早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

# 博士論文審査報告書

## 論　文　題　目

# Studies on verified computations for solutions to elliptic boundary value problems
# 楕円型境界値問題の解の精度保証付き数値計算に関する研究

申　請　者

| | |
|---|---|
| Akitoshi | TAKAYASU |
| 髙安 | 亮紀 |

数学応用数理専攻　数値解析研究

2012 年　2 月

本論文は非線形常微分方程式の 2 点境界値問題と楕円型境界値問題の精度保証付き数値計算法についてまとめたものである．本研究において微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算とは，「得られた数値解を利用して問題の解の存在証明」を行うこと，存在範囲となる「厳密な誤差評価を与える」ことの 2 つを同時に行う数値計算法を指している．これは数値計算の枠を超えた研究であり，得られた数値解を中心に誤差の範囲内で解の局所一意存在をコンピューターで示すことができる．

本論文の特徴的な点は関数解析を利用し，無限次元空間の問題に対し，有限回の操作しかできないコンピューターを用いて厳密な議論を展開するというところである．有限と無限の誤差は近似手法の誤差評価式を利用して把握できる．さらにコンピューター上の数値計算は IEEE754 標準規格（電子計算機における数の表現，四則演算と平方根の演算結果精度，丸め，例外を定めた規格）の浮動小数点数を基礎としていることから，計算に生じる計算誤差が区間演算を用いると把握可能である．すなわち微分方程式の数値計算に生じるすべての誤差を把握することが可能になり，これと不動点定理を組み合わせることで解の存在がコンピューター上で数学的に証明可能になる．

本論文では非線形常微分方程式の 2 点境界値問題と半線形楕円型境界値問題を考えている．精度保証付き数値計算の目標は得られた数値解の近傍に真の解が含まれるような範囲（誤差評価）をコンピューターを用いて与えることである．これらの問題に対するブレークスルー的な先行研究として，日本の中尾らによる方法とドイツの Plum による方法が知られている．これら 2 つの先行研究には以下の特長がある．中尾らの方法は，不動点定式化の際に問題を無限次元，有限次元部分にそれぞれ分け，個々に不動点定理の条件を検証している．数値解には誤差評価が得られる解を仮定し，誤差評価式を用いることで検証条件の収束を保証している．一方 Plum による方法は，得られた数値解に対してその誤差評価式を必ずしも必要としない特長がある．さらに不動点定理の検証条件をチェックするために，問題から導かれる線形化作用素の逆作用素のノルムをホモトピー法によって厳密に評価している．これにより誤差評価式を得ることが難しい近似手法についても精度保証付き数値計算が可能になる．

本研究で提案されている精度保証付き数値計算法は誤差評価式を利用し，かつ線形化作用素の逆作用素のノルム評価を用いる精度保証付き数値計算方法である．これは先行研究の 2 つの特長を共に採用した方法であり，フレームワークが大変シンプルで理解しやすい．本論文の前半において，提案手法である Newton-Kantorovich の定理をもとにした精度保証付き数値計算法のフレームワークを説明している．偏微分方程式の場合は対象とする領域によって，いくつかの定数評価が必要となる．

楕円型境界値問題を考える場合，有限要素法の誤差定数と Sobolev の埋め込み定理の厳密な上界評価が精度保証付き数値計算には必要である．提案手法では問題の弱形式に対していくつかの作用素を定義し，問題を非線形作用素方程式の形に変換することで， Newton-Kantorovich の定理を適用する．Newton-Kantorovich の定理の検証条件をチェックするためには三つの定数計算が必要になる．一つ目は問題から導かれる線形化作用素の逆作用素のノルム評価で，これを有限要素法の誤差評価式を利用した形で評価している．線形化作用素には強圧性を仮定しない，すなわち線形化作用素の可逆性も示す必要がある．本論文では線形化作用素の逆作用素の存在とそのノルム評価を与える検証方法を定理の形で示している．定数計算の二つ目は得られた数値解と非線形作用素方程式の残差評価である．弱解を用いた残差評価は通常計算できないが，先行研究は平滑化技術を使用することで困難を回避している．本論文では提案するフレームワークでの平滑化を用いた評価を説明し，平滑化の技術と Raviart-Thomas の混合型有限要素法を応用することで，より良い残差評価を得ている．最後に線形化作用素の Lipschitz 定数評価が必要である．この値は問題によって決まる評価であり，本論文中ではある非線形項について，考える定数を具体的に得る方法を説明している．

楕円型境界値問題の領域を任意多角形領域（とくに非凸な多角形領域）に拡張した場合，古典的な有限要素法の誤差評価式が成り立たない．本論文では混合型有限要素を利用し，所望の誤差評価を計算可能な部分に分け，それぞれ精度保証付き数値計算を行っている.これにより厳密評価が可能である.さらに Sobolev の埋め込み定数を評価するために，任意多角形領域上で Laplacian の最小固有値の下界を計算する必要がある．これは劉・大石が提案した Laplacian の精度保証付き固有値評価式が効果的な下界評価を与え，それを利用し，最小固有値の下界を得ている．

本論文は 5 章と付録から構成される．第 1 章では，本研究が行われた背景として精度保証付き数値計算の成り立ち，非線形常微分方程式の 2 点境界値問題，半線形楕円型境界値問題の精度保証付き数値計算についての事柄が記述されている．本論文の目的，概要，構成等が述べられている．

第 2 章では，はじめに論文中で使用する関数空間を準備し，対象とする問題を弱形式化し，いくつかの作用素を定義することで非線形作用素方程式に変換が可能であることを示している．そして Newton-Kantorovich の定理を適用し，得られた数値解の近傍に真の解が存在することを示すフレームワークの詳細を紹介している．このフレームワークは非線形常微分方程式の 2 点境界値問題，半線形楕円型境界値問題の精度保証付き数値計算法へそれぞれ対応している．この章の最後は弱形式を用いた定式化といくつかの作用素の定義について詳細が述べられている．

前述のとおり，提案する精度保証付き数値計算法にはいくつかの厳密な定数評価が必要である．第3章では常微分方程式の場合，任意多角形領域上での楕円型境界値問題の場合のそれぞれにおいて，有限要素法の誤差定数とSobolevの埋め込み定理の厳密な上界評価方法を述べている．特に非凸な多角形領域におけるコンピューターで計算可能な誤差定数についてHypercircle equationを用いる手法の詳細を示している．ここで得られる誤差評価を用いて埋め込み定数は厳密な評価が得られることも示されている．

第4章では第3章で得られた厳密な定数評価を用いて，線形化作用素の逆作用素のノルム評価，数値解を用いた非線形作用素方程式の残差評価，線形化作用素のLipschitz定数評価の3つそれぞれについて議論している．特に逆作用素のノルム評価では，計算可能な有限次元逆作用素のノルム評価がある行列の一般化固有値問題の精度保証付き数値計算で厳密に評価できる事を述べ，それを応用した逆作用素のノルム評価方法を述べている．

第5章では，数値的検証を行った例をいくつか紹介している．具体的には非線形常微分方程式の2点境界値問題に分岐解が存在することを精度保証付き数値計算で示した例や，方程式にいくつか数値解が存在する場合のそれぞれについて解の局所一意存在が証明できた例を示している．また非凸領域を含む任意多角形領域上で，ある楕円型境界値問題の近似解を得て，その誤差評価の範囲内に解が局所一意存在することを精度保証付き数値計算した例も示している．さらにGUIを利用した任意多角形領域上での精度保証付き数値計算ツールも紹介している．

最後に付録として混合型有限要素の一つであるRaviart-Thomasの有限要素について，実際に数値計算する際の具体的な表現についてまとめている．

以上を要するに，申請者は非線形常微分方程式の2点境界値問題，半線形楕円型境界値問題に対するNewton-Kantorovichの定理を基礎とする精度保証付き数値計算法を提案した．とくに非凸領域を含む任意多角形領域上での楕円型境界値問題の解の存在検証法は精度保証付き数値計算法の研究における難問題を処理して新たな知見をもたらした．よって，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める．

平成24年1月

審査員

| | | | |
|---|---|---|---|
| 主査 | 早稲田大学教授 | 工学博士（早稲田大学） | 大石　進一 |
| | 早稲田大学教授 | 理学博士（京都大学） | 田端　正久 |
| | 早稲田大学教授 | 博士（工学）早稲田大学 | 柏木　雅英 |