早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Polynomial invariants of periodic knots

(周期的な結び目の多項式不変量)

申 請 者

横 田 佳 之

Yoshiyuki Yokota

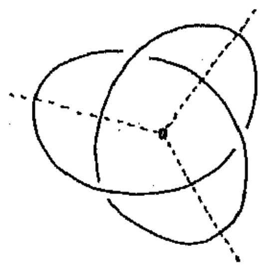
平成 4 年 5 月

本論文は、"knotsの対称性"が、V.F.R. Jones等によって発見された一連の多項式不変量に如何なる影響を与えるか？という問題について研究したものである。
対称性を持つknotの、多項式不変量に現れる不思議な現象は、与えられたknotが対称性を持つかどうかを判定する強力な武器となるのみならず、未だその幾何学的意味づけがなされていない多項式不変量の謎を解く、ひとつのヒントを与えているのかも知れない。まず"knotの対称性"を定義しよう。

定義.(periodic knot) 3次元球面S^3内のknot Kが"r-periodic"であるとは、S^3の周期rを持つ同相写像fが存在して、

(i) $f(K)=K$ (ii) $\mathrm{Fix}(f)\cong S^1$ (iii) $\mathrm{Fix}(f)\cap K=\phi$

を満たすことをいう。



3-periodic knot

第一章では、先ずperiodic knotsのJones多項式を調べる。J. Murakami等によって与えられた、Jones多項式の"指標公式"を利用することによって、よく知られていたK. MurasugiやP. Traczykの定理を拡張した結果を得る。

定理1. rを素数とし、Kを周期写像fを持ったr-periodic knotとする。KのJones多項式を$V_K(t)$と書くと、

(i) $lk(K,\mathrm{Fix}(f))$が奇数なら

$$V_K(t)-V_K(t^{-1})\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\,(r,\ t^{2r}-1).$$

(ii) $lk(K,\mathrm{Fix}(f))$が偶数なら

$$V_K(t)-V_K(t^{-1})\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\,(r,\ t^{r}-1),$$
$$V_K(t)+V_K(t^{-1})\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\,(r,\ (t^{r}+1)/(t+1)).$$

この定理の弱点は、$r<5$では本質的に意味が無い点である。Jones多項式は一変数のみの不変量であるため、情報量が少いのは仕方がない。そこで第二章では、Jones多項式を含む二変数の多項式不変量である"Skein多項式"を考える。ここではrを奇素数とし、Kをr-periodic knotとする。KのSkein多項式$P_K(a,z)$を

$$P_K(a,z)=\sum_i P_i(a;K)z^{i-1}, \qquad P_i(a;K)\in\mathbb{Z}[a^{\pm1}]$$

と書いたとき、$P_0(a;K)$が面白い"性質"を持つことを、P. Traczykが発見した。彼は他の$P_i(a;K)$も同様の"性質"を持つだろうと予想していたが、実際はもっと強いことがわかる。

定理2. 上の仮定のもとで、整数α_iが存在して、

$$P_i(a;K)\equiv\alpha_i\cdot P_0(a;K) \qquad \mathrm{mod}\ r$$

が成立する。ただし、$1\le\alpha_i\le r-2$.

証明は定理2の性質がtorus knotのSkein多項式に現れること、そして一般のperiodic knotとtorus knotを結ぶ同変な変形のもとで保たれることを示して完了する。
第三章では、もうひとつの二変数多項式不変量、所謂"Kauffman多項式"を考える。Periodic knotのKauffman多項式に関する結果は少なく、J.H. Przytyckiが定理1と同じ型のcriterionを導いたのみである。ここでは、Kauffman多項式にもSkein多項式と同様の現象が現れることを見る。すなわち

定理3. rを奇素数、Kをr-periodic knotとする。KのKauffman多項式$F_K(a,z)$を

$$F_K(a,z)=\sum_i F_i(a;K)z^{i-1}, \qquad F_i(a;K)\in\mathbb{Z}[a^{\pm1}]$$

と分解する。すると先ず、

$$F_1(a;K) \quad \mathrm{mod}\ r \ \in\mathbb{Z}[a^{\pm r}]$$

が判る。さらに整数β_iが存在して、

$$F_i(a;K)\equiv\beta_i\cdot F_0(a;K) \qquad \mathrm{mod}\ r$$

が成立する。ただし、$2\le i\le r-2$。

証明の手順はSkein多項式と同様であるが、torus knotsのSkein多項式がV.F.R. Jonesによって求められているのに対してtorus knotsのKauffman多項式は未だ知られておらず、そのためJ. Murakamiによって与えられたKauffman多項式の"指標公式"と、"Brauer代数"及びそのq-analogueである"Birman-Wenzel-Murakami代数"の既約指標、を用いて多項式の形を書き下す必要がある。第二、三章とも巧妙な計算が展開される。
ここで定理2と定理3を並べると、一瞥しただけでその類似性が見てとれる。これが何を意味するのか、さらに一歩踏み込んだのが第四章である。まず、

$$J_K(a;z)=F_K(a;z)-P_K(a;z)$$

と定義し、

$$J_K(a;z)=\sum_i J_i(a;K)z^i$$

と書く。ただし$J_i(a;K)\in\mathbb{Z}[a^{\pm1}]$。

定理4. rを奇素数、Kをr-periodic knotとする。このとき

$$J_0(a;K) \mod r \in \mathbb{Z}[a^{\pm r}]$$

が判る。さらに，$1 \leq i \leq r-2$ に対して

$$J_i(a;K) \equiv 0 \mod r$$

が成立する。

上の定理の述べるところは、periodic knotsに関しては、Skein多項式とKauffman多項式はかなりの部分で"一致"するという事実である。さらに

$$J_{r-2}(a;K) = F_{r-1}(a;K) - P_{r-1}(a;K) \equiv 0 \mod r$$

に注意する。定理2，定理3で捉えられなかった $P_{r-1}(a;K)$，$F_{r-1}(a;K)$が、$J_K(a,z)$を考えることによって互いに一致する事実が見出せたわけである。

最後に例を示そう。Kを下の7-periodic knotとする。

$$\begin{aligned} P_K(a,z) = {} & (5a^{17}-21a^{15}+28a^{13}-12a^{11})z^{-1} \\ & +(10a^{17}-70a^{15}+126a^{13}-66a^{11})z \\ & +(6a^{17}-84a^{15}+210a^{13}-132a^{11})z^3 \\ & +(a^{17}-45a^{15}+165a^{13}-121a^{11})z^5 \\ & + \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_K(a,z) = {} & (5a^{17}-21a^{15}+28a^{13}-12a^{11})z^{-1} \\ & +(21a^{16}-48a^{14}+28a^{12}) \\ & +(10a^{17}-70a^{15}+126a^{13}-66a^{11})z \\ & +(70a^{16}-196a^{14}+126a^{12})z^2 \\ & +(6a^{17}-84a^{15}+210a^{13}-132a^{11})z^3 \\ & +(84a^{16}-294a^{14}+210a^{12})z^4 \\ & +(a^{17}-45a^{14}+165a^{13}-121a^{11})z^5 \\ & +(45a^{16}-210a^{14}+165a^{12})z^6 \\ & + \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ J_K(a,z) = {} & 21a^{16}-48a^{14}+28a^{12} \\ & +(70a^{16}-196a^{14}+126a^{12})z^2 \\ & +(84a^{16}-294a^{14}+210a^{12})z^4 \\ & +(45a^{16}-210a^{14}+165a^{12})z^6 \\ & + \cdots\cdots \end{aligned}$$