早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

Studies of coupled nonlinear Schrödinger equations and nonlinear scalar field equations via variational methods

変分法を用いた非線形連立シュレディンガー方程式系，非線形スカラー場方程式の研究

申　請　者

生駒	典久
IKOMA	Norihisa

数学応用数理専攻 非線形解析研究

2011 年 2 月

本論文では $\mathbf{R}^N$ における非線型楕円型方程式および方程式系に対する解の存在, 多重度および正値解の一意性を研究している．扱う問題は非線型 Schrödinger 方程式系

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \mu_1 u^3 + \beta u v^2 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ -\Delta v + V_2(x)v = \mu_2 v^3 + \beta u^2 v & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ \ \ u(x),\ v(x) \in H^1(\mathbf{R}^N) \end{cases} \tag{$*$}$$

および次の非線型スカラー場方程式 (nonlinear scalar field equation) である.

$$-\Delta u = g(|x|, u) \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \qquad u \in H^1(\mathbf{R}^N). \tag{$**$}$$

ここで $(*)$ において N は 3 以下の自然数, μ_1, μ_2, β は正の実数, ポテンシャル関数 $V_1(x)$, $V_2(x)$ は正値の C^1-級関数であり, $(**)$ において $N \geq 2$, $g(r,\xi)$ は $[0,\infty) \times \mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への実数値連続関数である.

これらの問題に対して本論文では変分的アプローチにより, 種々の結果を得ている. 論文の構成に従い, その内容を概観すると共にその評価を以下に述べる.

第 1 章では, 本論文の主要な結果を述べると共に先行結果, バックグラウンドを説明している．続く第 1 部は 3 つの章 (第 2–4 章) よりなり, 非線型 Schrödinger 方程式系 $(*)$ を扱っている．非線型 Schrödinger 方程式系 $(*)$ は非線型光学, 2 成分 Bose-Einstein 凝縮の数理モデルに現れ, Ambrosetti-Colorado (2007), Bartsch-Wang (2006), Lin-Wei (2005), Sirakov (2007) らにより研究が始められ, ポテンシャル関数 $V_1(x)$, $V_2(x)$ が定数関数の場合を中心に現在非常に活発に研究されている問題である.

この問題を研究する際に注意すべき点として $(*)$ は $(u(x), 0)$, $(0, v(x))$ の形の 1 成分が恒等的に 0 の解をもつ．このような解は半自明解 (semi-trivial solution) と呼ばれる．このような半自明解は $-\Delta u + V_1(x)u = \mu_1 u^3$ in $\mathbf{R}^N$ の恒等的に 0 でない解を求めることにより比較的容易に求めることができ, 方程式系 $(*)$ の解としては興味あるものではない．両成分共に 0 でない解を本論文では “非自明解” と呼び, その存在問題等を議論している．その際, $(*)$ のもつ変分構造 — すなわち $(*)$ の解は次の汎関数

$$\begin{aligned} I(u,v) =& \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + V_1(x)u^2 + V_2(x)v^2\,dx \\ &- \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^N} \mu_1 u^4 + \mu_2 v^4 + 2\beta u^2 v^2\,dx :\ H^1(\mathbf{R}^N) \times H^1(\mathbf{R}^N) \to \mathbf{R} \end{aligned}$$

の臨界点として特徴づけられる — を利用して行われる.

まず第 2 章において $V_1(x)$, $V_2(x)$ が x に依存する場合を扱い, 非自明解の存在を論じている．主要な結果は次の定理である．ここでは係数 μ_1, μ_2 を固定し, β をパラメーターとして扱っている.

定理 1. $V_1(x)$, $V_2(x)$ は次をみたすとする.

$$\inf_{x \in \mathbf{R}^N} V_i(x) > 0, \qquad \lim_{|x| \to \infty} V_i(x) = \sup_{x \in \mathbf{R}^N} V_i(x) \quad (i = 1, 2).$$

このとき, 正の数 β_1, β_2 $(\beta_1 < \beta_2)$ が存在して, $\beta \in (0, \beta_1) \cup (\beta_2, \infty)$ のとき $(*)$ は非自明解をもつ.

さらに $\beta \in (\beta_2, \infty)$ のとき, 得られた非自明解はエネルギー最小解 (least energy solution) となること, また $\beta \in (0, \beta_1)$ のとき, エネルギー最小解は半自明解であり, 定理 1 で得られた解は最小エネルギー解ではないことも示されている.

ポテンシャル $V_1(x), V_2(x)$ が共に正の定数のとき, 球対称な関数の空間 $H_r^1(\mathbf{R}^N) = \{u(x) \in H^1(\mathbf{R}^N);\ u(x)$ は $|x|$ のみに依存 $\}$ において非自明解を求めることができ, 定理 1 に対応する結果は Ambrosetti-Colorado (2007), Lin-Wei (2005), Sirakov (2007) により得られている. 一方定理 1 では, 球対称な関数空間で解を求めることは原理的に不可能であり, 先行結果とは異なる議論が必要となる. 申請者は concentration-compactness の手法を発展させ, 活用することにより存在結果を得ている. この結果はポテンシャルが空間変数 x に依存する場合の基本的かつ重要な結果であり高く評価できる.

また第 3 章では非自明な正値解の一意性を研究している. ここで得られた結果は $V_1(x), V_2(x)$ が共に球対称, $\beta > 0$ が十分小という非常に限定的な場合を扱っているが, 非自明正値解の一意性を初めて示したものであり, また解の非退化性も合わせて得ており独創性の高いものである.

第 4 章では $(*)$ を特異摂動問題の設定の下で研究している. すなわち,

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + V_1(x) u = \mu_1 u^3 + \beta u v^2 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta v + V_2(x) v = \mu_2 v^3 + \beta u^2 v & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ u(x),\ v(x) \in H^1(\mathbf{R}^N) \end{cases} \qquad (*)_\varepsilon$$

を考え, $\varepsilon > 0$ が小さいときの解 $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ の存在および $\varepsilon \to 0$ のときのその挙動を研究している. その際, 次の $(*)_{(C_1,C_2)}$ が適当なスケーリング後, 極限問題として現れ重要な役割を果たす.

$$\begin{cases} -\Delta u + C_1 u = \mu_1 u^3 + \beta u v^2 & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ -\Delta v + C_2 v = \mu_2 v^3 + \beta u^2 v & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ u(x),\ v(x) \in H^1(\mathbf{R}^N) \end{cases} \qquad (*)_{(C_1,C_2)}$$

ここで, $C_1, C_2 > 0$ は定数である.

次の仮定の下で考える.

(A1) $0 < \beta < \sqrt{\mu_1 \mu_2}$.

(A2) ある矩形 $A = [a_{10}, a_{11}] \times [a_{20}, a_{21}] \subset (0, \infty)^2$ が存在して, 任意の $(C_1, C_2) \in A$ に対して $(*)_{(C_1,C_2)}$ の球対称な半自明解 $(\omega_1(x), 0)$, $(0, \omega_2(x))$ は $H_r^1(\mathbf{R}^N) \times H_r^1(\mathbf{R}^N)$ における非退化臨界点であり, その Morse 指数は 1.

これらの条件は $\beta > 0$ が十分小のとき成立する. 申請者はこれらの条件の下で各 $(C_1, C_2) \in A$ に対して $(*)_{(C_1,C_2)}$ は非自明な正値解を持つことを示し, さらに得られた解の臨界値 $b(C_1, C_2)$ のミニマックスによる特徴付けおよび (C_1, C_2) に関する連続性を得ている.

ポテンシャル $V_1(x), V_2(x)$ に対して $m(x) = b(V_1(x), V_2(x))$ とおき, 次を仮定する.

(A3) すべての $x \in \mathbf{R}^N$ に対して $(V_1(x), V_2(x)) \in A$.

(A4) ある有界開集合 $\Lambda \subset \mathbf{R}^N$ が存在して $\inf_{x \in \Lambda} m(x) \,(\equiv m_0) < \inf_{x \in \partial\Lambda} m(x)$.

次の定理が第 4 章の主要な結果である.

定理 2. $N=2,3$ とし (A1)–(A4) を仮定する．このとき $\varepsilon_0>0$ が存在し $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ に対して $(*)_\varepsilon$ は非自明な正値解 $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ をもつ．さらに点列 $(P_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}\subset\mathbf{R}^N$ が存在して, 部分列 $\varepsilon_j\to 0$ $(j\to\infty)$ を選ぶと $m(P_0)=m_0$ をみたす $P_0\in\Lambda$ が存在して $P_{\varepsilon_j}\to P_0$ および

$$(u_{\varepsilon_j}(\varepsilon_j x+P_{\varepsilon_j}),v_{\varepsilon_j}(\varepsilon_j x+P_{\varepsilon_j}))\to(w_1(x),w_2(x))\quad\text{in } H^1(\mathbf{R}^N)\times H^1(\mathbf{R}^N)$$

が成立する．ここで, $(w_1(x),w_2(x))\in H^1_r(\mathbf{R}^N)\times H^1_r(\mathbf{R}^N)$ は $(*)_{(V_1(P),V_2(P))}$ の非自明解である．

特異摂動問題 $(*)_\varepsilon$ に対しては Montefusco-Pellaci-Squassina (2008) らにより, $V_1(x)$ あるいは $V_2(x)$ の臨界点において凝集し, スケーリング後, 極限をとると極限方程式系の半自明解に収束する $(*)_\varepsilon$ の解の構成が行われてきた．定理 2 で得られた解はスケーリング後, 極限として極限問題 $(*)_{(V_1(P_0),V_2(P_0))}$ の非自明解が現れ, 従来得られたものとは異なる方程式系として興味ある凝集解を得ており, 高く評価できる．

定理 2 の証明は $(*)_\varepsilon$ に対応する汎関数 $I_\varepsilon(u,v)$ の余次元 2 の集合 $\mathcal{M}_\varepsilon=\{(u,v);\ u\neq 0,\ v\neq 0,\ I'_\varepsilon(u,v)(u,0)=I'_\varepsilon(u,v)(0,v)=0\}$ 上の極小点の存在を示すことにより行われる．その際, 臨界点の存在が期待される集合の近傍での $\|I'_\varepsilon(u,v)\|_{H^{-1}}$ の評価が本質的であり, 極限方程式系の精緻な解析等が有効に用いられている．ここで用いられた方法は Byeon-Jeanjean (2007) により開発された方法を発展させたものであり, 他の非線型方程式系に対するさらなる応用が期待され, 高く評価できる．

第 2 部 (第 5–6 章) では非線型スカラー場方程式 $(**)$ を研究し, 球対称解の存在を示している．まず第 5 章では非線型項 g が x に依存しない場合に $(**)$ の非自明解の存在問題を扱い, 若干の拡張と共に Berestycki-Lions (1983) らの結果に別証明を与えている．Berestycki-Lions では $(**)$ を制限付き極値問題に書き直し解析されるが, ここでは方程式の scaling property に着目し $\mathbf{R}\times H^1_r(\mathbf{R}^N)$ における新しい変分問題を導入することにより, 制限付き極値問題に帰着することなく峠の定理による証明を可能としている．また第 6 章では非線型項が $|x|$ に依存する場合を monotonicity method を用いて Li-Li (1993) らの結果を拡張している．これらの結果は非線型スカラー場方程式に新しい知見を与えており評価できる．

以上述べてきたように, 申請者は非線型 Schrödinger 方程式系および非線型スカラー場方程式に対して極めて精緻な研究を行い価値ある成果を得ている．非線型 Schrödinger 方程式系に対しては, ポテンシャルが x に依存する場合に存在定理を示し, さらに特異摂動問題の設定の下でも研究を行い, 従来知られていなかった新しい凝集解のクラスを見出している．また証明で用いられている方法もオリジナリティーの極めて高いものである．また非線型スカラー場方程式に対しても新しいアプローチを与え, 既存の結果の一般化に成功している．さらにここで用いられたアプローチは他の問題への応用が十分に期待される．よって本論文を博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める．

2011 年 1 月
審査員

(主査)	早稲田大学教授	理学博士 (早稲田大学)	田中 和永
	早稲田大学教授	理学博士 (東京大学)	大谷 光春
	早稲田大学教授	理学博士 (京都大学)	小澤 徹
	早稲田大学教授	理学博士 (名古屋大学)	山田 義雄