早稲田大学大学院理工学研究科

博　士　論　文　概　要

論　文　題　目

Relations of the Weyl groups of
the extended affine root systems
$A_l^{(1,1)}, B_l^{(1,1)}, C_l^{(1,1)}, D_l^{(1,1)}$

拡大 affine Weyl 群
$A_l^{(1,1)}, B_l^{(1,1)}, C_l^{(1,1)}, D_l^{(1,1)}$
の 関係式

申　請　者
竹 林　　忠 吉
TADAYOSHI TKEBAYASHI

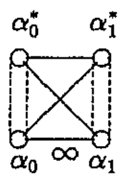
1996年 7月

拡大 affine root 系 (elliptic root 系 ともいう) は, 斎藤 恭司 氏 に よって導入 されたもの である。 半定値 で 2 次元 の radical を持つ 内積 に 属する一般化された root 系 で, それは radical が 1 次元 である affine root 系 の 拡張 であり, 有理 二重点 と 呼ばれる 特異点 が 有限 type の root 系に よって 分類 される のと 同様に, 拡大 affine root 系 によって楕円型 特異点 の 構造 を 記述 し, 分類 することができる。有限 type や affine type の root 系 の Weyl 群 は Coxeter 群 と 呼ばれ 関係式 が よく知られている。拡大 affine root 系 の Weyl 群 は Coxeter 群 ではなく群 の 定義関係式 も 知られていなかった。 本論文 では, この 拡大 affine Weyl 群 (elliptic Weyl 群) の 関係式 を 拡大 affine root 系 $A_l^{(1,1)}, B_l^{(1,1)}, C_l^{(1,1)}, D_l^{(1,1)}$ の 場合 に 考察 し, 一般 Coxeter 群 (斎藤氏 の 助言 による) という 観点 から 定義 関係式 を 書き下した。それは, それぞれの type の Dynkn diagram の 頂点に 対応する reflection (鏡映) を生成元 とし それらの 関係式 は Dynkin diagram の 部分 diagram に 対して の 特有 の 関係式 (一般 Coxeter 関係式) と root 系の type による Coxeter 変換 と 結び付いている 関係式 の 2 種類 から成り立っている。

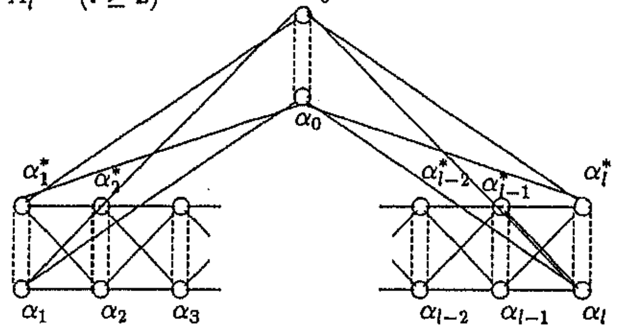
第 1 章 では, 本論文 の 結果 を 述べる。$A_l^{(1,1)}, B_l^{(1,1)}, C_l^{(1,1)}, D_l^{(1,1)}$ の root 系 と Dynkin diagram は 次 の ようになる。 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{l+1}$ を実 ベクトル 空間 の 正規直交基底 とし, radical を $\mathbf{R}a \oplus \mathbf{R}b$ とする。.

$$A_l^{(1,1)}, \qquad \Phi = \{\ \pm(\epsilon_i - \epsilon_j) + nb + ma \quad (1 \le i < j \le l+1), \quad (n, m \in \mathbf{Z})\ \},$$

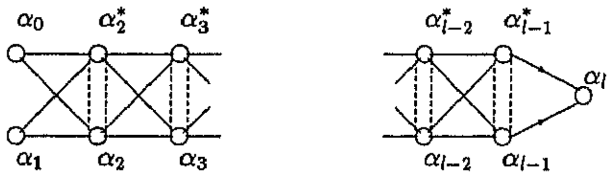
$A_1^{(1,1)}$



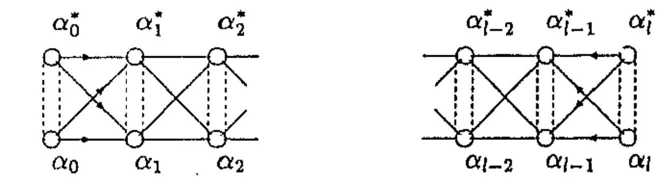
$A_l^{(1,1)}$ $(l \ge 2)$



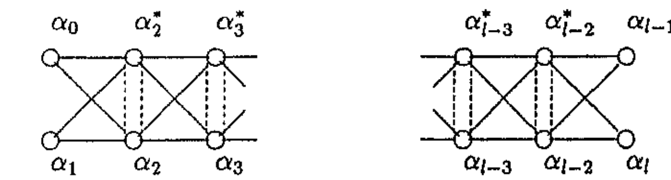
$$B_l^{(1,1)}\ (l \ge 3), \qquad \Phi = \{\pm\epsilon_i + nb + ma \quad (1 \le i \le l) \quad (n, m \in \mathbf{Z}),$$
$$\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j + nb + ma \quad (1 \le i < j \le l) \quad (n, m \in \mathbf{Z})\}.$$



$$C_l^{(1,1)}\ (l \ge 2), \qquad \Phi = \{\pm 2\epsilon_i + nb + ma \quad (1 \le i \le l) \quad (n, m \in \mathbf{Z}),$$
$$\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j + nb + ma \quad (1 \le i < j \le l), \quad (n, m \in \mathbf{Z})\}.$$



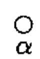
$$D_l^{(1,1)}\ (l \ge 4), \qquad \Phi = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j + nb + ma \ \ (1 \le i \le l), \quad (n, m \in \mathbf{Z})\}.$$



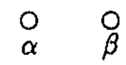
そして, Weyl 群 の 関係式 は Dynkin diagram の 頂点 の 結合 の 仕方 により, 次 の ように なる。

定理

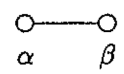
$w_\delta,\ w_\delta^*$ を それぞれ root δ, δ^* に 対する reflection とすると 次の 関係式 が 成り立つ。



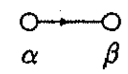
$\Longrightarrow\ w_\alpha^2 = 1,$



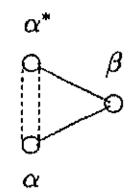
$\Longrightarrow\ (w_\alpha w_\beta)^2 = 1$



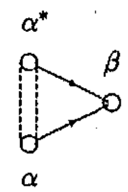
$\Longrightarrow\ (w_\alpha w_\beta)^3 = 1,$



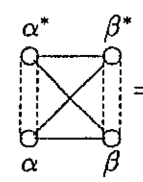
$\Longrightarrow\ (w_\alpha w_\beta)^4 = 1$



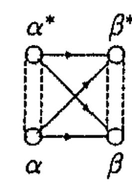
$\Longrightarrow\ (w_\alpha w_\beta w_\alpha^* w_\beta)^3 = 1,$



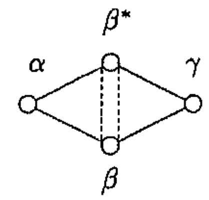
$\Longrightarrow\ (w_\alpha w_\beta w_\alpha^* w_\beta)^2 = 1$



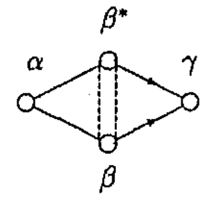
$\Longrightarrow$ $w_\alpha w_\beta^* w_\alpha = w_\beta w_\alpha^* w_\beta,$ and $w_\alpha^* w_\beta w_\alpha^* = w_\beta^* w_\alpha w_\beta^*,$



$\Longrightarrow\ w_\alpha^* w_\beta w_\alpha^* = w_\alpha w_\beta^* w_\alpha$



$\Longrightarrow\ (w_\alpha w_\beta^* w_\alpha w_\beta w_\gamma w_\beta)^2\ =\ 1,$



$\Longrightarrow\ (w_\alpha w_\beta^* w_\alpha w_\beta w_\gamma w_\beta)^2\ =\ 1$

さらに 各々の type に 応じて, 次の 関係式 が 成り立つ。

$$
\begin{array}{lcl}
A_l^{(1,1)} & \Longrightarrow & w_0 w_0^* w_1 w_1^* \cdots\cdots w_{l-1} w_{l-1}^* w_l w_l^* \ = \ 1 \\
B_l^{(1,1)} & \Longrightarrow & (w_0 w_1 w_2 w_2^* w_3 w_3^* \cdots\cdots w_{l-1} w_{l-1}^* w_l)^2 \ = \ 1 \\
C_l^{(1,1)} & \Longrightarrow & w_0 w_0^* w_1 w_1^* \cdots\cdots w_{l-1} w_{l-1}^* w_l w_l^* \ = \ 1 \\
D_l^{(1,1)} & \Longrightarrow & (w_0 w_1 w_2 w_2^* w_3 w_3^* \cdots\cdots w_{l-2} w_{l-2}^* w_{l-1} w_l)^2 \ = \ 1.
\end{array}
$$

最後 の 各々の type に よる 関係式は, 斎藤氏 の Coxeter 変換 の 理論 と結び付いている。第 2 章 以降では この 定理 の 証明 を 述べる。

まず 第 2 章 では, affine Weyl 群 について 復習 し, 特に affine Weyl 群 は 有限 type の Weyl 群 と 平行移動 の 作る 群 との 半直積と 捉えられることから affine root 系 $\tilde{A}_l$ の場合 について Weyl 群 の 関係式 を 有限 type の A_l の Weyl 群 の 生成元 $w_1, \cdots, w_l$ と affine Weyl 群 の 場合 の 生成元 として 付け加える 元 w_0 の作用で 登場 する一つの 平行移動 T を用いて 書き下す。すなわち, $\alpha_0 = -(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l)+b$, α_i $(1 \leq i \leq l)$ を affine $\tilde{A}_l$ の root 系 の basis とし, 対応する reflection を $w_i = w_{\alpha_i}$ $(0 \leq i \leq l)$ とするとき $w_0 = w_1 w_2 \cdots w_{l-1} w_l w_{l-1} \cdots w_2 w_1 T$ と 表現 され, これより $w_1, \ldots, w_l, T$ を $\tilde{A}_l$ の Weyl 群 の 生成元 と見ることができ, Coxeter 群 として よく 知られている $w_0, \ldots, w_l$ の 関係式 を $w_1, \ldots, w_l, T$ で 書きなおす。

第 3 章 では, この結果を 用いて拡大 affine root 系 $A_l^{(1,1)}$ の 場合 に Weyl 群 の関係式 を 決定 する。まず, Weyl 群 の 生成元 を $w_1, \cdots, w_l, T$ に 別方向 の 平行移動 R を 加えたものとする。このとき, T が w_i 達 と 満たす 関係式 を R も 満たす。そしてこれらの 間の 必要 最小限 の 関係式 を 書き下し さらにそれらを $w_0, w_1, \cdots, w_l, w_{l+1}$ で 書きなおして得られたのが $A_l^{(1,1)}$ の Weyl 群 の 関係式 (定義 関係式) である。ここで $w_{l+1} = w_1 w_2 \cdots w_{l-1} w_l w_{l-1} \cdots w_2 w_1 R$ と 表現でき, w_{l+1} は root $\alpha_{l+1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l) + a$ に 対応する reflection であり, α_0, α_i $(1 \leq i \leq l)$, α_{l+1} は, $A_l^{(1,1)}$ の basis となる。そして さらに, この 定義 関係式 から Dynkin diagram の すべての 頂点 に対応する reflection (それらは 代数的 に 独立 ではない) の 関係式 を調べた のが Dynkin diagram から 得られる 関係式 である。

第 4 章 では, $A_l^{(1,1)}$ の 場合と 同様 の 方法で $B_l^{(1,1)}, C_l^{(1,1)}, D_l^{(1,1)}$ の 場合 に Weyl 群 の 関係式 を 決定 している。 そして, 第 3 章 の 結果とを 組み合せると $A_l^{(1,1)}, B_l^{(1,1)}, C_l^{(1,1)}, D_l^{(1,1)}$ の Dynkin diagram に 現れる 部分 diagram が 持っている 関係式 は 主結果 の 通り となり, これらと それぞれの type が 持つ Coxeter 変換 と 結び付いている 関係式 ((すべての頂点に対応する *reflection* 全体の積)$^* = 1$)) を 組み合せる ことにより Weyl 群 の すべての 関係式 が 得られる。この 論文 の 証明では, 個々の type の root 系 に 対して Weyl 群 の 関係式 を 調べ それらを 統一的に 眺めてみると 部分 diagram の 持つ 関係式 は すべて 同じになっているというものである。