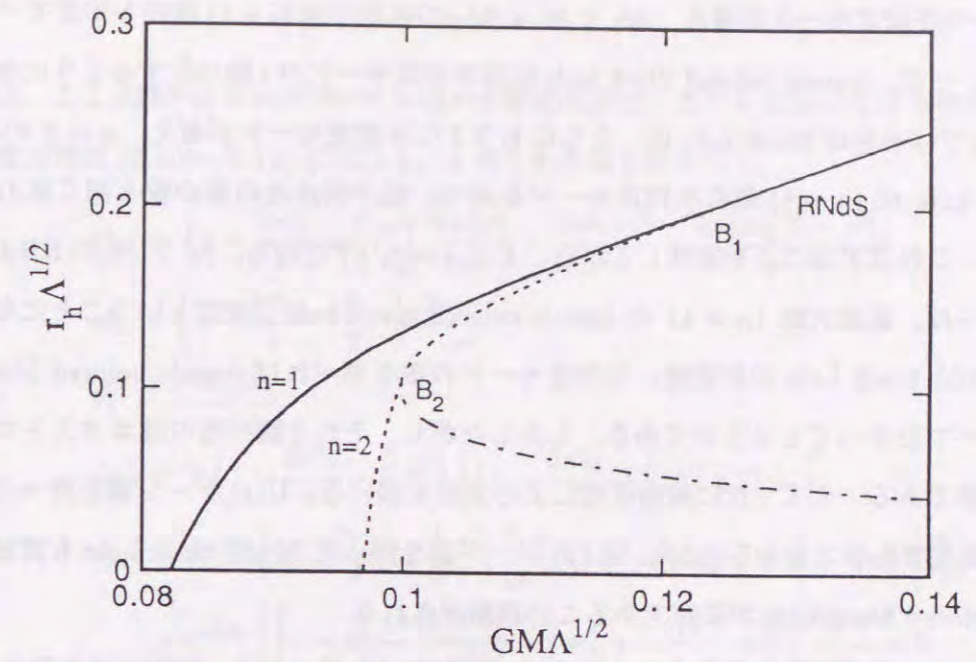


図. 5.15: $n = 1, 2$ の cosmic colored black hole の質量 M とホライズン半径 R_h の図である. RNdS black hole も描いた. $\alpha = 10.0$ にしてある. 2個の分岐点 B_i ($i = 1, 2$) が存在する. これらはくさびカタストロフィーに分類される. 実線と点線はそれぞれ不安定モードが1個と2個存在することを示している.

5.4 Λ I タイプのブラックホール

cosmic colored black hole は不安定であったが, 宇宙項を入れることによって構造を安定化できるであろうか. これは cosmic colored black hole 解を考察する1つの動機になっている. この問いに答えるために, ここでは2つの方法を用いる. 1つはよく使われる線形摂動で, もう1つは今までに議論してきたカタストロフィー理論である.

最初にカタストロフィー理論から始めよう. ブラックホールの質量 M とエントロピー S をそれぞれコントロール・パラメータとポテンシャル関数に選ぶ. 今回は平衡空間を描かずに, $M-S$ もしくは $M-r_h$ 平面だけで議論を進めることにするので, 状態変数は決めない. もし中性な非可換ブラックホールのときと同じ議論をするならば, ホライズン上の場の強さ B_h を状態変数にして同様のことをすればよい. 図5.15に $\alpha = 10.0$ の場合の $M-r_h$ 図を示す. B_i ($i = 1, 2$) は RNdS black hole とノード数 n の cosmic colored black hole との分岐点を表す. このときのブラックホールの質量を M_i ($i = 1, 2$) とする. コントロール・パラメータとポテンシャル関数で張られる空間での図5.15の構造はくさびカタストロフィーに分類される.

ここで $M > M_1$ の RNdS black hole が i 個の不安定モードを持っていたとしよう. すると分岐点 B_1 でもう 1 つ不安定モードが増え, $M_1 < M < M_2$ の範囲では $(i+1)$ 個の不安定モードを持つことになる. 一方, cosmic colored black hole には不安定モードが i 個存在するようになる. 同様に分岐点 B_2 では RNdS black hole は, さらにもう 1 つ不安定モードが増え, $n=2$ の cosmic colored black hole は $(n+1)$ 個の不安定モードを持つ. 粒子解はその解の枝と同じ数の不安定モードを持つ. これは次のことを意味している. もし $i=0$, すなわち, $M > M_1$ の RNdS black hole が安定ならば, 基底状態 ($n=1$) の cosmic colored black hole は安定ということになる. したがって, RNdS black hole の安定性, 不安定モードの数を調べれば cosmic colored black hole の安定性がすべて分かってしまうのである. しかしながら, それを調べるのはカタストロフィー理論では不可能である. そこで次に線形摂動による方法を用いる. U(1) ゲージ場を持った RNdS black hole も安定であることから [130], SU(2) ゲージ場を持った RNdS black hole も安定, そして, cosmic colored black hole が安定であることが期待される.

ここでは球対称の線形摂動を考えることにする. 球対称メトリックは一般的に次の形にかける.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm(t,r)}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) e^{-2\delta(t,r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm(t,r)}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.8)$$

Ω は立体角である. YM ポテンシャルは (3.11) で, $a=0$ としたものを用いる. ただし, ここでは関数 w は動径座標 r と時間座標 t に依存しているとす. これから場の強さは

$$F = \dot{w}\tau_1 dt \wedge d\theta + \dot{w}\tau_2 dt \wedge \sin\theta d\phi + w'\tau_1 dr \wedge d\theta + w'\tau_2 dr \wedge \sin\theta d\phi - (1-w^2)\tau_3 d\theta \wedge \sin\theta d\phi \quad (5.9)$$

となる. どつとは時間微分を表している. これらの仮定を用いると運動方程式は,

$$\ddot{m}' = \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right)^{-1} \frac{e^{2\delta}\dot{w}^2}{\alpha^2} + \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right) \frac{w'^2}{\alpha^2} + \frac{(1-w^2)^2}{2\alpha^2\tilde{r}^2} \quad (5.10)$$

$$\dot{m} = \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right) \frac{2\dot{w}w'}{\alpha^2} \quad (5.11)$$

$$\delta' = -\left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right)^{-2} \frac{2e^{2\delta}\dot{w}^2}{\alpha^2\tilde{r}} - \frac{2w'^2}{\alpha^2\tilde{r}} \quad (5.12)$$

$$\left[\left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right)^{-1} e^\delta \dot{w}\right]' - \left[\left(1 - \frac{2\tilde{m}}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right) e^{-\delta} w'\right]' - \frac{e^{-\delta}}{\tilde{r}^2} w(1-w^2) = 0 \quad (5.13)$$

と書ける. ここで, 3.4 節で定義した無次元量を用いた. 同様に $\tilde{t} \equiv \sqrt{\Lambda}t$ である. また, ドットとプライムはそれぞれ \tilde{t} と \tilde{r} による微分に定義しなおした. 次にそれぞれの関数を

$$w(t,r) = w_0(r) + \epsilon w_1(t,r) + \dots \quad (5.14)$$

$$\tilde{m}(t,r) = \tilde{m}_0(r) + \epsilon \tilde{m}_1(t,r) + \dots \quad (5.15)$$

$$\delta(t,r) = \delta_0(r) + \epsilon \delta_1(t,r) + \dots \quad (5.16)$$

と展開する. ここで添字にゼロが付いているのが静的な解で, また ϵ は微小な展開係数である. これらを運動方程式 (5.10)~(5.13) に代入し, ϵ の 1 次の項を考えると,

$$\tilde{m}_0' = \left(1 - \frac{2\tilde{m}_0}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right) \frac{2w_0'w_1'}{\alpha^2} - \frac{2\tilde{m}_1w_0'^2}{\alpha^2\tilde{r}} - \frac{2w_0w_1(1-w_0^2)}{\alpha^2\tilde{r}^2} \quad (5.17)$$

$$\dot{\tilde{m}}_1 = \left(1 - \frac{2\tilde{m}_0}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right) \frac{2w_0'w_1'}{\alpha^2} \quad (5.18)$$

$$\delta_1' = -\frac{4w_0'w_1'}{\alpha^2\tilde{r}} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} - e^{-\delta_0} \left(1 - \frac{2\tilde{m}_0}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right) \left[\left(1 - \frac{2\tilde{m}_0}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right) e^{-\delta_0} w_1'\right]' \\ - e^{-2\delta_0} \left(1 - \frac{2\tilde{m}_0}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right) \left[\frac{4}{\alpha^2\tilde{r}}(1-w_0^2)w_0w_1' + (1-3w_0^2)\right] \frac{w_1}{\tilde{r}^2} \\ - e^{-2\delta_0} \left[\left\{1 - \tilde{r}^2 - \frac{(1-w_0^2)^2}{\alpha^2\tilde{r}^2}\right\} w_0' + \frac{w_0(1-w_0^2)}{\tilde{r}}\right] \frac{2\tilde{m}_1}{\tilde{r}^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

が得られる. ここで次の式で定義される座標 \tilde{r}^* を導入する.

$$\frac{d\tilde{r}^*}{d\tilde{r}} = e^{\delta_0} \left(1 - \frac{2\tilde{m}_0}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right)^{-1} \quad (5.21)$$

この新しい座標を用いると, (5.20) は

$$\begin{aligned} \ddot{w} - \frac{d^2w_1}{d\tilde{r}^{*2}} - e^{-2\delta_0} \left(1 - \frac{2\tilde{m}_0}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right) \left[\frac{4}{\alpha^2\tilde{r}}(1-w_0^2)w_0w_1' + (1-3w_0^2)\right] \frac{w_1}{\tilde{r}^2} \\ - e^{-2\delta_0} \left[\left\{1 - \tilde{r}^2 - \frac{(1-w_0^2)^2}{\alpha^2\tilde{r}^2}\right\} w_0' + \frac{w_0(1-w_0^2)}{\tilde{r}}\right] \frac{2\tilde{m}_1}{\tilde{r}^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

となる. 摂動論なので w_1 と \tilde{m}_1 の時間依存性に調和振動子型を仮定する.

$$w_1(t,r) = \xi(r)e^{i\tilde{t}} \quad (5.23)$$

$$\tilde{m}_1(t,r) = \tilde{\eta}(r)e^{i\tilde{t}} \quad (5.24)$$

(5.23), (5.24) を (5.18) に代入すると,

$$\tilde{\eta} = \left(1 - \frac{2\tilde{m}_0}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right) \frac{2w_0'\xi}{\alpha^2} \quad (5.25)$$

が得られる. したがって,

$$\tilde{m}_1 = \left(1 - \frac{2\tilde{m}_0}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2\right) \frac{2w_0'\xi}{\alpha^2} e^{i\tilde{t}} \quad (5.26)$$

となる. (5.23), (5.24), (5.26) を (5.22) に代入すると

$$-\frac{d^2\xi}{d\tilde{r}^{*2}} + \tilde{U}(\tilde{r})\xi = \tilde{\sigma}^2\xi^2 \quad (5.27)$$

が得られる。ここで $U(r)$ はポテンシャル関数で、

$$\tilde{U}(\tilde{r}) \equiv -\frac{e^{-2\delta_0}}{\tilde{r}^2} \left(1 - \frac{2\tilde{m}_0}{\tilde{r}} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2 \right) \left[1 - 3w_0^2 + \frac{8}{\alpha^2\tilde{r}}(1 - w_0^2)w_0w_1' + \left\{ 1 - \tilde{r}^2 - \frac{(1 - w_0^2)^2}{\alpha^2\tilde{r}^2} \right\} \frac{4w_0'^2}{\alpha^2} \right] \quad (5.28)$$

である。(5.27) は固有値 σ^2 , 固有関数 ξ の固有方程式である。したがって、もし (5.27) が負の固有値を持つ固有関数が存在すると、ゼロ次の解は不安定であり、その数が解の不安定モードの数になる。

ここでは自明な RNdS 解の安定性を調べるので、(5.28) はもっと簡単な形になる。RNdS 解は

$$w_0 \equiv 0, \quad w_0' \equiv 0, \quad \delta_0 \equiv 0 \quad (5.29)$$

で、また、 m_0 を次のように書き換えられる。

$$\tilde{m}_0 = \tilde{M} - \frac{\tilde{Q}^2}{2\tilde{r}} \quad (5.30)$$

$$= \tilde{M} - \frac{1}{2\alpha^2\tilde{r}} \quad (5.31)$$

したがって、ポテンシャル関数 (5.28) は

$$\tilde{U}(\tilde{r}) = -\frac{1}{\tilde{r}^2} \left(1 - \frac{2\tilde{M}}{\tilde{r}} + \frac{1}{\alpha^2\tilde{r}^2} - \frac{1}{3}\tilde{r}^2 \right) \quad (5.32)$$

となる。これを実際に図 5.16(a) に示した。また、基底状態の固有関数を図 5.16(b) に示した。少し太い線になっているのが分岐点 B_1 付近の RNdS black hole である。これらの固有関数の固有値はすべて負であり、分岐点 B_1 の前後にわたって不安定モードが存在しているのがわかる。固有関数のノード数が 1 の励起状態についても調べたが、分岐点 B_1 よりも小さなホライズン半径の RNdS black hole では負の固有値をもつ固有関数が得られた。しかし、ちょうど分岐点 B_1 でそのような固有関数がなくなり、 $M > M_1$ の RNdS black hole は 1 個の不安定モードのみを持つことがわかった。

結果として、 n 個のノードを持った cosmic colored black hole は n 個の不安定モードを持つことになる²。これは結合定数 α には寄らない結果である。

5.5 安定性のまとめ

以上の結果を表 5.4 にまとめる。表 5.4 をからすぐにわかるのは、タイプに依らず a 型の非可換ブラックホールはすべて不安定なことである。第 3 章での時空構造の考察で a 型の解はより強い

²ここでは偶数パリティの重力モードのみを扱っていることを注意しておかなければならない。これらの他にも BM 解と同じようにスファレロン・タイプの奇数パリティを持っていると考えられる [116]。

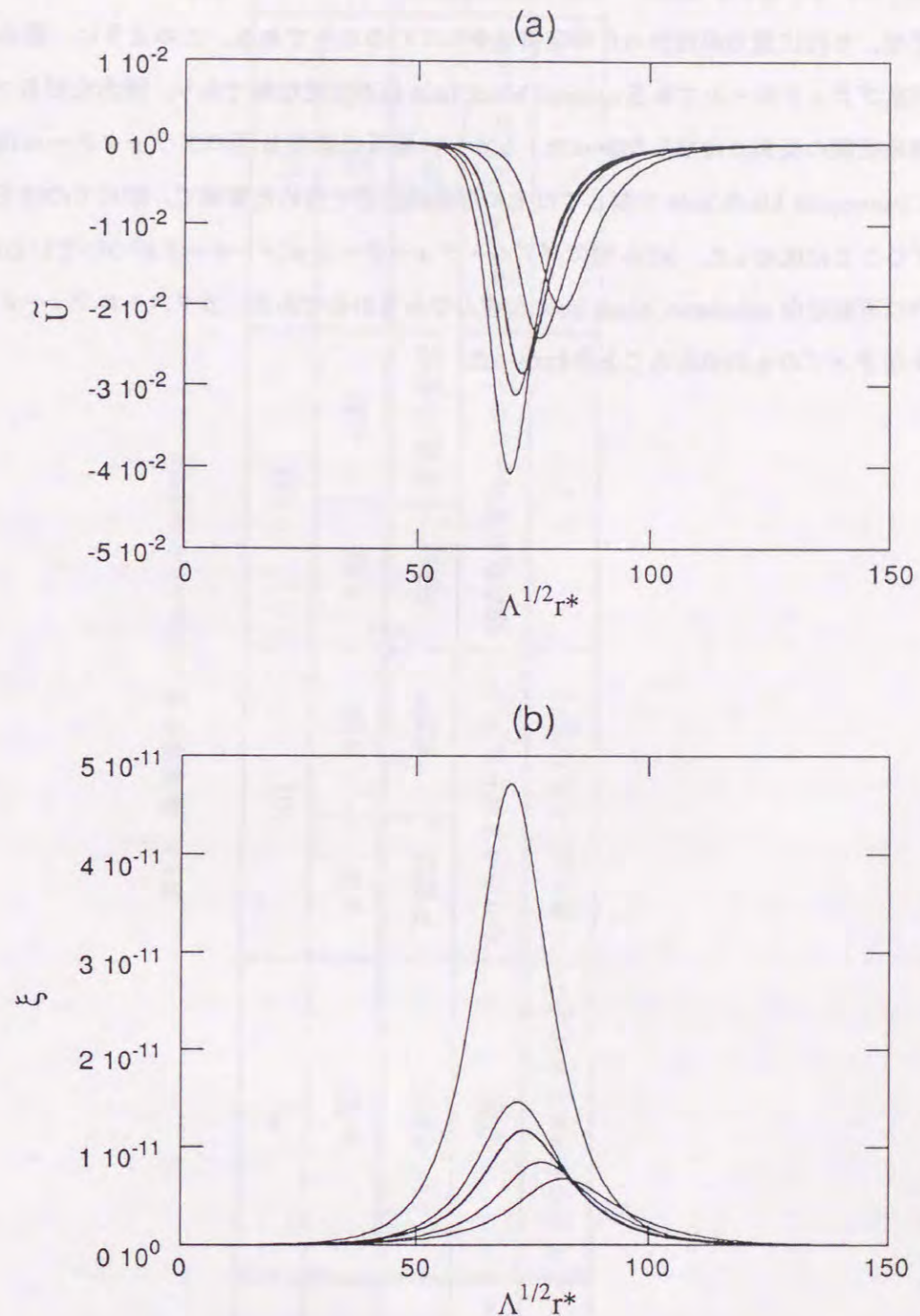


図 5.16: (a) RNdS black hole 解の摂動のポテンシャルである。ホライズン半径は、最もくぼんだ点の絶対値の値の大きなものから $\sqrt{\Lambda}r^* = 1.6, 1.8, 2.0, 2.2, 2.4$ にした。 $\sqrt{\Lambda}r^* = 2.0$ 付近が分岐点 B_1 でのホライズン半径に相当している。

(b) RNdS black hole 解の摂動の固有関数 (基底状態) である。ホライズン半径は、絶対値の値の大きなものから $\sqrt{\Lambda}r^* = 1.6, 1.8, 2.0, 2.2, 2.4$ にした。これらの固有関数の固有値はすべて負であり、分岐点 B_1 の前後にわたって不安定モードが存在しているのがわかる。

磁場をより深い重力ポテンシャルで閉じこめている。このように無理に押し込んだような構造が不安定性に結びついているといえた。一方、b型は安定である。これは質量項が非可換場の構造を造り安定化させ、それに重力が加わった時空構造をしているからである。このように、最初に発見された非可換ブラックホールである colored black hole は不安定な解であり、残念ながらブラックホールの無毛仮説の反例にはならなかった。しかし、解析の結果 b型のブラックホールは安定であり、特に monopole black hole に関してはその形成過程まで含めた意味で、初めての無毛仮説の反例をあげることに成功した。NIIb型にダブル・クォーテーション・マークがついているのは、トポロジ的に不安定な sphaleron black hole も含んであるからである。カタストロフィーの型に関しては様々なタイプのものがあることがわかった。

表5.4: 非可換ブラックホールの安定性

タイプ	型	NI		NII		CII		AI	R ² I
		(a型)		a型	b型	a型	b型	(a型)	(a型)
孤立系の安定性		不安定		不安定	“安定”	不安定	安定/不安定	不安定	不安定
孤立系のカタストロフィー		自明	折り目カタストロフィー	折り目カタストロフィー	燕の尾カタストロフィー	カタストロフィー	カタストロフィー	くさびカタストロフィー	?
熱浴系のカタストロフィー		くさびカタストロフィー	折り目+くさび?			-		-	-

第6章

結び

本論文では、アインシュタイン重力と非可換場が結合した系でのブラックホール解の解析を行った。それは大きく分けて、4つの観点から成る。

1つは新しい解の発見である。1990年に P. Bizon により colored black hole 解が発見されて以来、いくもの非可換ブラックホール解が発見されている。そこで、本研究でも、様々な系でのブラックホール解の発見を試みた。その結果、dilatonic colored black hole 解, new sphaleron black hole 解, cosmic colored black hole 解, そして stringy black hole 解を発見した。これらはすべて静的球対称を仮定し、数値計算によって求めた解である。

次に新しく発見した解も含めて、これまでに求められている9個の非可換ブラックホール解を再解析し、時空構造について統一的な立場から解析を行った。その結果、非可換ブラックホールは大きく分けて5種類、細かく分類すると NI, NIIa, NIIb, CIIa, CIIb, AI, R²I のタイプがあることがわかった。AI タイプを除いて非可換場が質量を持たない種族 I では、いくらでも大きな質量のブラックホールが考えられる。しかし非可換場が時空構造に及ぼす影響は相対的に小さくなり、通常のカー・ニューマン時空に近づいてゆく。一方、非可換場が質量を持つ種族 II のブラックホールでは、その質量に上限がある。これはホライズン半径が非可換場のコンプトン波長程度に大きくなると、非可換場が自己重力に耐えられずにブラックホールへと吸い込まれてしまうためと考えられる。また、種族 II の解には a 型と b 型の2つが存在する。b 型は平坦な時空で存在する粒子解に一般相対論効果を入れ、ブラックホール解になったもので、a 型は NI タイプのように重力場が存在してはじめて構造が形成されるものである。平衡状態を形成する仕方のこのような違いは非常に本質的で、ほとんどすべての性質においてこの違いによる効果が現れている。

3つめは、非可換ブラックホールの熱力学的性質である。特に熱容量においては、非可換ブラックホールに特徴的な振舞いを示した。考察する系のパラメータの値に依存するが、NI, AI タイプでは2回、NIIa タイプでは3回も熱容量が不連続に変化するのである。これは熱浴系における安

定性と深い関係があり、第5章で解析した構造安定性を複雑にする原因になった。CII タイプのブラックホールではホーキング輻射を考慮すると、RN black hole がある質量で不安定になり、安定な monopole black hole に変化することがわかった。これは非可換ブラックホールの形成を初めて考えたもので、ブラックホールの無毛定理の反例を示したことになる。

最後は安定性である。本研究では静的な解のみを扱っているため、力学的な崩壊などで形成を考察してはいない。そのため、現実の宇宙にこのようなエキゾチックな天体が存在している、もしくは存在していたという証拠をあげてはいない。そこでブラックホールが何らかの力学的過程を経て形成されるための必要条件として、非可換ブラックホールの安定性を調べた。本研究では通常の摂動による方法の代わりに、カタストロフィー理論が非可換ブラックホールに対しては有用であることを示し、これによる解析を行った。その結果、a 型のブラックホールは不安定、sphaleron black hole を除いた b 型のブラックホールは安定であることがわかった。つまり、アインシュタイン重力と非可換場による新たな構造はすべて不安定であった。これは摂動による結果と一致している。この理論を用いることにより熱浴系における安定性の解析も行った。また AI タイプのブラックホールに対してはカタストロフィー理論と線形摂動による解析のそれぞれの長所を用いて、通常よりも容易に不安定モードの数を求めることができた。非可換ブラックホールは折り目カタストロフィー、くさびカタストロフィー、そしてつばめの尾カタストロフィーと多彩な構造安定性を持つことを示した。

このように個々の系を調べていたのでは判らないメカニズムを、系統立てた解析により浮かび上がらせ、極限的に強い重力場における非可換場の振舞い明らかにすることに成功した。

さて、最後にこれからの非可換ブラックホールについて述べておく。非可換ブラックホールは、アインシュタイン方程式の新たな解、新しい構造、ブラックホールの無毛仮説の反例というような、どちらかというとも数学的な興味から研究が進められてきたといえる。しかし、個人的な希望としては、このようなエキゾチックなブラックホールが実際に宇宙に存在してほしい。もし存在するならば、そのエネルギー・スケールから判断して、それは宇宙初期であろう。うまくすればブラックホールの蒸発過程の最終段階で形成されるかもしれない。しかしながら、どちらにせよ直接非可換ブラックホールを観測するのは不可能のようである。そこで期待されるのが、非可換ブラックホールの存在により宇宙に何らかの物理的な影響が及ぼされ、観測にかかるという事である。いままでにそのような物理過程が幾つか考えられている [131, 132, 133, 134, 135]。したがって、非可換ブラックホールと観測のつながり、そして、その橋渡しをする物理過程の探求がこれからの課題になるだろう。

謝辞

本研究は、修士課程のときに前田恵一教授からテーマを頂いたことをきっかけに、博士課程2年間に渡る日々の議論により、その大部分をなしうることができた。熱意を持ってご指導して下さいました前田教授に深く感謝の意を表したい。本研究の一部は立澤尚史氏と牧琢弥氏の協力と有益な議論により遂行することができた。これらの方々には共同研究者として感謝したい。本研究の内容に関して、興味をもって議論を交わして下さいました G. W. Gibbons 博士、鍋木修博士、J. Katz 博士、F. V. Kusmartsev 博士、G. Lavrelashvili 博士、I. Moss 博士、中尾憲一博士に謝意を表したい。また、博士論文の製作にあたり物理的な議論の他にも多くの助言をして下さった坂井伸之博士、真貝寿明博士ほか前田研究室の諸氏に感謝する。本論文の草稿を詳細に検討し、有益な質問、さらに校正までしていただいた大場一郎教授にも感謝の意を表したい。最後に研究・論文作成を陰で支え、協力してくれた細君知子に感謝して終わりたいと思う。

付録 A

ブラックホールの無毛定理と唯一定理

この付録ではブラックホールの無毛仮説、すなわち、外部に物質や電磁場源のない、漸近的に平坦で平衡状態にあるブラックホールは3つのパラメータによって完全に特徴付けられる、という命題を証明しようとする試みについて述べる。通常パラメータは無限遠での表面積分で得られる質量 M 、角運動量 J 、電荷 Q が好んで用いられる。少なくともある条件（例えば静的や軸対称）の下ではこれらのパラメータでブラックホール状態の連続変化を表すのに十分であることが証明されており、これを無毛定理と呼ぶ。数学の分野では無分岐定理 (no bifurcation theorem) とも呼ばれている。また、ある仮定の下でもう少し強い結果である唯一定理 (uniqueness theorem) が証明されている。これは連続変化に関係なく、ブラックホールの状態が3つのパラメータで完全に決定されるという定理である。ここでは文献 [136] に従い、これらの定理の完全な証明を与えるのではなく、その鍵になるポイントを歴史を追いながら説明していく。

A.1 静的な場合

まず、今後の議論に必要ないくつか言葉の定義をしておく。ある多様体の外部交信可能領域 (domain of outer communications 以後 DOC と略す) $\langle g \rangle$ とはペンローズ [137] の表記法で $I^-(I^+) \cap I^+(I^-)$ である。 I^+ と I^- はそれぞれ未来と過去の光的無限遠である。事象の地平線は $\mathcal{H} = \partial \langle g \rangle$ で定義される。地平線は未来の地平線 (future horizon) $\mathcal{H}^+ \subset \partial I^-(I^+)$ と過去の地平線 (past horizon) $\mathcal{H}^- \subset \partial I^+(I^-)$ とに分割される。時空が漸近的に予測可能 (asymptotically predictable) であるとは、裸の特異点が存在しないことと同値である。

次の補題から出発する。

補題 1 [22, 138] 真空のアインシュタイン方程式か源のないアインシュタイン・マックスウェル方程式が満たされていれば、漸近的に平坦でかつ時空が漸近的に予測可能な平衡状態のブラッ

クホールの DOC は, (i) 回転がないか (ii) 軸対称の 2つの場合しかない.

後に続く議論にはあまり重要でないが, ブラックホールの外部に電磁場の源が存在するような場合でも, 源が非物理的でない場の方程式にしたがうならば, 補題 1 の結論は正しいことがわかっている.

補題として証明されていないが, 次の条件は重要である.

条件 2 補題 1 の条件を仮定し, 物理的に到達し得ない表面重力 κ がゼロの極限を除いた場合, DOC $\langle g \rangle$ は $S^2 \otimes R^2$ のトポロジー (例えば, θ, ϕ 座標によって張られる 2次元球と, r, t 座標によって張られる 2次元面) を持つ. 一方, 未来の地平面 \mathcal{H}^+ は $S^2 \otimes R$ のトポロジーを持つ.

ここで補題 1 で予言される 2つの可能性のうち, まず回転のない場合を考える. 回転のない場合は, その時空は静的であることが次の順で証明される.

条件 3 補題 1 で導かれた回転のない場合, 条件 2 を仮定すると定常なキリング・ベクトル \vec{k} からつくられるスカラー $|\vec{k}|^2$ は DOC でいたるところ負 (そして \mathcal{H}^+ ではゼロ) である.

条件 3 を仮定したとき, 真空の場合, および電磁場が存在する場合に DOC が静的であることをそれぞれ S. W. Hawking と B. Carter が証明した. これは A. Lichnerowicz の定理 [139] の拡張になっている.

補題 4 [138, 140] 補題 1 で導かれた回転のない場合, 条件 4 を仮定すると DOC は静的である.

ここで静的とは, (i) 定常なキリング・ベクトル \vec{k} が超曲面に垂直 (hypersurface orthogonal) になり, さらに, (ii) 外部磁場 $\vec{B}_{(0)}$ がいたるところゼロであることをいう.

この結果を見ると条件 3 の直接の証明を試みたくなる. P. Hajicek はこの問題においていくらかの成果を修めている [141, 142]. 次のステップは最も難しいものであるが, W. Israel によって最初に行われ, 後に D. C. Robinson が簡潔でエレガントな方法でまとめている.

補題 5 [143, 144, 145, 146] 補題 4 の条件を仮定すると, DOC は必然的に球対称である.

補題 6 [147, 148] 補題 5 の条件を仮定すると, DOC は RN 解, または (電磁場が存在しないときには) シュワルツシルト解であたえられる. ゆえに DOC は質量 M と電荷 Q によって唯一に決定される.

このように, DOC に回転がない場合, 以上の補題の仮定を満たし, 条件を受け入れれば, ブラックホールは質量 M と電荷 Q によって唯一に決定できるのである.

A.2 軸対称な場合

この節では補題 1 で予言されるもう 1つの可能性, つまり軸対称の場合を考える. この場合は, 回転がないときの条件 3 と補題 4 に相当するものが, 順序が逆になるにもかかわらず両方とも証明できる. したがって, 静的の場合よりも厳密な議論ができる. はじめに, 補題 4 に相当する次の補題が成り立つ.

補題 7 [149, 150] 補題 1 で導かれた軸対称な場合, DOC は円形対称 (circular symmetric) である.

ここで円形対称とは定常なキリング・ベクトル \vec{k} と軸対称方向のキリング・ベクトル \vec{m} によって生成される 2次元面 (例えば, 標準的な座標系で, r と θ を一定とした面である) が他の 2次元面 (明らかに, ϕ と t を一定とした面にとるのが便利である) に直交することをいう. 補題 7 は条件 2 とは無関係に成立する. そして逆に補題 7 の結果として条件 2 に相当する次の補題が得られる.

補題 8 [151, 152] 条件 2 と補題 3 の条件を仮定し, 物理的に到達し得ない表面張力 κ がゼロの極限を除いた場合, ρ^2 は対称軸を除き DOC のいたるところで正である. また, 対称軸上ではゼロ, 同様にホライズン上でもゼロになる. ここで ρ^2 は \vec{k} と \vec{m} を用いて

$$\rho^2 = (k^\mu m_\mu)^2 - |\vec{k}|^2 |\vec{m}|^2 \quad (\text{A.1})$$

で定義される.

次の段階では ρ をつくるために調和関数のモース理論 [153] が用いられる.

補題 9 [151, 152] 補題 8 の条件を仮定すると, 定常軸対称な楕円体座標系 (λ, μ, ϕ, t) で DOC を大域的に覆うことができる. このときメトリックは次のように表すことができる.

$$ds^2 = \Xi \left\{ \frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{d\mu^2}{1 - \mu^2} \right\} + X d\phi^2 + 2W d\phi dt - V dt^2 \quad (\text{A.2})$$

ここで

$$\rho^2 = (\lambda^2 - c^2)(1 - \mu^2) \quad (\text{A.3})$$

$$c = M - 2\Omega_h J - \phi_h Q \quad (\text{A.4})$$

である. Ω_h と ϕ_h はそれぞれホライズンの角速度, およびホライズン上での静電ポテンシャルである. 対称軸の両極は $\mu = \pm 1$, ホライズン \mathcal{H} は $\lambda \rightarrow c$ の極限で与えられる.

次の段階は F. J. Ernst の業績によるものが大きい [154, 155]. 彼は (A.2) のメトリックに対して, 源のないアインシュタイン・マクスウェル方程式は4つの変数に関する偏微分方程式として表されることを示した. 他の場合の変数はこれら4つの未知変数を陽に積分することによって得られる. F. J. Ernst にしたがって, 4つの未知変数として (A.2) の X と, 他に Y, E, B をとる. これらをエルンスト変数と呼ぶ. 普通は X の代りに V が用いられるが, V はエルゴ面で符号を変えるので解析が面倒になる. そこで, ここでは対称軸上以外ではいたるところ正である X を用いることにする. これら4つの変数 X, Y, E, B , には次の性質がある. 電磁場が存在しないときには X と Y が残り, E と B がゼロになる. また, 回転していなく磁場がないときには X と E が残り, Y と B がゼロになる.

エルンスト変数を用いることは, ただそれらが非負のラグランジュアン密度 \mathcal{L} によって導かれる単純な場の方程式に従うというだけでなく, ブラックホールの大域的な境界条件の定式化が簡潔にできるという利点もある.

補題 10 [156, 152] 補題 9 の条件のもとで, 境界条件を満たす場の方程式の解は次の単純化された系の解によって唯一に決定される.

1. 単純化された系は2次元で次のメトリックを持つ.

$$ds^2 = \frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{d\mu^2}{1 - \mu^2} \quad (\text{A.5})$$

ただし,

$$-1 < \mu < 1, \quad c < \lambda < \infty \quad (\text{A.6})$$

2. 作用は,

$$I = \int \mathcal{L} d\lambda d\mu \quad (\text{A.7})$$

$$= \int \left\{ \frac{|\nabla X|^2 + |\nabla Y + 2(E\nabla B - B\nabla E)|^2}{2X^2} + 2 \frac{|\nabla E|^2 + |\nabla B|^2}{X} \right\} d\lambda d\mu \quad (\text{A.8})$$

で与えられる.

3. 境界条件は変数 X, Y, E, B とそれらの微分が有界で, 軸上 ($\mu \rightarrow \pm 1$) で $\partial E/\partial \lambda, \partial B/\partial \lambda, \partial Y/\partial \lambda, \partial Y/\partial \mu + 2(E\partial B/\partial \mu - B\partial E/\partial \mu)$, と X がすべてゼロになり, $\lambda \rightarrow \infty$ の極限で

$$E = -Q\mu + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\text{A.9})$$

$$B = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\text{A.10})$$

$$Y = 2J\mu(3 - \mu^2) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\text{A.11})$$

$$\lambda^{-2}X = (1 - \mu^2) \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \quad (\text{A.12})$$

となる.

ここで採用した変数があるという以外, ホライズン ($\lambda \rightarrow c$) 上で特別な境界条件がないという便利な性質を持つことは注目すべきである.

これまでの段階は A.1 の静的な場合よりも厳密に進んできた. しかし最後のステップで補題 5 と補題 6 に相当するものは証明されていない. つまり簡潔な唯一定理は未だに存在しない. ただし, 電磁場がない場合 ($E = B = 0$) には, 解は2つのパラメータで唯一に決定することが証明されている.

補題 11 [157] 補題 10 の条件のもとで, $E = B = 0$ ならば, パラメータ c と J の値を1組与えれば単純化された系は高々1つの解しかもたない. したがって, DOC のメトリックは唯一に決定する.

次の制限,

$$c^4 > 4J^2 \quad (\text{A.13})$$

を満たせば, 確かに解は存在し, カー解に一致することが確かめられる. 普通, カー解はパラメータ c, J よりも, 質量 M , 角運動量 J で記述される. これら2組のパラメータは

$$M = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{c^2 + 2J} + \sqrt{c^2 - 2J} \right\} \quad (\text{A.14})$$

で関係づけられている.

補題 11 が証明される以前に, 電磁場が存在しない場合で最も進んだ結果は, B. Carter の仕事で無毛定理と呼ばれる [151, 152]. これは解の連続的な変化はパラメータ c と J の連続的な変化で完全に決定するという定理である. 現在では電磁場が存在する系にも適応できる拡張された無毛定理がある.

補題 12 (拡張された) ブラックホールの無毛定理 [158] 補題 11 の条件のもとで, 単純化された系の連続的な変化は3つのパラメータ c, J, Q の連続的な変化で完全に決定される.

この補題は, それまで J. R. Ipser [159] や R. M. Wald [160], および S. K. Bose と H. Y. Wang [161] 等が, カー・ニューマン解の摂動に基づいて展開していた特別な場合の結果にとって代った.

補題 12 の主張することは以下のとおりである。アインシュタイン・マクスウェル系の解はいくつかの解の集合に分類される。それぞれの解の集合は 3 つのパラメータ c, J, Q によって特徴付けられ、これらのパラメータを連続的に変化させることによって、その解の集合に属する任意の解を再現することができる。ところが、いくらパラメータを変化させても、その変化が連続的である限り、他の解の集合へは移れないのである。補題 12 で言い表していることはこれだけで、解の集合に関してはなんら規定するものはない。したがって、解の集合がよく知られているカー・ニューマン解の族ただ 1 つだけなのか、それとも他に解の族が存在するのかわからない。

しかし、カー・ニューマン解でない族が存在したとすると、それらは物理的に意味のない描像を与えるだろうと思われている。なぜなら、補題 6、および補題 10 から、唯一の静的な解や、唯一の電氣的に中性な解はカー・ニューマン解の族に属しているために、カー・ニューマン解でない集合では連続的な変化では回転なしで球対称な極限や、同様に、電氣的に中性な極限がとれないからである。このことから、カー・ニューマン解でない族が存在したとしてもそれは不安定であると予想される。こうして、電磁場が存在しない場合では 1971 年、一般的な場合では 1974 年に証明された無毛定理を考察すると、定常状態に落ち着いたブラックホールはすべてカー・ニューマン解の族に属するだろうと考えられている。

付録 B

カタストロフィー理論概論

カタストロフィー理論は自然界における形態の変化を扱う学問で、特に劇的に変化を遂げる不連続現象を扱うことが可能である。そのような変化をカタストロフィー (catastrophe) と呼ぶ [127]。カタストロフィーはこの理論の創始者である R. Thom の定理によって、初等カタストロフィーと呼ばれる 7 つの基本的形態に分類される。トムの定理は現代数学の微分トポロジーを基礎にしており、その証明は複雑であるが、結論は非常に分かり易いので多くの分野に応用されている。

この付録ではカタストロフィー理論について簡単にまとめることにする。また、ここにあるレビューは文献 [162, 163] に多く依っている。

B.1 ジーマンの機械とカタストロフィー

まず、例としてカタストロフィーが生じる簡単なシステムを考えることにする。図 B.1 のような機械をつくる。円盤の中心を平面上に固定して回転可能にする。そして、円盤の縁の 1 点 C にゴムまたはバネ (フックの法則にしたがう) を 2 本付け、1 本の端は平面上の適当な点 B に固定し、もう 1 本の端は自由端 P にしておく。これで機械の完成である。

自由端 P を持って少し動かすと、それによって円盤が回転し、図 B.1 の $\angle BAC = \theta$ が変化する。しかし、自由端をゆっくり動かしていても、あるところに来ると円盤が急激に回転し、 θ が大きく変化することがある。これがこのシステムのカタストロフィーである。カタストロフィー理論の言葉を用いると、円盤を固定した平面をコントロール平面、自由端の座標をコントロール・パラメータという。また図 B.1 には自由端がそこに来たときにカタストロフィーが生じる点の集合である、カタストロフィー集合を描いておいた。

コントロールの点 P がカタストロフィー集合の尖点 K の近所にある場合のカタストロフィー機械の様子を以下で詳しく調べる。

コントロールの点 P を尖点 K の近傍に固定すると、円板はある角 θ をなす。この角 θ はフックの

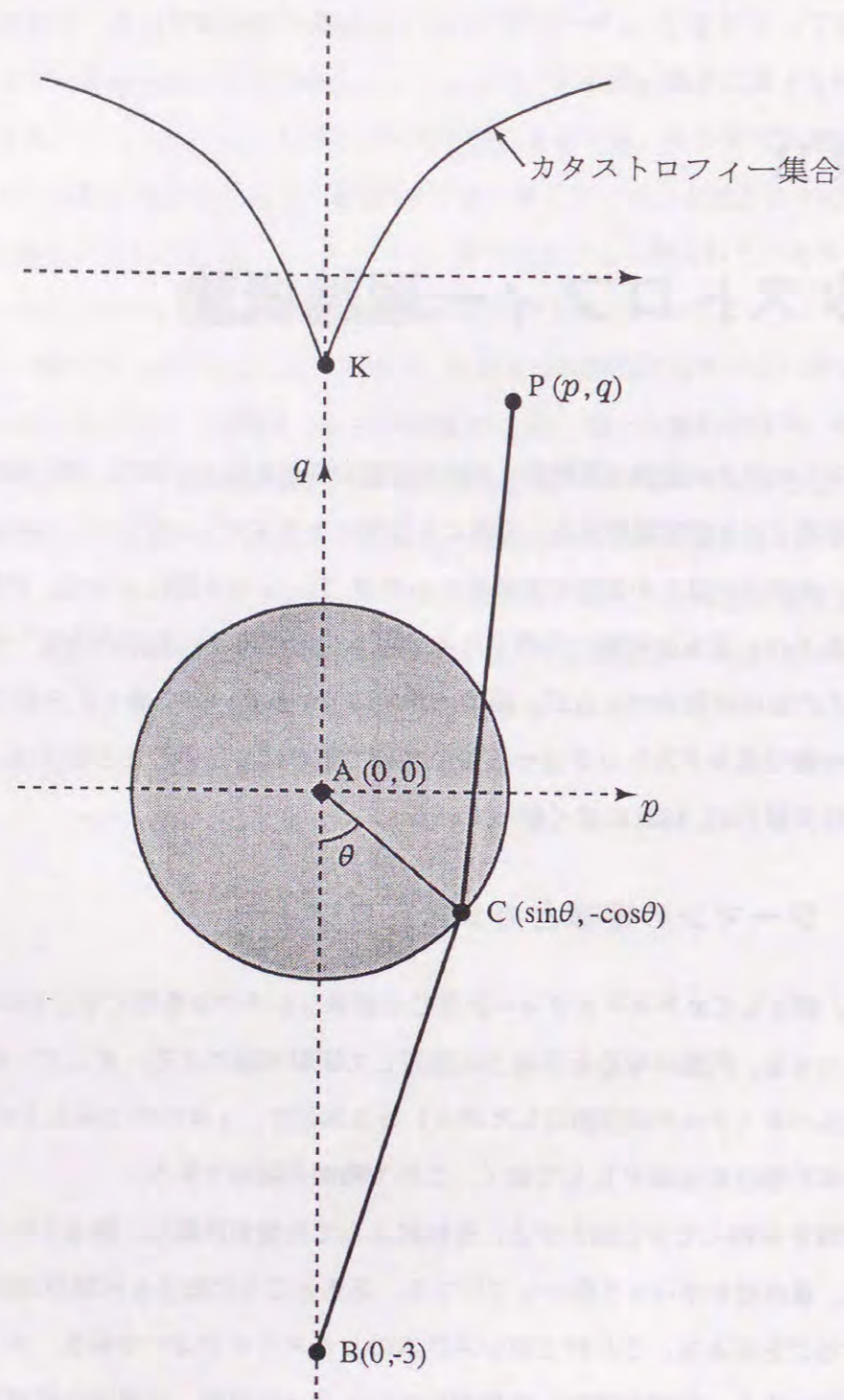


図. B.1: ジーマンのカタストロフィー機械. 上方にカタストロフィー集合も記しておいた.

理論を用いると, 点 P を固定したままでゴムバンドのエネルギーが極小になる角度として実現される. この角 θ を, あるいは対 (P, θ) を P に対応するシステムの状態, 詳しくは安定平衡状態という.

したがって, まず, ゴムバンドのポテンシャルエネルギー V を計算しなければならない. そのために, 図 B.1 のように点 A を原点として図 B.1 の p 軸, q 軸を用いた直交座標系をコントロール平面 R^2 に定める.

コントロールの点を $P(p, q)$ とすると, フックの法則によって 2 つのゴムバンドのポテンシャルエネルギー V はそれぞれのゴムバンドの伸びの自乗の和に比例するから, 比例定数を 1 とすると,

$$\begin{aligned} V &= (BC - 1)^2 + (CP - 1)^2 \\ &= \left\{ (10 - 6 \cos \theta)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}^2 + \left\{ (1 + p^2 + q^2 - 2p \sin \theta + 2q \cos \theta)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

である. すなわち, V は円盤の位置 θ とコントロールの点の座標 p と q を変数とする, 3 変数の関数 $V = V(\theta, p, q)$ である. V を以下ではポテンシャル, あるいはポテンシャル関数と呼ぶ.

さて, コントロール点 $P(p, q)$ が固定されたときのその P に対応する円盤の安定平衡点 θ は, $V = V(\theta, p, q)$ で p, q の値を固定して θ のみの関数になった $V = V(\theta, p, q)$ の極小値を与える θ であるから,

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta, p, q) = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\theta, p, q) > 0 \quad (\text{B.3})$$

を満たす角 θ である. コントロールの点 P が図 B.1 の q 軸上の正方向上の点 $P = (0, q)$, $q > 1$ にあるとき, $\theta = 0$ が安定平衡点となるか否かを調べてみよう.

ポテンシャル関数 (B.1) より

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta, p, q) = 6 \left(\sin \theta - \frac{\sin \theta}{BC} \right) + 2 \left(1 - \frac{1}{CP} \right) (-q \sin \theta - p \cos \theta) \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\theta, p, q) &= 6 \left(\cos \theta - \frac{\cos \theta}{BC} + \frac{3 \sin^2 \theta}{BC^3} \right) + \frac{2(-q \sin \theta - p \cos \theta)^2}{CP^3} \\ &\quad + 2 \left(1 - \frac{1}{CP} \right) (-q \cos \theta + p \sin \theta) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

を得る. ここで $p = 0, \theta = 0$ としてみると, $BC = 2, CP = 1 + q (> 1)$ であり, また

$$\frac{\partial BC}{\partial \theta} = \frac{\partial CP}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{B.6})$$

である. よって (B.5) から

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 3 - \frac{2q^2}{1+q} \quad (\text{B.7})$$

である。ここで $\partial^2 V / \partial \theta^2 = 0$ とおき、解 q_0 が正であることを注意して求めると

$$q_0 = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \approx 2.2 \quad (\text{B.8})$$

となる。よって

1. $1 < q < q_0$ のとき $\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(0, q, 0) > 0$ で $\theta = 0$ は極小を与える。
2. $q = q_0$ のとき $\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(0, q, 0) = 0$ で $\theta = 0$ は極値を与えない。
3. $q > q_0$ のとき $\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(0, q, 0) < 0$ で $\theta = 0$ は極大を与える。

すなわち、 q 軸上の $1 < q < q_0$ をみらす点は $\theta = 0$ が安定平衡点であるが、 $q \geq q_0$ の点では安定平衡点ではない。 q_0 は図 B.1 のカタストロフィー集合の尖点 K の座標である。

ジーマンのカタストロフィー機械にはそのコントロール平面 R^2 上にダイヤモンド形のカタストロフィー集合が現れる。次に、このカタストロフィー集合の尖点 $K(0, q_0)$ の近傍でおこるカタストロフィーを詳しく調べる。

まずこのシステムには前述のようにポテンシャル関数 $V(p, q, \theta)$ が定まり、コントロールの点 $P(p, q)$ が固定されたとき、この P に対応するシステムの安定平衡状態、つまり円盤の角 θ は、 p, q を与えられた値に固定した θ のみの関数 $V(p, q, \theta)$ (これを以下で $V_{(p,q)}(\theta)$ で示すことにする) を極小とするような値 θ である。これを極小点と呼ぶことにしよう。同様に極大値を与える点は極大点とする。

そこでまず尖点 $K(0, q_0)$ の近傍の点 $P(p, q)$ に対してこの関数 $V_{(p,q)}(\theta)$ を θ でテイラー展開する [164].

$$V_{(p,q)}(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \alpha_3 \theta^3 + \alpha_4 \theta^4 + \dots + \alpha_i \theta^i + \dots \quad (\text{B.9})$$

ここで $\alpha = p^2 + (1+q)^2$ とすると、

$$\alpha_0 = (\alpha - 2\alpha^{1/2} + 2) \quad (\text{B.10})$$

$$\alpha_1 = 2(\alpha^{-1/2} - 1)p \quad (\text{B.11})$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{2} + \alpha^{3/2} p^2 + (\alpha^{-1/2} - 1)q \quad (\text{B.12})$$

$$\alpha_3 = \frac{(1 - \alpha^{-1/2})}{3} p + \alpha^{-5/2} p^3 + \alpha^{-3/2} p q \quad (\text{B.13})$$

$$\alpha_4 = \frac{5}{32} - \frac{\alpha^{-3/2}}{3} p^2 + \frac{5}{4} \alpha^{-7/2} p^4 + \frac{3}{2} \alpha^{-5/2} p^2 q + \frac{(1 - \alpha^{-1/2})}{12} q + \frac{\alpha^{-3/2}}{4} q^2 \quad (\text{B.14})$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\alpha_i = \alpha_i(p, q) \quad (\text{B.15})$$

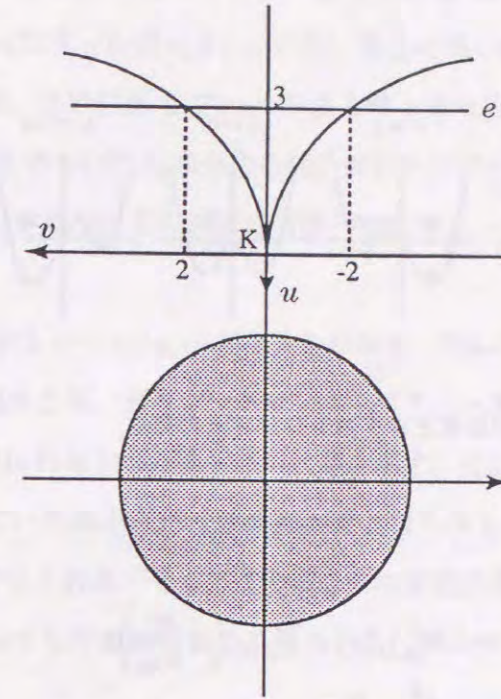


図. B.2: 新しい座標でのカタストロフィー集合。これを横切る直線 e に沿って、ポテンシャルの振舞いを見る。

となる。

この $V_{(p,q)}(\theta)$ に適当な座標変換を行って次第に簡単な形へと導く。まず、 θ を 1 次変換

$$\theta = \left(\frac{1}{4\alpha_4} \right)^{1/4} x - \frac{\alpha_3}{4\alpha_4} \quad (\text{B.16})$$

で x へ座標変換すると、 $V_{(p,q)}(\theta)$ は $V_{(p,q)}^1(x)$ になる。ここで

$$V_{(p,q)}^1(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{u}{2} x^2 + vx + V_{(p,q)} \left(-\frac{\alpha_3}{4\alpha_4} \right) + w_1 x^5 + \dots + w_{n-4} x^n + \dots \quad (\text{B.17})$$

ただし

$$u = \left(\frac{1}{\alpha_4} \right)^{1/2} \left(\alpha_2 - \frac{3\alpha_3^2}{8\alpha_4} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$v = \left(\frac{1}{4\alpha_4} \right)^{1/4} \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{2\alpha_4} + \frac{\alpha_3^2}{8\alpha_4^2} \right) \quad (\text{B.19})$$

$$w_{n-4} = w_{n-4}(p, q), \quad n \geq 5, \quad (\text{B.20})$$

である。ポテンシャルから定数を除いても極小点は変わらないので $V_{(p,q)}^1(x)$ より x を含まない項

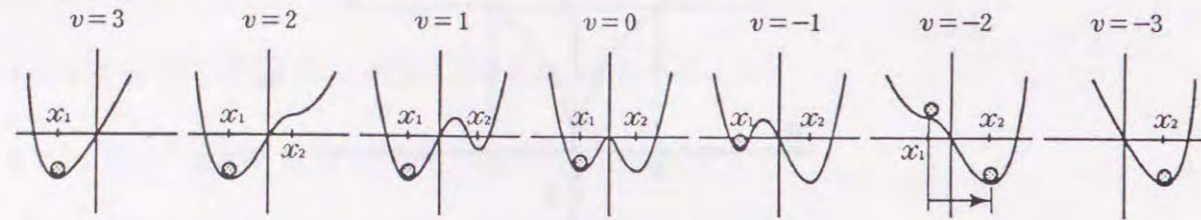


図. B.3: ポテンシャルの変化とカタストロフィーの発生.

を除いたポテンシャルを

$$V_{(p,q)}^2(x) = V_{(p,q)}^1(x) - V_{(p,q)} \left(-\frac{\alpha_3}{4\alpha_4} \right) \quad (\text{B.21})$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{u}{2}x^2 + vx + w_1x^5 + \dots + w_{n-4}x^n + \dots \quad (\text{B.22})$$

とする. この u, v を用いて次にコントロール平面 R^2 の写像 (座標変換) $h: (p, q) \rightarrow (u(p, q), v(p, q))$ を考える. ここに $h(0, q_0) = (0, 0)$ である. するとコントロール平面上に尖点 $K(0, q_0)$ を原点とし, その点を通る 2 つの曲線 $v(p, q) = 0$ と $u(p, q) = 0$ を u 軸 v 軸とした図 B.2 のような座標系ができる. するとこの座標系でポテンシャル $V_{(p,q)}^2(x)$ は

$$V_{(u,v)}^3(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{u}{2}x^2 + vx + \tilde{w}_1x^5 + \dots + \tilde{w}_{n-4}x^n + \dots \quad (\text{B.23})$$

で示される. ここで $\tilde{w}_{n-4} = \tilde{w}_{n-4}(u, v)$ である. よって $V_{(u,v)}^3(x)$ は, K の近傍では 5 次以上の項を無視して

$$F = \frac{x^4}{4} + \frac{u}{2}x^2 + vx \quad (\text{B.24})$$

で近似することができる. よって B.3 節で述べるトム定理によってシステムのカタストロフィーを論じる限りでは, 元の複雑な V の代わりにポテンシャルとしてこの単純な F を用いてよいことが保証されている.

ここではトム定理を仮定し, この F を用いて点 K の近傍におけるシステムのカタストロフィーを調べることにする. 図 B.3 のような直線 $e(u = -3)$ 上を $v = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ とコントロールの点を動かしてみる. するとそれらのコントロールの点に対応するポテンシャル F のグラフは, 図 B.3 のように描くことができる. $v = 3$ のとき極小点 x_1 は $x_1 < 0$ である. $v = 2$ となると x_2 の

位置が変曲点となる. $v = 1$ のとき x_2 の位置が x_1 の位置とともにもう 1 つの F の極小点となる. しかし円盤の位置は初めの極小点 x_1 に留まっている. 以下 $v = 1, 0, -1$ とコントロールの点が動いても円盤の位置は初めの x_1 にずっと留まる. この間, 第 2 の極小値は次第に値が小さくなり, 極小としての影響は大きくなる. これに反して x_1 の与える極小値は次第に値が大きくなり, 影響力は小さくなっていく. $v = -2$ について x_1 の与える極小値はそのすぐ右方にあった極大値と打ち消して消滅して変曲点となる. すると, この瞬間に円盤の状態は $x_1 < 0$ より $x_2 > 0$ へと激変し, カタストロフィーがおこる.

以上から, このシステムはコントロール (u, v) が与えられると, それで定まるポテンシャル (B.24) の極小点 x がその状態として現れるが, あるコントロール・パラメータ (u, v) に対してはこうした極小点は複数個定まり, その中にある 1 つの極小点が状態を示す. そしてコントロール・パラメータが変わり, この状態を示していた極小点が (他の極大点と打ち消しあって) 消滅すると, このシステムの状態は別の極小点で示される. そしてこの極小点の変化は図 B.3 のように, コントロール・パラメータが連続に変わっても不連続に起こり得る. これがカタストロフィーの本質であることが分かる.

また, このシステムでは, v が正から負へと直線 e に沿ってコントロールが変わる場合, x_2 の状態が現実にシステムに現れるためには, すでに状態を与えている x_1 の与える極小点が消滅する ($v = 2$ の時) まで, 待たなければならない. つまり, ある極小点が一度このシステムの状態を与えると, この極小点は存続する限り引き続いてこのシステムの状態を与えることがわかる. この事実を, システムは (完全) 後れの規則 (perfect delay) に従っているという.

B.2 くさびのカタストロフィー

B.1 節で述べた尖点 K の近傍におけるジーマンのカタストロフィー機械のカタストロフィーを図形的に示してみる. このために K を原点とした u, v, x で張られる 3 次元直交座標系 (u, v, x) を定める.

さて, 原点 K の近傍でのポテンシャルは (B.24) であった. コントロールの点 (u, v) が与えられたとき, これに対応する安定平衡状態 x は関数 $F_{(u,v)}(x)$ の極小値を与えた. よって特に状態 x は関数 $F_{(u,v)}(x)$ の極値を与える. そこでまず,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^3 + ux + v = 0 \quad (\text{B.25})$$

をみたす点 (u, v, x) の集合

$$M_F = \{(u, v, x) | x^3 + ux + v = 0\} \quad (\text{B.26})$$

を考える. すると M_F はコントロールの点 (u, v) とこれに対するポテンシャル $F(u, v)$ の極値を与える値 x とのつくる対 (u, v, x) の集合である. この x , あるいはこの対 (u, v, x) を平衡点という. そして M_F を F の平衡空間 (equilibrium space) ということにする.

M_F の点 (u, v, x) を空間 R^3 にプロットすると, M_F は図 B.4 のような曲面になる. コントロール平面 R^2 は $x = 0$ で定まる平面であるが, M_F と R^2 が重なって M_F が見にくくなるので図 B.4 では R^2 を $x = \text{負数}$ とした平面で示している (以下この例にならう).

図 B.4 の曲面 M_F はスカートひだのように 1 枚の布を例えば図 B.4 のように空間の原点 O から折り目の線 Σ_F に沿って折ってできる図形で, 平面 R^2 と微分位相同形 (diffeomorphic) になっていることが確かめられる.

さて, 平衡空間 M_F 上の点はポテンシャル $F(u, v, x)$ の極小値を与えるとき安定平衡点 (stable equilibrium) となった. $(u, v, x) \in M_F$ が安定平衡点となる条件は

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, v, x) > 0 \quad (\text{B.27})$$

である. 安定平衡点の集合を G_F で示し, 安定平衡空間とよぶ. すると,

$$G_F = \left\{ (u, v, x) \left| \frac{\partial F}{\partial x} = x^3 + ux + v = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, v, x) = 3x^2 + u > 0 \right. \right\} \quad (\text{B.28})$$

である. G_F の境界 Σ_F は M_F 上の点 (u, v, x) で,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, v, x) = 0 \quad (\text{B.29})$$

となる点 (u, v, x) からなる. すなわち

$$\Sigma_F = \left\{ (u, v, x) \left| \frac{\partial F}{\partial x} = x^3 + ux + v = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, v, x) = 3x^2 + u = 0 \right. \right\} \quad (\text{B.30})$$

である. ところが Σ_F は図 B.4 に示したような M_F の折り目の線になることが確かめられる.

つぎに

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{B.31})$$

とすると

$$x^3 + ux + v = 0 \quad (\text{B.32})$$

$$3x^2 + u = 0 \quad (\text{B.33})$$

$$6x = 0 \quad (\text{B.34})$$

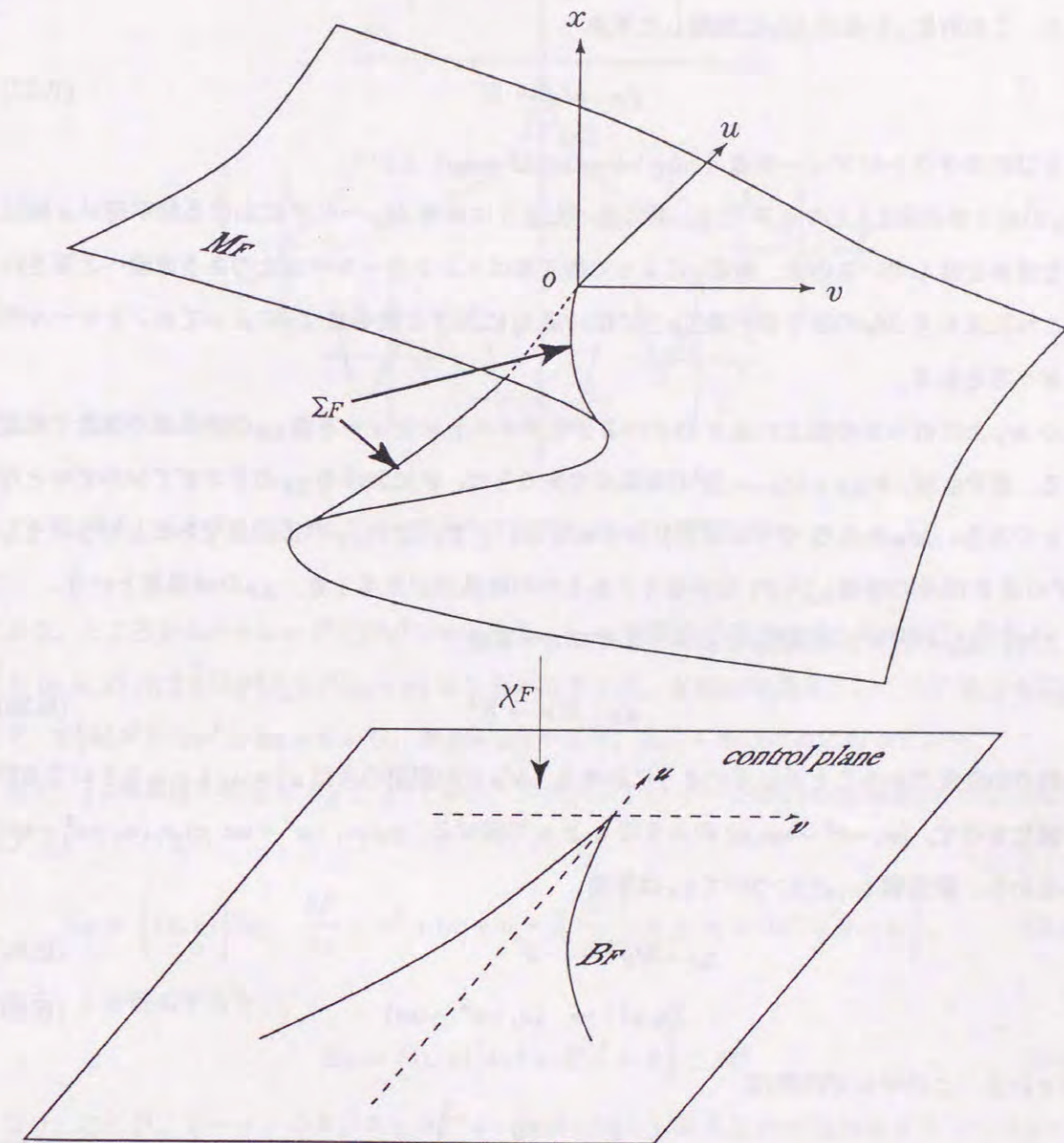


図. B.4: 状態変数とコントロール・パラメータによって張られる 3 次元空間中にある平衡空間とコントロール平面.

から $u = v = x = 0$ が得られる. この原点 $O = (0, 0, 0)$ は折り目の点で, M_F のくさびの点 (cusp point) という. M_F が入っている (u, v, x) 空間 R^3 よりコントロール平面 R^2 への射影を

$$\chi: R^3 \rightarrow R^2 \tag{B.35}$$

$$(u, v, x) \mapsto (u, v) \tag{B.36}$$

とする. この射影 χ を曲面 M_F に制限した写像

$$\chi_F: M_F \rightarrow R^2 \tag{B.37}$$

をくさびのカタストロフィー写像 (cusp catastrophe map) という.

M_F の折り目の線 Σ_F 上の点 P では, 前に述べたように曲面 M_F への P における接平面が x 軸に平行な直線を含んでいるので, 射影 χ によって接平面はコントロール平面上のある直線へと写される. これに反して M_F の折り目の線 Σ_F 上にない点 Q における接平面は χ によってコントロール平面自身へ写される.

この M_F 上の折り目の線上の点 P は次のようなカタストロフィー写像 χ_F の特異点の概念で規定される. 点 $P \in M_F$ が $\chi_F: M_F \rightarrow R^2$ の特異点であるとは, P における χ_F のヤコビアンがゼロとなることである. M_F の点 Q でヤコビアンがゼロでないとき, Q は χ_F の正則点であるという. そして R^2 の点 P はその逆像 $\chi_F^{-1}(P)$ に少なくとも 1 つの特異点があるとき, χ_F の特異値という.

ここで, M_F の折り目の線 Σ_F はカタストロフィー写像

$$\chi_F: M_F \rightarrow R^2 \tag{B.38}$$

の特異点の集合であることが以下のように示せる. M_F 上の空間の点は $x^3 + ux + v = 0$ という方程式を満たすので, $(u, -x^3 - ux, x)$ のように u と v で表せる. $\chi_F(u, -x^3 - ux, x) = (u, -x^3 - ux)$ であるから, 新座標 (u, x) について χ_F は写像

$$\chi_F: M_F \rightarrow R^2 \tag{B.39}$$

$$(u, x) \mapsto (u, -x^3 - ux) \tag{B.40}$$

で示される. このヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & -3x^2 - u \end{pmatrix} \tag{B.41}$$

なので, (u, v) が χ_F の特異点となる必要十分条件はヤコビアン

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -x & -3x^2 - u \end{vmatrix} = -3x^2 - u = 0 \tag{B.42}$$

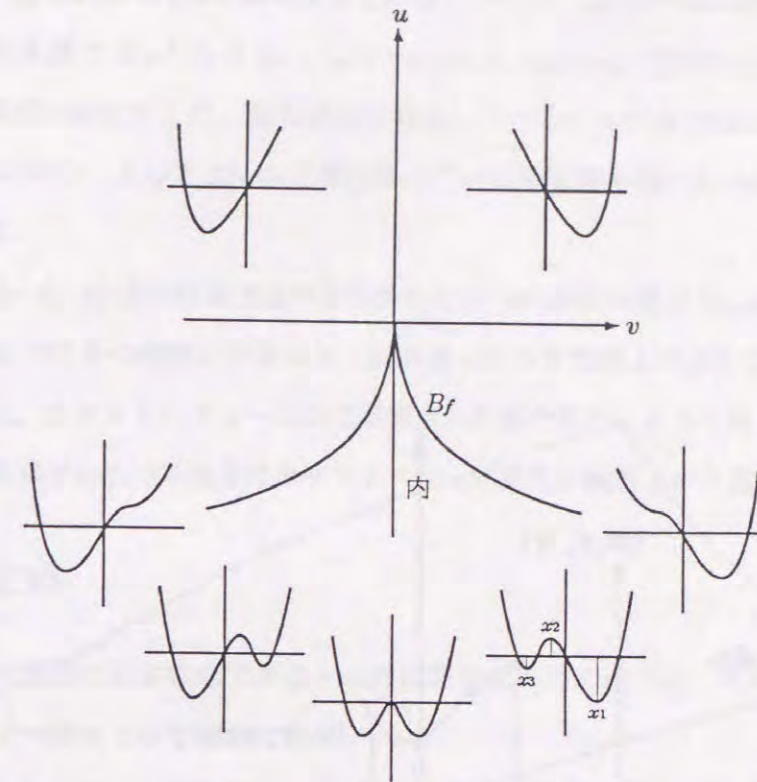


図. B.5: くさびカタストロフィーの周りでのポテンシャル関数の変化.

である. ところが $3x^2 + u = \partial^2 F / \partial x^2$ であるから, χ_F の特異点の集合は折り目の線 Σ_F である. 特異点 (u, v, x) はさらに $\partial^3 F / \partial x^3(u, v, x) = 0$ をみたととき, 2 次の特異点といいその集合を Σ_F^2 で示す. Σ_F^2 は $\partial^3 F / \partial x^3 = 6x = 0$ から, 原点 $= \Sigma_F^2$ であり, 実はくさびの点になっている.

さて, χ_F 特異値の集合を $B_F \subset R^2$ で示し, カタストロフィー写像 χ_F の分岐集合 (bifurcation set) という. つまり

$$B_F = \left\{ (u, v) \mid \exists x_1, \frac{\partial F}{\partial x} = x^3 + ux + v = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, v, x) = 3x^2 + u = 0 \right\}. \tag{B.43}$$

である. x を消去すると

$$B_F = \left\{ (u, v) \mid 4x^3 + 27v^2 = 0 \right\} \subset R^2 \tag{B.44}$$

となり, これが, ジーマンのカタストロフィー機械の時にも尖点 K の付近のカタストロフィー集合として現れていた図形である. 同様にして 2 次分岐集合 $B_F^2 = \{(0, 0)\} \subset B_F \subset R^2$ が定まる. これがくさび状曲線の尖点 K である.

前に述べた安定平衡空間 G_F を定める. そのために, コントロール平面 R^2 に分岐集合 B_F を描き, その線上や内外にコントロールの点があるときのポテンシャル F の概形を描くと図 B.5 のようになる. 分岐集合 B_F の内部では F は 2 つの極小値 $F(x_1), F(x_3)$ と 1 つの極大値 $F(x_2)$ をもつ. よっ

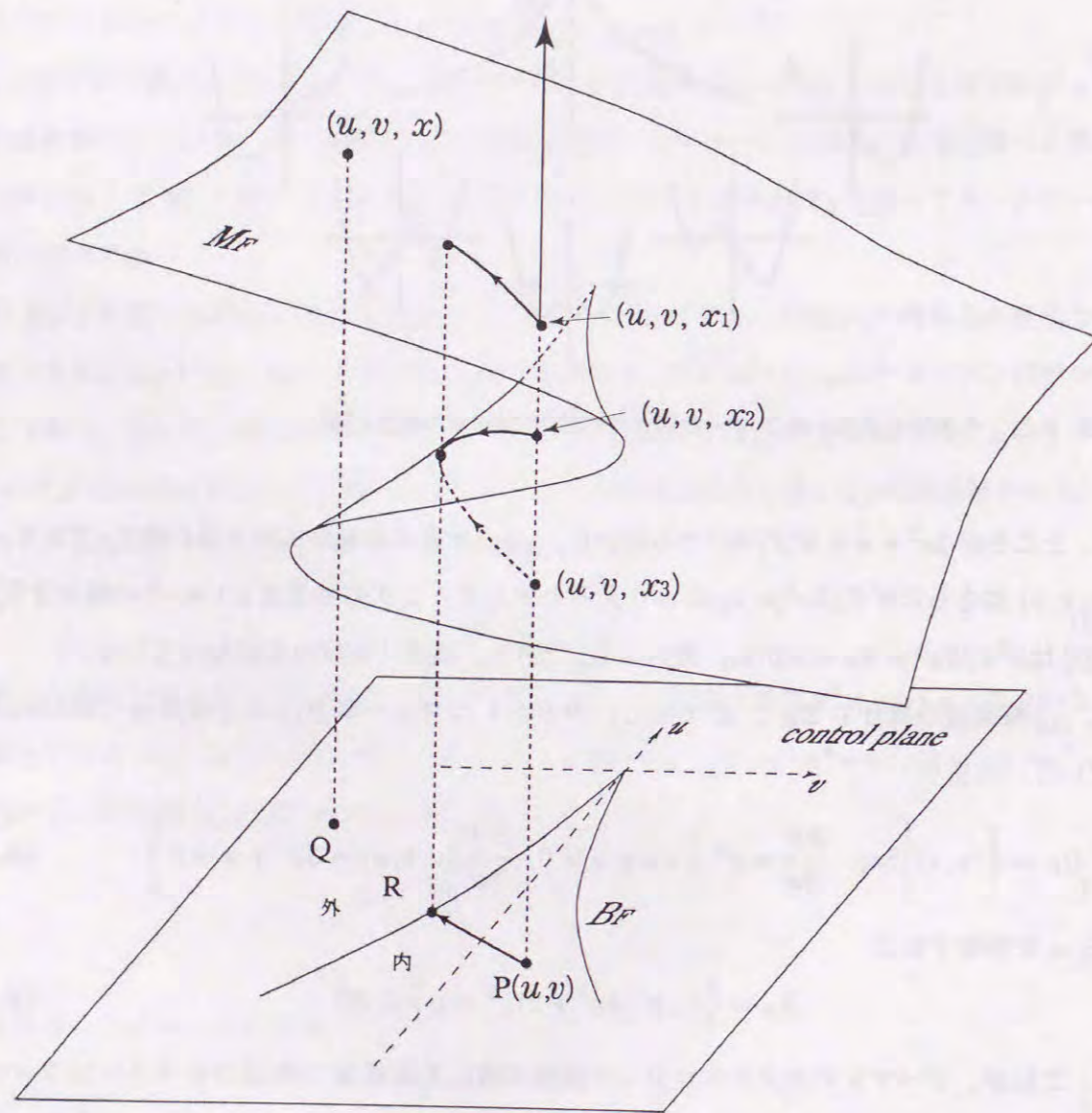


図. B.6: 平衡空間とコントロール平面. 分岐集合 B_F の内側の部分ではコントロール平面上の1点が平衡空間の3点に対応している.

て B_F の内部の点の上で曲面 M_F は3重になっている. つまり, B_F の内部の任意の点 $P = (u, v)$ を通り, x 軸に平衡な直線は M_F と3点 $(u, v, x_1), (u, v, x_2), (u, v, x_3)$ で交わる (図 B.6). そして中央の (u, v, x_2) は極大値を与える. 極大値は今考察しているシステムではたいした意味がなく, 不安定平衡点とよばれる. よって M_F の3重になっている中間面を除いた M_F の部分が安定平衡空間 G_F なのである.

B_F の外部の点 $Q = (u, v)$ 上には図 B.6 のようにただ1つの安定平衡点 (u, v, x) が定まる. そして B_F の線上の点 R では1つの安定平衡点と, 変曲点 (折り目の線上の点) が定まる.

前に述べたように, カタストロフィーは安定平衡点の消滅や発生によって起こるので, これらの個数が変化する境界線である分岐集合はカタストロフィー発生の敷居という重大な役目を果たす.

B.3 トムの定理

カタストロフィー理論の基本定理であるトムの定理を直観的に述べる. そのためにまずジーマンのカタストロフィー機械での考察をする.

ジーマンのカタストロフィー機械では, その状態は円盤の位置を示す角度 θ であるから, このシステムの状態空間は実数の集合 R , 図形的には直線 R^1 である. またこのシステムのコントロール点 $P(p, q)$ は平面上の点であるから, コントロール空間は平面 R^2 である¹.

いまここに一般のシステムを考える. このシステムの状態空間は n 次元ユークリッド空間 $R^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) | z_1, \dots, z_n \in R\}$ である. ここで n は任意の自然数とする. またシステムのコントロール空間は一般に k 次元ユークリッド空間 $R^k = \{p = (p_1, \dots, p_k) | p_1, \dots, p_k \in R\}$ とするが, この場合 k は任意の自然数ではなく, $k = 1, 2, 3, 4$ のどれかであるとする². つまりコントロール空間は4次元以下のユークリッド空間であるとする³. そしてこのシステムにはジーマンの機械と同じくポテンシャル

$$V : R^k \times R^n \rightarrow R \tag{B.45}$$

$$(p, z) \mapsto V(p, z) = V(p_1, \dots, p_k, z_1, \dots, z_n) \tag{B.46}$$

が定義されている. あるコントロールの点 p が与えられたとき, 変数 p をこの値に固定し z のみを変数として関数

$$V_p : R^n \rightarrow R, \quad V_p(z) = V_p(p, z) \tag{B.47}$$

¹ θ は一般角であるとする.

² これまでコントロールの点は大文字 $P(p, q)$ 等と用いたが以下では小文字 $p, p = (p_1, \dots, p_k)$ 等を用いる.

³ R^5 でも4以下の時と似た結果が得られるが複雑になるし, R^6 以上では全く異なる結論となる. また応用上 $k \geq 4$ でじゅうぶんとみられるのでこの限定を行った.

を考える。そして、この関数 $V_p(z)$ の極小値を与えるような極小点 z 、あるいは対 (p, z) が、与えられた p に対応する安定平衡点 (状態) になるとする。

一般に与えられた p に対するシステムの安定平衡点は複数個ある。そしてどの安定平衡点が現実に p に対するシステムの状態となるかは、B.2 で述べた (完全) 後れの規約にしたがうものとする。

安定平衡点 (p, z) は p を固定した z の関数 $V_p(z)$ の極小値を与えるから、

$$\frac{\partial V}{\partial z_1}(p, z) = \dots = \frac{\partial V}{\partial z_n}(p, z) = 0 \tag{B.48}$$

をみtas。上式をみtas z あるいは (p, z) をこのシステムの平衡点、それらの集合をこのシステムの平衡空間といい、

$$M_V = \left\{ (p, z) \mid \frac{\partial V}{\partial z_1}(p, z) = \dots = \frac{\partial V}{\partial z_n}(p, z) = 0 \right\} \tag{B.49}$$

で示す。 M_V はコントロール空間 R^k と状態空間 R^n との直積空間である $(k+n)$ 次元ユークリッド空間 R^{n+k} の部分空間である。すると安定平衡空間の集合 G_V はこの M_V の部分空間であり、 G_V をこのシステムの安定平衡空間という。

さて、いま M_V のある点 (p, z) の近傍でこのシステムにカタストロフィーが起こったとする。するとこの様子はジーマンのカタストロフィー機械の時と同じく、 R^{n+k} よりコントロール空間 R^k への射影を

$$\chi: R^{k+n} \rightarrow R^k \tag{B.50}$$

$$(p, z) \mapsto p \tag{B.51}$$

とするとき、この χ で M_V を R^k へ射影する V のカタストロフィー写像 (catastrophe map)

$$\chi_V: M_V \rightarrow R^k \tag{B.52}$$

の点 (p, z) の近傍における様子によって示される。

ところでトム定理は、このシステムのポテンシャル V が構造安定 (structure stable) であるとする、カタストロフィー写像 χ_V が適当な座標変換によって、非常に単純な多項式 F で与えられるカタストロフィー写像 χ_F の原点における様子と一致することを主張する。すなわち、

トム定理 [165] M_V は点 (p, z) の近傍では k 次元ユークリッド空間 R^k と微分位相同型であり、 (p, z) におけるカタストロフィー写像

$$\chi_V: M_V \rightarrow R^k \tag{B.53}$$

表 B.1: コントロール・パラメータの数が 4 個以下の初等カタストロフィー。 k はコントロール・パラメータの数を表す。

k	F	名称
1	$\frac{x^3}{3} + ux$	折り目 (fold)
2	$\pm \frac{x^4}{4} + \frac{u}{2}x^2 + vx$	くさび (cusp)
3	$\frac{x^5}{5} + \frac{u}{3}x^3 + \frac{v}{2}x^2 + wx$	つばめの尾 (swallow tail)
4	$\pm \frac{x^6}{6} + \frac{u}{4}x^4 + \frac{v}{3}x^3 + \frac{w}{2}x^2 + tx$	蝶 (butterfly)
3	$x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$	双曲的へそ (hyperbolic umbilic)
3	$\frac{1}{3}x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy$	楕円のへそ (elliptic umbilic)
4	$x^2y \pm y^4 + ux^2 + vy^2 + wx + ty$	放物的へそ (parabolic umbilic)

は、点 (p, z) を原点として R^{k+n} に適当な新座標系 (\bar{p}, \bar{z}) を導入して $R^{k+n} \ni (p = (p_1, \dots, p_k), z = (z_1, \dots, z_n)) \mapsto (\bar{p} = (u, v, w, t), \bar{z} = (x, y, z, s)) \in R^{k+n}$ と座標変換すると、この新座標系に関して次に与えるポテンシャル F の平衡空間 M_F の原点の近傍におけるカタストロフィー写像

$$\chi_F: M_F \rightarrow R^k \tag{B.54}$$

と一致する。ここで F はコントロール・パラメータの個数 k が与えられたとき、表 5.1 の k 欄の値が k 以下であるポテンシャルのどれか 1 つであり、 V と F の状態変数の個数が一致する。ここで V は構造安定であるとする。

表 B.1 の 7 つのポテンシャル F によるカタストロフィー写像、 $\chi_F: M_F \rightarrow R^k$ を初等カタストロフィー写像といい、これらで示されるカタストロフィーを初等カタストロフィー (elementary catastrophe) という。各初等カタストロフィーにはくさびのカタストロフィーと同様に、それらの特異点の集合 $\Sigma_F \subset M_F$ 、2 次の特異点の集合 Σ_F^2 および、特異値の集合である分岐集合 $\chi_F(\Sigma_F) = B_F \subset R^k$ 、2 次の分岐集合 $\chi_F(\Sigma_F^2) = B_F^2$ が定まる。分岐集合 B_F はカタストロフィー発生の敷居となる重要な集合であり、そして各初等カタストロフィーは表 B.1 の右欄のような名称で呼ばれるが、それらはそれぞれの分岐集合の形態を暗示して命名されている。

すでに $k=2$ のときのくさびのカタストロフィーについては B.2 節で詳しく述べた。しかし表 B.1 ではくさびのポテンシャルとして、 x^4 の項の符号が正と負の 2 種類ある。両者は図形的様相はほとんど同じであるが、安定平衡空間と不安定平衡空間とがちょうど逆になっている。そこで後者のカタストロフィーは双対くさびのカタストロフィー (dual cusp catastrophe) とよばれる。

同様な事実が表 B.1 の中で \pm の両方の符号をもつポテンシャルのすべてに起こる。表 B.1 のポテンシャルの名称は $+$ のときの名称であり、 $-$ の方をポテンシャルとするカタストロフィーはすべてこの $+$ の名称の前に双対 (dual) の語をつけて区別する。よって初等カタストロフィーはコントロールの個数 $k \leq 4$ のとき普通は 7 個のタイプがあるというが、こうした意味では 10 個のタイプがあることになる。

B.4 折り目のカタストロフィー

ここでは最も単純な折り目のカタストロフィーについて論じる。

$k=1$ の場合

系のコントロール・パラメータの個数 $k=1$ の場合には、トム定理により、その系には折り目のカタストロフィーしか起こり得ないことがわかる。与えられたポテンシャルは

$$V: R \times R^n \rightarrow R \quad (\text{B.55})$$

であるとする。すると平衡空間は

$$M_V = \left\{ (p, z) = (p, z_1, \dots, z_n) \mid \frac{\partial V}{\partial z_1}(p, z) = \dots = \frac{\partial V}{\partial z_n}(p, z) = 0 \right\} \subset R^{1+n} \quad (\text{B.56})$$

で定義される。条件の式が n 個あるので、一般に平衡空間 M_V は R^{1+n} 中の曲線であり、1 次元ユークリッド空間 R^1 と微分位相同型である。

さて、 M_V の点 (p_0, z_0) の近傍でカタストロフィーが起こるとする。するとトム定理により、 (p_0, z_0) が原点 O になるような新座標系への変換

$$R^{1+n} \ni (p, z) \mapsto (u, (x, \dots, s)) \in R^{1+n} \quad (\text{B.57})$$

によつて、 (p_0, z_0) 付近の M_V における χ_V は、平面 R^2 の原点 O 近傍の

$$M_F = \left\{ (u, x) \mid \frac{\partial F}{\partial x} = x^2 + u = 0 \right\} \subset R^2 \quad (\text{B.58})$$

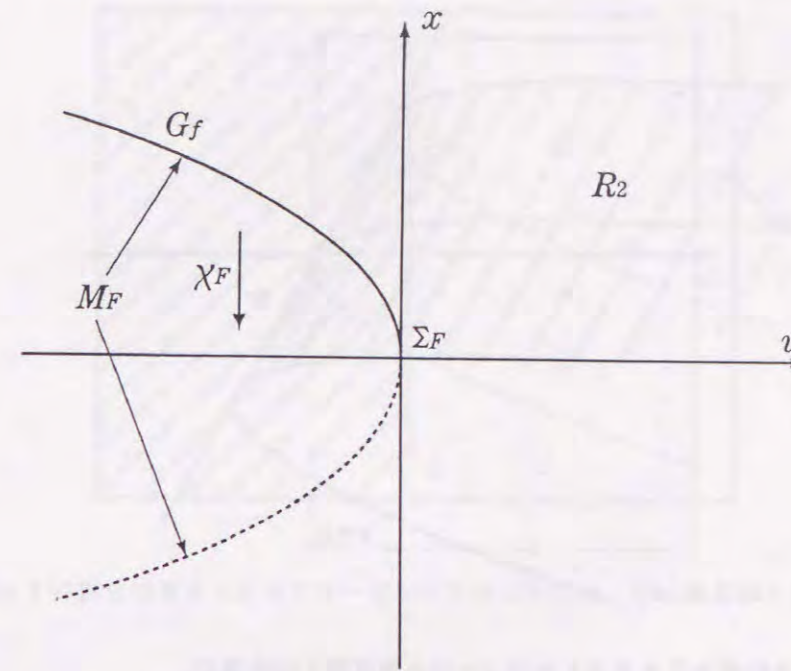


図. B.7: $k=1$ の折り目カタストロフィーの平衡空間と分岐集合。

におけるカタストロフィー写像

$$\chi_F: M_F \rightarrow R \quad (\text{B.59})$$

$$(u, x) \mapsto u \quad (\text{B.60})$$

と一致する。ここで F は折り目のポテンシャル

$$F: R \times R \rightarrow R \quad (\text{B.61})$$

$$(u, x) \mapsto \frac{1}{3}x^3 + ux \quad (\text{B.62})$$

である。すなわち、新座標系 $(u, (x, \dots, s))$ では初めの u と次の x のみが本質的な変数で、残りの $(n-1)$ 個の変数 \dots, s は非本質的な変数であり、すべて省いて (ゼロとして) よいのである。

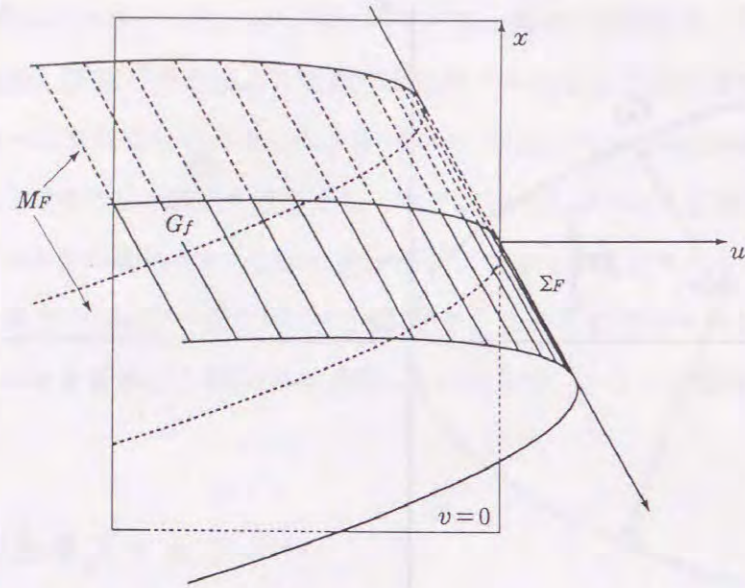
こうして F の平衡空間 M_F は u 軸、 x 軸の定める平面 R^2 中の図 B.7 のような放物線となる。

$\chi_F: M_F \rightarrow R$ の特異点の集合 Σ_F は B.2 節で述べたように

$$\Sigma_F = \left\{ (u, x) \mid \frac{\partial F}{\partial x} = x^2 + u = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2x = 0 \right\} \quad (\text{B.63})$$

である。すなわち $\Sigma_F = \{(u, x) \mid x = u = 0\} = \{(0, 0)\}$ 、 R^2 の原点である。よつて $B_F = \chi_F(0, 0) = 0$ 、 R の原点である。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2x \quad (\text{B.64})$$

図. B.8: $k=2$ の折り目カタストロフィーの平衡空間と分岐集合.

であるから,

$$x > 0 \iff \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0 \quad (\text{B.65})$$

である. よって安定平衡空間は

$$G_F = \{(u, x) | x^2 + u = 0, x > 0\} \quad (\text{B.66})$$

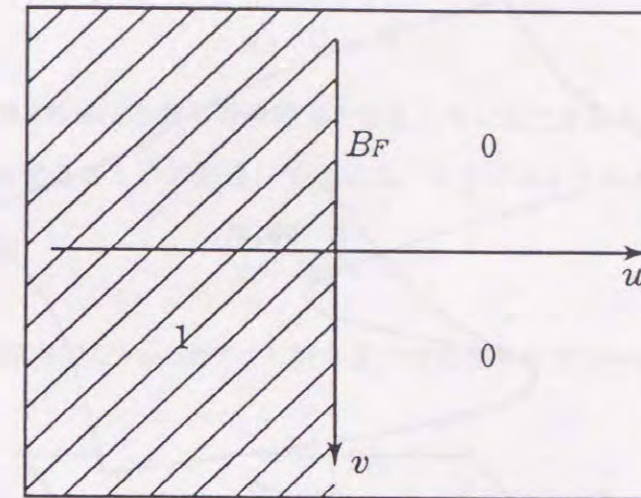
になる (図 B.7, 放物線の上部の実線部分).

コントロール空間 R では原点が分岐集合であり, $u < 0$ から $u > 0$ へと時間が経って行くとすると, $u < 0$ のとき存在していた系の状態が $u = 0$ でカタストロフィーを起こして, $u > 0$ ではその状態が消滅するカタストロフィーを示している. また, $\partial^3 F / \partial x^3 = 2 \neq 0$ であるから 2 次の特異集合 Σ_F^2 は存在せず $\Sigma_F^2 = \phi$ (空集合) である. よって 2 次の分岐集合 $B_F^2 (= \phi)$ も存在しない.

$k=2$ の場合

次に系のコントロールの個数 $k=2$ の場合を考える. この場合トムの定理により系には折り目のカタストロフィーとくさびのカタストロフィーとが起こり得る. くさびおよび双対くさびのカタストロフィーについてはすでに B.2 節と B.3 節で述べたので, ここでは $k=2$ のときの折り目のカタストロフィーについて述べる. ポテンシャルは $k=1$ と同じ

$$F: R^2 \times R \rightarrow R \quad (\text{B.67})$$

図. B.9: $k=2$ の折り目カタストロフィーのコントロール平面. 分岐集合が 1 次元 (線) になる.

$$(u, v, x) \mapsto \frac{1}{3}x^3 + ux$$

であり, F はコントロール変数 v を含まない (変数 v はダミーである). 平衡空間は

$$M_F = \left\{ (u, v, x) \mid \frac{\partial V}{\partial x} = x^2 + u = 0 \right\} \subset R^3 \quad (\text{B.68})$$

であるから, M_F は $v=0$ 平面上の放物線 $u = -x^2$ を各 $v = \text{一定}$ の平面上へ平衡移動してできた放物柱面である (図 B.8). カタストロフィー写像

$$\chi_F: M_F \rightarrow R^2 \quad (\text{B.69})$$

$$(u, v, x) \mapsto (u, v)$$

の特異集合 Σ_F は $\partial F / \partial x = x^2 + u = 0$, $\partial^2 F / \partial x^2 = 2x = 0$ であるから

$$\Sigma_F = \{(u, v, x) | x = u = 0\} \quad (\text{B.70})$$

であり, (u, v, x) 空間 R^3 における v 軸である (図 B.8). よって分岐集合 $\chi_F(\Sigma_F) = B_F = \{(u, v) | u = 0\}$ はコントロール平面 R^2 における v 軸である (図 B.9).

コントロール平面で斜線をつけた $u < 0$ の半平面上の点 (u, v) では $\partial^2 F / \partial x^2 = 2x = 2\sqrt{-u} > 0$ となるのでこの $(u, v, \sqrt{-u})$ が安定平衡点である ($(u, v, -\sqrt{-u})$ が安定平衡点である). よって安定平衡空間は $G_F = \{(u, v, \sqrt{-u}) | u < 0\}$ であり, 図 B.8 の斜線をつけた放物柱面の上方半平面である.

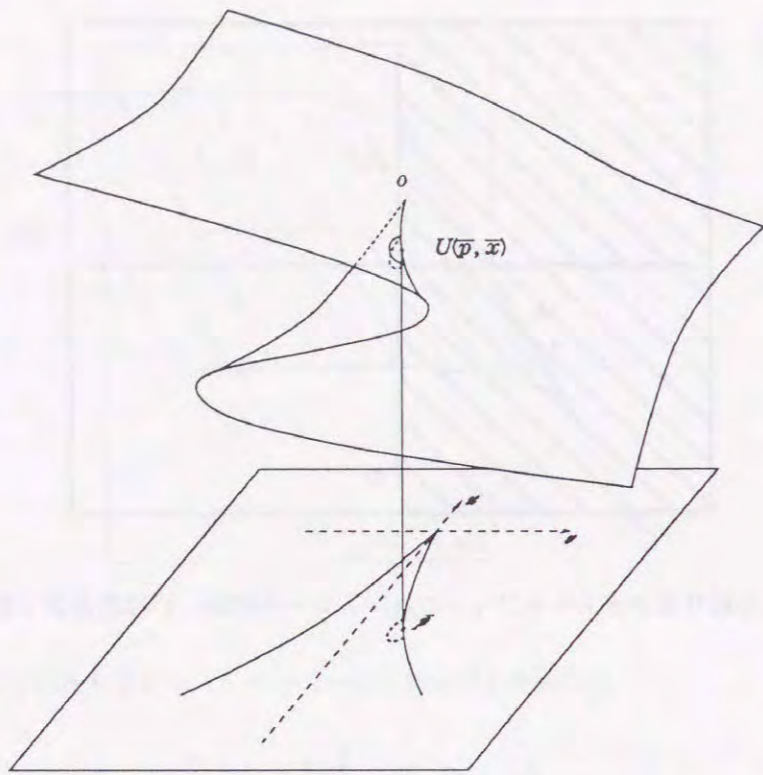


図. B.10: くさびカタストロフィー付近での局所的な折り目カタストロフィー.

また $\partial^2 F / \partial x^2 = 2 \neq 0$ であるから 2 次の特異点 Σ_F^2 は存在しないし、2 次の分岐集合 B_F^2 も存在しない。この点が同じ $k=2$ の時のくさびのカタストロフィーと際立って異なる点である。

この $k=2$ の折り目のカタストロフィーはダミーのコントロール変数である v を $v=0$ として略してみると、式としては $k=1$ の折り目のカタストロフィーと完全に一致する。つまり、図 B.8 で $v=0$ の平面で $k=2$ の M_F を切断すると $k=1$ の M_F となる。そして、系のカタストロフィーを調べてみると、 $k=1$ の折り目のカタストロフィーの場合に起こったカタストロフィーと全く同一種類のカタストロフィーしか起こらないことがわかる。すなわち、折り目のカタストロフィーは $k=2$ の場合も $k=1$ の場合もカタストロフィーとしては全く同一種類のカタストロフィーである。

同様に折り目のポテンシャル $F = x^3/3 + ux$ は $k=3$ のときも $k=4 \dots$ のときも現れるが、それらは本質的に $k=1$ の時の折り目のカタストロフィーと同種類の非本質的なカタストロフィーである。

また、図 B.10 はくさびのカタストロフィーの M_F を示しているが、この M_F の特異点の集合 Σ_F 上の原点でない任意の点 (\bar{p}, \bar{x}) を図 B.9 のようにとると、この (\bar{p}, \bar{x}) の M_F の近傍 U におけるカタ

ストロフィー写像

$$\chi_F : U \rightarrow R^2 \quad (\text{B.71})$$

は U は小さいながら図 B.8 の M_F と同じ方物柱面の形をしていることから、 $k=2$ の折り目のカタストロフィー写像とみなせることがわかる。すなわち、くさびのカタストロフィー

$$\chi_F : M_F \rightarrow R^2 \quad (\text{B.72})$$

の特異点の集合 Σ_F 上の原点でない点はすべて折り目のカタストロフィーが現れる点なのである。

参考文献

- [1] M. J. Perry, Phys. Lett. **B71**, 243 (1977).
- [2] R. Bartnik, J. McKinnon, Phys. Rev. Lett. **61**, 141 (1988).
- [3] M. S. Volkov and D. V. Galt'sov, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **50**, 315 (1989) [JETP Lett. **50** 346 (1990).]; Yad. Fiz. **51**, 1171 (1990) [Sov. J. Nucl. Phys. **51**, 747 (1990).].
- [4] P. Bizon, Phys. Rev. Lett. **64**, 2844 (1990).
- [5] H. P. Künzle and A. K. Masoud-ul-Alam, J. Math. Phys. **31**, 928 (1990).
- [6] S. Deser, Phys. Lett. **B64**, 463 (1976).
- [7] S. Coleman, *New Phenomena in Subnumber Physics.*, edited by A. Zichichi
- [8] S. A. Ridgway and E. J. Weinberg, Phys. Rev. **D52**, 3440 (1995).
- [9] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman, 1973).
- [10] M. Simpson and R. Penrose, Int. J. Theor. Phys. **7**, 183 (1973); J. M. McNamara, Proc. R. Soc. Lond. **A358**, 499 (1978); Proc. R. Soc. Lond. **A364**, 121 (1978); P. Brady and E. Poisson, Class. Quantum Grav. **9**, 121 (1992).
- [11] R. Penrose, Nuovo Cimento **1**, 252 (1969).
- [12] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [13] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D7**, 949 (1973), **D7**, 2333 (1973), **D9**, 3292 (1974).
- [14] S. W. Hawking, Nature. **248**, 30, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [15] P. T. Landsberg, in *Black hole physics* ed. V. De Sabbata and Z. Zhang, Nato Asi series **364**, 99 (1992).
- [16] P. T. Landsberg, *Thermodynamics and statistical mechanics*, Oxford University Press, Oxford, (1978), Dowker, New York (1991).
- [17] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. **D15**, 2738 (1977).
- [18] L. Smarr, Phys. Rev. Lett. **30**, 71 (1973).
- [19] D. Christodolou, Phys. Rev. Lett. **25**, 1596 (1970).
- [20] D. Christodolou and R. Ruffini, Phys. Rev. **D4**, 3552 (1971).
- [21] S. W. Hawking, Phys. Rev. **D13**, 191 (1976).
- [22] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **25**, 152 (1972).
- [23] W. G. Unruh and R. M. Wald, Phys. Rev. **D25**, 942 (1972).

- [24] R. M. Wald, in *Black hole physics* ed. V. De Sabbata and Z. Zhang, Nato Asi series **364**, 55 (1992)
- [25] D. N. Page, in *Black hole physics* ed. V. De Sabbata and Z. Zhang, Nato Asi series **364**, 185 (1992)
- [26] W. Israel, in *Black hole physics* ed. V. De Sabbata and Z. Zhang, Nato Asi series **364**, 147 (1992)
- [27] W. Israel, Phys. Rev. Lett. **57**, 397 (1986).
- [28] D. V. Galt'sov and M. S. Volkov, Phys. Lett. **B274**, 173 (1992).
- [29] H. P. Künzle, Class. Quantum. Grav. **8**, 2283 (1991).
- [30] E. E. Donets and D. V. Galt'sov, Phys. Lett. **B312**, 391 (1993).
- [31] G. Iavrelashvili and D. Maison, Phys. Lett. **B295**, 67 (1992); Nucl. Phys. **B410**, 407 (1993).
- [32] P. Bizon, Phys. Rev. **D47**, 1656 (1993).
- [33] T. Torii and K. Maeda, Phys. Rev. **D48**, 1643 (1993).
- [34] E. E. Donets and D. V. Galt'sov, Phys. Lett. **B302**, 411 (1993).
- [35] E. Witten, Phys. Rev. Lett. **38**, 121 (1977).
- [36] P. Forgács, N. S. Manton, Commun. Math. Phys. **72**, 15 (1980).
- [37] D. V. Galt'sov and A. A. Ershov, Phys. Lett. **A138**, 160 (1989).
- [38] A. A. Ershov and D. V. Galt'sov, Phys. Lett. **A150**, 159 (1990).
- [39] P. Bizon and O. T. Popp, Class. Quantum. Grav. **9**, 193 (1992).
- [40] J. A. Smoller and A. G. Wasserman, Commun. Math. Phys. **161**, 365 (1994); gr-qc/9405003.
- [41] P. Breitenlohner and D. Maison, MPI-PhT/94-20 (1994).
- [42] 鳥居 隆, 卒業論文, (1992).
- [43] N. Straumann, Z. Zhou, Phys. Lett. **B237**, 353 (1990).
- [44] N. Straumann, Z. Zhou, Phys. Lett. **B243**, 33 (1990).
- [45] G. W. Gibbons and K. Maeda, Nucl. Phys. **B298**, 741 (1988).
- [46] D. Garfinkle, G. T. Horowitz and A. Strominger, Phys. Rev. **D43**, 3140 (1991).
- [47] C. M. O'Neill, Phys. Rev. **D50**, 865 (1994).
- [48] B. R. Greene, S. D. Mathur and C. M. O'Neill, Phys. Rev. **D47**, 2242 (1993).
- [49] T. Torii, K. Maeda and T. Tachizawa, Phys. Rev. **D51**, 1510 (1995).
- [50] R. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, Phys. Rev. **D10**, 4138 (1974).
- [51] N. S. Manton, Phys. Rev. **D28**, 2019 (1983).
- [52] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, Phys. Rev. **D30**, 2212 (1984).
- [53] V. A. Matveev, V. A. Rubakov, A. N. Tavkhelidze and M. E. Shaposhnikov, Sov. Phys.-Usp. **31**, 916 (1988).

- [54] M. E. Shaposhnikov, Phys. Scr. **T36**, 183 (1991).
- [55] M. E. Shaposhnikov, Class. Quantum Grav. **10**, S147 (1993).
- [56] J. Kunz and Y. Brihaye, Phys. Lett. **B216**, 353 (1989).
- [57] T. Torii, unpublished.
- [58] T. H. R. Skyrme, Proc. R. Soc. London **260**, 127 (1961); J. Math. Phys. **12**, 1735 (1971).
- [59] H. C. Luckock and I. Moss, Phys. Lett. **B176**, 341 (1986); H. C. Luckock, in *String Theory and Quantum Gravity*, edited by H. J. de Vega and N. Sanchez (World Scientific, Singapore, 1987).
- [60] D. Lohiya and A. Mukherjee, Phys. Lett. **A126**, 307 (1988).
- [61] N. K. Glendenning, T. Kodama and F. R. Klinkhamer, Phys. Rev. **D38**, 3226 (1988).
- [62] S. Droz, M. Heusler, and N. Straumann, Phys. Lett. **B268**, 371 (1991).
- [63] M. Heusler, S. Droz, and N. Straumann, Phys. Lett. **B271**, 61 (1991).
- [64] P. Bizon and T. Chmaj, Phys. Lett. **B297**, 55 (1992).
- [65] B. Kleihaus, J. Kunz and A. Sood, Phys. Lett. **B352**, 247 (1995).
- [66] M. Heusler, S. Droz, N. Straumann, Phys. Lett. **B271**, 61 (1991).
- [67] M. Heusler, S. Droz, N. Straumann, Phys. Lett. **B285**, 21 (1992).
- [68] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. **A133**, 60 (1931).
- [69] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B79**, 276 (1974); A. M. Polyakov, JETP Lett., **20**, 194 (1974).
- [70] A. H. Guth, Phys. Rev. **D23**, 347 (1981).
- [71] K. Sato, Mon. Not. R. astr. Soc. **195**, 467 (1981).
- [72] A. Linde, Phys. Lett. **B327**, 208 (1994); A. Linde and D. Linde, Phys. Rev. **D50**, 2456 (1994).
- [73] A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **72**, 3137 (1994).
- [74] P. Breitenlohner, P. Forgács and D. Maison, Nucl. Phys. **B383**, 357 (1992).
- [75] K.-Y. Lee, V. P. Nair and E. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **68**, 1100 (1992); Phys. Rev. **D45**, 2751 (1992); General Rel. Grav. **24**, 1203 (1992).
- [76] M. E. Ortiz, Phys. Rev. **D45**, R2586 (1992).
- [77] T. Tachizawa, K. Maeda and T. Torii, Phys. Rev. **D51**, 4054 (1995).
- [78] K. Lee and E. J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **73**, 1203 (1994).
- [79] C. Lee and P. Yi, Phys. Lett. **B348**, 100 (1995).
- [80] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).
- [81] M. Fukugita, F. Takahara, K. Yamashita and Y. Yoshii, Astrophys. J. **361** part2 L1 (1990).
- [82] T. Torii, K. Maeda and T. Tachizawa, to be published in Phys. Rev. **D**.
- [83] S. Ding and A. Hosoya, unpublished.

- [84] P. G. Molnar, ZU-Th 7/95.
- [85] T. Torii, unpublished.
- [86] W. A. Hiscock, J. Math. Phys. **29**, 443 (1988).
- [87] L. F. Abbott and S. Deser, Nucl. Phys. **B195**, 76 (1982).
- [88] C. G. Callan, R. C. Myers and M. J. Perry, Nucl. Phys. **B311**, 673 (1988/89).
- [89] S. Mignemi and N. R. Stewart, Phys. Rev. **D47**, 5259 (1993).
- [90] M. Campanelli, C. O. Lousto and J. Audretsch, gr-qc/9412001.
- [91] B. A. Campbell, N. Kaloper, R. Madden and K. A. Olive, Nucl. Phys. **B51**, 137 (1993).
- [92] S. Mignemi, Phys. Rev. **D51**, 934 (1995).
- [93] B. A. Campbell, N. Kaloper and K. A. Olive, Phys. Lett. **B285**, 199 (1992).
- [94] R. C. Myers, Nucl. Phys. **B289**, 701 (1987).
- [95] E. E. Donets and D. V. Gal'tsov, Phys. Lett. **B352**, 261 (1995).
- [96] I. Moss, Phys. Rev. Lett. **69**, 1852 (1992).
- [97] D. Sudarsky and R. M. Wald, Phys. Rev. **D46**, 1453 (1992).
- [98] O. B. Zaslavskii, Phys. Lett. **A168**, 191 (1992).
- [99] M. Heusler and N. Straumann, Class. Quantum Grav. **10**, 1299 (1993).
- [100] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. **D15**, 2752 (1977).
- [101] M. Visser, Phys. Rev. **D46**, 2445 (1992).
- [102] P. C. P. Davies, Proc. R. Soc. Lond. **A353**, 499 (1977).
- [103] J. Phys. A: Math. Gen. **13**, 1113 (1980).
- [104] D. Pavon, Phys. Rev. **D43**, 2495 (1991).
- [105] A. Strominger, Phys. Rev. **D48**, 5778 (1993).
- [106] S. B. Giddings, J. Polchinski and A. Strominger, Phys. Rev. **D48**, 5784 (1993).
- [107] P. Bizon, Phys. Lett. **B259**, 53 (1991).
- [108] P. Bizon and R. M. Wald, Phys. Lett. **B267**, 173 (1991).
- [109] R. M. Wald, J. Math. Phys. **33**, 248 (1992).
- [110] D. V. Gal'tsov and M. S. Volkov, Phys. Lett. **A162**, 144 (1992).
- [111] Z. Zhou and N. Straumann, Nucl. Phys. **B360**, 180 (1991); Z. Zhou, Helv. Phys. Acta. **65**, 767 (1992).
- [112] D. V. Gal'tsov and M. S. Volkov, Phys. Lett. **B273**, 255 (1991).
- [113] I. Moss and A. Wray, Phys. Rev. **D46**, R1215 (1992).
- [114] O. Brodbeck and N. Straumann, Phys. Lett. **B324**, 309 (1994).
- [115] P. Boschung et al., Phys. Rev. **D50**, 3842 (1994).

- [116] G. Lavrelashvili and D. Maison, Phys. Lett. **B343**, 214 (1995); M. Volkov, O. Brodbeck, G. Lavrelashvili and N. Straumann, Phys. Lett. **B349**, 438 (1995).
- [117] E. Winstanley and N. E. Mavromatos, Phys. Lett. **B242**, 242 (1995).
- [118] H. Hollmann, Phys. Lett. **B338**, 181 (1994).
- [119] K. Maeda, T. Tachizawa, T. Torii and T. Maki, Phys. Rev. Lett. **72**, 450 (1994).
- [120] F. V. Kusmartsev, E. W. Meilke and F. E. Schunck, Phys. Rev. **D43**, 3895 (1991); F. V. Kusmartsev, Physics Reports **183**, 1 (1989); E. Schunck, F. V. Kusmartsev and E. W. Meilke, in *Approaches to Numerical Relativity* ed. by R. d'Inverno (Cambridge, 1991) p.130.
- [121] O. Kaburaki, I. Okamoto and J. Katz, Phys. Rev. **D47**, 2234 (1983); J. Katz, O. Kaburaki and I. Okamoto, Class. Quantum Grav. **10**, 1323 (1993).
- [122] J. M. T. Thompson, Phil. Trans. Roy. Soc. London, **292**, 1 (1979).
- [123] D. N. Page, Phys. Rev. **D25**, 1149 (1982).
- [124] P. C. W. Davies, Prog. R. Soc. Lond. **a353**, 449 (1977); Rep. Prog. Phys. **41**, 131 (1978).
- [125] L. Brown and York, Phys. Rev **D47**, 1407 (1993).
- [126] T. Akiba, H. Kikuchi and T. Yanagida, Phys. Rev. **D40**, 588 (1989).
- [127] R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis*, Benjamin (1975).
- [128] P. C. Aichelburg and P. Bizon, Phys. Rev. **D48**, 607 (1993).
- [129] P. Bizon, Acta Phys. Polon. **B25**, 877 (1994).
- [130] F. Mellor and I. Moss, Phys. Rev. **D41**, 403 (1990).
- [131] G. W. Gibbons and A. R. Steif, Phys. Lett. **B314**, 13 (1994).
- [132] M. S. Volkov, ZU-TH 32/93 (1993); ZU-TH 13/94, hep-th/9406017 (1994).
- [133] D. V. Gal'tsov and M. S. Volkov, Phys. Lett. **B256**, 17 (1991).
- [134] G. W. Gibbons and A. R. Steif, Phys. Lett. **B320**, 245 (1994).
- [135] S. Ding, Phys. Rev. **D50**, 3755 (1994).
- [136] B. Carter, in *GENERAL RELATIVITY, An Einstein Centenary Survey*, ed. by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press, 294 (1979).
- [137] R. Penrose, Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965).
- [138] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge (1972).
- [139] A. Lichnerowicz, *Theories relativistic de la gravitation et de l'électromagnetism.*, Masson (1955).
- [140] B. Carter, Commun. Math. Phys. **30**, 261 (1973).
- [141] P. Hajicek, J. Math. Phys. **16**, 518 (1975).
- [142] P. Hajicek, *Proceedings of the Marcel Grossmann Meeting on General Relativity.*, ed. R. Ruffini, North-Holland.
- [143] W. Israel, Phys. Rev. **164**, 1776 (1967).

- [144] W. Israel, *Commun. Math. Phys.* **8**, 245 (1968).
- [145] H. Müller zum Hagen, D. C. Robinson and H. J. Seifert, *Gen. Relativ. Gravit.* **4**, 53 (1973).
- [146] D. C. Robinson *Gen. Relativ. Gravit.* **8**, 695 (1977).
- [147] G. Birkhoff, *Relativity of Modern Physics*, Harvard.
- [148] B. Hoffmann, *Q. J. Math.* **4**, 179 (1933).
- [149] A. Papapetrou, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **A4**, 83 (1966).
- [150] B. Carter, *J. Math. Phys.* **10**, 70 (1969).
- [151] B. Carter, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 331 (1971).
- [152] B. Carter, *Commun. Math. Phys.* **30**, 261 (1973).
- [153] M. Morse and H. Heinze, *Ann. Math.* **96**, 625 (1945).
- [154] F. J. Ernst, *Phys. Rev.* **167**, 175 (1968).
- [155] F. J. Ernst, *Phys. Rev.* **167**, 1175 (1968).
- [156] B. Carter, *Commun. Math. Phys.* **17**, 1223 (1970).
- [157] D. C. Robinson, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 905 (1975).
- [158] D. C. Robinson, *Phys. Rev.* **D10**, 458 (1974).
- [159] J. R. Ipser, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 529 (1971).
- [160] R. Wald, *Static axially symmetric electromagnetic fields in Kerr spacetime*. Ph. D thesis, Princeton University. (1972)
- [161] S. K. Bose and H. Y. Wang, *Phys. Rev.* **D10**, 1675 (1974).
- [162] 野口 広, *カタストロフイー*, サイエンス社, (1977).
- [163] T. Poston and I. Stewart, *Catastrophe Theory and Its Applications*, Pitman, London, (1978).
- [164] J. G. Dubois et J. P. Dufour, *La théorie des catastrophes, I.* *Ann. Inst. Henri Poincaré*, (1974) 133-134.
- [165] E. C. Zeeman, *Application of catastrophe theory*, Conference on manifold, University of Tokyo Press, 11 (1973).

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者
論文○ (報文)	Black holes with non-Abelian hair and their thermodynamical properties Physical Review D48, p.1643 1993年8月 K. Maeda
論文 (速報)	Stability of Non-Abelian Black Holes and Catastrophe Theory Physical Review Letter 72, p.450 1994年1月 K. Maeda T. Tachizawa
論文○ (報文)	Non-Abelian black holes and catastrophe theory: Neutral type Physical Review D51, p.1510 1995年2月 K. Maeda T. Tachizawa
論文 (報文)	Non-Abelian black holes and catastrophe theory. II. Charged type Physical Review D51, p.4054 1995年4月 T. Tachizawa K. Maeda
論文○ (速報)	Cosmic Colored Black Holes Physical Review D (掲載決定) 1995年 K. Maeda T. Tachizawa
論文 (国際会議)	Stability of Non-Abelian Black Holes and Catastrophe Theory <i>Proceedings of 7th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity</i> , (World Scientific, 掲載決定) T. Tachizawa K. Maeda
論文 (国際会議)	Monopole Black Hole and Catastrophe Theory <i>Proceedings of 6th Seminar Quantum Gravity</i> (World Scientific, 掲載決定) T. Tachizawa K. Maeda
論文 (解説)	非可換場の自己重力系におけるブラックホール解の数値解析 早稲田大学情報科学センター 研究紀要 19号 (掲載決定) 立澤尚史 前田恵一
論文○ (解説)	新しいブラックホール解とカタストロフイー理論 数理科学, 第32巻, p.30 1994年9月

研究業績

鳥居 隆

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者			
講演 (学会)	Black Holes with Non-Abelian Hair and Their Thermodynamical Properties	日本物理学会	1993年3月	前田恵一
講演 (学会)	Einstein-Yang-Mills-Higgs 系のBlack Hole	日本物理学会	1993年4月	立澤尚史 前田恵一
講演 (学会)	新しいブラックホール解とその性質	日本天文学会	1993年5月	前田恵一
講演 (学会)	non-Abelian black holeの安定性とカタストロフィ	日本物理学会	1993年10月	立澤尚史 前田恵一 牧 琢弥
講演 (学会)	New Selfgravitating Sphaleron and Black Hole Solution	日本物理学会	1994年3月	立澤尚史 前田恵一 牧 琢弥
講演 (学会)	non-Abelian black holeとカタストロフィII	日本物理学会	1994年3月	立澤尚史 前田恵一 牧 琢弥
講演 (学会)	Cosmic Colored Black Holes	日本物理学会	1995年3月	前田恵一 立澤尚史
講演 (学会)	non-Abelian black holeとカタストロフィIII	日本物理学会	1995年3月	立澤尚史 前田恵一
講演 (学会)	Stringy Black Holes	日本物理学会	1995年9月	前田恵一 矢島広樹

研究業績

鳥居 隆

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者			
講演 (研究会)	Black Holes with Non-Abelian Hair and Their Thermodynamical Properties	第2回「一般相対論と重力」研究会	1993年1月	前田恵一
講演 (研究会)	Non-Abelian Black Holes I (Neutral Case)	第3回「一般相対論と重力」研究会	1994年1月	立澤尚史 前田恵一
講演 (研究会)	Non-Abelian Black Holes II (Charged Case)	第3回「一般相対論と重力」研究会	1994年1月	立澤尚史 前田恵一
講演 (研究会)	Cosmic Colored Black Holes	第4回「一般相対論と重力」研究会	1994年11月	立澤尚史 前田恵一
				以上

理工社謹製