

博士論文概要

論文題目

Studies on verified computations for solutions
to elliptic boundary value problems
楕円型境界値問題の解の精度保証付き数値計算
に関する研究

申請者

Akitoshi	TAKAYASU
高安	亮紀

数学応用数理専攻 数値解析研究

2011年12月

(受理申請する部科主任会開催年月を記入)

理工学をはじめとする各分野に現れる数学問題についてコンピューターを用いて数値的に‘正しく’解くことを精度保証付き数値計算という。本論文は非線形常微分方程式の2点境界値問題と楕円型境界値問題の精度保証付き数値計算法についてまとめたものである。本研究において微分方程式の精度保証付き数値計算とは、「得られた数値解を利用した問題の解の存在証明」を行うこと、その存在範囲となる「厳密な誤差評価を与える」ことの2つを同時に行う数値計算法を指している。これは数値計算の枠を超えた研究であり、得られた数値解を中心に誤差の範囲内で解の局所一意存在をコンピューターで示すことができる。本研究の特徴的な点は関数解析の知識を利用し、無限次元の問題に対し、有限回の操作しかできないコンピューターを用いて厳密な議論を展開するということである。有限と無限の誤差は近似手法の誤差評価式を利用して把握できる。さらにコンピューター上の数値計算はIEEE754標準規格（電子計算機における数の表現、四則演算と平方根の演算結果精度、丸め、例外を定めた規格）の浮動小数点数を基礎としていることから、計算に生じる計算誤差が区間演算を用いると把握可能である。すなわち微分方程式の数値計算に生じるすべての誤差を把握することが可能になり、これと不動点定理を組み合わせることで解の存在がコンピューター上で数学的に証明可能になる。

本論文では非線形常微分方程式の2点境界値問題と半線形楕円型境界値問題を考えている。この問題に対する精度保証付き数値計算の目標は得られた数値解の近傍に真の解が含まれるような範囲（誤差評価）を与えることである。これらの問題に対するブレークスルー的な先行研究として日本の中尾らによる方法とドイツのPlumによる方法が有名である。どちらも偏微分方程式の境界値問題の解の存在証明をコンピューターで行う有用な方法として20年以上発展してきた。これら2つの先行研究には以下の特徴がある。中尾らの方法は、不動点定式化の際に問題を無限次元、有限次元部分にそれぞれ分け、個々に不動点定理の条件を検証している。また数値解には有限要素解のような誤差評価が得られる近似解を仮定し、誤差評価式を用いることで検証条件の収束を保証している。一方Plumによる方法は、得られた数値解に対してその誤差評価式を必ずしも必要としない特徴がある。さらに不動点定理の検証条件をチェックするために、問題から導かれる線形化作用素の逆作用素のノルム評価をホモトピー法によって厳密に評価している。これにより誤差評価式がない、または得ることが難しい近似方法についても精度保証付き数値計算が可能になる。

本研究で提案する精度保証付き数値計算法は誤差評価式を利用し、かつ線形化作用素の逆作用素のノルム評価を使用する精度保証付き数値計算法である。これは先行研究の2つの特徴を共に採用した方法であり、フレームワークが大変シンプルで理解しやすい。常微分方程式、偏微分方程式ともに同一のフレームワークで考えることができる。本論文の前半においては提案手法である

Newton-Kantorovich の定理をもとにした精度保証付き数値計算法のフレームワークを非線形常微分方程式の 2 点境界値問題を例に説明している．また同じフレームワークで楕円型境界値問題も精度保証付き数値計算可能であることを示している．偏微分方程式の場合は常微分方程式の場合とは違い，対象とする領域によって毎回，考えるべきいくつかの定数評価が生じる．

楕円型境界値問題を考える場合，提案手法は三角形要素による有限要素解を仮定し，そのときの有限要素法の誤差定数と Sobolev の埋め込み定理の厳密な上界評価が精度保証付き数値計算には必要である．提案手法では問題を弱形式化し，近似解を弱解として数値計算している．さらに弱形式に対していくつかの作用素を定義し，問題を非線形作用素方程式の形に同値な変換を行うことで，得られた非線形作用素方程式に Newton-Kantorovich の定理を適用することで，不動点定理をもとにした解の局所一意存在性とその誤差評価式を得る．Newton-Kantorovich の定理の検証条件をチェックするためには次の三つの定数計算が必要になる．一つ目は問題から導かれる線形化作用素の逆作用素のノルム評価．これを有限要素法の誤差評価式を利用した形で評価している．線形化作用素には強圧性を仮定しない，すなわち線形化作用素に逆作用素が存在するかもコンピューターを使って示す必要がある．本論文では線形化作用素の逆作用素の存在とそのノルム評価を与える検証方法を定理の形で紹介している．定数計算の二つ目は得られた数値解と非線形作用素方程式の残差評価である．P1, P2 要素を用いた有限要素近似解は通常二階微分値が二乗可積分ではない．この場合残差評価は計算できないことになってしまうが，先行研究は平滑化という技術を使用することで困難を回避している．本論文では提案するフレームワークでの平滑化を用いた評価を説明し，平滑化の技術と Raviart-Thomas の混合型有限要素法を応用することで，より良い残差評価を得ている．最後に線形化作用素の Lipschitz 定数評価が必要である．この値は問題によって決まる評価であり，本論文中ではある非線形項について，考える定数を具体的に得る方法を説明している．

本論文の後半では，楕円型境界値問題の領域を任意多角形に拡張した場合を説明している．任意多角形領域（とくに非凸な多角形領域）においては，古典的な有限要素法の誤差評価式が成り立たない．さらに先行研究では収束オーダーが悪くなる結果も知られている．著者は混合型有限要素法を利用し，所望の誤差評価を計算可能な部分に分け，それぞれ精度保証付き数値計算を行っている．これにより厳密評価が可能である．この評価方法は先行結果と同じか，または時に良い収束を得る．さらに Sobolev の埋め込み定数を評価するためには考えている任意多角形領域上で Laplacian の最小固有値の下界を計算する必要がある．これは劉・大石が提案した Laplacian の精度保証付き固有値評価式が効果的な下界評価を与え，著者はそれを利用し，最初の固有値の下界を得ている．残差評価については任意多角形領域においても混合型有限要素を用いた方法が効果的である．

本論文は 5 章と付録から構成される。第 1 章では、本研究が行われた背景として非線形常微分方程式の 2 点境界値問題、非線形楕円型境界値問題に関する事柄が記述される。コンピューターによる計算誤差の把握のためのツールとしての区間演算の紹介を行い、本論文の目的、概要、構成等が述べられる。

第 2 章では、はじめに論文中で使用する関数空間を準備している。次に非線形常微分方程式の 2 点境界値問題を用いて、対象とする問題を弱形式化し、いくつかの作用素を定義することで非線形作用素方程式に同値な変換が可能であることを示している。そして非線形作用素方程式に Newton-Kantorovich の定理を適用し、得られた数値解の近傍に真の解が存在することを示すフレームワークの詳細を紹介している。非線形常微分方程式の 2 点境界値問題の精度保証付き数値計算法のフレームワークはそのまま非線形楕円型境界値問題へ拡張可能である。この章の最後は楕円型境界値問題での定式化と定義について述べている。

前述のとおり、提案する精度保証付き数値計算法にはいくつかの厳密な定数評価が必要である。第 3 章では常微分方程式の場合、任意多角形領域上での楕円型境界値問題の場合のそれぞれにおいて、有限要素法の誤差定数と Sobolev の埋め込み定理の厳密な上界評価方法を述べている。特に非凸な多角形領域におけるコンピューターで計算可能な誤差定数について **Hypercircle equation** を用いる手法の詳細を示している。ここで得られる誤差評価を用いて埋め込み定数は厳密な評価が得られることになる。

第 3 章で得られた厳密な定数評価を用いて、第 4 章では、線形化作用素の逆作用素のノルム評価、数値解を用いた非線形作用素方程式の残差評価、線形化作用素の Lipschitz 定数評価の 3 つそれぞれについて議論している。特に逆作用素のノルム評価では、計算可能な有限次元逆作用素のノルム評価がある行列の一般化固有値問題の精度保証付き数値計算で厳密に評価できる事を述べている。

第 5 章では、数値的検証を行った例をいくつか紹介している。具体的には非線形常微分方程式の 2 点境界値問題に分岐解が存在することを精度保証付き数値計算で示した例や、方程式にいくつか数値解が存在する場合のそれぞれについて解の一意存在が証明できた例を示している。また任意多角形領域上で楕円型境界値問題の近似解を得て、その誤差評価の範囲内に解が局所一意存在することを精度保証付き数値計算した例も示している。さらに GUI を利用した任意多角形領域上での精度保証付き数値計算ツールによる結果も紹介している。5 章の最後では数値結果から分かる本研究のまとめ、今後の展望について述べている。

最後に付録として混合型有限要素の一つである **Raviart-Thomas** の有限要素についてその定義と性質、実際に数値計算する際の具体的な表現についてまとめている。**Raviart-Thomas** の有限要素は本論文の 3 章、4 章で使用しており、3 章で有限要素法の誤差評価式、4 章で残差評価式という精度保証付き数値計算法での核となる部分で使用している。

早稲田大学 博士（理学） 学位申請 研究業績書

氏名 高安 亮紀 印

(2011年11月 現在)

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者（申請者含む）
①論文 （査読有）	<p>[1]. ○ A. Takayasu, S. Oishi, A Method of Computer Assisted Proof for Nonlinear Two-point Boundary Value Problems Using Higher Order Finite Elements, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, Vol.E94-N, No.1 (2011), pp.74-89.</p> <p>[2]. ○ A. Takayasu, S. Oishi, T. Kubo, Numerical Existence Theorem for Solutions of Two-Point Boundary Value Problems of Nonlinear Differential Equations, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, Vol.E93-N, No.10 (2010), pp.105-118.</p>
①国際会 議論文 （査読有）	<p>[1]. ○ A. Takayasu, X. Liu, S. Oishi, Computer assisted proofs for solutions to nonlinear elliptic partial differential equations on arbitrary polygonal domain, Proceedings of 2011 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2011), Kobe, 2011, pp.90-93.</p> <p>[2]. ○ A. Takayasu, S. Oishi, T. Kubo, Computer assisted proofs of solutions to Nonlinear elliptic partial differential equations, Proceedings of 2010 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2010), Krakow, 2010, pp.135-138.</p> <p>[3]. A. Takayasu, S. Oishi, T. Kubo, A priori inverse operator estimation for guaranteed error estimate, Proceedings of 4th Workshop on Reliable Engineering Computing (REC2010) “Robust Design - Coping with Hazards, Risk and Uncertainty”, Singapore, 2010, pp.649-664.</p> <p>[4]. A. Takayasu, S. Oishi, T. Kubo, Guaranteed error estimate for solutions to two-point boundary value problem, Proceedings of 2009 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2009), Hokkaido, 2009, pp.214-217.</p> <p>[5]. A. Takayasu, S. Oishi, T. Kubo, Guaranteed error estimate for solutions to linear two-point boundary value problems with FEM, Proceedings of ASIA SIMULATION CONFERENCE 2009 (JSST 2009), Paper ID: 163 (8 pages), Kyoto, 2009.</p> <p>[6]. A. Takayasu, S. Oishi, T. Kubo, Numerical verification for solutions to nonlinear two-point boundary value problems with finite element method, Proceedings of the 24th International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications (ITC-CSCC 2009), Jeju, 2009, pp.165-168.</p>
②総説 （査読無）	<p>[1]. A. Takayasu, S. Oishi, A refinement technique to residual evaluation of Computer assisted proofs for Semilinear elliptic boundary value problems, 京大数理解析研究所講究録, 1733 (2011), pp.118-126.</p> <p>[2]. A. Takayasu, S. Oishi, T. Kubo, Numerical Existence Proofs and Guaranteed Error Bounds for Solutions to Two-Point Boundary Value Problems, 京大数理解析研究所講究録, 1719 (2010), pp.48-60.</p>

早稲田大学 博士（理学） 学位申請 研究業績書

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者（申請者含む）
③講演	<p>[1]. 高安亮紀, 劉雪峰, 大石進一, 楕円型非線形境界値問題に対する計算機援用解析の RT1 要素による高精度化, 京都大学数理解析研究所 RIMS 研究集会「科学技術計算における理論と応用の新展開」, 京都大学数理解析研究所 (2011/10/27).</p> <p>[2]. 高安亮紀, 大石進一, Some remarks on verified numerical computations for two-point boundary value problems, 日本応用数理学会 2011 年度年会, 同志社大学 今出川キャンパス (2011/9/16).</p> <p>[3]. Akitoshi Takayasu, Xuefeng Liu, Shin'ichi Oishi, Computer Assisted Proofs for Solutions to Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations on Arbitrary Polygonal Domain, 2011 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2011), Hyogo, Japan (2011/9/5).</p> <p>[4]. 高安亮紀, 劉雪峰, 大石進一, 任意多角形領域上での非線形楕円型境界値問題の計算機援用証明, 第 33 回発展方程式若手セミナー, つくばグランドホテル, 茨城県つくば市筑波 (2011/8/26).</p> <p>[5]. Akitoshi Takayasu, Xuefeng Liu, Shin'ichi Oishi, A Method of computer assisted proof for Semilinear elliptic equations on Arbitrary polygonal domain, The 7th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2011), Vancouver, Canada (2011/7/20).</p> <p>[6]. Akitoshi Takayasu, Xuefeng Liu, Shin'ichi Oishi, Numerical verification for solution existence of elliptic PDE on arbitrary polygonal domain, The 7th East Asia SIAM Conference & RIMS Workshop on Methods in Industrial and Applied Mathematics (EASIAM 2011), Kitakyushu, Japan (2011/6/29).</p> <p>[7]. Akitoshi Takayasu, Xuefeng Liu, Shin'ichi Oishi, A computer assisted proof method for semilinear elliptic equations on arbitrary polygonal domain, Workshop on Analytic and Computational Techniques in Spectral Theory and Related Topics (EPSRC Gregynog Workshop 2011), Gregynog Hall, UK (2011/6/21).</p> <p>[8]. 高安亮紀, 劉雪峰, 大石進一, 任意多角形領域上での非線形偏微分方程式の計算機援用証明, 日本応用数理学会 2011 年研究部会連合発表会, 電気通信大学 (2011/3/8).</p> <p>[9]. 高安亮紀, (セミナー) 楕円型非線形偏微分方程式の Dirichlet 境界値問題に対する精度保証付き数値計算法, 数値解析セミナー (東大), 東京大学駒場キャンパス (2010/12/7).</p> <p>[10]. 高安亮紀, 劉雪峰, 大石進一, 無限次元固有値問題の精度保証付き数値計算を用いた逆作用素の効果的ノルム評価, 京都大学数理解析研究所 RIMS 研究集会「科学技術計算アルゴリズムの数理的基盤と展開」, 京都大学数理解析研究所 (2010/10/20).</p> <p>[11]. Akitoshi Takayasu, Xuefeng Liu, Shin'ichi Oishi, Takayuki Kubo, Numerical existence proofs and Accurate error bounds of solutions to Semilinear elliptic equations with higher order finite elements, 14th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics (SCAN 2010), ENS de Lyon, France (2010/9/30).</p> <p>[12]. Shin'ichi Oishi, Akitoshi Takayasu, Takayuki Kubo, Numerical Verification of Existence for Solutions to Dirichlet Boundary Value Problems of Semilinear Elliptic Equations, SCAN 2010, ENS de Lyon, France (2010/9/30).</p>

早稲田大学 博士（理学） 学位申請 研究業績書

種 類 別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者（申請者含む）
	<p>[13]. Akitoshi Takayasu, Shin'ichi Oishi, Takayuki Kubo, Computer assisted proofs of solutions to Nonlinear elliptic partial differential equations, 2010 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2010), Krakow, Poland (2010/8/6).</p> <p>[14]. 高安亮紀, 大石進一, 久保隆徹, Sturm-Liouville 型 2 点境界値問題の精度保証付き数値計算法について, 第 29 回 日本シミュレーション学会大会, 山形大学 工学部キャンパス, 山形県米沢市城南 (2010/6/19), 講演予稿集 pp. 89-92.</p> <p>[15]. 高安亮紀, 大石進一, 久保隆徹, 非線形楕円型偏微分方程式の精度保証法とその速度評価について, 第 39 回数値解析シンポジウム, 鳥羽シーサイドホテル, 三重県鳥羽市安楽島町 (2010/5/26), 講演予稿集 pp. 5-8.</p> <p>[16]. Akitoshi Takayasu, Shin'ichi Oishi, Takayuki Kubo, Numerical Existence Theorem for Semilinear Elliptic Boundary Value Problems II, 2010 International Workshop on Numerical Verification and its Applications (INVA2010), Hachijo-jima, Japan (2010/3/11).</p> <p>[17]. 高安亮紀, 大石進一, 久保隆徹, Sturm-Liouville 型 2 点境界値問題の精度保証付き数値計算, 日本応用数学会 2010 年 研究部会 連合発表会, 筑波大学 計算科学研究センター (2010/3/8).</p> <p>[18]. 高安亮紀, 大石進一, 久保隆徹, 非線形楕円型偏微分方程式の精度保証 II, 日本応用数学会 2010 年 研究部会 連合発表会, 筑波大学 計算科学研究センター (2010/3/8).</p> <p>[19]. 大石進一, 高安亮紀, 久保隆徹, 非線形楕円型偏微分方程式の精度保証 I, 日本応用数学会 2010 年 研究部会 連合発表会, 筑波大学 計算科学研究センター (2010/3/8).</p> <p>[20]. Akitoshi Takayasu, Shin'ichi Oishi, Takayuki Kubo, A priori inverse operator estimation for guaranteed error estimate, 4th Workshop on Reliable Engineering Computing (REC2010) Robust Design - Coping with Hazards, Risk and Uncertainty, Hotel Furama Riverfront, Singapore (2010/3/5).</p> <p>[21]. 高安亮紀, 大石進一, 久保隆徹, 線形 2 点境界値問題の有限要素解に対する精度保証付き数値計算法, 京都大学数理解析研究所 RIMS 研究集会「数値解析と数値計算アルゴリズムの最近の展開」, 京大会館 (2009/12/15).</p> <p>[22]. Shin'ichi Oishi, Akitoshi Takayasu, Takayuki Kubo, Numerical Verification Method for Nonlinear Differential Equations, The Joint Conference of ASCM2009 and MACIS2009, JAL Resort Sea Hawk Hotel, Fukuoka, Japan (2009/12/15).</p> <p>[23]. 高安亮紀, 大石進一, 久保隆徹, 非線形関数方程式の精度保証付き数値計算, 非線形問題研究会 (NLP), 屋久島環境文化村センター, 鹿児島 (2009/11/11).</p> <p>[24]. Akitoshi Takayasu, Shin'ichi Oishi, Takayuki Kubo, Guaranteed error estimate for solutions to two-point boundary value problem, 2009 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA 2009), Hokkaido, Japan (2009/10/19).</p> <p>その他講演 9 件, ポスター発表 7 件.</p>