

電気鉄道における次世代車両駆動システムの  
設計手法に関する研究

Design Method for Advanced Traction System  
of Electric Railway

2008年2月

早稲田大学大学院 理工学研究科

電気・情報生命専攻 コンピュータ援用電磁工学研究

小川 知行



# 電気鉄道における次世代車両駆動システムの 設計手法に関する研究

## 目次

第1章 緒論 .....	1
第2章 帰線電流高調波の理論解析 .....	7
第1節 概要 .....	9
1.1 鉄道信号 .....	9
1.2 インバータ制御車の軌道回路への影響 .....	11
第2節 解析対象のモデル化 .....	13
2.1 解析対象システム .....	13
2.2 数値解析モデル .....	15
2.3 PWMパルスモード .....	20
2.4 位相差運転 .....	21
第3節 理論式を用いた解析 .....	23
3.1 サブハーモニック変調方式 .....	23
3.2 スイッチング関数の導入 .....	24
3.3 単相搬送波を用いた場合の高調波理論式の導出 .....	27
3.4 単相搬送波を用いた場合の高調波周波数についての考察 .....	28
3.5 三相搬送波を用いた場合の高調波理論式の導出 .....	31
3.6 三相搬送波を用いた場合の高調波周波数についての考察 .....	35
3.7 位相差運転の適用 .....	38
第4節 数値解析による検証 .....	41
4.1 誘導電動機定数 .....	41
4.2 単相搬送波による非同期PWMモードの検証 .....	42
4.3 単相搬送波による同期PWMモードの検証 .....	45
4.4 三相搬送波による非同期PWMモードの検証 .....	48
4.5 三相搬送波による同期PWMモードの検証 .....	51
4.6 1パルスモードの検証 .....	54
4.7 位相差運転の効果の検証 .....	57
第5節 実験による検証 .....	59
5.1 実験装置と実験方法の概要 .....	59
5.2 理論解析の検証 .....	64
第6節 まとめ .....	75
第7節 付録 高調波理論式の導出 .....	77
7.1 三角関数の公式 .....	77
7.2 三相交流の基本関係式 .....	77
7.3 三相交流の積の関係式 .....	78
7.4 ベッセル関数 .....	92
7.5 スイッチング関数の導出 .....	92
7.6 単相搬送波を用いた場合の高調波理論式の導出の詳細 .....	95
7.7 三相搬送波を用いた場合の高調波理論式の導出の詳細 .....	103
参考文献 .....	131

第3章 ハイブリッド電源鉄道車両の最適化設計手法 .....	133
第1節 概要 .....	135
1.1 研究動向 .....	137
1.2 研究課題 .....	141
第2節 検討対象モデル .....	143
2.1 ハイブリッド電源鉄道車両の構成 .....	144
2.2 対象路線 .....	149
第3節 電力制御法の検討 .....	151
3.1 動的計画法の導入 .....	151
3.2 関数による電力制御法のモデル化 .....	152
3.3 一定出力による電力制御法のモデル化 .....	157
3.4 蓄電エネルギーの制約 .....	157
第4節 評価手法 .....	159
4.1 多目的最適化の適用 .....	159
4.2 並列化計算の適用 .....	161
第5節 最適化結果 .....	163
5.1 計算結果 .....	163
5.2 パレート最適解の分析 .....	174
5.3 電力制御法の検証 .....	175
第6節 蓄電媒体の検討 .....	185
6.1 蓄電媒体のモデル .....	185
6.2 多目的最適化の適用 .....	186
6.3 計算結果 .....	186
6.4 パレート最適解の分析 .....	194
6.5 回生エネルギーと蓄電装置容量の関係の分析 .....	195
第7節 ディーゼルハイブリッドシステムの検討 .....	197
7.1 ディーゼルハイブリッドシステムのモデル化 .....	198
7.2 エンジン運転パターン最適化手法 .....	205
7.3 エンジン運転パターン最適化結果 .....	208
7.4 ディーゼルハイブリッド鉄道車両の設計指針 .....	218
第8節 まとめ .....	219
参考文献 .....	221
第4章 結論 .....	227

研究業績

謝辞

# 第1章

## 緒論



# 本研究の概要

鉄道車両を動力システムの観点から考えると、大別して、電化区間において架線から集電し電気運転を行う鉄道車両と、非電化区間において主として内燃機関の動力源を利用する鉄道車両の2種類に分類される。前者は、効率も高く、都市通勤輸送・幹線輸送・高速輸送などに広く用いられているが、そこで用いられるインバータ駆動システムは、スイッチング動作による高調波が発生するという問題を有している。このため、車両からレールを通じて変電所に流れる帰線電流の高調波が信号システムに悪影響を及ぼす可能性があり、その対策が大きな課題となっている。一方、後者は、架線を用いないため、帰線電流の高調波問題は生じないが、効率の高い電気システムの適用が限られることや、回生ブレーキによる省エネルギー化が困難であることなどの課題がある。これに対して、近年の蓄電技術の進歩により、蓄電装置を用いて電力貯蔵を行う車両駆動システムの適用が検討され始めている。これは、ディーゼル発電機や燃料電池などの発電装置と、電気二重層キャパシタやリチウムイオン蓄電池などの蓄電装置とを組み合わせたハイブリッド電源鉄道車両である。ハイブリッド電源鉄道車両は、複数の電源を有し、かつ実用上様々な制約が存在することから、車両駆動システムの設計は容易ではなく、設計・評価手法の確立が望まれている。本論文では、上述の2つの課題に焦点を当て、電気鉄道の次世代における車両駆動システムの設計・評価手法を開発することを目的とする。

はじめに、電気運転を行うインバータによる車両駆動システムに対して新たな設計指針を示すことを目指して、帰線電流高調波の理論解析手法を提案する。現状のインバータによる車両駆動システムにおいては、高調波対策としてフィルタ回路の設置やスイッチングパターンの工夫などの方策が採られている。しかしながら、高調波の発生原理は明確に整理されているとは言い難く、過剰な高調波対策がなされている可能性がある。また逆に、高調波対策が不十分なために、車両新製時などに実施される走行試験において追加対策を迫られることも少なくない。さらに、車両からの高調波を明確に定量化できないため、車両側のみならず、高調波の影響を受ける信号側においても、必要以上の高調波対策が施されている可能性がある。そこで、本論文では、直流鉄道車両を対象に車両駆動用インバータによる高調波発生量を理論解析に基づき明らかにする方法を提案する。これにより、車両と信号システムとが協調した高調波対策の実現に向けた検討が可能となり、従来の設計や試験時の調整における試行錯誤的なアプローチを回避し、車両駆動システムの設計の大きな効率化が期待できる。

続いて、本論文では、導入に向けて研究開発が現在進められている段階であるハイブリッド電源鉄道車両の車両駆動システムの設計・評価手法を提案する。ハイブリッド電源鉄道車両は、発電装置と蓄電装置のバランスにより機器の様々な容量配分を取り得る上、路線条件も多岐にわたり、それに応じて電力制御法にも種々の手法が考えられるなど、設計の自由度が高い。その結果、これまでに一般化された設計手法に関する議論はほとんど行われていない。このような背景のもと、本論文では、電力制御パターンに関しては最適電力制御を実現する動的計画法を取り入れ、機器容量の決定には多目的最適化手法を取り入れた設計・評価手法を提案し、大規模な並列化計算も導入することで、異なる特徴を有する多数のハイブリッド構成を明らかにした。本手法により、ハイブリッド電源鉄道車両の基本設計の段階において、広範な探索空間から有益な情報抽出を行うことが可能となる。

本論文は、全4章から構成され、その概要は以下の通りである。

## ＜第2章＞帰線電流高調波の理論解析

第2章においては、架線から集電し電気運転を行う鉄道車両に焦点を当て、インバータによる車両駆動システムの新たな設計手法の提示を目的とし、帰線電流高調波の理論解析手法を提案する。鉄道車両駆動に用いられるインバータ制御は、その原理上高調波を発生する。インバータの直流側電流は、レールを通じて変電所に流れる帰線電流となり、その高調波が、軌道回路の鉄道信号電流に基づく列車検知機能に障害を及ぼす可能性がある。また、車両から発生する高調波は様々な周波数成分を含んでおり、信号設備に用いられる周波数も多岐にわたる。しかしながら、これまで帰線電流高調波の発生メカニズムは、定量的には明らかになっていない。その結果、新たな主回路設計を行う際には、その都度、帰線電流高調波の測定・確認が行われ、必要に応じて車両側あるいは信号側で試行錯誤的に対策がとられているのが現状である。

このような背景のもと、本章では、直流鉄道車両を対象に車両駆動システムにおける高調波対策への応用を目的とした帰線電流高調波の理論解析手法の開発に取り組んだ。本章における開発手法により、相電流の正弦波近似とともにスイッチング素子の動作を表現するスイッチング関数を導入することによって、直流側電流高調波の周波数成分だけでなく、その振幅値も明確に示す理論式を導出する。本章で提案する理論式は、インバータのPWMパルスモードに応じて、非同期PWMモード、同期PWMモード、1パルスモードに適用可能である。これにより、帰線電流高調波の対策として、高調波の発生原理を体系的に整理することが可能となる。続いて、実験結果、微分方程式に基づく数値解析結果、および提案手法の理論解析結果を比較し検証した。この結果、理論解析による高調波成分は、実験と数値解析で得られた主な高調波成分と比較して、周波数が一致するだけでなく振幅も良好に合致した。これにより、本章において開発した理論解析の妥当性を示した。開発手法により、変調波周波数、搬送波周波数、変調率などのパラメータが、発生する高調波に及ぼす影響を理論式に基づき把握することが可能となった。これは、微分方程式に基づく数値解析では得ることができなかった情報の抽出を可能とするものであり、開発手法の大きな特徴である。これにより、高調波抑制対策など、今後のインバータによる車両駆動システムの設計に有益な指針を提示することが期待できる。

さらに、本章では、高調波低減の一手法として、PWM搬送波の位相差運転の効果について、開発した理論解析により分析・評価する。位相差運転は、交流鉄道車両においては架線のゼロ電位検出による同期が可能のため広く用いられている。一方、直流鉄道車両においては、同期電源を持たないため位相差運転の適用が困難であった。しかしながら近年の鉄道車両においては、補助電源の同期電源化により、位相差運転の適用の可能性が出てきている。ここでは、開発した理論解析の応用事例として、直流鉄道車両への位相差運転の効果を実験により定量的に明らかにし、その有効性を示す。

## ＜第3章＞ハイブリッド電源鉄道車両の最適化設計手法

第3章においては、将来の車両駆動システムとして研究開発が進められているハイブリッド電源鉄道車両の設計・評価手法について提案する。ハイブリッド電源鉄道車両は近年、ディーゼルエンジンとリチウムイオン蓄電池によるディーゼルハイブリッド鉄道車両が我が国において量産先行車として営業運転を開始したことをはじめとして、実用化に向けて研究開発が進められている。ハイブリッド電源鉄道車両として研究開発の対象となっているシステムは、発電装置と蓄電装置を電氣的に組み合わせたシリーズハイブリッドシステムが一般的である。発電装置としては、従来のディーゼル鉄道車両(気動車、ディーゼル機関車)に用いられるディーゼルエンジンに発電機を接続したものや、次世代のエネルギー源として注目される燃料電



池などが考えられる。蓄電装置としては、電気二重層キャパシタやリチウムイオン蓄電池が主な対象として扱われている。駆動装置は、近年の電車と同様にインバータにより誘導電動機を駆動する方式が主流である。ハイブリッド電源鉄道車両を実現する上での主な研究対象としては、電気二重層キャパシタやリチウムイオン蓄電池などの蓄電装置や燃料電池などの次世代の発電装置の要素技術の開発、蓄電装置の充放電と発電装置の発電を協調し電力・エネルギーを管理する電力制御システムの開発、蓄電装置と発電装置の種類や容量や機器配置などの設計などが挙げられる。

以上のような背景のもと、本論文では、ハイブリッド電源鉄道車両の設計コンセプトを見いだすための基本設計手法の提案を行う。ハイブリッド電源鉄道車両の設計においては、発電装置の種類や容量、蓄電装置の種類や容量、消費エネルギー、路線条件など考慮すべき項目が多岐にわたり、設計の自由度が極めて高い。また、評価項目の1つである消費エネルギーは、路線条件や機器容量が同一でも、採用する電力制御法に依存して大きく変動する。換言すれば、路線条件や機器容量などに応じて、消費エネルギーの観点から適切な電力制御法は異なってくる。そこで、開発手法においては、多目的最適化を適用すると同時に、そのプロセスにおいて電力制御パターンの算出に動的計画法を取り入れ、ネスト化された最適化計算手法を提案する。この結果、探索空間が極めて広範となり、通常の高速度ワークステーションを用いても実用上可能な時間範囲での処理が困難となる。そこで、最適化プロセスを適切に並列化計算させることで、探索の大規模高速化を実現した。以上の結果、動的計画法により種々の路線条件や機器容量の下で消費エネルギーを最小にする最適な電力制御を実現した上で、発電装置容量・蓄電装置容量・消費エネルギー・路線条件の相関を広範な探索空間にわたり把握することが可能となった。このような詳細な分析結果に基づき、最終的に、電源システムのハイブリッド化による効果が大きい機器容量構成をパレート最適解として抽出した。同時に、路線特性の観点からも分析することで、ハイブリッド化の効果が大きい対象路線の特徴を明らかにした。

ここまでの議論では、動的計画法により最適化された電力制御パターンに基づき、ハイブリッド電源鉄道車両の基本設計を行っている。したがって、設計結果を実際のハイブリッド電源鉄道車両に適用するには、動的計画法により得られた結果と遜色ない程度のエネルギー消費を実現できる現実的な電力制御法が求められる。そこで、本論文では、車両の総エネルギー保存の考え方を基本とする制御関数を提案し、それに基づく新たな電力制御法を開発した。提案の電力制御法は、蓄電媒体が保持する蓄電エネルギー、列車の走行による運動エネルギー、および列車の標高により決まる位置エネルギーの総和が一定に保たれるように発電装置の簡便な出力制御関数を導入したものであり、実車両へ容易に実装可能である。先に述べた設計プロセスにおいて採用した動的計画法の部分、提案の関数による電力制御法に置き換え、多目的最適化計算を実施した結果、様々な路線条件や機器容量配分の条件下で、同等のパレート最適解を得ることができることを示した。このことにより、多目的最適化と動的計画法を組み合わせた本章の設計・評価手法は、その設計結果が電力制御の観点からも容易に実現可能なものであることが示され、ハイブリッド電源鉄道車両の基本設計において、実用上有益な設計情報を与えるものと言える。

## <第4章> 結論

第4章においては、本論文で得られた知見についてまとめるとともに、今後の課題についても述べる。



## 第2章

# 帰線電流高調波の理論解析



# 第1節 概要

本章においては、架線から集電し電気運転を行う鉄道車両に焦点を当て、インバータによる車両駆動システムの新たな設計手法の提示を目的とし、直流鉄道車両を対象とした帰線電流高調波の理論解析手法を提案する。鉄道車両駆動に用いられるインバータ制御は、その原理上高調波を発生する。インバータの直流側電流は、レールを通じて変電所に流れる帰線電流となり、その高調波が、軌道回路の鉄道信号電流に基づく列車検知機能に障害を及ぼす可能性がある<sup>[1.1-5]</sup>。また、車両から発生する高調波は様々な周波数成分を含んでおり、信号設備に用いられる周波数も多岐にわたる。しかしながら、これまで帰線電流高調波の発生メカニズムは、定量的には明らかになっていない。その結果、新たな主回路設計を行う際には、その都度、帰線電流高調波の測定・確認が行われ、必要に応じて車両側あるいは信号側で試行錯誤的に対策がとられているのが現状である。このような背景について、本章第1節で紹介する。

このような背景のもと、本章では、車両駆動システムにおける高調波対策への応用を目的とした帰線電流高調波の理論解析手法の開発に取り組む。第2節では、解析対象モデルについて紹介する。続いて、第3節において、相電流の正弦波近似とともにスイッチング素子の動作を表現するスイッチング関数を導入することによって、直流側電流高調波の周波数成分だけでなく、その振幅値も明確に示す理論式を導出する。導出した理論式を元に、第4節では、実車両を想定したモデルを対象として、微分方程式に基づく数値解析と提案手法の理論解析結果を比較する。さらに、第5節において、ミニモデルにおいて実験を行い、実験結果、微分方程式に基づく数値解析結果、および提案手法の理論解析結果の三者を比較する。この結果、理論解析により得られた高調波成分は、実験と数値解析で得られた主な高調波成分と比較して、周波数が一致するだけでなく振幅も良好に合致した。これにより、本章において開発した理論解析の妥当性が確認された。開発手法は、インバータのPWMパルスモードに応じて、非同期PWMモード、同期PWMモード、1パルスモードに適用可能であり、帰線電流高調波の対策として、高調波発生原理を体系的に整理することが可能となった。開発手法により、変調波周波数、搬送波周波数、変調率などのパラメータが、発生する高調波に及ぼす影響を理論式に基づき把握することが可能となる。これにより、高調波抑制対策など、今後のインバータによる車両駆動システムの設計に有益な情報を提示することが期待できる。

さらに、本章第3節では、高調波低減の一手法として、PWM搬送波の位相差運転の効果について開発した理論解析により分析・評価する。位相差運転は、交流鉄道車両においては架線のゼロ電位検出による同期が可能のため広く用いられている<sup>[1.6-7]</sup>。一方、直流鉄道車両においては、同期電源を持たないため位相差運転の適用が困難であった。しかしながら近年の鉄道車両においては、補助電源の同期電源化により、位相差運転の適用の可能性が出てきている。ここでは、開発した理論解析の応用事例として、直流鉄道車両への位相差運転の効果を理論式により定量的に明らかにし、その有効性を示す。

## 1.1 鉄道信号

### 1.1.1 信号設備

列車の安全な運行のために信号設備が用いられている<sup>[1,2,8-9]</sup>。鉄道信号においては、線路をある長さの区間毎に区切り、1区間に1列車のみの進入しか許さない閉塞方式を用いて、衝突などの事故を未然に防止している。各閉塞区間の入り口には信号機が設置され、進入の可否や許容速度などを現示していく。このため、列車の在線位置を正確に検知する必要がある。列車の在線位置の検知には軌道回路が用いられる。軌道回路は、レールを電気回路の一部として使用し、一定の区間内に列車の車輪で2本のレールを短絡することで、列車の在線を検知している。

図1.1.1に閉電路式の軌道回路の基本構成を示す。回路の一端から信号電流を送信し、他端にもうけた軌道リレーにより信号電流を受信する。列車が在線するときには、2本のレールが短絡されることにより、軌道リレーまで信号電流が到達しなくなる。このため、軌道リレーの受信レベルを判定することにより、列車の在線の有無を検知できる。

なお、有絶縁軌道回路は、信号電流を閉塞区間毎に区別するために、軌道回路の両端にはレール絶縁が入っており、隣接する軌道回路と電気的に絶縁されている。電化区間においては、帰線電流と信号電流を区別するため、インピーダンスボンドが用いられる。インピーダンスボンドにより、帰線電流は中性点を通して隣の軌道回路に流れるが、信号電流は隣の軌道回路には流れない。

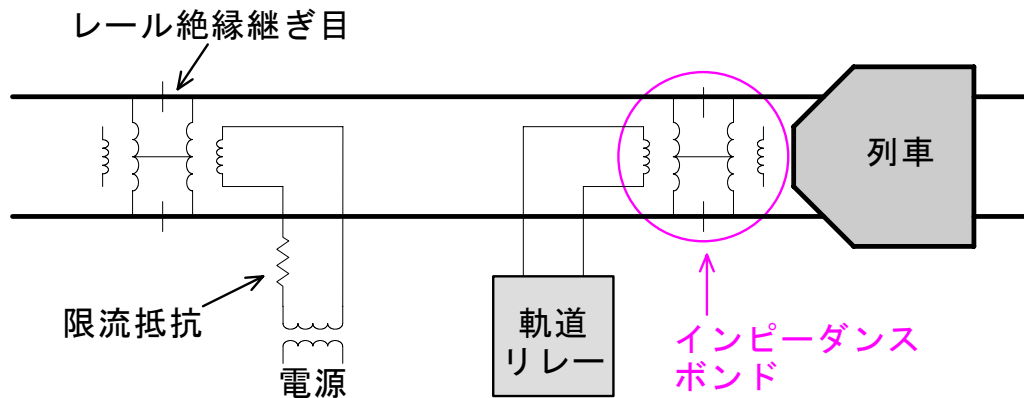


図1.1.1 軌道回路の基本構成

Fig.1.1.1 Basic composition of track circuit

### 1.1.2 信号周波数

現在、鉄道信号には、その種類に応じて様々な信号周波数が用いられている<sup>[1,2]</sup>。帰線電流が影響を及ぼす軌道回路には、使用される周波数帯に応じて、直流軌道回路、低周波軌道回路、AF軌道回路、高周波軌道回路に分けられる。直流軌道回路は、直流を流すためシンプルな構成となり、非電化区間などに用いられる。低周波軌道回路は、商用周波数帯を使用する軌道回路であり、商用周波数をそのまま用いる商用軌道回路、商用周波数の1/2周期の信号を用いる分周軌道回路、送信側で商用周波数の1/2周期の信号を用い受信側で商用周波数に戻す分倍周軌道回路などに分けられる。AF軌道回路は、Audio Frequency帯を用いる軌道回路であり、数100 [Hz]～数10 [kHz]の周波数が用いられる。ATC区間では、変調することで多くの情報を重畳できるAF軌道回路が用いられる。なお、AF軌道回路は、絶縁の有

無により有絶縁軌道回路と無絶縁軌道回路に分けられる。高周波軌道回路としては、短小軌道回路になる踏切制御子において、10 [kHz]以上の周波数が使用されている。

## 1.2 インバータ制御車の軌道回路への影響

近年新製される電気鉄道車両は、ほとんどが誘導電動機のインバータ制御になっている。インバータ制御は、その原理上多くの高調波を発生する。このため、インバータにより得られる三相交流波形は、基本波成分のみの正弦波とはならず、多くの高調波成分を含む。

図1.2.1に、直流電化区間用のインバータ制御車の主回路と軌道回路の関係を示す。また、図1.2.2に、インバータ制御車の主回路の構成を示す。インバータ制御のため交流波形が高調波を含むことにより、直流側電流 $I_{dc}$ においても多くの高調波を含む。図1.2.1のように電気鉄道においては、変電所から架線を通ってきた電流は、電車の電動機を通り、レールを通して変電所に戻る。このレールを流れる電流を帰線電流という。このように、インバータ直流側電流 $I_{dc}$ は、主回路のLCフィルタを通過して帰線電流 $I_{rc}$ となる。これにより、信号機器に対する高調波対策が必要となる<sup>[1,2,10-11]</sup>。

インバータに起因する高調波低減を1つの目的として、主回路にLCフィルタが挿入される。このLCフィルタの定数は、高調波電流の周波数や、短絡事故時の電流抑制効果、インバータ制御の安定性などを考慮して決定される。しかしながら、帰線電流高調波の発生メカニズムは、ほとんど明らかになっておらず、新たな主回路設計を行う際には、その都度、帰線電流高調波の確認が行われ、必要に応じてその対策がとられているのが現状である。このため、高調波の理論解析により高調波発生メカニズムを明らかにし、高調波の周波数と振幅を明確化することで、高調波を低減するPWM制御法の提案や、高調波対策の定量的な基準を示すことが期待できる。

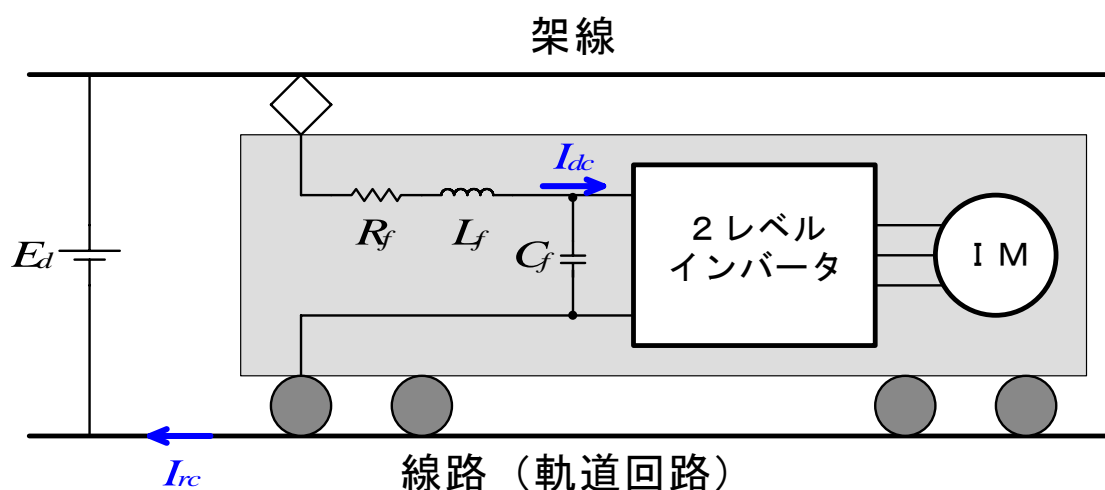


図1.2.1 インバータ制御車の主回路と軌道回路

Fig.1.2.1 A traction circuit of the inverter-controlled DC electric railcar and the track circuit

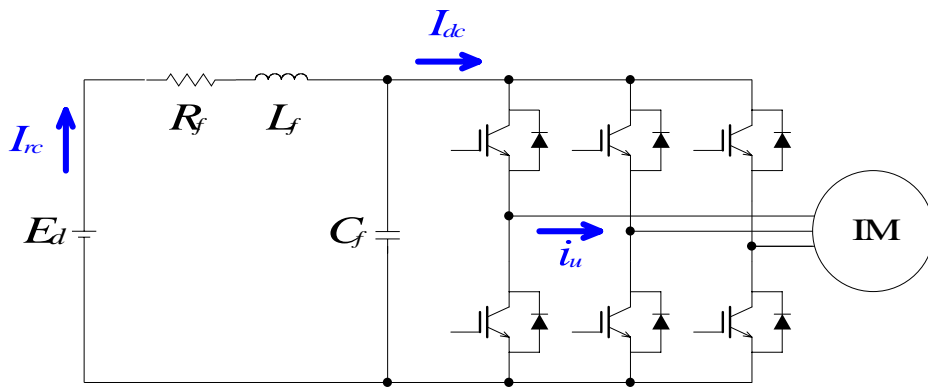


図1. 2. 2 インバータ制御車の主回路の構成

Fig.1.2.2 Composition of the traction circuit of the inverter-controlled DC electric railcar



## 第2節

# 解析対象のモデル化

本検討では、数値解析と実験により、提案する理論解析の妥当性を検証する。提案する理論解析は、帰線電流高調波について理論式を導出することにより、高調波発生量を予測し、高調波低減に対する設計上の情報を提供するものである。数値解析は、インバータと電動機とLCフィルタを微分方程式によりモデル化し、数値計算手法により帰線電流の時間波形を算出し、FFTにより周波数スペクトラムを得るものである。実験は、ミニモデル実験機により、帰線電流の時間波形を取得し、FFTにより周波数スペクトラムを得るものである。本節においては、本検討の対象となる直流鉄道車両の駆動系について、解析モデルを構成する。

はじめに、直流電化区間のき電系とインバータ制御鉄道車両の構成をはじめとする解析対象システムを示す。次に、数値解析を行うためのモデルとして、誘導電動機モデルとPWMインバータモデルと誘導電動機制御系モデルなどを構成する。また、解析対象として区別する必要があるインバータの運転状態を示すPWMパルスモードについて紹介する。さらに、高調波低減手法として直流鉄道車両への適用を提案するPWM搬送波の位相差運転について、その原理を紹介する。

### 2.1 解析対象システム

直流電化区間用のインバータ制御車の主回路と軌道回路の関係を図2.1.1に再掲する。また、インバータ制御車の主回路の構成を図2.1.2に再掲する。本論文では、図2.1.2に示すような2レベル電圧形インバータにより、誘導電動機のインバータ制御を行う直流鉄道車両を想定する。直流側電流 $I_{dc}$ がLCフィルタを通り帰線電流 $I_{rc}$ となるため、これを高調波の検討対象とする。

主回路構成は、帰線電流高調波の基本的な特性を検討するため、インバータ1台で誘導電動機1台を駆動する1C1Mの構成を想定する。PWM搬送波の位相差運転においては、編成内に複数台のインバータが並列に接続されるものを想定する。また、直流側電流高調波は変調波周波数(インバータ出力周波数)によって発生する周波数が変化する。このため、数値解析においては、誘導電動機の回転数は一定となるように、ロータイナーシャを無限大として周波数スペクトラムを算出する。これにより、変調波周波数が連続的に変化することなく、変調波周波数毎に定常状態として考察を行うことができる。

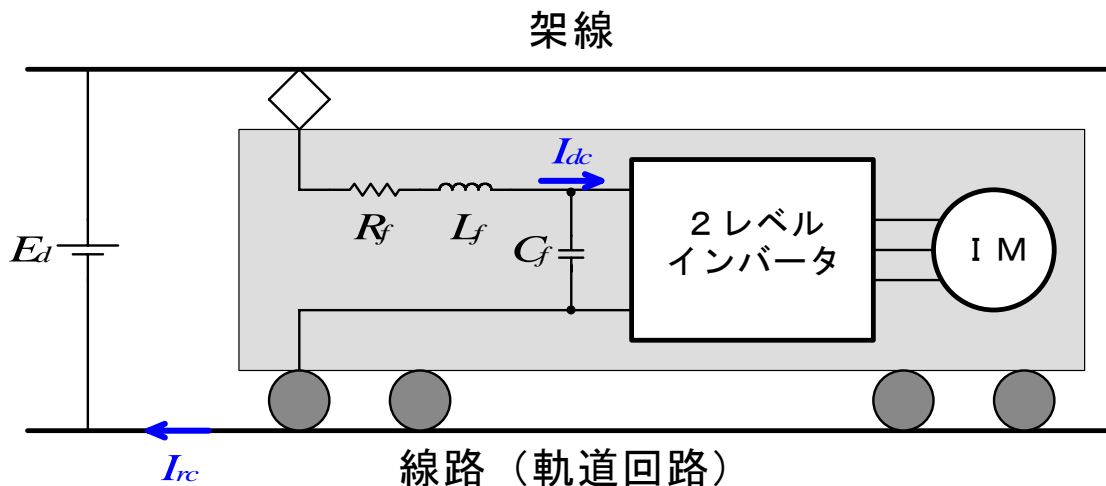


図2. 1. 1 インバータ制御車の主回路と軌道回路

Fig.2.1.1 A traction circuit of the inverter-controlled DC electric railcar and the track circuit

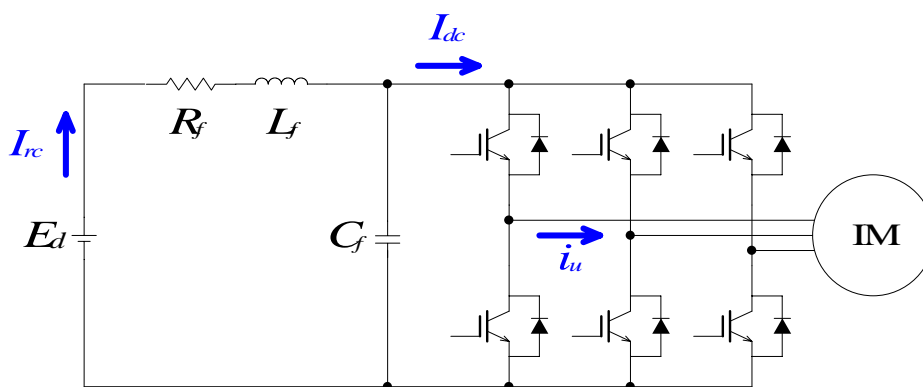


図2. 1. 2 インバータ制御車の主回路の構成

Fig.2.1.2 Composition of the traction circuit of the inverter-controlled DC electric railcar

## 2.2 数値解析モデル

### 2.2.1 数値解析モデルの概要

図2.2.1に数値解析を行う際のモデルの構成を示す。誘導電動機は二相交流座標系を用いてモデル化する。PWMインバータは三相交流座標系を用いてモデル化する。電流制御系は二軸直流座標系を用いてモデル化する。

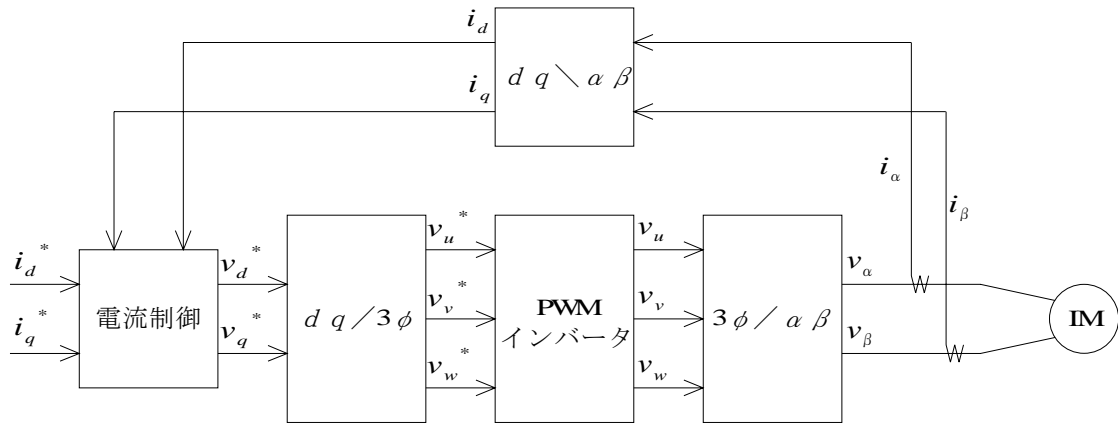


図2.2.1 数値解析モデルの構成

Fig.2.2.1 Composition of the numerical simulation model

### 2.2.2 誘導電動機モデル

誘導電動機は、二相交流座標系を用いて式(2.2.1)のようにモデル化して数値解析する。

$$\begin{bmatrix} v_{1\alpha} \\ v_{1\beta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + PL_1 & 0 & PM \cos \theta_{re} & -PM \sin \theta_{re} \\ 0 & R_1 + PL_1 & PM \sin \theta_{re} & PM \cos \theta_{re} \\ PM \cos \theta_{re} & PM \sin \theta_{re} & R_2 + PL_2 & 0 \\ -PM \sin \theta_{re} & PM \cos \theta_{re} & 0 & R_2 + PL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{1\alpha} \\ i_{1\beta} \\ i_{2\alpha} \\ i_{2\beta} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

$v_{1\alpha}$   $\alpha$ 相の固定子電圧

$v_{1\beta}$   $\beta$ 相の固定子電圧

$i_{1\alpha}$   $\alpha$ 相の固定子電流

$i_{1\beta}$   $\beta$ 相の固定子電流

$i_{2\alpha}$   $\alpha$ 相の回転子電流

$i_{2\beta}$   $\beta$ 相の回転子電流

ただし、 $P$  は時間微分演算子

$$P = \frac{d}{dt} \quad (2.2.2)$$

である。また、 $\theta_{re}$ は、u相固定子巻線を基準として時計回りにとった界磁の角度であり、回転子の角速度を $\omega_{re}$ に対して、

$$\theta_{re} = \int \omega_{re} dt \tag{2.2.3}$$

となる。

### 2.2.3 PWMインバータモデル

PWMインバータは、三相交流座標系を用いてモデル化して数値解析する。図2.1.2のように、2レベル電圧形インバータを想定し、架線電圧を $E_d$ とし、架線は理想的な直流定電圧源として取り扱う。直流側電流 $I_{dc}$ と帰線電流 $I_{rc}$ の関係は、LCフィルタを考慮して、

$$E_d = R_f I_{rc} + L_f \frac{d}{dt} I_{rc} + \frac{1}{C_f} \int (I_{rc} - I_{dc}) dt \tag{2.2.4}$$

とモデル化する。

### 2.2.4 誘導電動機制御系モデル

電流制御系は、二軸直流座標系を用いて図2.2.2～4に示すようなベクトル制御を用いた誘導電動機制御系を想定してモデル化して数値解析する。電流制御系にフィードフォワード制御を用いる場合は、図2.2.2のような制御ブロック図となる。また、電流制御系にフィードバック制御を用いる場合は、図2.2.3のような制御ブロック図となる<sup>[2.1]</sup>。さらに、鉄道車両駆動において高速運転領域で用いられる1パルスモードは、図2.2.4のような制御ブロック図となる<sup>[2.2]</sup>。

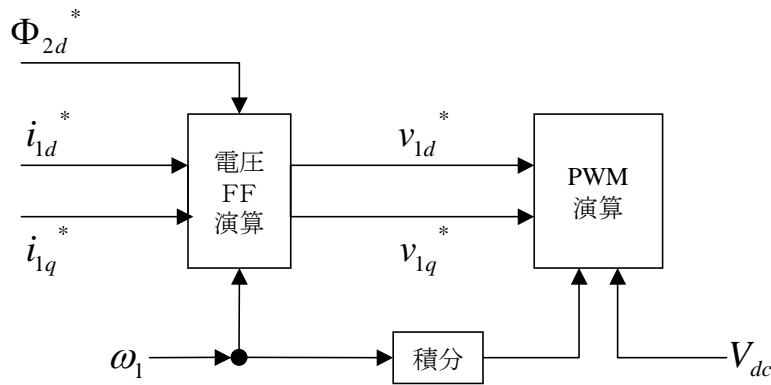


図2.2.2 フィードフォワード制御系による誘導電動機制御ブロック図

Fig.2.2.2 A block diagram of the induction motor control with feed forward control

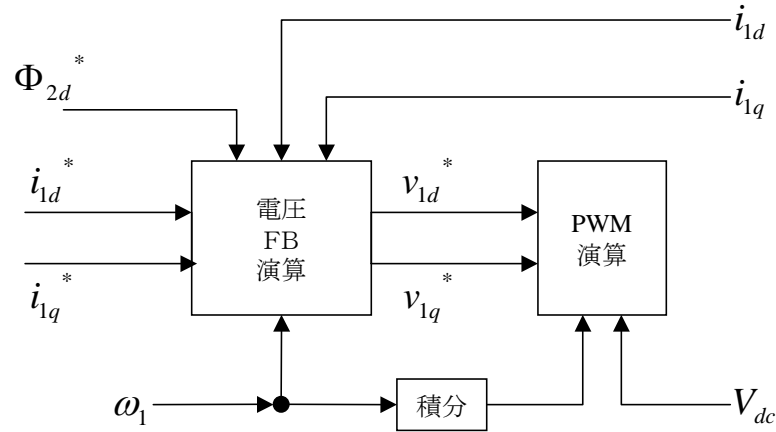


図2. 2. 3 フィードバック制御系による誘導電動機制御ブロック図

Fig.2.2.3 A block diagram of the induction motor control with feed back control

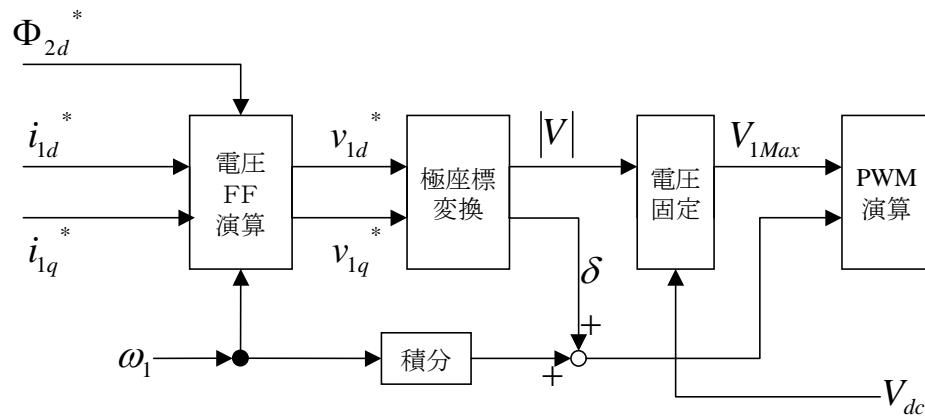


図2. 2. 4 1パルスモードの誘導電動機制御ブロック図

Fig.2.2.4 A block diagram of the induction motor control with a one-pulse PWM

### 2. 2. 5 電流フィードフォワード制御系モデル

電流制御系にフィードフォワード制御を用いた場合のブロック図を図2. 2. 5に示す。これは、図2. 2. 2と図2. 2. 4の電圧FF演算ブロックである。フィードフォワード制御系においては、d軸電圧指令値 $v_{1d}^*$ およびq軸電圧指令値 $v_{1q}^*$ は、d軸電流指令値 $i_{1d}^*$ およびq軸電流指令値 $i_{1q}^*$ を用いて、式(2. 2. 5)および式(2. 2. 6)として表される。なお、本節では、電動機制御系で多く用いられる表現方法に合わせて、インバータ出力角周波数を $\omega_1$ と表す。

$$v_{1d}^* = R_1 i_{1d}^* - \sigma L_1 \omega_1 i_{1q}^* \quad (2. 2. 5)$$

$$v_{1q}^* = R_1 i_{1q}^* + \sigma L_1 \omega_1 i_{1d}^* + \left( \frac{M}{L_2} \right) \omega_1 \phi_{2d}^* \quad (2. 2. 6)$$

- $R_1$  1次抵抗
- $L_1$  1次インダクタンス
- $M$  相互インダクタンス

$L_2$  2次インダクタンス

$R_2$  2次抵抗

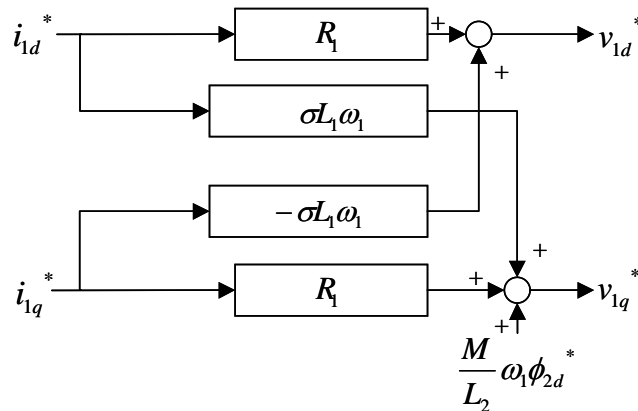


図2. 2. 5 フィードフォワード制御系による電流制御系のブロック図

Fig.2.2.5 A block diagram of the current control with feed forward control

ただし、漏れ係数 $\sigma$ は、

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \quad (2. 2. 7)$$

である。また、d軸回転子磁束指令値 $\phi_{2d}^*$ は、

$$\phi_{2d}^* = M i_{1d}^* + L_2 i_{2d}^* \quad (2. 2. 8)$$

となる。

### 2. 2. 6 電流フィードバック制御系モデル

電流制御系にフィードバック制御を用いた場合のブロック図を図2. 2. 6に示す。これは、図2. 2. 3の電圧FB演算ブロックである。フィードバック制御系においては、d軸電圧指令値 $v_{1d}^*$ およびq軸電圧指令値 $v_{1q}^*$ は、d軸電流指令値 $i_{1d}^*$ およびq軸電流指令値 $i_{1q}^*$ を用いて、式(2. 2. 9)および式(2. 2. 10)として表される。

$$v_{1d}^* = K_{pACR} (i_{1d}^* - i_{1d}) + K_{iACR} \int (i_{1d}^* - i_{1d}) dt - \sigma L_1 \omega_1 G_{fACR}(s) i_{1q}^* \quad (2. 2. 9)$$

$$v_{1q}^* = K_{pACR} (i_{1q}^* - i_{1q}) + K_{iACR} \int (i_{1q}^* - i_{1q}) dt + \sigma L_1 \omega_1 G_{fACR}(s) i_{1d}^* + \left( \frac{M}{L_2} \right) \omega_1 \phi_{2d}^* \quad (2. 2. 10)$$

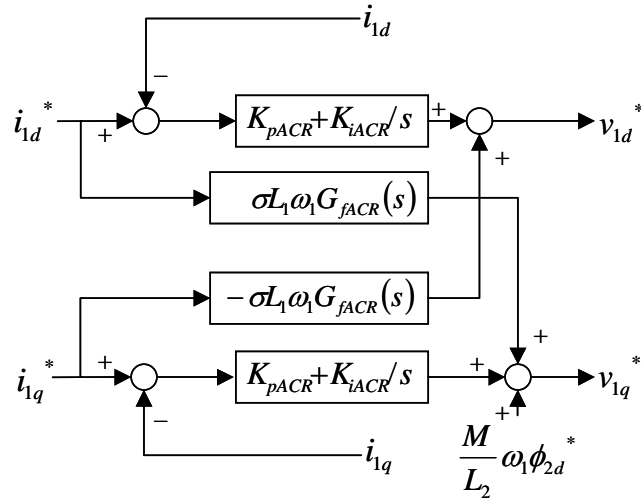


図2. 2. 6 フィードバック制御による電流制御系のブロック図

Fig.2.2.6 A block diagram of the current control feed back control

ただし、比例ゲイン $K_{pACR}$ 、積分ゲイン $K_{iACR}$ 、および $G_{fACR}(s)$ は、応答時定数 $T_d$ 、および $T_{sACR}$ を用いて、

$$K_{pACR} = \frac{\sigma L_1}{T_d} \tag{2. 2. 11}$$

$$K_{iACR} = \frac{R_1}{T_d} \tag{2. 2. 12}$$

$$G_{fACR}(s) = \frac{1}{T_{sACR}s + 1} \tag{2. 2. 13}$$

と決定する。

### 2. 2. 7 1パルスモードの制御方法

電圧ベクトルの位相は変化させることができるが大きさは変えられない1パルスモードにおいては、図2. 2. 4のように極座標変換と電圧固定を行う。極座標変換ブロックでは、二軸直流座標系で表される電圧指令値を、式(2. 2. 14)と式(2. 2. 15)のように、電圧ベクトルの大きさと位相に変換する。

$$|V| = \sqrt{v_{1d}^{*2} + v_{1q}^{*2}} \tag{2. 2. 14}$$

$$\delta = \tan^{-1} \frac{v_{1q}^*}{v_{1d}^*} \tag{2. 2. 15}$$

電圧固定ブロックでは、電圧ベクトルの大きさが、1パルスモードで出力する最大出力電圧よりも大きいときは、式(2. 2. 16)のように、最大値にリミット固定する。

$$V_{1Max} = \begin{cases} |V| & \dots\dots |V| < \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_{dc} \\ \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_{dc} & \dots\dots |V| > \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_{dc} \end{cases} \tag{2. 2. 16}$$

### 2.3 PWMパルスモード

鉄道車両駆動用インバータは、インバータ出力周波数に応じて、PWMパルスモードを変化させる。図2.3.1にPWMパルスモードの変化例を示す<sup>[2,3,4]</sup>。搬送波周波数(インバータキャリア周波数)を変調波周波数(インバータ出力周波数)と無関係に設定するものを非同期PWMモード、搬送波周波数を変調波周波数の整数倍に選び、変調波周波数とともに変化させるものを同期PWMモードという。また、同期PWMモードでのPWMパルス数は、変調波周波数に対する搬送波周波数の倍数比を示す。

インバータ出力周波数が低い領域では、変調波信号の一周期の間のPWMパルス数が多いので、搬送波信号の周波数を一定に保つ非同期PWMが行われる。ある程度インバータ出力周波数が大きくなると、変調波一周期のPWMパルス数が減り、非同期PWMでは電流の直流分を含む波形歪みが大きくなる場合がある。そのような場合には変調波一周期あたりのPWMパルスの数を一定にする同期PWMに切り替える。さらにインバータ出力周波数が大きくなると、出力電圧が大きくなりインバータが出力しうる最大電圧を得るために、方形波電圧を出力する1パルスモードにする。

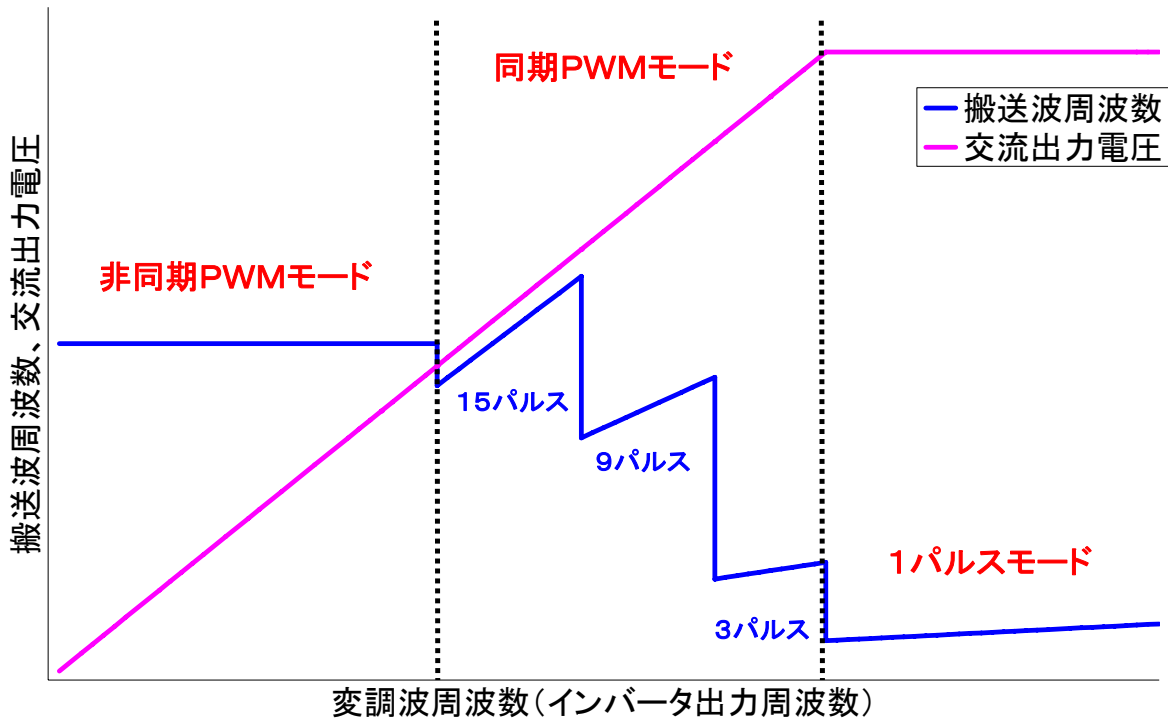


図2.3.1 PWMパルスモードの変化例

Fig.2.3.1 A transition of PWM pulse mode



## 2.4 位相差運転

図2.4.1に示すように、電気鉄道車両は各車両に主回路を有するため、電源となる架線・レール側から見た場合に、複数台の電力変換装置が並列に接続されている。このため、交流鉄道車両においては、複数台のコンバータ装置の搬送波について位相を適切に割り振ることにより、お互いの帰線電流高調波を打ち消すPWM搬送波の位相差運転が広く用いられている<sup>[2,5-7]</sup>。搬送波の位相の割り振りの例を表2.4.1に示す。表2.4.1に示した例は、1編成内にコンバータが8台搭載する車両であり、180 [deg]から均等に等分して位相を割り振っている。位相差運転を行うためには、各電力変換装置の間を同期して、位相差を設定する必要がある。交流鉄道車両においては、架線電圧のゼロ電位検出により同期を行っている。

一方、直流鉄道車両においては、同期電源を持たないためPWM搬送波の位相差運転の適用が困難であった。しかしながら近年の直流鉄道車両においては、補助電源の同期電源化により、位相差運転の適用の可能性が出てきている。本章では、開発した理論解析の応用事例として、直流鉄道車両への位相差運転の効果を定量的に明らかにし、その有効性を示す。

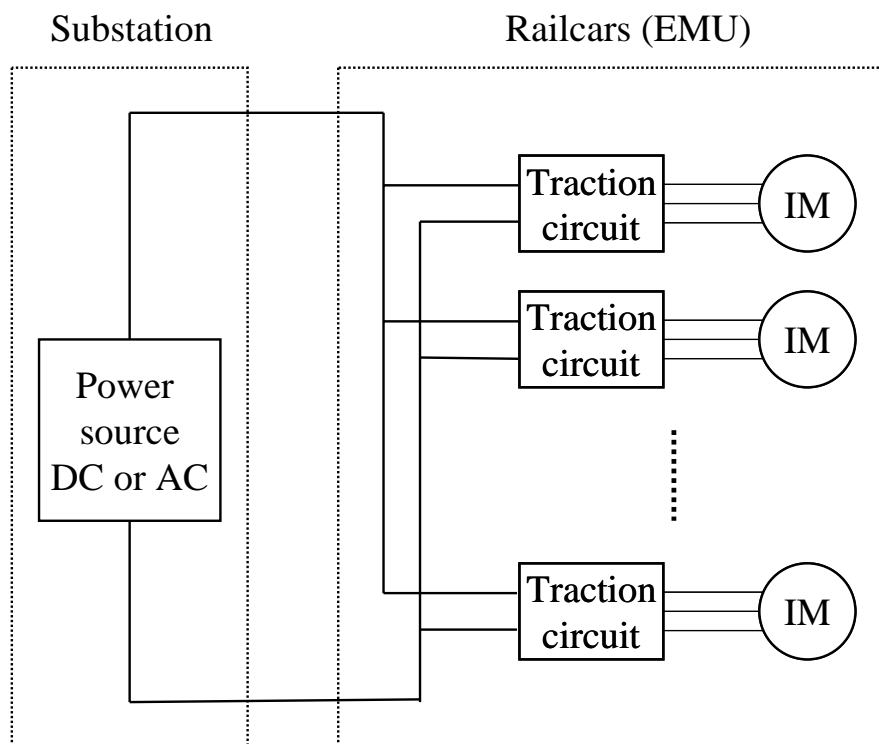


図2.4.1 電気鉄道車両の駆動システムの基本構成

Fig.2.4.1 A conceptual composition of a traction system of electric railcars

表2. 4. 1 交流鉄道車両の位相差運転による位相差角度設定の例

Table 2.4.1 An example of carrier phase of carrier-phase shift operation for AC electric railcars

Unit No.	Converter No.	Carrier phase [deg]
1	1	0.0
	2	90.0
	3	45.0
	4	135.0
2	5	22.5
	6	112.5
	7	67.5
	8	175.5

## 第3節

# 理論式を用いた解析

本節において、本研究で提案する理論解析として、直流側電流高調波の理論式を導出する。はじめに、パルス幅変調方式として、サブハーモニック変調方式を対象とするので、これについて紹介する。次に、スイッチング素子のスイッチング動作をモデル化したスイッチング関数を導入する。さらに、任意の振幅と周波数の相電流を仮定し、それにより生じる直流側電流の高調波の理論式を導出する。続いて、導出した理論式に、相電流の高調波分を無視して正弦波近似を適用し、簡略化した理論式を導出する。この結果をもとに、周波数成分に注目し、高調波として発生する可能性のある周波数成分を整理する。さらに、搬送波を単相でなく、三相とした場合についても同様の解析を行う。最後に、高調波低減の一手法として、位相差運転の効果について検討するため、位相差運転を考慮した理論式を導出する。

### 3.1 サブハーモニック変調方式

本論文では、パルス幅変調方式として、変調波と搬送波を比較器で比較し、振幅の大小によって出力の状態を決定するサブハーモニック変調を対象とする<sup>[3.1]</sup>。変調波はインバータから出力しようとする正弦波となる。また、搬送波は一般に変調波周波数よりも大きな周波数の三角波が用いられる。本論文では、搬送波は三角波を用いる三角波正弦波比較方式を想定する。搬送波については、1つの搬送波と三相の変調波を比較する単相搬送波と、各相毎に搬送波と変調波を個別に比較する三相搬送波を対象として検討を行う。単相搬送波を用いた場合の変調波と搬送波の波形を図3.1.1に、三相搬送波を用いた場合の変調波と搬送波の波形を図3.1.2に示す。

サブハーモニック変調方式を用いる非同期PWMモードや同期PWMモードにおいては、鉄道車両駆動用インバータでは一般に単相搬送波が用いられる。一方、1パルスモードにおいては、変調波の正負のみで出力を決定できるが、その出力波形は、サブハーモニック変調方式で三相搬送波を用いるのと等価な状態として考えられる。

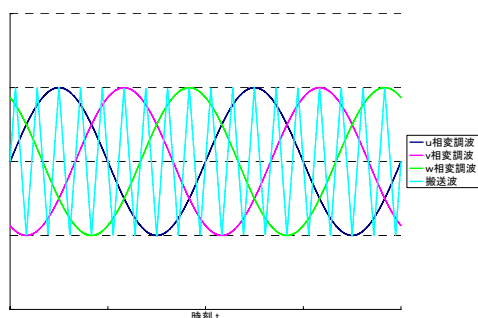


図3.1.1 単相搬送波

Fig.3.1.1 Single-phase carrier wave

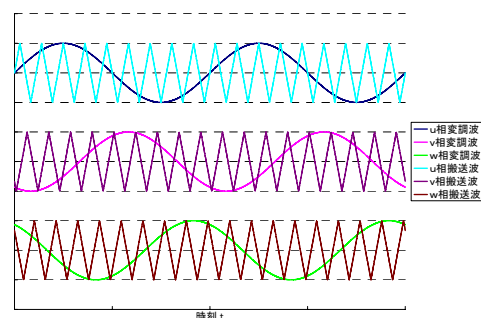


図3.1.2 三相搬送波

Fig.3.1.2 Three-phase carrier wave

### 3.2 スイッチング関数の導入

#### 3.2.1 スイッチング関数の定義

スイッチング関数は、スイッチング素子のスイッチング動作をモデル化したものである。はじめに、スイッチング関数の考え方について述べる。2レベル電圧形インバータは、図3.2.1のような素子で構成されている。電圧形インバータにおいては、各相の上下のスイッチング素子は、どちらか一方がオンとなり、もう一方がオフとなっている。このため、上下のスイッチング素子を合わせて一つのスイッチと見なして、図3.2.2のような回路として考えることができる。これより、各相においてアームの上側のスイッチング素子が、オンの場合を1、オフの場合を0とするスイッチング関数を定義することができる。

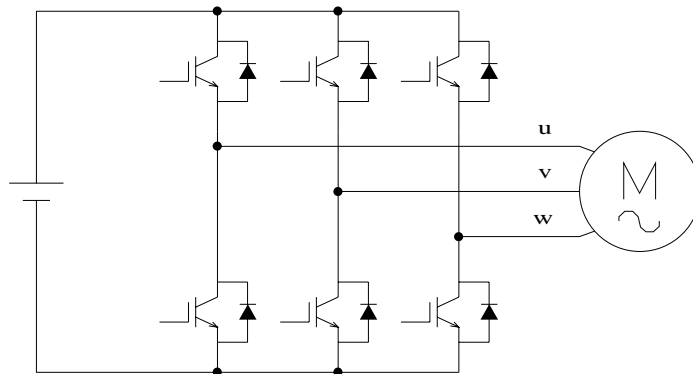


図3.2.1 2レベル電圧形インバータの基本構成

Fig.3.2.1 Basic composition of the step voltage source inverter

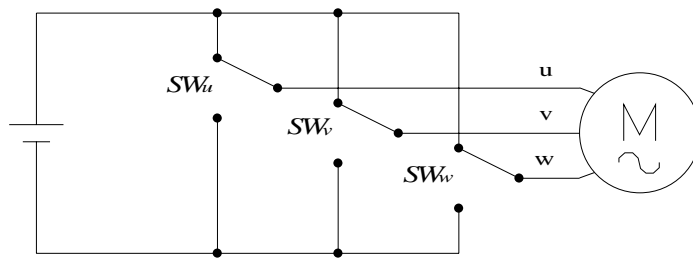


図3.3.2 スイッチング素子の基本動作モデル

Fig.3.2.2 Model of basic behavior of switching devices

### 3. 2. 2 スイッチング関数による直流側電流の表現

スイッチング関数を用いると、直流側電流 $I_{dc}$ は、式(3. 2. 1)のように、各相のスイッチング関数と相電流の積として表される。これは、図3. 2. 3のように、各相において変調波と搬送波の比較によって1か0のどちらかの値を取るスイッチング関数が計算され、これと相電流の積として、直流側電流が表現されるという考え方に基づいている。

$$I_{dc} = SW_u \times i_u + SW_v \times i_v + SW_w \times i_w \quad (3. 2. 1)$$

$SW_u$  u相のスイッチング関数

$SW_v$  v相のスイッチング関数

$SW_w$  w相のスイッチング関数

$i_u$  u相電流

$i_v$  v相電流

$i_w$  w相電流

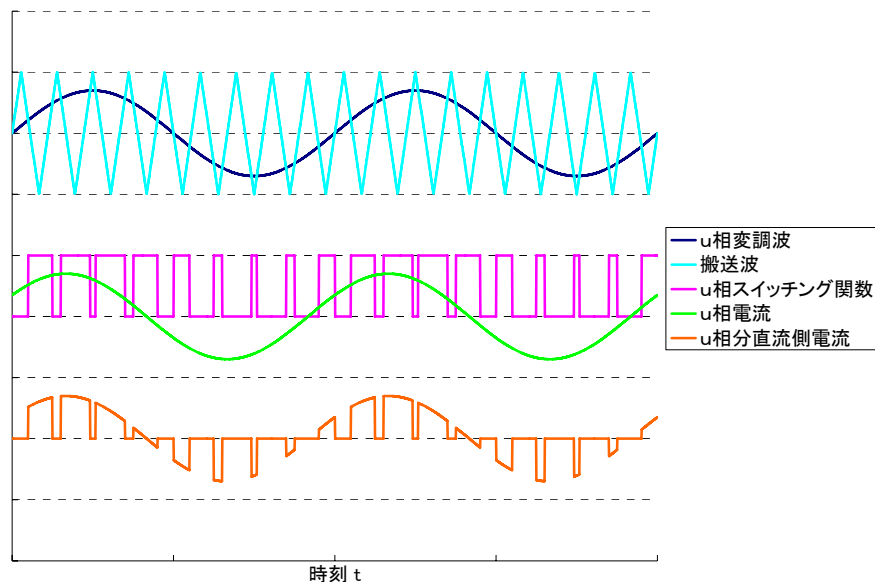


図3. 2. 3 スイッチング関数を用いた直流側電流の表現

Fig.3.2.3 DC-link current expression used by the switching function

### 3. 2. 3 スイッチング関数の導出

三角波正弦波比較方式において、同期PWMモードや1パルスモードだけでなく非同期PWMモードも想定した場合、u相のスイッチング関数 $SW_u$ は、式(3. 2. 2)のように表される。スイッチング関数の導出については、第7節の付録に詳細を紹介する。

$$SW_u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sin(\omega_m t + \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{2} \{a \sin(\omega_m t + \phi) - 1\}\right] \cos n(\omega_c t + \delta) \quad (3. 2. 2)$$

$a$  変調率

$\omega_m$  変調波角周波数

$\phi$  変調波初期位相

$\omega_c$  搬送波角周波数

$\delta$  搬送波初期位相

このスイッチング関数から、端子電圧や相電流を表現することができる。端子電圧は、スイッチング関数に直流側電圧の値を掛けたものとして表される。相電流は、端子電圧の周波数成分ごとに、モータの等価回路を考慮して求めることが可能である。

単相の搬送波の場合、v相のスイッチング関数 $SW_v$ 、w相のスイッチング関数 $SW_w$ は、

$$SW_v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{2}{3} \pi\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{2} \left\{ a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{2}{3} \pi\right) - 1 \right\}\right] \cos n(\omega_c t + \delta) \quad (3.2.3)$$

$$SW_w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{4}{3} \pi\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{2} \left\{ a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{4}{3} \pi\right) - 1 \right\}\right] \cos n(\omega_c t + \delta) \quad (3.2.4)$$

として表される。三相の搬送波の場合、v相のスイッチング関数 $SW_v$ 、w相のスイッチング関数 $SW_w$ は、

$$SW_v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{2}{3} \pi\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{2} \left\{ a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{2}{3} \pi\right) - 1 \right\}\right] \cos n\left(\omega_c t + \delta - \frac{2}{3} \pi\right) \quad (3.2.5)$$

$$SW_w = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{4}{3} \pi\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{2} \left\{ a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{4}{3} \pi\right) - 1 \right\}\right] \cos n\left(\omega_c t + \delta - \frac{4}{3} \pi\right) \quad (3.2.6)$$

として表される。

### 3.3 単相搬送波を用いた場合の高調波理論式の導出

#### 3.3.1 任意の相電流に対する高調波理論式の導出

本節では、単相の搬送波を前提として、高調波の理論式を導出する。直流側電流は、式(3.2.1)のようにスイッチング関数と相電流の積として求められる。単相の搬送波の場合、スイッチング関数は式(3.2.2、3、4)として与えられるので、これを用いる。相電流は、角周波数 $\omega_i$ の相電流を想定し、式(3.3.1)のように表現する。

$$\begin{aligned} i_{ui} &= I_i \sin\{(\omega_i t + \phi_i) - \psi\} \\ i_{vi} &= I_i \sin\left\{(\omega_i t + \phi_i) - \psi - \frac{2}{3}\pi\right\} \\ i_{wi} &= I_i \sin\left\{(\omega_i t + \phi_i) - \psi - \frac{4}{3}\pi\right\} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

$I_i$  相電流振幅  
 $\omega_i$  相電流周波数  
 $\phi_i$  相電流初期位相  
 $\psi$  力率角

直流側電流を表す式(3.2.1)に、式(3.2.2、3、4)で示したスイッチング関数と、式(3.3.1)で示した相電流を用いて、直流側電流高調波の理論式を導出した。理論式の導出については、第7節の付録に詳細を紹介する。この理論式を用いて、直流側電流高調波の周波数毎に整理すると、変調波周波数 $f_m$ 、搬送波周波数 $f_c$ 、相電流周波数 $f_i$ に対して、高調波成分の振幅は式(3.3.2~6)のように表すことができる。

(o)  $f_m=f_i$ のとき、

$$\text{直流成分} \quad I_i \frac{3}{4} a \cos \psi \quad (3.3.2)$$

(i-a)  $n=1,3,5\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$nf_c \pm (2lf_m + f_i) [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.3.3)$$

(i-b)  $n=1,3,5\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$nf_c \pm (2lf_m - f_i) [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.3.4)$$

(ii-a)  $n=2,4,6\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$nf_c \pm \{(2l-1)f_m - f_i\} [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.3.5)$$

(ii-b)  $n=2,4,6\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$nf_c \pm \{(2l-1)f_m + f_i\} [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.3.6)$$

### 3.3.2 相電流基本波に対する高調波理論式の導出

ここで、相電流の基本波のみから生じる高調波のみを想定して高調波理論式を簡略化する。相電流の基本波は、

$$\begin{aligned} i_u &= I_m \sin\{(\omega_m t + \phi) - \psi\} \\ i_v &= I_m \sin\left\{(\omega_m t + \phi) - \psi - \frac{2}{3}\pi\right\} \\ i_w &= I_m \sin\left\{(\omega_m t + \phi) - \psi - \frac{4}{3}\pi\right\} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$I_m$  相電流基本波振幅

として表されるので、式(3.3.1)に、

$$\begin{aligned} I_i &= I_m \\ f_i &= f_m \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

を用いて、式(3.3.2～6)を整理することができる。この結果、変調波周波数 $f_m$ 、搬送波周波数 $f_c$ に対して、相電流の基本波のみから生じる高調波成分の振幅は式(3.3.9～13)のように表すことができる。

$$(o) \quad \text{直流成分} \quad I_m \frac{3}{4} a \cos \psi \quad (3.3.9)$$

(i-a)  $n_o=1,3,5\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$n_o f_c \pm (2l+1)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n_o \pi} J_{2l}\left(\frac{an_o \pi}{2}\right) \quad (3.3.10)$$

(i-b)  $n_o=1,3,5\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$n_o f_c \pm (2l-1)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n_o \pi} J_{2l}\left(\frac{an_o \pi}{2}\right) \quad (3.3.11)$$

(ii-a)  $n_e=2,4,6\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$n_e f_c \pm (2l-2)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n_e \pi} J_{2l-1}\left(\frac{an_e \pi}{2}\right) \quad (3.3.12)$$

(ii-b)  $n_e=2,4,6\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$n_e f_c \pm 2lf_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n_e \pi} J_{2l-1}\left(\frac{an_e \pi}{2}\right) \quad (3.3.13)$$

$n_o$  奇数       $n_e$  偶数       $l$  整数

$J_k(x)$   $k$ 次のベッセル関数

## 3.4 単相搬送波を用いた場合の高調波周波数についての考察

### 3.4.1 側帯高調波の周波数成分についての考察

式(3.3.9～13)より、直流側電流には、式(3.3.9)に示した直流成分の他に、式(3.3.10～13)に示したような高調波成分が生じることがわかる。式(3.3.10、11)は搬送波周波数の奇数次の側帯高調波を、式(3.3.12、13)は搬送波周波数の偶数次の側帯高調波を示している。これを周波数成分のみに注目して整理すると、式(3.4.1、2)のような周波数成分として表すことができる。



(i) 搬送波の奇数次の側帯高調波

$$n_o f_c \pm 3m_o f_m \text{ [Hz]} \quad (3.4.1)$$

$n_o$  奇数  $m_o$  奇数

(ii) 搬送波の偶数次の側帯高調波

$$n_e f_c \pm 3m_e f_m \text{ [Hz]} \quad (3.4.2)$$

$n_e$  偶数  $m_e$  偶数

これより、式(3.4.1)のように、搬送波周波数の奇数倍に対して、変調波周波数の3の奇数倍の側帯高調波が発生することがわかる。同様に、式(3.4.2)のように、搬送波周波数の偶数倍に対して、変調波周波数の3の偶数倍の側帯高調波が発生することがわかる。

### 3.4.2 高調波として発生する周波数成分についての考察と証明

同期PWMモードにおいては、変調波周波数に対する搬送波周波数の倍数比がPWMパルス数となる。式(3.4.1、2)を用いると、高調波として発生する可能性のある周波数成分の特徴をPWMパルス数に応じて示すことができる。たとえば、PWMパルス数が奇数の時には、直流側電流の高調波は、変調波周波数の偶数倍の成分しか生じない。一方、PWMパルス数が偶数の時には、直流側電流の高調波は、変調波周波数の奇数倍と偶数倍の成分が生じる。また、3パルスモード、すなわち、PWMパルス数が3の時には、直流側電流の高調波は、変調波周波数の6の整数倍の高調波しか生じない。これらは、式(3.4.1、2)をもとにして、証明3.4.1～3のように証明することができる。

#### 証明3.4.1

同期PWMモードにおいて、PWMパルス数が奇数の時に、直流側電流の高調波は、変調波周波数の偶数倍の成分しか生じないこと

係数 $n_o, n_e, m_o, m_e$ は、整数 $a, b$ を用いて、

$$\begin{aligned} n_o &= 2a + 1 \\ n_e &= 2a \\ m_o &= 2b + 1 \\ m_e &= 2b \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

と表すことができる。PWMパルス数が奇数のときは、搬送波周波数は、整数 $c$ を用いて、

$$f_c = (2c + 1)f_m \quad (3.4.4)$$

と表すことができる。これを用いると、搬送波の奇数次の側帯高調波を表す式(3.4.1)は、

$$\begin{aligned} n_o f_c \pm 3m_o f_m &= (2a + 1)(2c + 1)f_m \pm 3(2b + 1)f_m \\ &= 2(2ac + a + c \pm 3b)f_m + (1 \pm 3)f_m \\ &= 2(2ac + a + c + 3b + 2)f_m, 2(2ac + a + c - 3b - 1)f_m \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

と変形できることから、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の偶数倍の高調波しか生じないことがわかる。同様に、搬送波の偶数次の側帯高調波を表す式(3.4.2)は、

$$\begin{aligned} n_e f_c \pm 3m_e f_m &= 2a(2c + 1)f_m \pm 3 \cdot 2b f_m \\ &= 2(2ac + a \pm 3b)f_m \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

と変形できることから、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の偶数倍の高調波しか生じないことがわかる。

**証明3. 4. 2**

同期PWMモードにおいて、PWMパルス数が偶数の時には、直流側電流の高調波は、変調波周波数の奇数倍と偶数倍の成分が生じること

PWMパルス数が偶数のときは、搬送波周波数は、整数  $c$  を用いて、

$$f_c = 2cf_m \quad (3. 4. 7)$$

と表すことができる。これを用いると、搬送波の奇数次の側帯高調波を表す式(3. 4. 1)は、

$$\begin{aligned} n_o f_c \pm 3m_o f_m &= (2a+1)(2c)f_m \pm 3(2b+1)f_m \\ &= 2(2ac+c\pm 3b)f_m \pm 3f_m \\ &= \{2(2ac+c+3b+1)+1\}f_m, \{2(2ac+c-3b-1)-1\}f_m \end{aligned} \quad (3. 4. 8)$$

と変形できることから、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の奇数倍の高調波しか生じないことがわかる。同様に、搬送波の偶数次の側帯高調波を表す式(3. 4. 2)は、

$$\begin{aligned} n_e f_c \pm 3m_e f_m &= 2a(2c)f_m \pm 3 \cdot 2bf_m \\ &= 2(2ac+3b)f_m \end{aligned} \quad (3. 4. 9)$$

と変形できることから、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の偶数倍の高調波しか生じないことがわかる。

**証明3. 4. 3**

同期PWMモードにおいて、3パルスモード、すなわち、PWMパルス数が3の時には、直流側電流の高調波は、変調波周波数の6の整数倍の高調波しか生じないこと

3パルスモードの場合は、式(3. 4. 4)において、

$$f_c = 3f_m \quad (3. 4. 10)$$

となることから、

$$c = 1 \quad (3. 4. 11)$$

となる。これを、搬送波の奇数次の側帯高調波を表す式(3. 4. 5)に代入すると、

$$\begin{aligned} n_o f_c \pm 3m_o f_m &= 2(2ac+a+c+3b+2)f_m, 2(2ac+a+c-3b-1)f_m \\ &= 6(a+b+1)f_m, 6(a-b)f_m \end{aligned} \quad (3. 4. 12)$$

と変形できることから、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の6の整数倍の高調波しか生じないことがわかる。同様に、搬送波の偶数次の側帯高調波を表す式(3. 4. 6)に代入すると、

$$\begin{aligned} n_e f_c \pm 3m_e f_m &= 2(2ac+a\pm 3b)f_m \\ &= 6(a\pm b)f_m \end{aligned} \quad (3. 4. 13)$$

と変形できることから、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の6の整数倍の高調波しか生じないことがわかる。

### 3.5 三相搬送波を用いた場合の高調波理論式の導出

#### 3.5.1 任意の相電流に対する高調波理論式の導出

本節では、三相の搬送波を前提として、高調波の理論式を導出する。直流側電流は、式(3.2.1)のようにスイッチング関数と相電流の積として求められる。三相の搬送波の場合、スイッチング関数は式(3.2.2、5、6)として与えられるので、これを用いる。相電流は、角周波数 $\omega_i$ の相電流を想定し、式(3.5.1)のように表現する。

$$\begin{aligned} i_{ui} &= I_i \sin\{(\omega_i t + \phi_i) - \psi\} \\ i_{vi} &= I_i \sin\left\{(\omega_i t + \phi_i) - \psi - \frac{2}{3}\pi\right\} \\ i_{wi} &= I_i \sin\left\{(\omega_i t + \phi_i) - \psi - \frac{4}{3}\pi\right\} \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

直流側電流を表す式(3.2.1)に、式(3.2.2、5、6)で示したスイッチング関数と、式(3.5.1)で示した相電流を用いて、直流側電流高調波の理論式を導出した。理論式の導出については、第7節の付録に詳細を紹介する。この理論式を用いて、直流側電流高調波の周波数毎に整理すると、変調波周波数 $f_m$ 、搬送波周波数 $f_c$ 、相電流周波数 $f_i$ に対して、高調波成分の振幅は式(3.5.2~20)のように表すことができる。

(o)  $f_m=f_i$ のとき、

$$\text{直流成分} \quad I_i \frac{3}{4} a \cos\psi \quad (3.5.2)$$

(i-i)  $n=1,7,13\dots$ のとき、

$$nf_c - f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_0\left(\frac{an\pi}{2}\right) \quad (3.5.3)$$

(i-i-a)  $n=1,7,13\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$nf_c - 2lf_m + f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \quad (3.5.4)$$

(i-i-b)  $n=1,7,13\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$nf_c + 2lf_m + f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \quad (3.5.5)$$

(i-i-c)  $n=1,7,13\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$nf_c \pm 2lf_m - f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \quad (3.5.6)$$

(i-ii-a)  $n=3,9,15\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$nf_c \pm (2lf_m + f_i) [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \quad (3.5.7)$$

(i-ii-b)  $n=3,9,15\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$nf_c \pm (2lf_m - f_i) [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.8)$$

(i-iii)  $n=5,11,17\dots$  のとき、

$$nf_c + f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.9)$$

(i-iii-a)  $n=5,11,17\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、

$$nf_c + 2lf_m - f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.10)$$

(i-iii-b)  $n=5,11,17\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、

$$nf_c - 2lf_m - f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.11)$$

(i-iii-c)  $n=5,11,17\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、

$$nf_c \pm 2lf_m + f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.12)$$

(ii-i-a)  $n=2,8,14\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、

$$nf_c - (2l-1)f_m - f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.13)$$

(ii-i-b)  $n=2,8,14\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、

$$nf_c \pm (2l-1)f_m + f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.14)$$

(ii-i-c)  $n=2,8,14\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、

$$nf_c + (2l-1)f_m - f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.15)$$

(ii-ii-a)  $n=4,10,16\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、

$$nf_c + (2l-1)f_m + f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.16)$$

(ii-ii-b)  $n=4,10,16\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、

$$nf_c \pm (2l-1)f_m - f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.17)$$

(ii-ii-c)  $n=4,10,16\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、

$$nf_c - (2l-1)f_m + f_i [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.18)$$

(ii-iii-a)  $n=6,12,18\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、

$$nf_c \pm \{(2l-1)f_m - f_i\} [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.19)$$

(ii-iii-c)  $n=6,12,18\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、

$$nf_c \pm \{(2l-1)f_m + f_i\} [\text{Hz}] \text{成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.20)$$

### 3.5.2 相電流基本波に対する高調波理論式の導出

ここで、相電流の基本波のみから生じる高調波のみを想定して高調波理論式を簡略化する。相電流の基本波は、

$$\begin{aligned} i_u &= I_m \sin\{(\omega_m t + \phi) - \psi\} \\ i_v &= I_m \sin\left\{(\omega_m t + \phi) - \psi - \frac{2}{3}\pi\right\} \\ i_w &= I_m \sin\left\{(\omega_m t + \phi) - \psi - \frac{4}{3}\pi\right\} \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

$I_m$  相電流基本波振幅

として表されるので、式(3.5.1)に、

$$\begin{aligned} I_i &= I_m \\ f_i &= f_m \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

を用いて、式(3.5.2~20)を整理することができる。この結果、変調波周波数 $f_m$ 、搬送波周波数 $f_c$ に対して、相電流の基本波のみから生じる高調波成分の振幅は式(3.5.23~45)のように表すことができる。

$$(o) \quad \text{直流成分} \quad I_m \frac{3}{4} a \cos \psi \quad (3.5.23)$$

(i-i)  $n=1,7,13\dots$ のとき、

$$nf_c - f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_0\left(\frac{an\pi}{2}\right) \quad (3.5.24)$$

(i-i-a)  $n=1,7,13\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$nf_c - (2l-1)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \quad (3.5.25)$$

(i-i-b)  $n=1,7,13\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$nf_c + (2l+1)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \quad (3.5.26)$$

(i-i-c)  $n=1,7,13\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$nf_c + (2l-1)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \quad (3.5.27)$$

$$nf_c - (2l+1)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \quad (3.5.28)$$

(i-ii-a)  $n=3,9,15\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$nf_c \pm (2l+1)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \quad (3.5.29)$$

(i-ii-b)  $n=3,9,15\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$nf_c \pm (2l-1)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \quad (3.5.30)$$

(i-iii)  $n=5,11,17\dots$ のとき、

$$nf_c + f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.31)$$

(i-iii-a)  $n=5,11,17\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$nf_c + (2l-1)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.32)$$

(i-iii-b)  $n=5,11,17\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$nf_c - (2l+1)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.33)$$

(i-iii-c)  $n=5,11,17\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$nf_c + (2l+1)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.34)$$

$$nf_c - (2l-1)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.35)$$

(ii-i-a)  $n=2,8,14\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$nf_c - 2lf_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.36)$$

(ii-i-b)  $n=2,8,14\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$nf_c + 2lf_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.37)$$

$$nf_c - (2l-2)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.38)$$

(ii-i-c)  $n=2,8,14\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$nf_c + (2l-2)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.39)$$

(ii-ii-a)  $n=4,10,16\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$nf_c + 2lf_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.40)$$

(ii-ii-b)  $n=4,10,16\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$nf_c + (2l-2)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.41)$$

$$nf_c - 2lf_{mi} \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.42)$$

(ii-ii-c)  $n=4,10,16\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$nf_c - (2l-2)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.43)$$

(ii-iii-a)  $n=6,12,18\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$nf_c \pm (2l-2)f_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.44)$$

(ii-iii-c)  $n=6,12,18\dots$ ,  $l=3,6,9\dots$ のとき、

$$nf_c \pm 2lf_m \text{ [Hz]成分} \quad I_m \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.5.45)$$

## 3.6 三相搬送波を用いた場合の高調波周波数についての考察

### 3.6.1 側帯高調波の周波数成分についての考察

式(3.5.23~45)より、直流側電流には、式(3.5.23)に示した直流成分の他に、式(3.5.24~45)に示したような高調波成分が生じることがわかる。これを周波数成分のみに注目して整理すると、式(3.6.3~12)のような周波数成分として表すことができる。なお、これを表現するに当たって、以下のように、6の倍数と整数 $x$ の和を取った整数 $n_x, m_x$ を定義する。

$$n_1 = 1,7,13\dots, n_2 = 2,8,14\dots, n_3 = 3,9,15\dots, \quad (3.6.1)$$

$$n_4 = 4,10,16\dots, n_5 = 5,11,17\dots, n_6 = 6,12,18\dots$$

$$m_1 = 1,7,13\dots, m_2 = 2,8,14\dots, m_3 = 3,9,15\dots, \quad (3.6.2)$$

$$m_4 = 4,10,16\dots, m_5 = 5,11,17\dots, m_6 = 6,12,18\dots$$

(i-i) 搬送波の $n_1$ 次の側帯高調波

$$n_1 f_c - m_1 f_m \text{ [Hz]} \quad (3.6.3)$$

$$n_1 f_c + m_5 f_m \text{ [Hz]} \quad (3.6.4)$$

(i-ii) 搬送波の $n_3$ 次の側帯高調波

$$n_3 f_c \pm m_3 f_m \text{ [Hz]} \quad (3.6.5)$$

(i-iii) 搬送波の $n_5$ 次の側帯高調波

$$n_5 f_c + m_1 f_m \text{ [Hz]} \quad (3.6.6)$$

$$n_5 f_c - m_5 f_m \text{ [Hz]} \quad (3.6.7)$$

(ii-i) 搬送波の $n_2$ 次の側帯高調波

$$n_2 f_c - m_2 f_m \text{ [Hz]} \quad (3.6.8)$$

$$n_2 f_c + m_4 f_m \text{ [Hz]} \quad (3.6.9)$$

(ii-ii) 搬送波の $n_4$ 次の側帯高調波

$$n_4 f_c + m_2 f_m \text{ [Hz]} \quad (3.6.10)$$

$$n_4 f_c - m_4 f_m \text{ [Hz]} \quad (3.6.11)$$

(ii-iii) 搬送波の $n_6$ 次の側帯高調波

$$n_6 f_c \pm m_6 f_m \text{ [Hz]} \quad (3.6.12)$$

これより、式(3.6.3~7)のように、搬送波周波数の特定の奇数倍に対して、変調波周波数の特定の奇数倍の側帯高調波が発生することがわかる。同様に、式(3.6.8~12)のように、搬送波周波数の特定の偶数倍に対して、変調波周波数の特定の偶数倍の側帯高調波が発生することがわかる。

### 3.6.2 高調波として発生する周波数成分についての考察と証明

同期PWMモードにおいては、変調波周波数に対する搬送波周波数の倍数比がPWMパルス数となる。式(3.6.3~12)を用いると、高調波として発生する可能性のある周波数成分の特徴をPWMパルス数に

応じて示すことができる。たとえば、PWMパルス数が奇数の時には、直流側電流の高調波は、変調波周波数の偶数倍の成分しか生じない。一方、PWMパルス数が偶数の時には、直流側電流の高調波は、変調波周波数の奇数倍と偶数倍の成分が生じる。また、1パルスモード、すなわち、PWMパルス数が1の時には、直流側電流の高調波は、変調波周波数の6の整数倍の高調波しか生じない。これらは、式(3. 6. 3～12)をもとにして、証明3. 6. 1～3のように証明することができる。

**証明3. 6. 1**

同期PWMモードにおいて、PWMパルス数が奇数の時に、直流側電流の高調波は、変調波周波数の偶数倍の成分しか生じないこと

係数 $n_x, m_x$ は、整数 $a, b$ を用いて、

$$\begin{aligned} n_1 &= 6a + 1, n_2 = 6a + 2, n_3 = 6a + 3, \\ n_4 &= 6a + 4, n_5 = 6a + 5, n_6 = 6a \\ m_1 &= 6b + 1, m_2 = 6b + 2, m_3 = 6b + 3, \\ m_4 &= 6b + 4, m_5 = 6b + 5, m_6 = 6b \end{aligned} \quad (3. 6. 13)$$

と表すことができる。PWMパルス数が奇数のときは、搬送波周波数は、整数 $c$ を用いて、

$$f_c = (2c + 1)f_m \quad (3. 6. 14)$$

と表すことができる。これを用いると、搬送波の奇数次の側帯高調波を表す式(3. 6. 3～7)は、

$$\begin{aligned} n_1 f_c - m_1 f_m &= (6a + 1)(2c + 1)f_m - (6b + 1)f_m \\ &= 2\{3(2ac + a - b) + c\}f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 15)$$

$$\begin{aligned} n_1 f_c + m_5 f_m &= (6a + 1)(2c + 1)f_m + (6b + 5)f_m \\ &= 2\{3(2ac + a + b + 1) + c\}f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 16)$$

$$\begin{aligned} n_3 f_c \pm m_3 f_m &= (6a + 3)(2c + 1)f_m \pm (6b + 3)f_m \\ &= 6(2ac + a + c + b + 1)f_m, 6(2ac + a + c - b)f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 17)$$

$$\begin{aligned} n_5 f_c + m_1 f_m &= (6a + 5)(2c + 1)f_m + (6b + 1)f_m \\ &= 2\{3(2ac + a + b + 1) + 5c\}f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 18)$$

$$\begin{aligned} n_5 f_c - m_5 f_m &= (6a + 5)(2c + 1)f_m - (6b + 5)f_m \\ &= 2\{3(2ac + a - b) + 5c\}f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 19)$$

と変形できることから、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の偶数倍の高調波しか生じないことがわかる。同様に、搬送波の偶数次の側帯高調波を表す式(3. 6. 8～12)は、

$$\begin{aligned} n_2 f_c - m_2 f_m &= (6a + 2)(2c + 1)f_m - (6b + 2)f_m \\ &= 2\{3(2ac + a - b) + 2c\}f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 20)$$

$$\begin{aligned} n_2 f_c + m_4 f_m &= (6a + 2)(2c + 1)f_m + (6b + 4)f_m \\ &= 2\{3(2ac + a + b + 1) + 2c\}f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 21)$$

$$\begin{aligned} n_4 f_c + m_2 f_m &= (6a + 4)(2c + 1)f_m + (6b + 2)f_m \\ &= 2\{3(2ac + a + b + 1) + 4c\}f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 22)$$

$$\begin{aligned} n_4 f_c - m_4 f_m &= (6a + 4)(2c + 1)f_m - (6b + 4)f_m \\ &= 2\{3(2ac + a - b) + 4c\}f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 23)$$



$$\begin{aligned} n_6 f_c \pm m_6 f_m &= (6a)(2c+1)f_m \pm (6b)f_m \\ &= 6(2ac + a \pm b)f_m \end{aligned} \quad (3.6.24)$$

と変形できることから、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の偶数倍の高調波しか生じないことがわかる。

### 証明3.6.2

同期PWMモードにおいて、PWMパルス数が偶数の時には、直流側電流の高調波は、変調波周波数の奇数倍と偶数倍の成分が生じること

PWMパルス数が偶数のときは、搬送波周波数は、整数 $c$ を用いて、

$$f_c = (2c)f_m \quad (3.6.25)$$

と表すことができる。これを用いると、搬送波の奇数次の側帯高調波を表す式(3.6.3~7)は、

$$\begin{aligned} n_1 f_c - m_1 f_m &= (6a+1)(2c)f_m - (6b+1)f_m \\ &= [2\{3(2ac-b)+c\}-1]f_m \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

$$\begin{aligned} n_1 f_c + m_5 f_m &= (6a+1)(2c)f_m + (6b+5)f_m \\ &= [2\{3(2ac+b)+c\}+5]f_m \end{aligned} \quad (3.6.27)$$

$$\begin{aligned} n_3 f_c \pm m_3 f_m &= (6a+3)(2c)f_m \pm (6b+3)f_m \\ &= [6(2ac+c \pm b) \pm 3]f_m \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

$$\begin{aligned} n_5 f_c + m_1 f_m &= (6a+5)(2c)f_m + (6b+1)f_m \\ &= [2\{3(2ac+b)+5c\}+1]f_m \end{aligned} \quad (3.6.29)$$

$$\begin{aligned} n_5 f_c - m_5 f_m &= (6a+5)(2c)f_m - (6b+5)f_m \\ &= [2\{3(2ac-b)+5c\}-5]f_m \end{aligned} \quad (3.6.30)$$

と変形できることから、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の奇数倍の高調波しか生じないことがわかる。同様に、搬送波の偶数次の側帯高調波を表す式(3.6.8~12)は、

$$\begin{aligned} n_2 f_c - m_2 f_m &= (6a+2)(2c)f_m - (6b+2)f_m \\ &= 2\{3(2ac-b)+2c-1\}f_m \end{aligned} \quad (3.6.31)$$

$$\begin{aligned} n_2 f_c + m_4 f_m &= (6a+2)(2c)f_m + (6b+4)f_m \\ &= 2\{3(2ac+b)+2c+2\}f_m \end{aligned} \quad (3.6.32)$$

$$\begin{aligned} n_4 f_c + m_2 f_m &= (6a+4)(2c)f_m + (6b+2)f_m \\ &= 2\{3(2ac+b)+4c+1\}f_m \end{aligned} \quad (3.6.33)$$

$$\begin{aligned} n_4 f_c - m_4 f_m &= (6a+4)(2c)f_m - (6b+4)f_m \\ &= 2\{3(2ac-b)+4c-2\}f_m \end{aligned} \quad (3.6.34)$$

$$\begin{aligned} n_6 f_c \pm m_6 f_m &= (6a)(2c)f_m \pm (6b)f_m \\ &= 6(2ac \pm b)f_m \end{aligned} \quad (3.6.35)$$

と変形できることから、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の偶数倍の高調波しか生じないことがわかる。

### 証明3.6.3

1パルスモードの時には、直流側電流の高調波は、変調波周波数の6の整数倍の高調波しか生じないこと

1パルスモードのときは、式(3. 6. 14)において、

$$f_c = f_m \quad (3. 6. 36)$$

となることから、

$$c = 0 \quad (3. 6. 37)$$

となる。これを、搬送波の奇数次の側帯高調波を表す式(3. 6. 15～19)に代入すると、

$$\begin{aligned} n_1 f_c - m_1 f_m &= 2\{3(2ac + a - b) + c\}f_m \\ &= 6(a - b)f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 38)$$

$$\begin{aligned} n_1 f_c + m_5 f_m &= 2\{3(2ac + a + b + 1) + c\}f_m \\ &= 6(a + b + 1)f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 39)$$

$$\begin{aligned} n_3 f_c \pm m_3 f_m &= 6(2ac + a + c + b + 1)f_m, 6(2ac + a + c - b)f_m \\ &= 6(a + b + 1)f_m, 6(a - b)f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 40)$$

$$\begin{aligned} n_5 f_c + m_1 f_m &= 2\{3(2ac + a + b + 1) + 5c\}f_m \\ &= 6(a + b + 1)f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 41)$$

$$\begin{aligned} n_5 f_c - m_5 f_m &= 2\{3(2ac + a - b) + 5c\}f_m \\ &= 6(a - b)f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 42)$$

と変形できることから、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の6の整数倍の高調波しか生じないことがわかる。同様に、搬送波の偶数次の側帯高調波を表す式(3. 6. 20～24)に代入すると、

$$\begin{aligned} n_2 f_c - m_2 f_m &= 2\{3(2ac + a - b) + 2c\}f_m \\ &= 6(a - b)f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 43)$$

$$\begin{aligned} n_2 f_c + m_4 f_m &= 2\{3(2ac + a + b + 1) + 2c\}f_m \\ &= 6(a + b + 1)f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 44)$$

$$\begin{aligned} n_4 f_c + m_2 f_m &= 2\{3(2ac + a + b + 1) + 4c\}f_m \\ &= 6(a + b + 1)f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 45)$$

$$\begin{aligned} n_4 f_c - m_4 f_m &= 2\{3(2ac + a - b) + 4c\}f_m \\ &= 6(a - b)f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 46)$$

$$\begin{aligned} n_6 f_c \pm m_6 f_m &= 6(2ac + a \pm b)f_m \\ &= 6(a \pm b)f_m \end{aligned} \quad (3. 6. 47)$$

と変形できることから、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の6の整数倍の高調波しか生じないことがわかる。

### 3. 7 位相差運転の適用

直流鉄道車両は、一般に図3. 7. 1に示すように複数台のインバータ及び誘導電動機を有しており、電源となる架線・レール側から見た場合、それらが並列に接続されている。複数台のインバータに異なる搬送波位相を設定することで、帰線電流高調波を打ち消すことを狙ったPWM搬送波の位相差運転の適用が期待される。本項では、複数台のインバータにより位相差運転を適用した場合の効果について、理論式により考察する。

位相差運転を適用する場合、 $k$ 番目のインバータの搬送波 $\theta_c(k)$ を、

$$\theta_c(k) = \theta_c' - k\theta_d \tag{3.7.1}$$

$\theta_c'$  基準搬送波

$\theta_d$  位相差角度

と設定する。

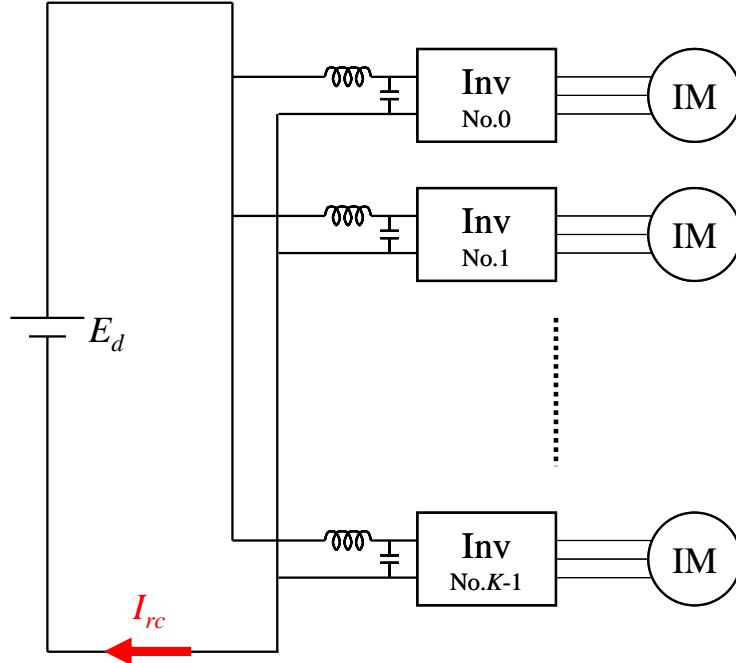


図3. 7. 1 直流鉄道車両の駆動システムの基本構成

Fig.3.7.1 A conceptual composition of a traction system of DC electric railcars

式(3. 3. 2~6)に示す直流側電流の振幅に対して、 $K$  台のインバータが並列運転される場合の編成全体での直流側電流の振幅は、式(3. 7. 2~6)のように表すことができる。

(o)  $f_m=f_i$ のとき、

直流成分 
$$KI_i \frac{3}{4} a \cos \psi \tag{3.7.2}$$

(i-a)  $n=1,3,5\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$nf_c \pm (2lf_m + f_i)$  [Hz]成分 
$$\frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \tag{3.7.3}$$

(i-b)  $n=1,3,5\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$nf_c \pm (2lf_m - f_i)$  [Hz]成分 
$$\frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \tag{3.7.4}$$

(ii-a)  $n=2,4,6\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$nf_c \pm \{(2l-1)f_m - f_i\} [\text{Hz}] \text{成分} \quad \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.7.5)$$

(ii-b)  $n=2,4,6\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$nf_c \pm \{(2l-1)f_m + f_i\} [\text{Hz}] \text{成分} \quad \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (3.7.6)$$

これにより、高調波の振幅で見た場合に、 $K$  台のインバータを位相差運転した場合には、インバータ1台あたりから生じる高調波は、式(3.7.7)に示す低減率  $R$  で削減される。

$$R = \frac{1}{K} \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} \quad (3.7.7)$$

## 第4節

# 数値解析による検証

前節では、直流側電流高調波の理論式を導出し、周波数成分について考察を行った。本節では、前節の理論解析の妥当性を確認するため、実際の鉄道車両駆動に用いられる誘導電動機定数を想定し、理論解析結果と数値解析結果の比較として、帰線電流の周波数スペクトラムを示す。理論解析結果は、前節で導出した理論式により高調波を計算したものである。数値解析結果は、微分方程式に基づき数値計算により電流波形を算出し、FFTにより周波数スペクトラムを得たものである。検討した条件は、単相搬送波と非同期PWMモードを用いた場合、単相搬送波と同期PWMモードを用いた場合、三相搬送波と非同期PWMモードを用いた場合、三相搬送波と同期PWMモードを用いた場合、1パルスモードを用いた場合のそれぞれの条件である。

### 4.1 誘導電動機定数

表4.1.1に示す誘導電動機定数を想定して、理論解析及び数値解析を行う。これらの定数は、一般に鉄道車両駆動用の誘導電動機として使用されている値である。ただし、FCキャパシタンス $C_f$ は、フィードフォワード制御における主回路の安定性を考慮して、実際よりも大きな値を仮定している。また、これに伴い、LCフィルタ部分の共振周波数が変化しないように、FLインダクタンス $L_f$ は、実際よりも小さな値を仮定している。なお、電流指令値は、定出力領域、特性領域においては絞り込みを行っている。

また、電流制御系にフィードバック制御を採用すると、フィードバック制御に伴う高調波と理論解析によって算出の対象としたスイッチングに伴う高調波の両方が含まれてしまうため、フィードフォワード制御を用いる。

本節では、電動機1台により生じる高調波について周波数スペクトラムを示す。実際の鉄道車両では、並列に接続される誘導電動機からの高調波が重ね合わされて、帰線電流高調波となる。なお、直流側電流 $I_{dc}$ の高調波は、そのままの値では、高次の高調波成分が多数生じるためFFTにおいてエリアシングの影響を大きく受けてしまう。このため、LCフィルタにより、高周波域の高調波を低減した帰線電流 $I_{rc}$ についての周波数スペクトラムを示す。

表4. 1. 1 想定誘導電動機定数

Table 4.1.1 Assumed constants of induction motor

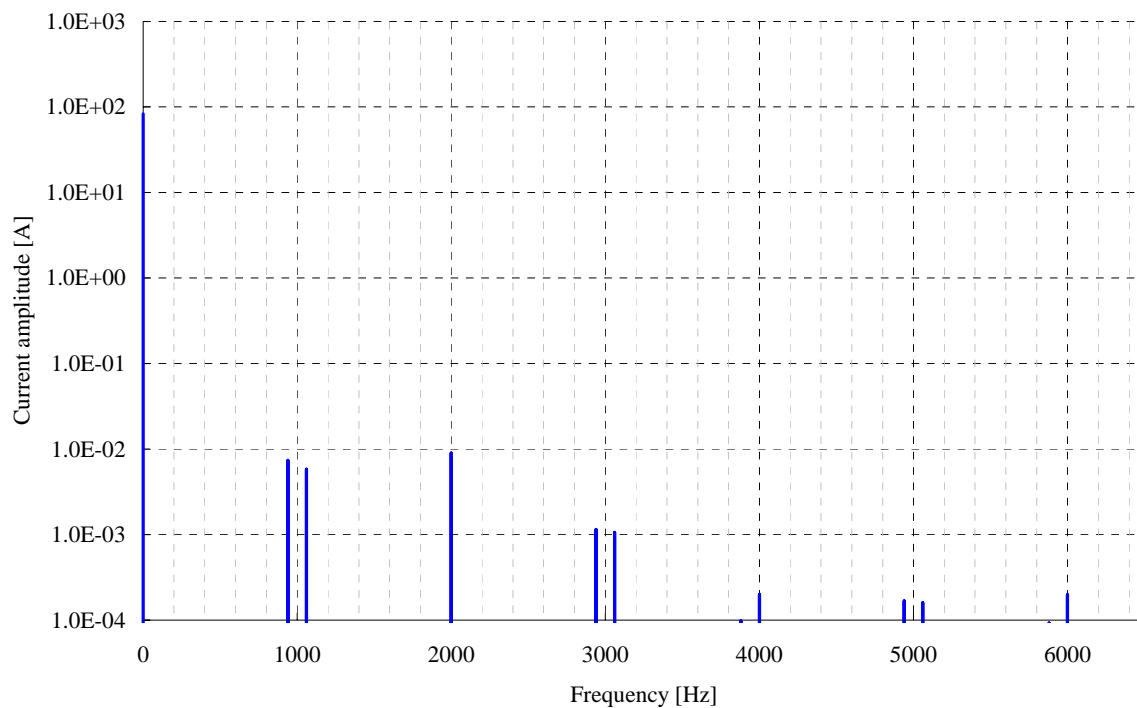
項目	値
FL抵抗分 $R_f$	0.05 [ $\Omega$ ]
FLインダクタンス分 $L_f$	0.95 [mH]
FCキャパシタンス $C_f$	80000 [ $\mu$ F]
1次抵抗 $R_1$	0.186 [ $\Omega$ ]
1次インダクタンス $L_1$	42.0 [mH]
相互インダクタンス $M$	40.4 [mH]
2次インダクタンス $L_2$	42.0 [mH]
2次抵抗 $R_2$	0.194 [ $\Omega$ ]
直流側電圧 $E_d$	1500 [V]
d軸電流指令値 $i_{1d}^*$	88.0 [A]
q軸電流指令値 $i_{1q}^*$	255.5 [A]
定出力領域開始周波数 $f_p$	35.0 [Hz]
特性領域開始周波数 $f_n$	80.0 [Hz]

## 4. 2 単相搬送波による非同期PWMモードの検証

本項では、単相搬送波と非同期PWMモードを仮定し、理論解析と数値解析の比較を行う。図4. 2. 1 (a)～3(a)に理論解析結果を示す。また、図4. 2. 1 (b)～3(b)に数値解析結果を示す。

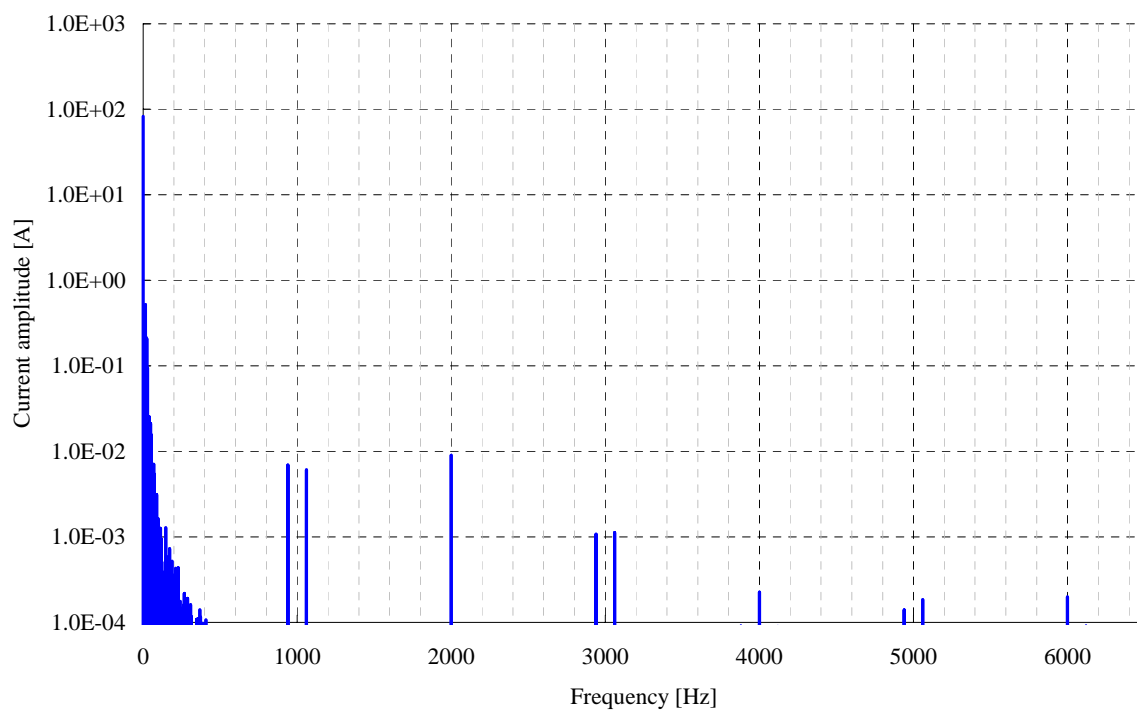
図4. 2. 1の変調波周波数 $f_m$ が20.0 [Hz]、搬送波周波数 $f_c$ が1000.0 [Hz]の周波数スペクトラムにおいては、式(3. 4. 1)における $n_o$ が1,3に対して、 $m_o$ が1の場合の高調波が、940,1060, 2940,3060 [Hz]成分として大きな振幅で現れていることが確認できる。同様に、式(3. 4. 2)における $n_e$ が2,4に対して、 $m_e$ が0の場合の高調波が2000, 4000 [Hz]成分として大きな振幅で現れていることが確認できる。これらの周波数成分は、振幅も含めて、理論解析結果、数値解析結果ともに近い値となっている。

図4. 2. 2～3の結果においても、同様に理論解析による式(3. 4. 1, 2)で表される高調波成分が確認されている。また、これらの周波数成分は、振幅も含めて、理論解析結果、数値解析結果ともに近い値となっている。



(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result

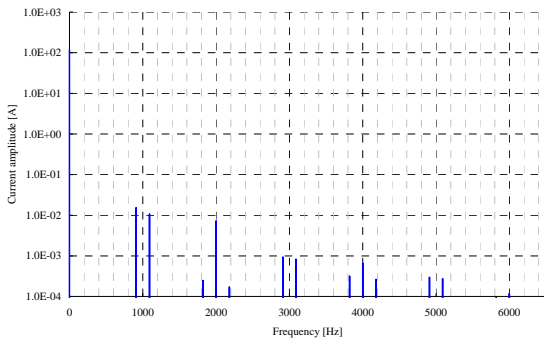


(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

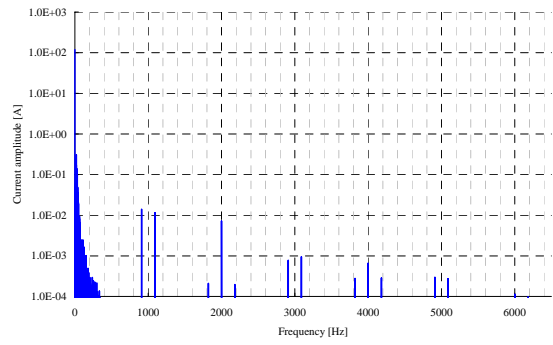
図4. 2. 1 単相搬送波による非同期PWMモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 20.0$  [Hz],  $f_c = 1000.0$  [Hz])

Fig.4.2.1 Frequency spectrums with an asynchronous PWM and single-phase carrier wave



(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result

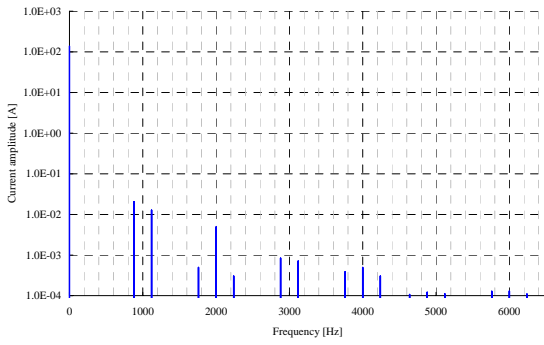


(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

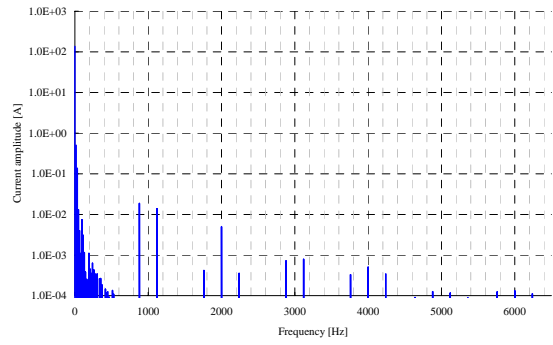
図4. 2. 2 単相搬送波による非同期PWMモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 30.0$  [Hz]、 $f_c = 1000.0$  [Hz])

Fig.4.2.2 Frequency spectrums with an asynchronous PWM and single-phase carrier wave



(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result



(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

図4. 2. 3 単相搬送波による非同期PWMモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 40.0$  [Hz]、 $f_c = 1000.0$  [Hz])

Fig.4.2.3 Frequency spectrums with an asynchronous PWM and single-phase carrier wave

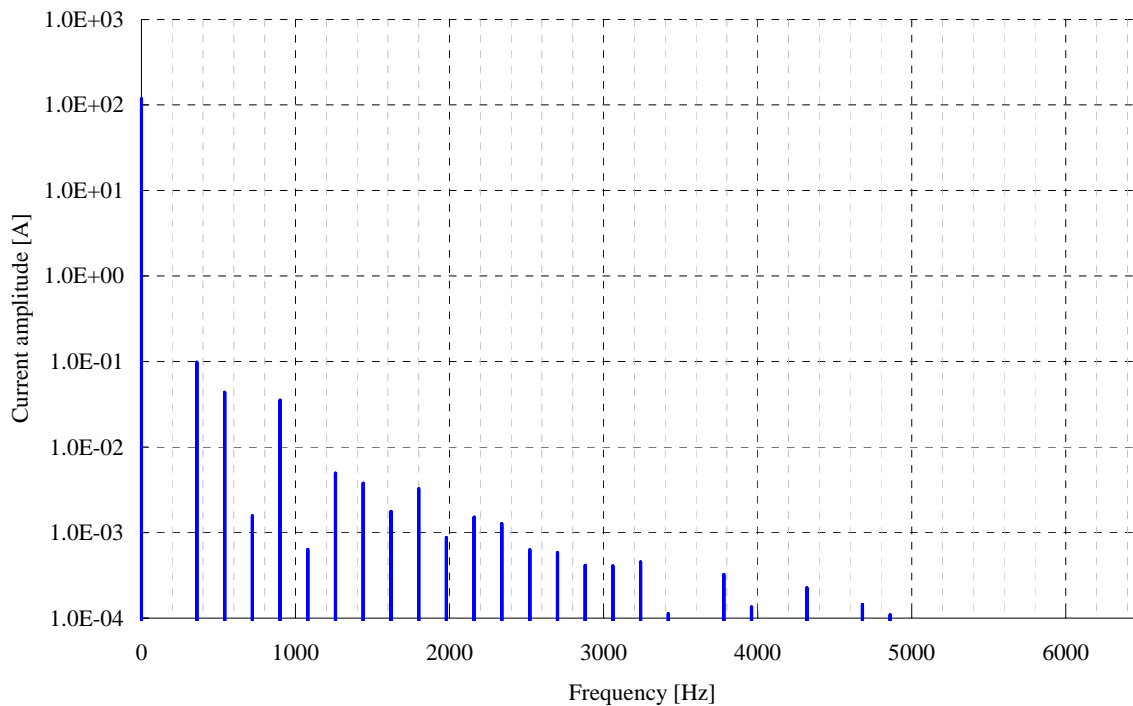


### 4.3 単相搬送波による同期PWMモードの検証

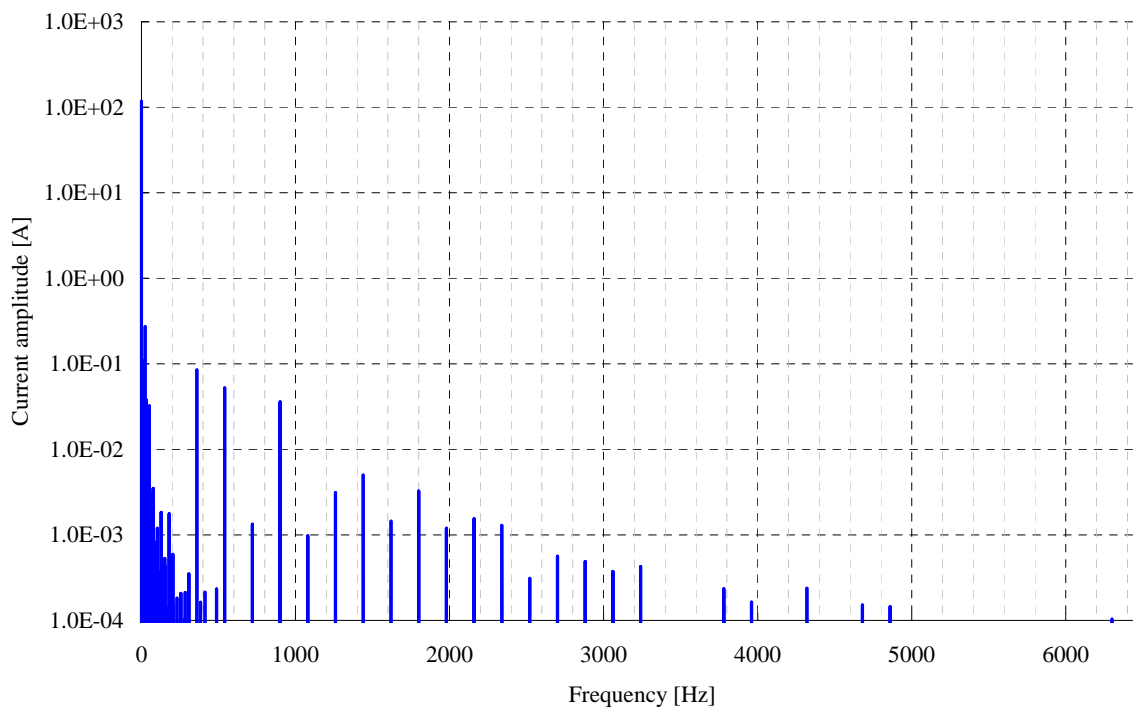
本項では、単相搬送波と同期PWMモードを仮定し、理論解析と数値解析の比較を行う。図4.3.1(a)～3(a)に理論解析結果を示す。また、図4.3.1(b)～3(b)に数値解析結果を示す。

図4.3.1の3パルスモードの変調波周波数 $f_m$ が30.0 [Hz]、搬送波周波数 $f_c$ が450.0 [Hz]の周波数スペクトラムにおいては、360, 540, 720, 900 … [Hz]成分の高調波が確認される。この条件においては、証明3.4.3において示したように、変調波周波数30.0 [Hz]の6の整数倍の高調波しか生じない。この周波数成分は、振幅も含めて、理論解析結果、数値解析結果ともに近い値となっている。

図4.3.2、3の結果においても、同様に理論解析による式(3.4.1、2)で表される高調波成分が確認されている。また、これらの周波数成分は、振幅も含めて、理論解析結果、数値解析結果ともに近い値となっている。

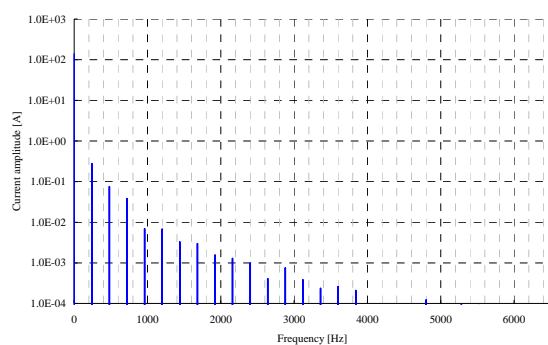


(a) 理論解析結果  
(a) Theoretical derivation result



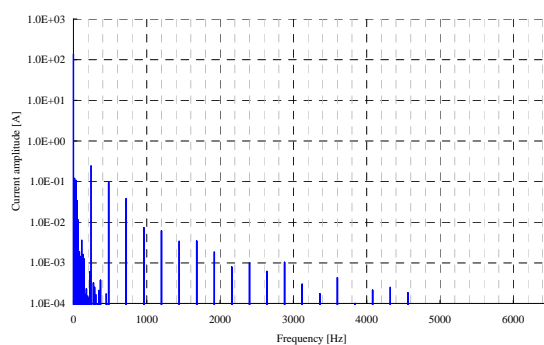
(b) 数値解析結果  
(b) Numerical simulation result

図4. 3. 1 単相搬送波による3パルスモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 30.0$  [Hz]、 $f_c = 450.0$  [Hz])  
Fig.4.3.1 Frequency spectrums with a three-pulse synchronous PWM and single-phase carrier wave



(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result

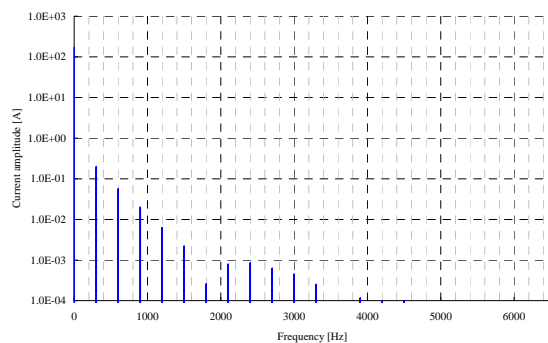


(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

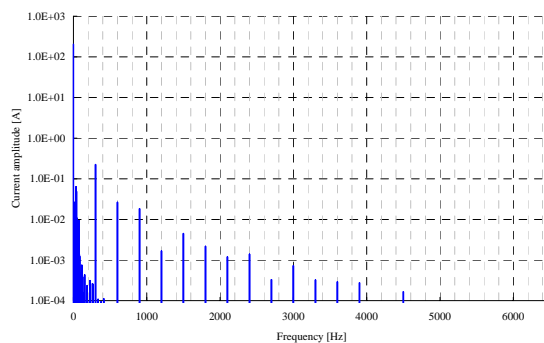
図4. 3. 2 単相搬送波による9パルスモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 40.0$  [Hz]、 $f_c = 360.0$  [Hz])

Fig.4.3.2 Frequency spectrums with a nine-pulse synchronous PWM and single-phase carrier wave



(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result



(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

図4. 3. 3 単相搬送波による15パルスモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 50.0$  [Hz]、 $f_c = 150.0$  [Hz])

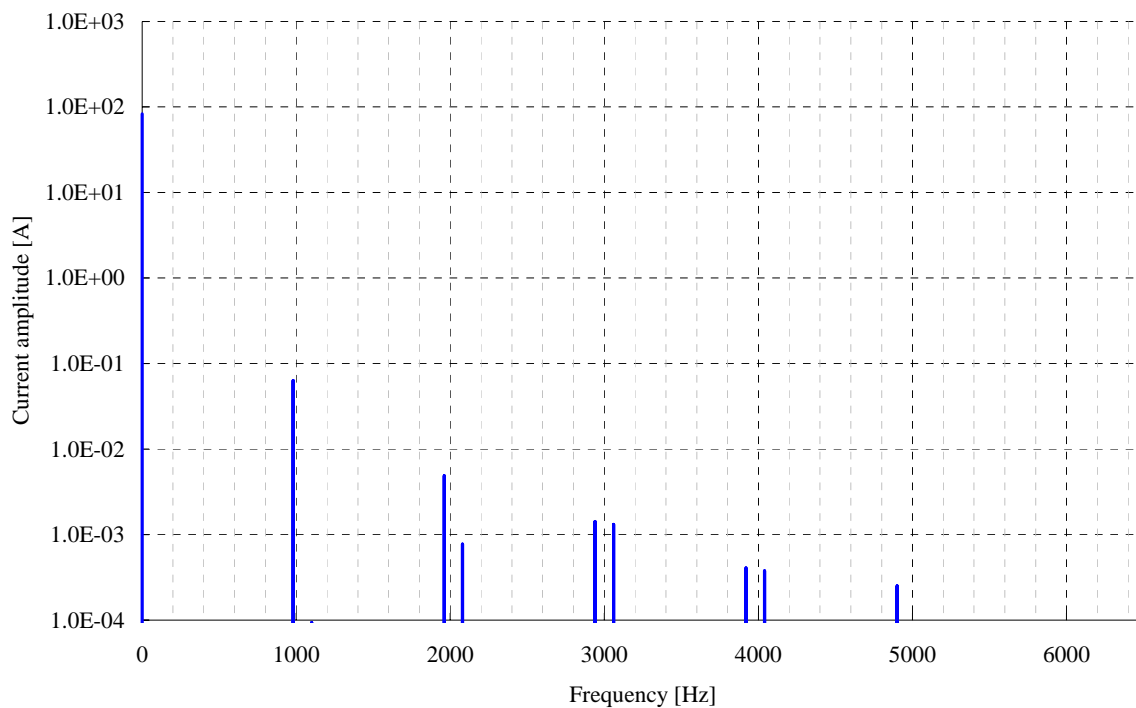
Fig.4.3.3 Frequency spectrums with a 15-pulse synchronous PWM and single-phase carrier wave

## 4.4 三相搬送波による非同期PWMモードの検証

本項では、三相搬送波と非同期PWMモードを仮定し、理論解析と数値解析の比較を行う。図4.4.1(a)～3(a)に理論解析結果を示す。また、図4.4.1(b)～3(b)に数値解析結果を示す。

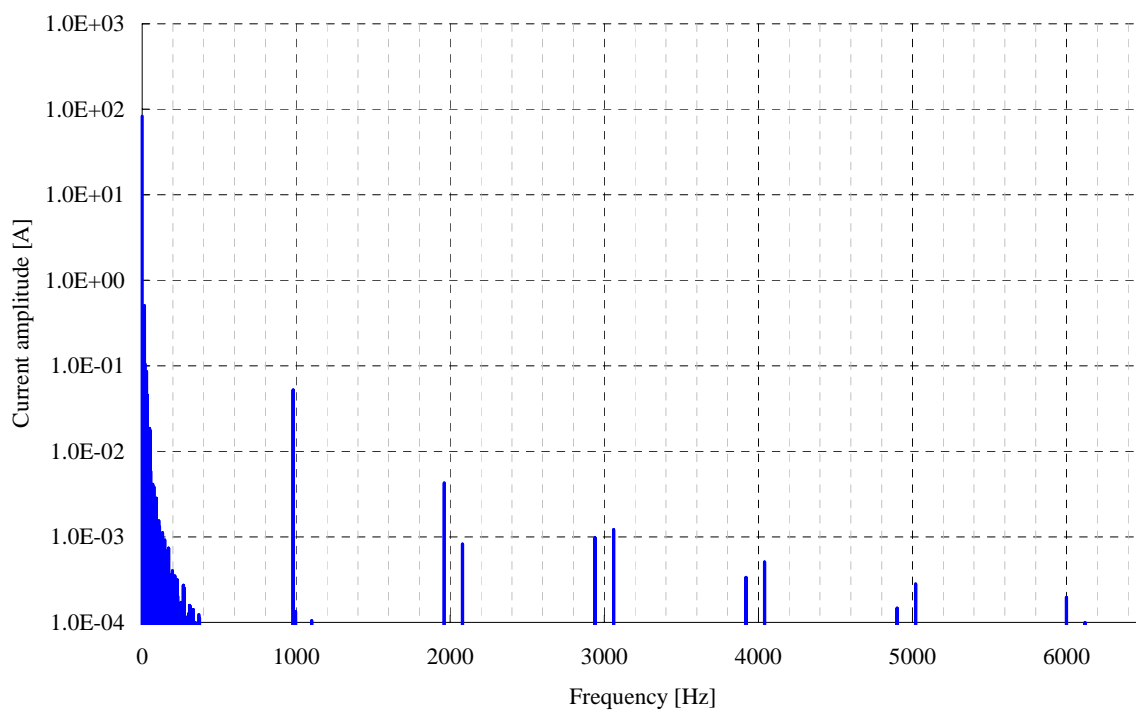
図4.4.1の変調波周波数 $f_m$ が20.0 [Hz]、搬送波周波数 $f_c$ が1000.0 [Hz]の周波数スペクトラムにおいては、式(3.6.3, 4)における $n_1$ が1に対して、 $m_1, m_5$ がそれぞれ1,5の場合の高調波が、980,1100 [Hz]成分として大きな振幅で現れていることが確認できる。同様に、式(3.6.8, 9)における $n_2$ が2に対して、 $m_2, m_4$ がそれぞれ2,4の場合の高調波が、1960,2080 [Hz]成分として大きな振幅で現れていることが確認できる。また、式(3.6.5)における $n_3$ が3に対して、 $m_3$ が3の場合の高調波が2940, 3060 [Hz]成分として大きな振幅で現れていることが確認できる。さらに、式(3.6.10, 11)における $n_4$ が4に対して、 $m_4, m_2$ がそれぞれ4,2の場合の高調波が、3920,4040 [Hz]成分として大きな振幅で現れていることが確認できる。これらの周波数成分は、振幅も含めて、理論解析結果、数値解析結果ともに近い値となっている。

図4.4.2～3の結果においても、同様に理論解析による式(3.6.3～12)で表される高調波成分が確認されている。また、これらの周波数成分は、振幅も含めて、理論解析結果、数値解析結果ともに近い値となっている。



(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result

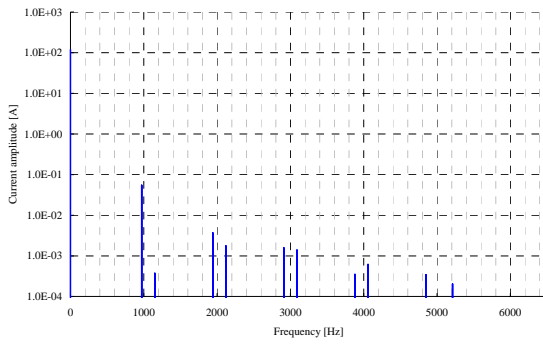


(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

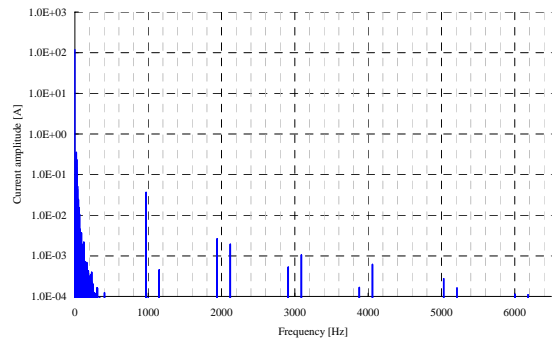
図4. 4. 1 三相搬送波による非同期PWMモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 20.0$  [Hz]、 $f_c = 1000.0$  [Hz])

Fig.4.4.1 Frequency spectrums with an asynchronous PWM and three-phase carrier wave



(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result

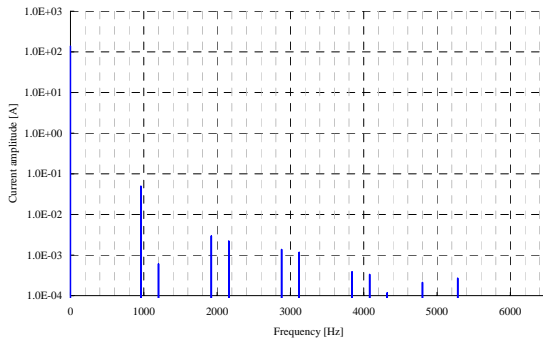


(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

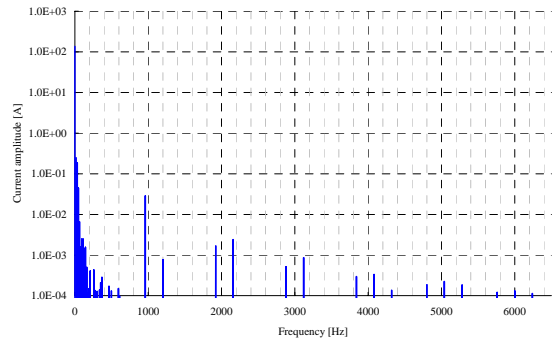
図4. 4. 2 三相搬送波による非同期PWMモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 30.0$  [Hz]、 $f_c = 1000.0$  [Hz])

Fig.4.4.2 Frequency spectrums with an asynchronous PWM and three-phase carrier wave



(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result



(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

図4. 4. 3 三相搬送波による非同期PWMモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 40.0$  [Hz]、 $f_c = 1000.0$  [Hz])

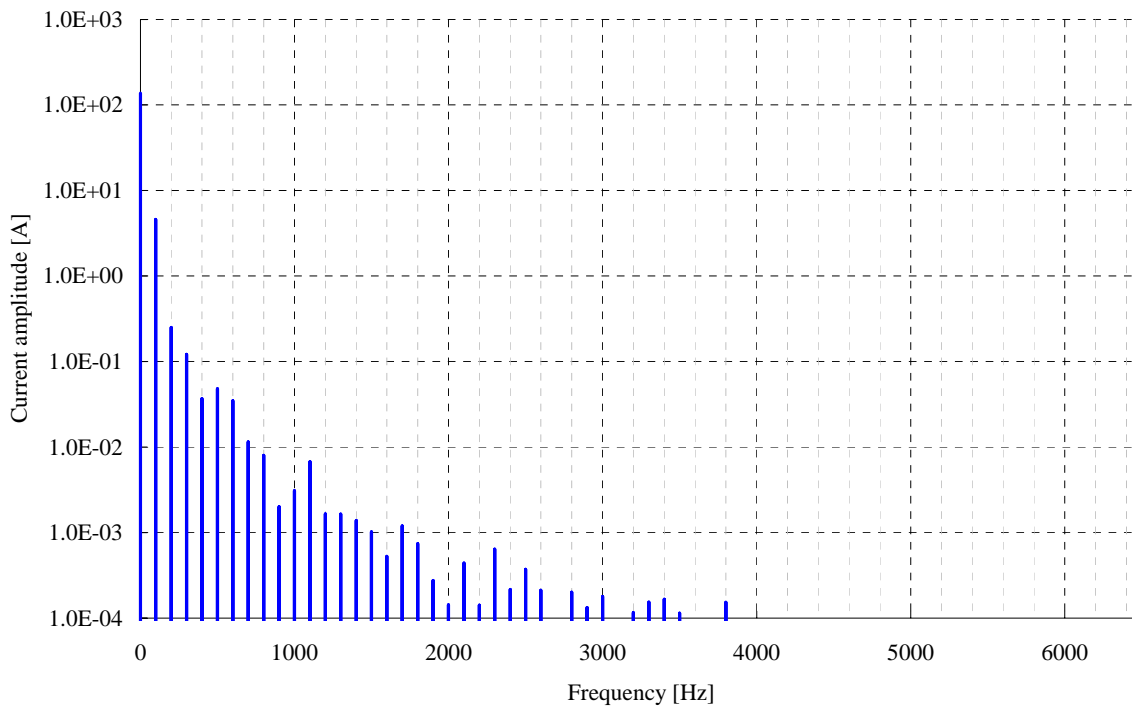
Fig.4.4.3 Frequency spectrums with an asynchronous PWM and three-phase carrier wave

## 4.5 三相搬送波による同期PWMモードの検証

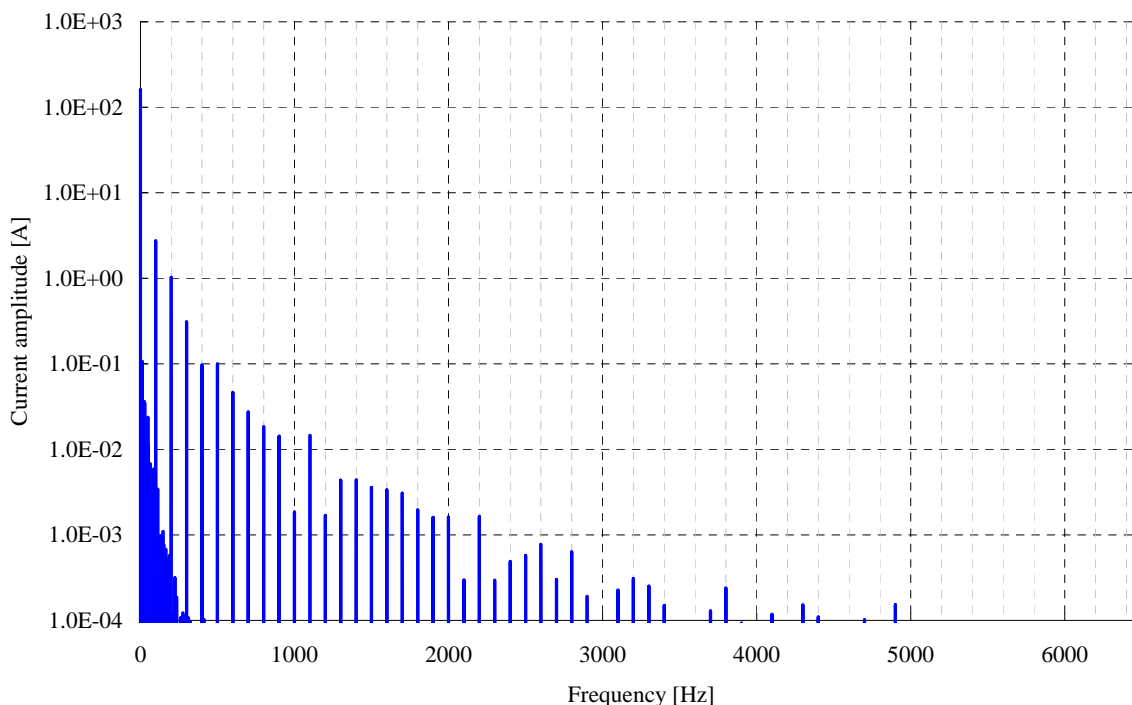
本項では、三相搬送波と同期PWMモードを仮定し、理論解析と数値解析の比較を行う。図4.5.1(a)～3(a)に理論解析結果を示す。また、図4.5.1(b)～3(b)に数値解析結果を示す。

図4.5.1の3パルスモードの変調波周波数 $f_m$ が50.0 [Hz]、搬送波周波数 $f_c$ が150.0 [Hz]の周波数スペクトラムにおいては、100, 200, 300, 400 … [Hz]成分の高調波が確認される。この条件においては、証明3.6.1において示したように、変調波周波数50.0 [Hz]の偶数倍の高調波しか生じない。この周波数成分は、振幅も含めて、理論解析結果、数値解析結果ともに近い値となっている。

図4.5.2, 3の結果においても、同様に理論解析による式(3.6.3～11)で表される高調波成分が確認されている。また、これらの周波数成分は、振幅も含めて、理論解析結果、数値解析結果ともに近い値となっている。



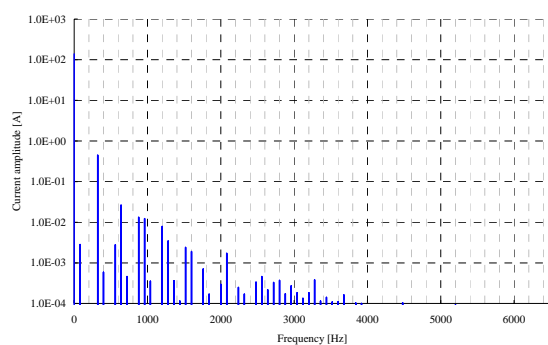
(a) 理論解析結果  
(a) Theoretical derivation result



(b) 数値解析結果  
(b) Numerical simulation result

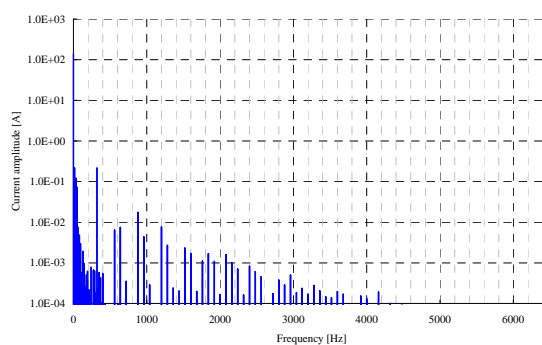
図4.5.1 三相搬送波による3パルスモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 50.0$  [Hz]、 $f_c = 150.0$  [Hz])  
Fig.4.5.1 Frequency spectrums with a three-pulse synchronous PWM and three-phase carrier wave





(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result

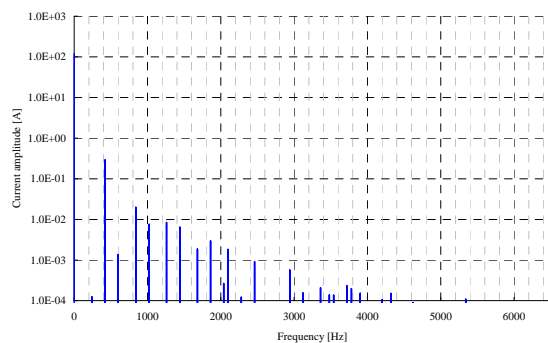


(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

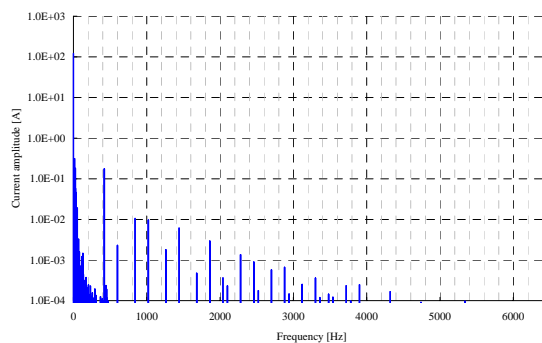
図4. 5. 2 三相搬送波による9パルスモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 40.0$  [Hz]、 $f_c = 360.0$  [Hz])

Fig.4.5.2 Frequency spectrums with a nine-pulse synchronous PWM and three-phase carrier wave



(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result



(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

図4. 5. 3 三相搬送波による15パルスモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 30.0$  [Hz]、 $f_c = 450.0$  [Hz])

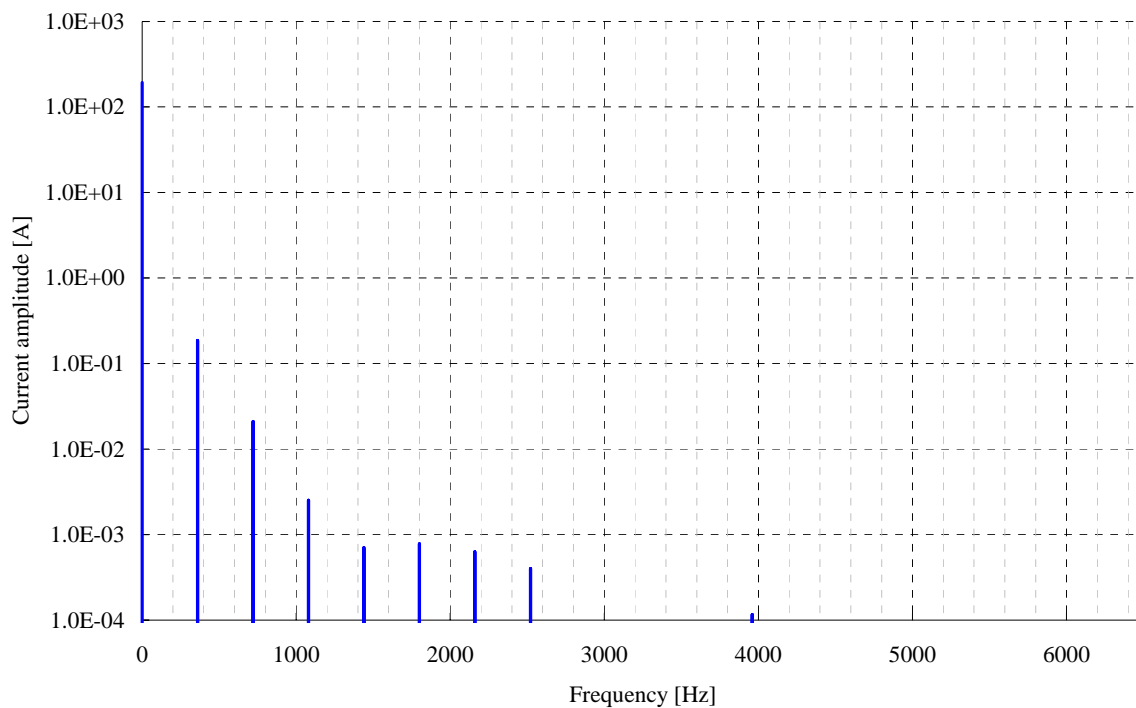
Fig.4.5.3 Frequency spectrums with a 15-pulse synchronous PWM and three-phase carrier wave

## 4.6 1パルスモードの検証

本項では、1パルスモードを仮定し、理論解析と数値解析の比較を行う。1パルスモードは、三相搬送波を用いた場合として考えることができる。図4.6.1(a)～3(a)に理論解析結果を示す。また、図4.6.1(b)～3(b)に数値解析結果を示す。

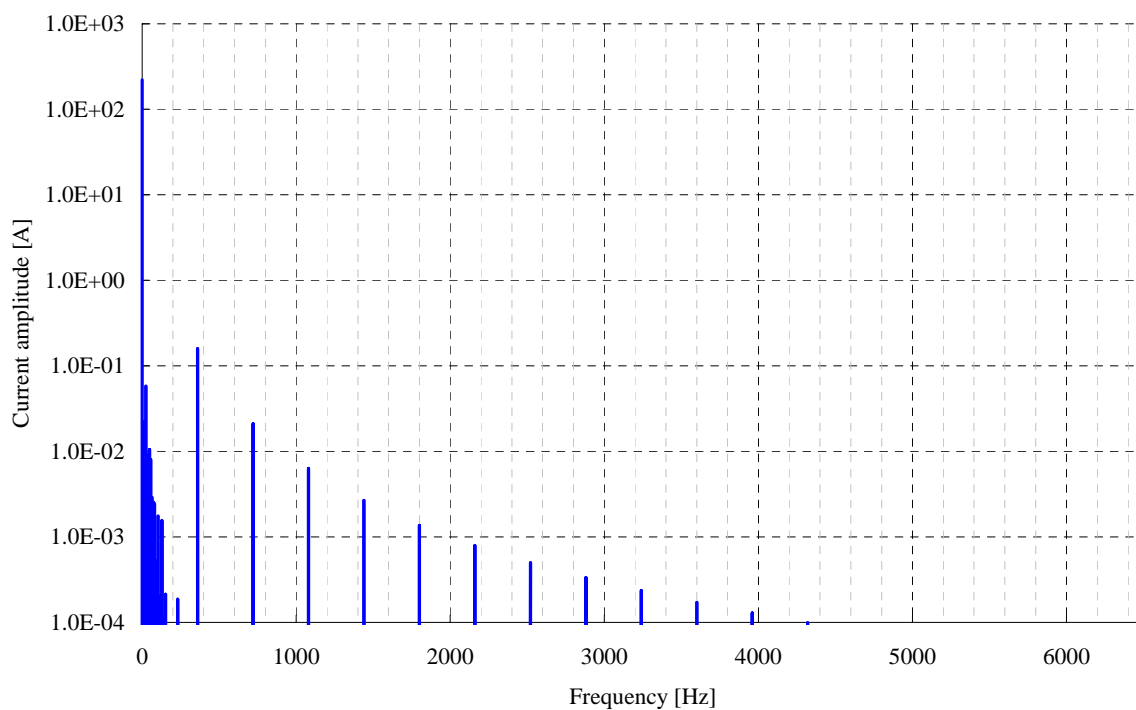
図4.6.1の1パルスモードの変調波周波数 $f_m$ が60.0 [Hz]、搬送波周波数 $f_c$ が60.0 [Hz]の周波数スペクトラムにおいては、360, 720, 1080, 1440 … [Hz]成分の高調波が確認される。この条件においては、証明3.6.3において示したように、変調波周波数60.0 [Hz]の6の整数倍の高調波しか生じない。この周波数成分は、振幅も含めて、理論解析結果、数値解析結果ともに近い値となっている。

図4.6.2～3の結果においても、同様に理論解析による結果と一致して、変調波周波数 $f_m$  [Hz]の6の整数倍の高調波しか生じていない。また、これらの周波数成分は、振幅も含めて、理論解析結果、数値解析結果ともに近い値となっている。



(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result

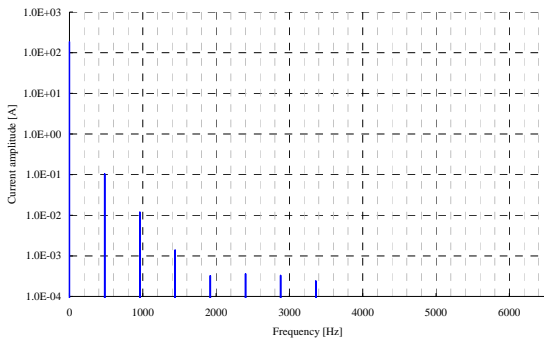


(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

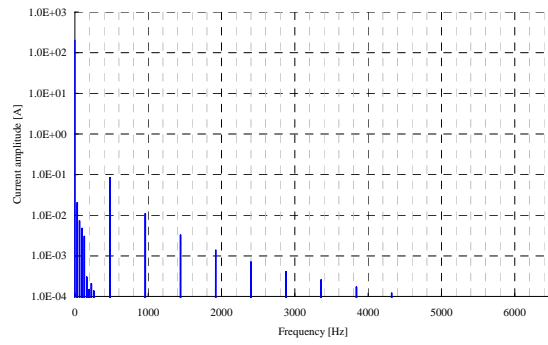
図4.6.1 1パルスモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 60.0$  [Hz],  $f_c = 60.0$  [Hz])

Fig.4.6.1 Frequency spectrums with a one-pulse PWM



(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result

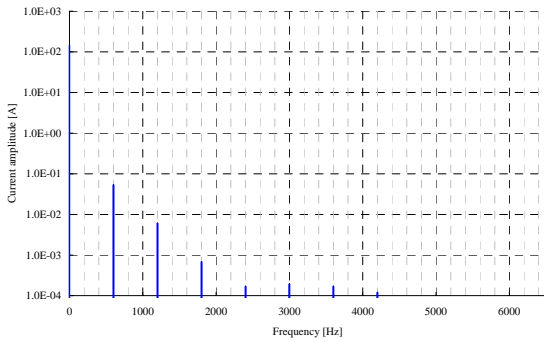


(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

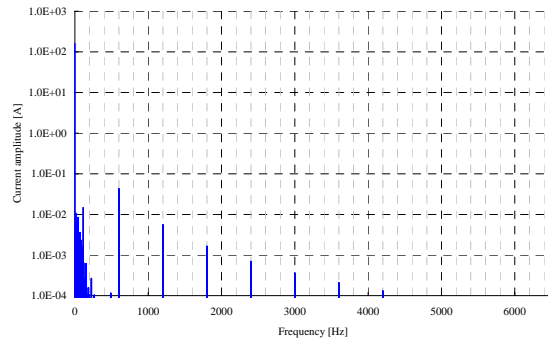
図4. 6. 2 1パルスモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 80.0$  [Hz]、 $f_c = 80.0$  [Hz])

Fig.4.6.2 Frequency spectrums with a one-pulse PWM



(a) 理論解析結果

(a) Theoretical derivation result



(b) 数値解析結果

(b) Numerical simulation result

図4. 6. 3 1パルスモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 100.0$  [Hz]、 $f_c = 100.0$  [Hz])

Fig.4.6.3 Frequency spectrums with a one-pulse PWM

## 4.7 位相差運転の効果の検証

本項では、前節で導出したPWM搬送波の位相差運転の理論式を検証するため、数値解析により位相差運転を行った場合の周波数スペクトラムを算出し、理論式によって算出した位相差運転による低減率と比較する。

図4.7.1に位相差運転の有無による周波数スペクトラムの違いを示す。図4.7.1では、6台のインバータが並列接続されるものを想定し、数値解析によって得られたインバータ1台あたりの帰線電流を示している。位相差角が0 [deg]の場合が位相差運転を行わない場合に相当する。位相差運転により、高調波を大幅に低減もしくは消去できていることが確認できる。

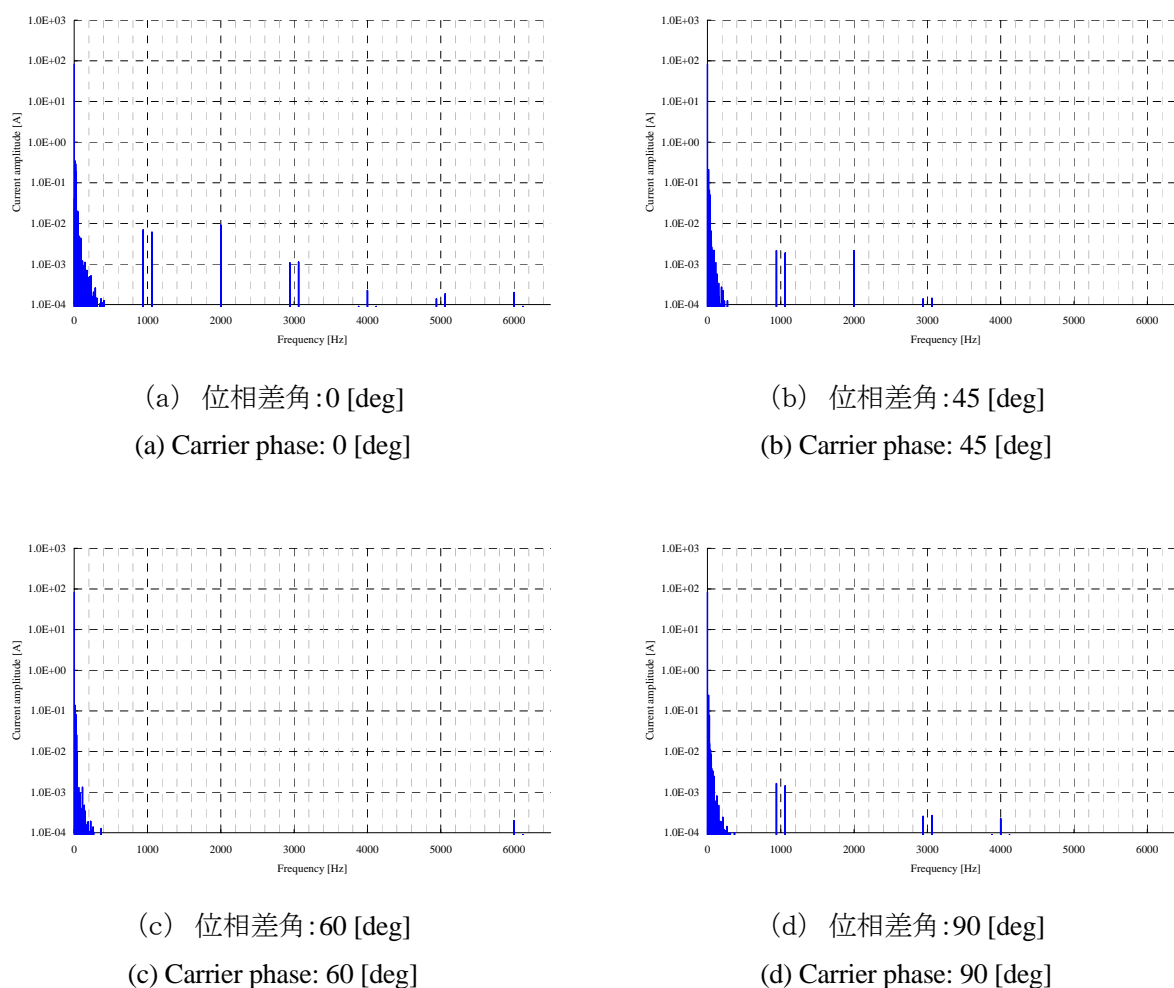


図4.7.1 位相差運転の効果 ( $K=6$ 、 $f_m = 20.0$  [Hz]、 $f_c = 1000.0$  [Hz])

Fig.4.7.1 Effect of carrier-phase shift operation

また、位相差運転の低減率を、理論解析と数値解析の両方から計算し表4.7.1で比較する。理論解析の結果は、式(3.7.7)によって計算した値である。なお、低減率が負の値の場合は、位相が逆転するとともに、算出した低減率の絶対値で高調波成分が低減される。数値解析の結果は、位相差運転の行わない場合と行う場合のそれぞれの振幅値を示し、それらの比率によって低減率としている。表4.7.1より、位相差運転の低減率は、理論解析と数値解析に大きな誤差はなく、理論解析によって導出した理論式の妥当

性が確認できた。これより、理論解析により位相差運転の効果を定量的に把握することが可能となり、位相差運転の有効性が確認された。

表4. 7. 1 位相差運転による低減率の検証

Table 4.7.1 A verification of derived reduction ratio of carrier-phase shift operation

Order	Theoretical result	Simulation result				Error [%]
	Reduction ratio	Frequency [Hz]	Current amplitude [A]		Reduction ratio	
			Carrier phase: 0 [deg]	Carrier phase: 45 [deg]		
1	0.3080	940	6.911E-03	2.128E-03	0.3080	0.01
		1060	6.071E-03	1.870E-03	0.3081	0.03
2	-0.2357	1880	3.593E-05	8.201E-06	0.2283	3.16
		2000	8.982E-03	2.117E-03	0.2357	0.00
		2120	3.694E-05	8.646E-06	0.2341	0.69
3	0.1276	2940	1.075E-03	1.371E-04	0.1275	0.01
		3060	1.124E-03	1.435E-04	0.1276	0.06
4	0.0000	3880	9.025E-05	2.092E-07	0.0023	-
		4000	2.243E-04	1.371E-07	0.0006	-
		4120	8.958E-05	1.570E-07	0.0018	-
5	-0.1276	4940	1.392E-04	1.782E-05	0.1280	0.34
		5060	1.842E-04	2.346E-05	0.1274	0.14
6	0.2357	5880	8.459E-05	1.996E-05	0.2360	0.12
		6000	1.983E-04	4.677E-05	0.2359	0.10
		6120	9.038E-05	2.130E-05	0.2357	0.01

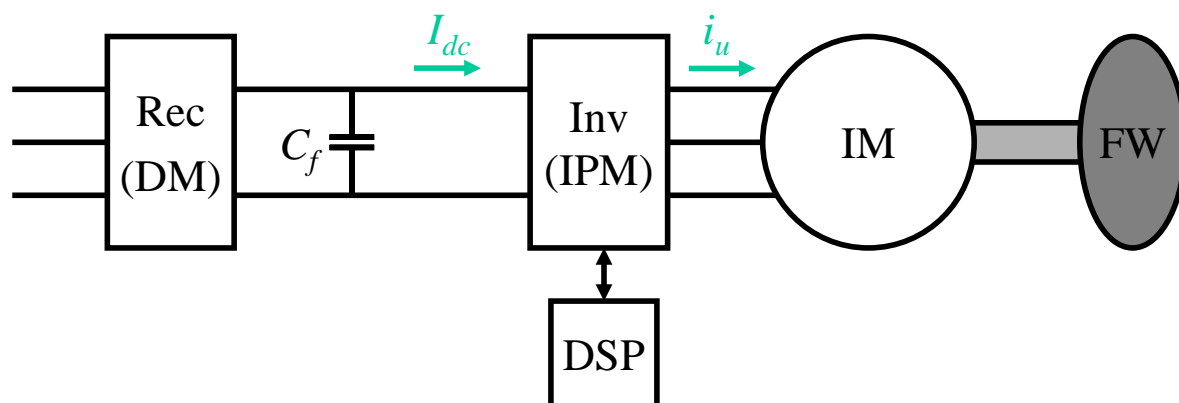
## 第5節 実験による検証

前節では、理論解析の妥当性を示すために数値解析との比較を行い、良好な結果が得られた。本節では、さらに、理論解析と数値解析の妥当性を確認するためミニモデル実験機を使用し、直流側電流高調波の測定実験を行った。はじめに、実験装置と実験方法の概要を示す。次に、実験結果を示し、理論解析結果や数値解析結果と比較して、理論解析と数値解析の妥当性を示す。なお、理論解析結果は、第3節で導出した理論式により高調波を計算したものである。数値解析結果は、微分方程式に基づき数値計算により電流波形を算出し、FFTにより周波数スペクトラムを得たものである。

### 5.1 実験装置と実験方法の概要

#### 5.1.1 実験装置の構成

実験装置の構成の概要を図5.1.1に示す。実験は、誘導機をインバータにより駆動し、直流側電流 $I_{dc}$ を測定する。この直流側電流にFFTを行って周波数スペクトラムを得る。



- Rec : Rectifier (AC/DC)
- Inv : Inverter (DC/AC)
- IM : Induction Motor
- FW : Flywheel
- DSP : Digital Signal Processor

図5.1.1 実験装置構成の概要

Fig.5.1.1 Composition of experimental apparatus

### 5. 1. 2 実験機器の諸元

誘導電動機の諸元を表5. 1. 1に示す。また、図5. 1. 2にインバータユニットの回路構成を示す。ダイオードモジュール (DM)とインテリジェントパワーモジュール (IPM)を組み合わせたユニットとなっている。インバータの諸元を表5. 1. 2に示す。

表5. 1. 1 誘導電動機諸元

Table 5.1.1 A specification of the induction motor

形式	安川電機 EELK-5 IM
項目	値
定格出力(連続)	2.2 [kW]
定格回転数	1750 [rpm]
定格電流	9.1 [A]
定格電圧	180 [V]
極対数	2

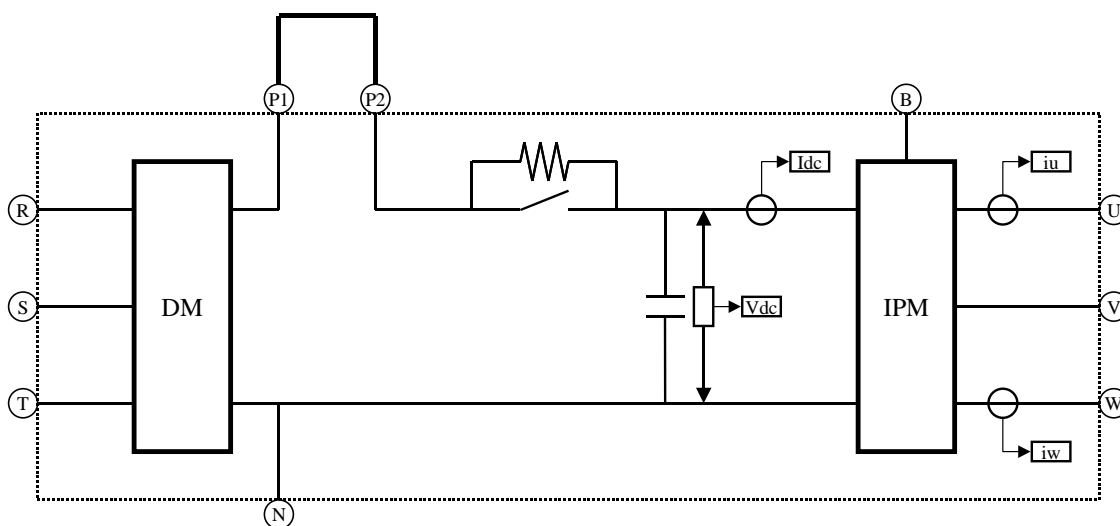


図5. 1. 2 インバータユニットの回路構成

Fig.5.1.2 A circuit diagram of the inverter unit



表5. 1. 2 インバータ諸元

Table 5.1.2 A specification of the inverter

形式	Myway MWINV-4R222A
項目	値
定格容量	4.2 [kVA]
定格電流	11 [A]
定格電圧	0~220 [V]
IPM素子	三菱電機 PM30RSF060
インバータ部電源電圧	400 [V]以下
コレクタ電流(最大定格)	30 [A]
PWM制御入力周波数	20 [kHz]以下
ダイオードモジュール	富士電機 6RI30E-080
平均出力電流(最大定格)	30 [A]
平滑コンデンサ容量	940 [ $\mu$ F]
Idcセンサモニタ部カットオフ周波数	1.6 [kHz]

### 5. 1. 3 実験機器の定数

表5. 1. 3に示す誘導電動機とインバータの定数を想定して、理論解析及び数値解析を行う。これらの定数は、実験に用いた誘導電動機の定数として測定、もしくは推定した値である。

表5. 1. 3 想定誘導電動機・インバータ定数

Table 5.1.3 Assumed constants of induction motor

項目	値
平滑コンデンサ容量 $C_f$	940 [ $\mu$ F]
1次抵抗 $R_1$	0.346 [ $\Omega$ ]
1次インダクタンス $L_1$	85.8 [mH]
相互インダクタンス $M$	82.9 [mH]
2次インダクタンス $L_2$	85.8 [mH]
2次抵抗 $R_2$	0.330 [ $\Omega$ ]
直流側電圧 $E_d$	300 [V]
変調波周波数 $f_m$	25 [Hz]
搬送波周波数 $f_c$	1000 [Hz]
d軸電流指令値 $i_{1d}^*$	4.17 [A]
q軸電流指令値 $i_{1q}^*$	11.1 [A]

#### 5. 1. 4 測定機器・制御装置

図5. 1. 3に測定機器と制御装置の構成を示す。パソコンとDSPボードを接続し、DSPボードへのプログラムの転送、DSPの実行などの制御を行う。DSPボードでは、電流制御の演算を行い、PEVボードに電圧指令値を転送する。PEVボードは、指定の変調方式でPWM変調を行い、オン・オフ指令を光ファイバでインバータに出力する。また、センサやエンコーダからの入力、PEVボードに入力される。DSP上で動作しているプログラムは、適当な間隔でセンサやエンコーダのデータをPEVボードから取得することができる。また、取得したデータは、DSPから適当な間隔でD/Aボードに出力する。D/Aボードは、メモリハイコーダなどの測定機器に接続されており、必要なデータが取得できる。

なお、本実験においては、PWM変調は、PEVボードに内蔵されている電圧形三角波変調機能を用いる。また、PEVボードに内蔵されている電圧形三角波変調機能は、単相搬送波が用いられている。

直流側電流高調波の測定には、表5. 1. 4に示すメモリハイコーダを使用する。具体的には、メモリハイコーダに内蔵されているFFT機能を用いて、直流側電流の周波数スペクトラムを得る。一方、本実験においては、電流を流した状態で測定を行うため、誘導機の回転数が変化し、式(3. 3. 10~13)より明らかのように直流電流高調波の周波数も変化する。このため、メモリハイコーダのメモリレコード機能を用いて、直流電流波形と変調波周波数 $f_m$  (インバータ出力周波数)を同時に記録し、直流電流波形に対してFFTを行うタイミングを変調波周波数と対応させた。なお、d軸電流、q軸電流、回転数、変調波周波数などの値については、DSPを介してメモリハイコーダに取り込んでいるが、測定対象の直流側電流については、インバータユニットの $I_{dc}$ センサ出力から直接取り込んである。

また、実験においては、 $I_{dc}$ センサ出力はカットオフ周波数 1.6 [kHz]のローパスフィルタが付加されている。本論文では、理論解析及び数値解析については、ローパスフィルタを考慮した波形を示す。

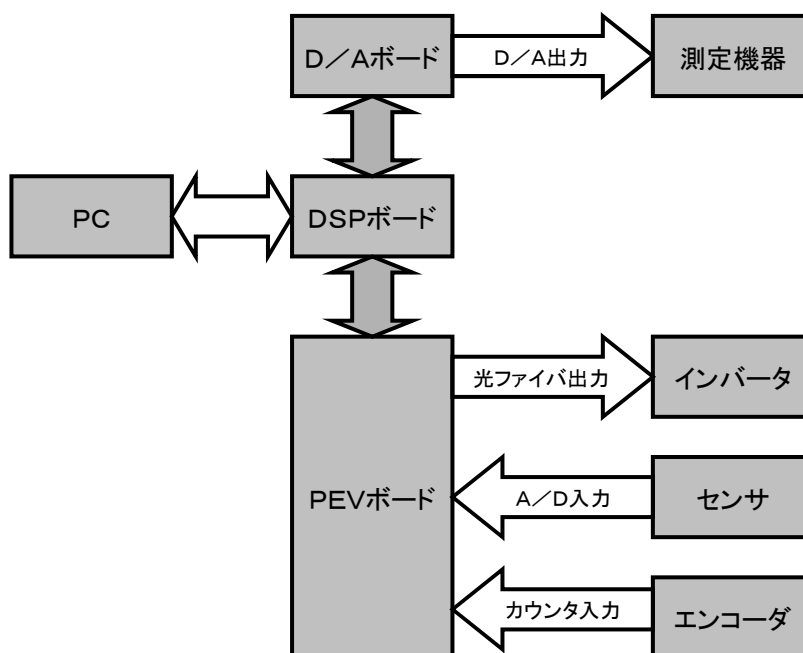


図5. 1. 3 測定機器・制御装置構成

Fig.5.1.3 Composition of the measuring instrument and the controller

表5. 1. 4 測定機器諸元

Table 5.1.4 A specification of the measuring instrument

形式	日置電機 メモリハイコーダ 8826
項目	値
測定機能	メモリレコーダ レコーダ 実効値レコーダ レコーダ&メモリ FFT
チャンネル数	アナログ 32 [ch] ロジック 32 [ch]
最高サンプリング周期	1 [μs] (全ch同時)
FFTチャンネルモード	1 ch FFT 2 ch FFT
周波数レンジ	133 [mHz]~400 [kHz]
サンプリング点数	1000 点、2000 点、5000 点、10000 点
周波数分解能	1/400、1/800、1/2000、1/4000

## 5.2 理論解析の検証

図5.2.1(a)～4(a)に、直流側電流高調波の実験結果を示す。また、実験装置の定数を用いた理論解析結果を図5.2.1(b)～4(b)に、電流制御系にフィードフォワード制御を用いた場合の数値解析結果を図5.2.1(c)～4(c)に、電流制御系にフィードバック制御を用いた場合の数値解析結果を図5.2.1(d)～4(d)に示す。

図5.2.1の変調波周波数 $f_m$ が25.0 [Hz]、搬送波周波数 $f_c$ が1000.0 [Hz]、q軸電流指令値 $i_{iq}^*$ が11.1 [A]においては、式(3.4.1)における $n_o$ が1,3,5に対して、 $m_o$ が1の場合の搬送波奇数次の高調波が、925,1075, 2925,3075, 4925,5075 [Hz]成分として大きな振幅で現れていることが確認できる。同様に、式(3.4.2)における $n_e$ が2,4,6に対して、 $m_e$ が0の場合の搬送波偶数次の高調波が2000, 4000, 6000 [Hz]成分として大きな振幅で現れていることが確認できる。これらの周波数成分は、振幅も含めて、実験結果、理論解析結果、数値解析結果ともに近い値となっている。

また、図5.2.2は、表5.1.3の条件に対して、q軸電流指令値 $i_{iq}^*$ を4.4 [A]に小さくした場合の結果である。電流指令値を変化されることにより、全体的に電流振幅が小さくなっている。次に、図5.2.3は、表5.1.3の条件に対して、変調波周波数 $f_m$ を15.0 [Hz]に小さくした場合の結果である。変調波周波数を変化させることにより、側帯高調波の周波数が変化している。具体的には、搬送波奇数次の高調波が、955,1045, 2955,3045, 4955,5045 [Hz]成分として現れている。一方、搬送波偶数次の高調波については、変調波周波数に関わりなく2000, 4000, 6000 [Hz]成分として現れている。また、変調率も小さくなっているため、振幅の傾向も変化している。さらに、図5.2.4は、表5.1.3の条件に対して、搬送波周波数 $f_c$ を600.0 [Hz]に小さくした場合の結果である。搬送波周波数を変化されることにより、側帯高調波の周波数が変化している。具体的には、搬送波奇数次の高調波が、525,675, 1725,1875, 2925,3075 [Hz]成分として現れている。同様に、搬送波偶数次の高調波が、1200, 2400, 3600 [Hz]成分として現れている。

実験結果、理論解析結果、数値解析結果それぞれの周波数スペクトラムには、それぞれの誤差を含んでいる可能性がある。それぞれの場合における誤差要因を考察する。

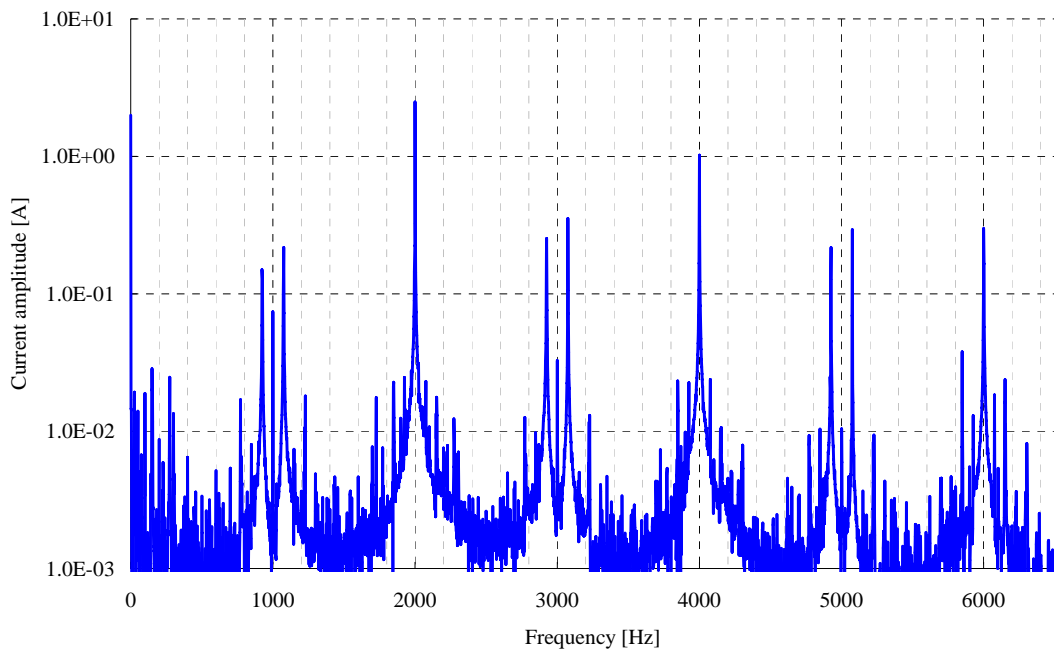
はじめに、図5.2.1(a)～5(a)の実験結果には、測定時のエリアシングの影響や、インバータのデッドタイムに起因する高調波などを含んでいる可能性がある。

次に、図5.2.1(b)～5(b)の理論解析結果は、電流制御系やインバータのデッドタイムによる高調波などの、実験や数値解析による誤差要因を全く考慮せずに、理想的にモデル化して理論式を導出している。このため、実際の高調波の周波数スペクトラムとは、異なってくるものと考えられる。

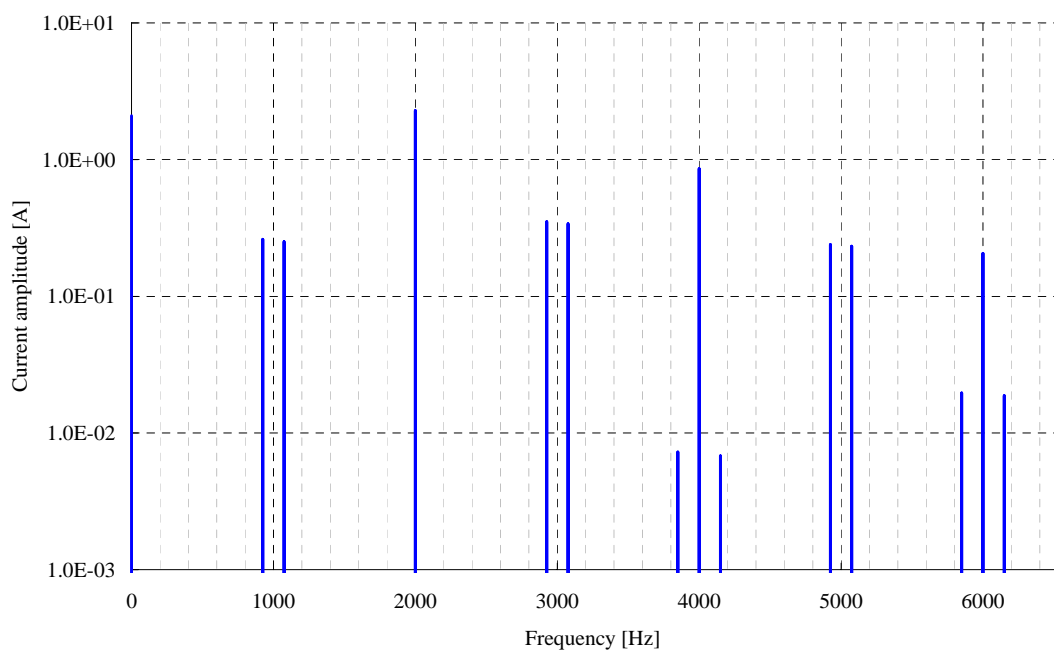
また、図5.2.1(c)、(d)～5(c)、(d)の数値解析結果には、数値計算誤差やFFTのサンプリングに際しての誤差を含んでいる可能性がある。なお、数値解析ではエリアシングの影響を減らすため高いビット数でFFTを行っているため、実験とは違いエリアシングによる影響は、ほとんど受けていないものと考えられる。また、数値解析では、電流制御系にフィードフォワード制御とフィードバック制御を用いた場合の結果を併せて示したが、周波数の低い領域を中心に違いが見られるものの、側帯高調波に比べて振幅は十分に小さいため、本検討に大きな影響は与えないものと考えられる。

以上のような誤差要因が考えられるが、全体を通して、側帯高調波と考えられる主な周波数成分においては、周波数だけでなく振幅も近い値になっている。それ以外の様々な周波数成分の細かい振動は、実

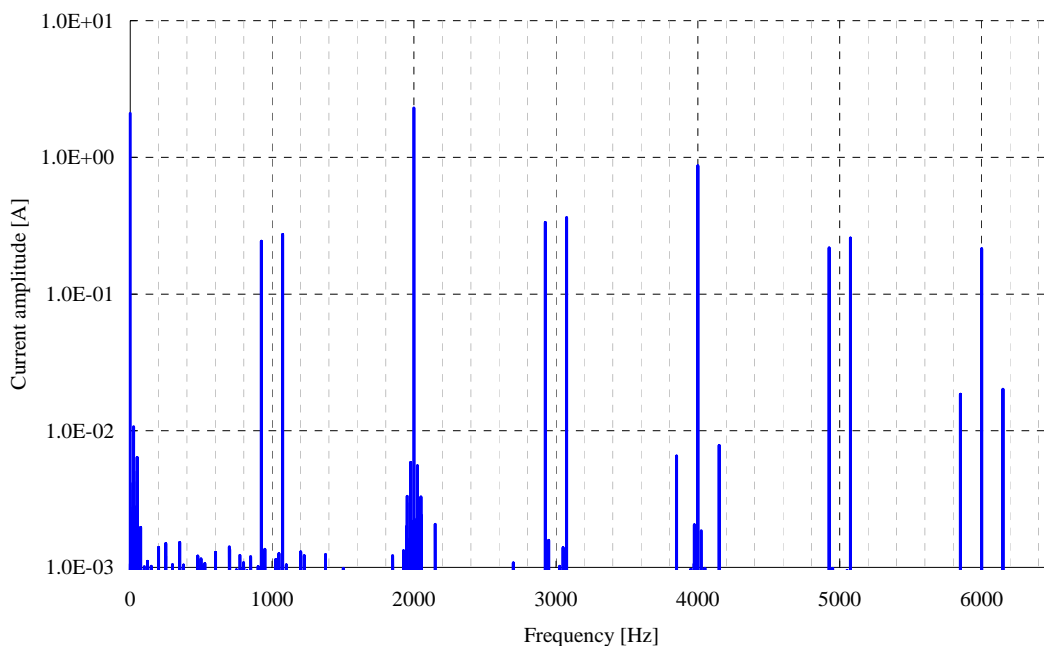
験結果が最も大きく含んでおり、それに次いで数値解析結果もある程度含んでいる。これについては、前述のような理由が考えられる。このような誤差を考慮すれば、実験と理論解析と数値解析は大きな差違はなく、実験と数値解析により、提案した理論解析の妥当性を検証できたものと考えられる。



(a) 実験結果  
(a) Experiment result

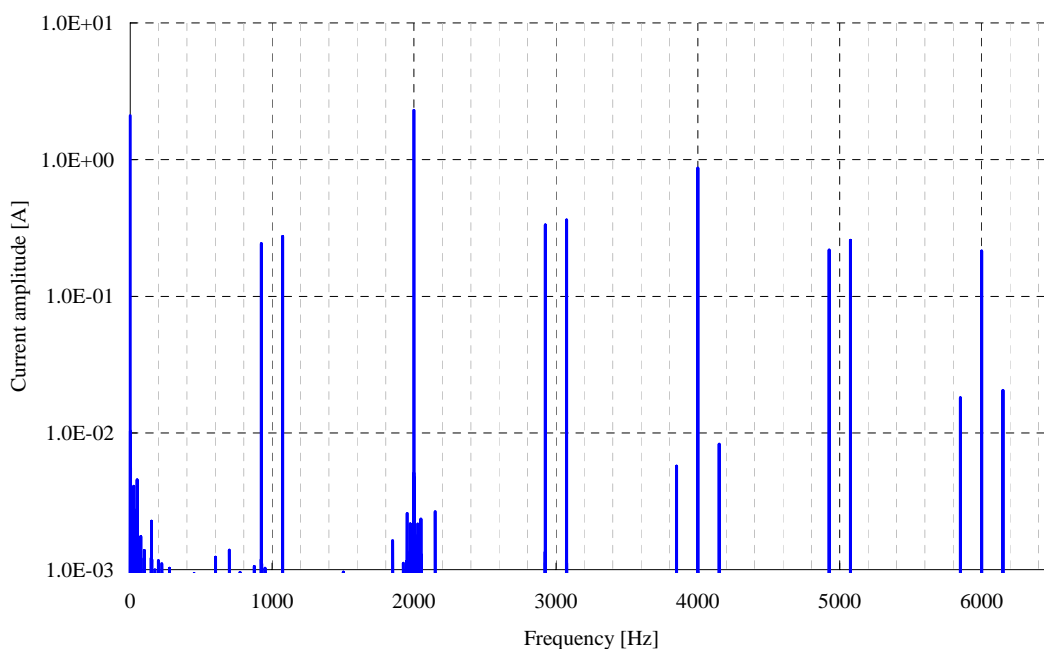


(b) 理論解析結果  
(b) Theoretical derivation result



(c) フィードフォワード制御による数値解析結果

(c) Numerical simulation result with feed forward control

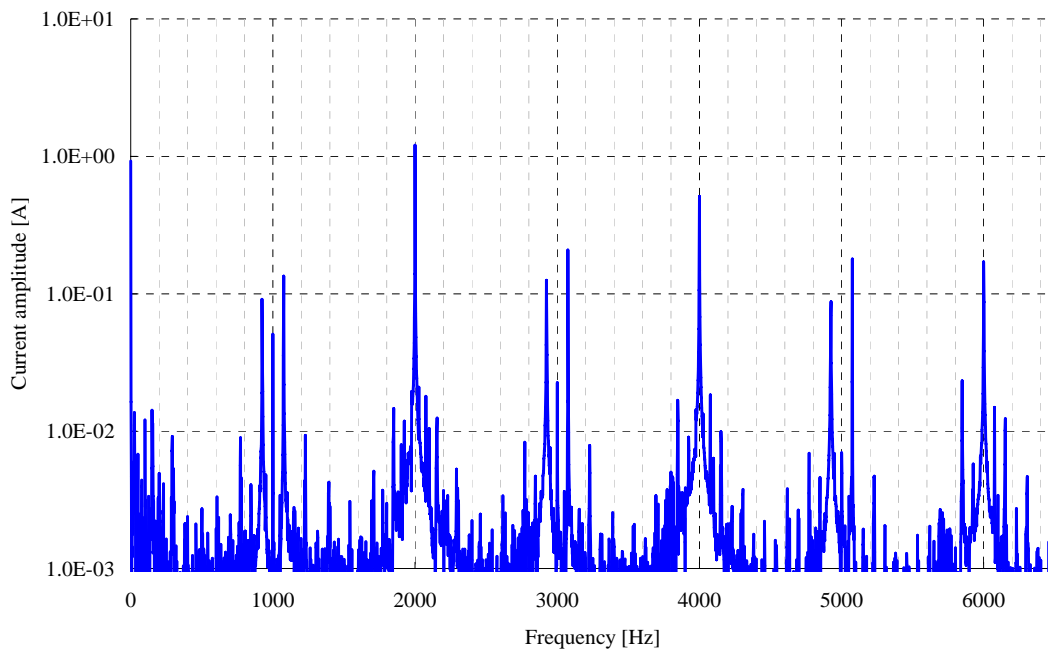


(d) フィードバック制御による数値解析結果

(d) Numerical simulation result with feed back control

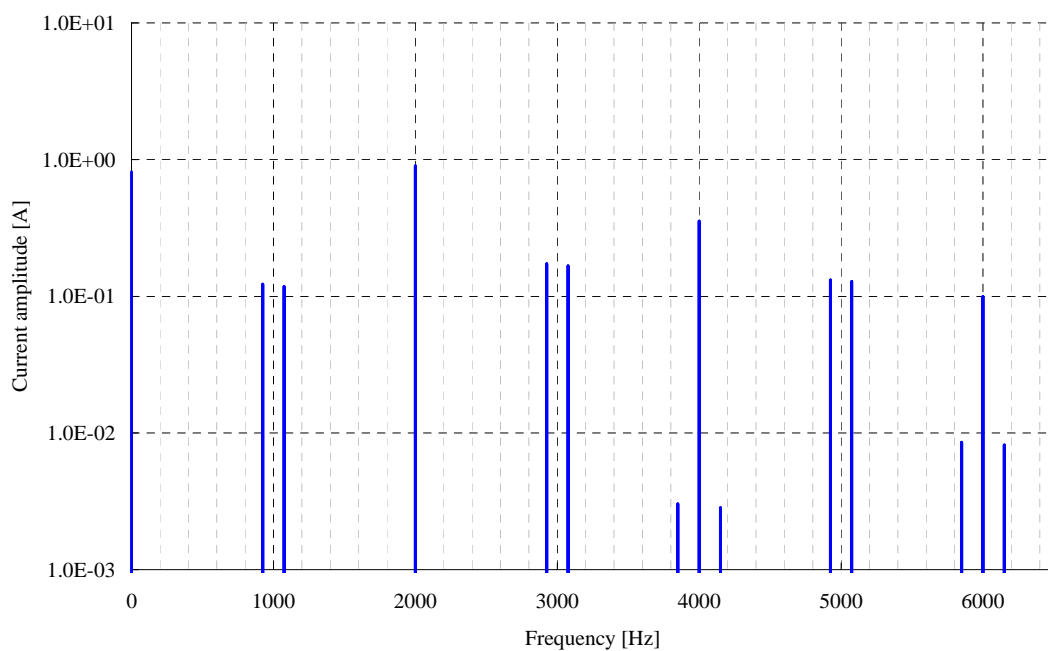
図5. 2. 1 非同期PWMモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 25.0$  [Hz],  $f_c = 1000.0$  [Hz],  $I_{1q}^* = 11.1$  [A])

Fig.5.2.1 Frequency spectrums with an asynchronous PWM



(a) 実験結果

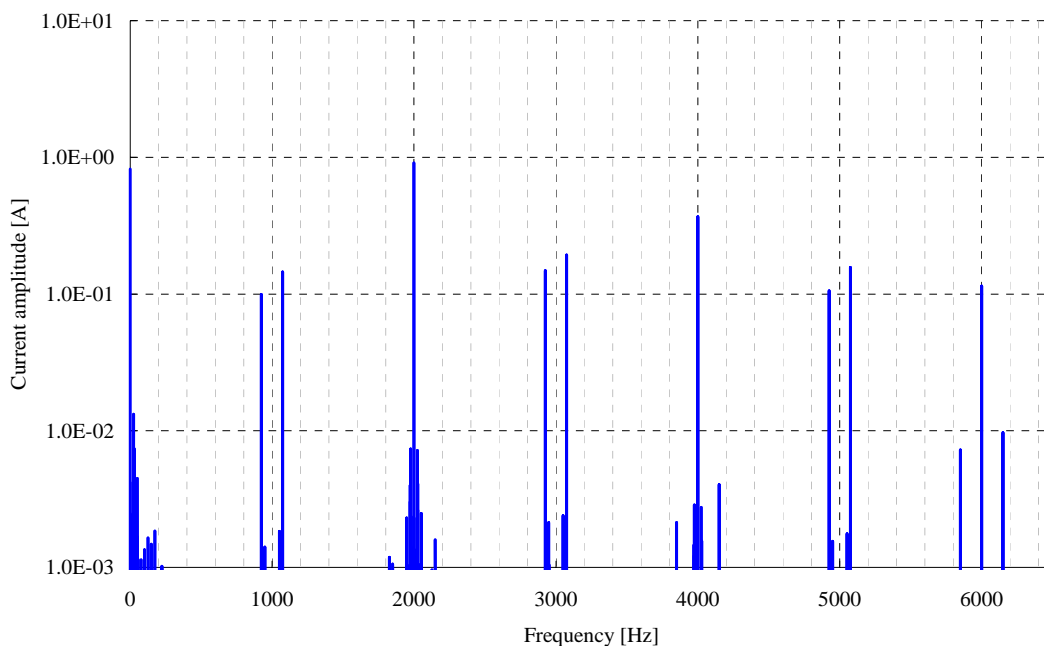
(a) Experiment result



(b) 理論解析結果

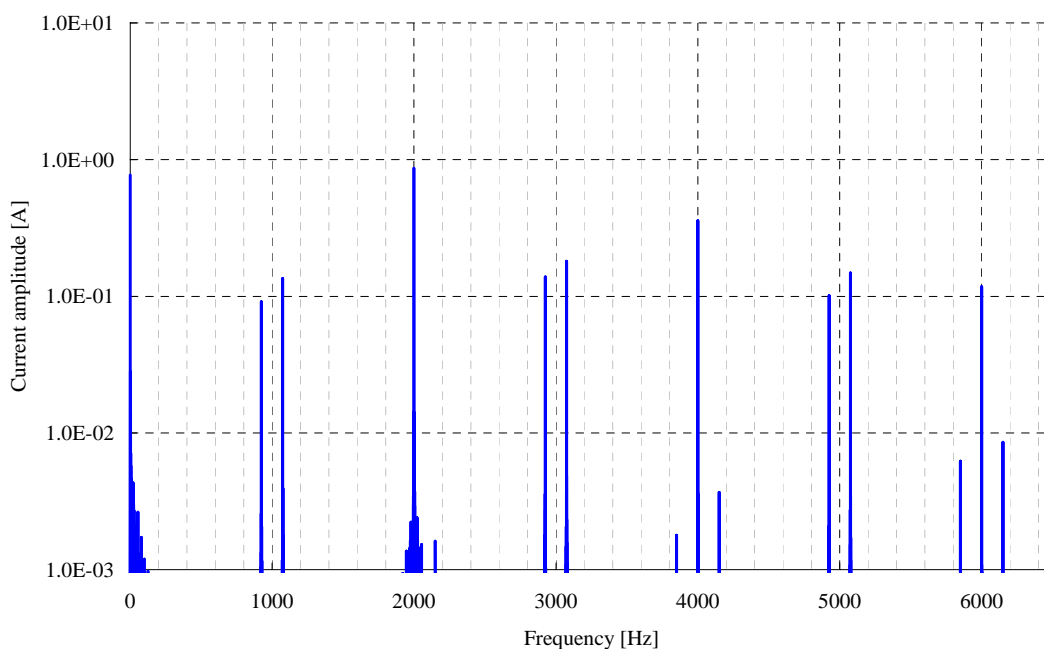
(b) Theoretical derivation result





(c) フィードフォワード制御による数値解析結果

(c) Numerical simulation result with feed forward control

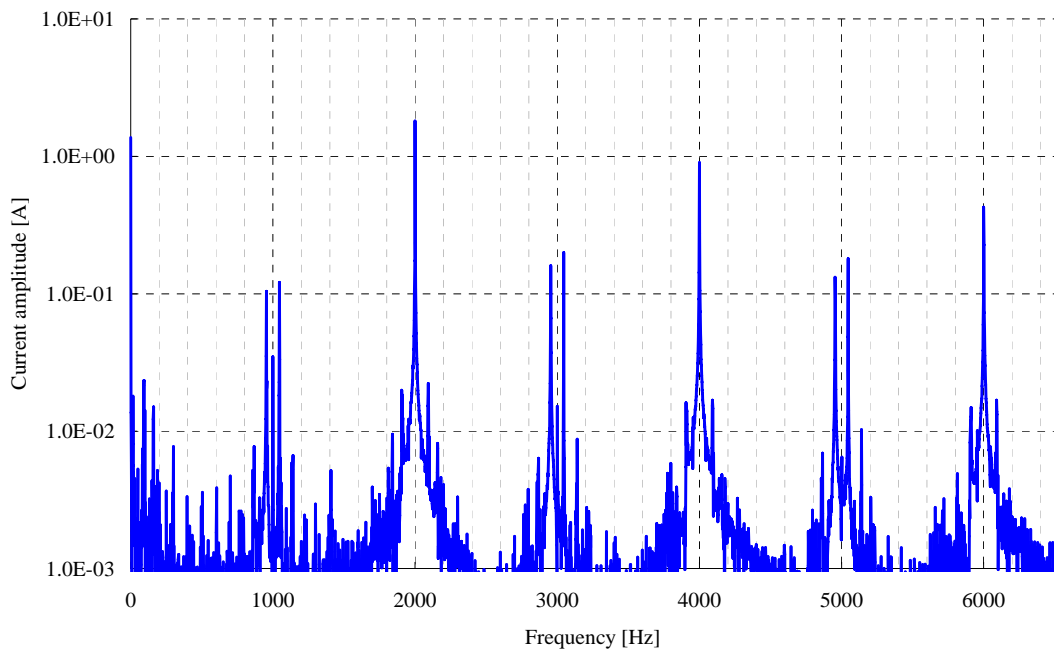


(d) フィードバック制御による数値解析結果

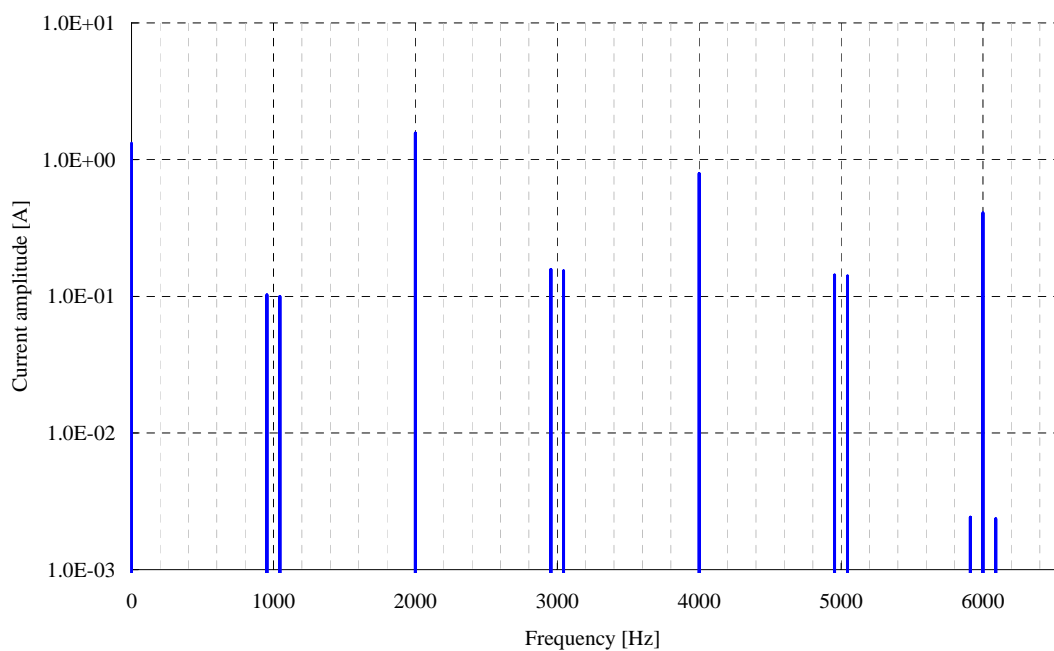
(d) Numerical simulation result with feed back control

図5. 2. 2 非同期PWMモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 25.0$  [Hz],  $f_c = 1000.0$  [Hz],  $I_{1q}^* = 4.4$  [A])

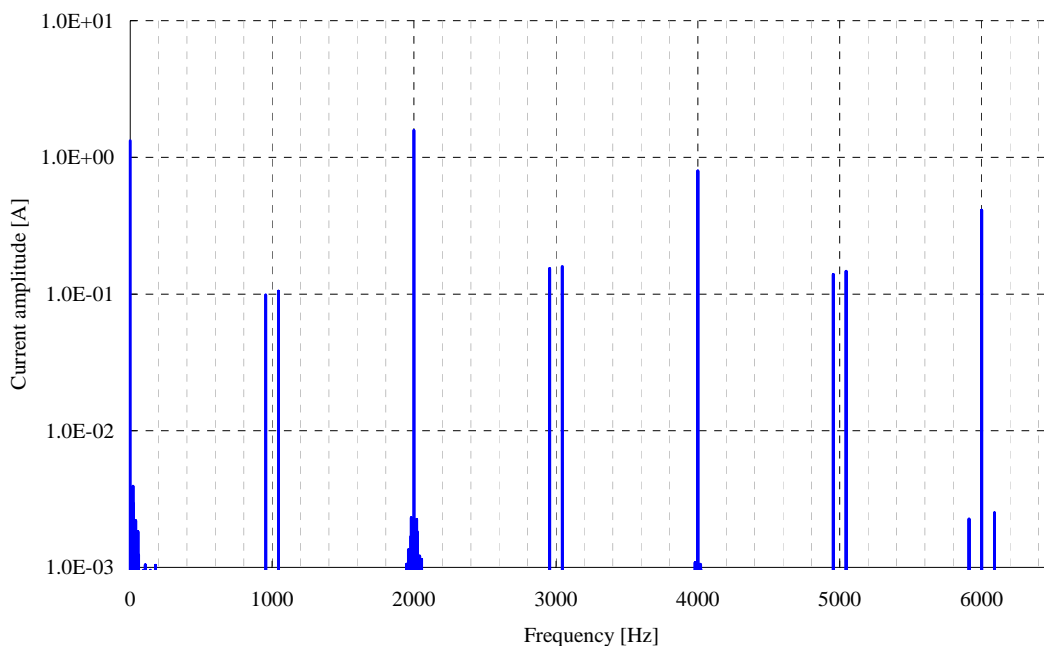
Fig.5.2.2 Frequency spectrums with an asynchronous PWM



(a) 実験結果  
(a) Experiment result

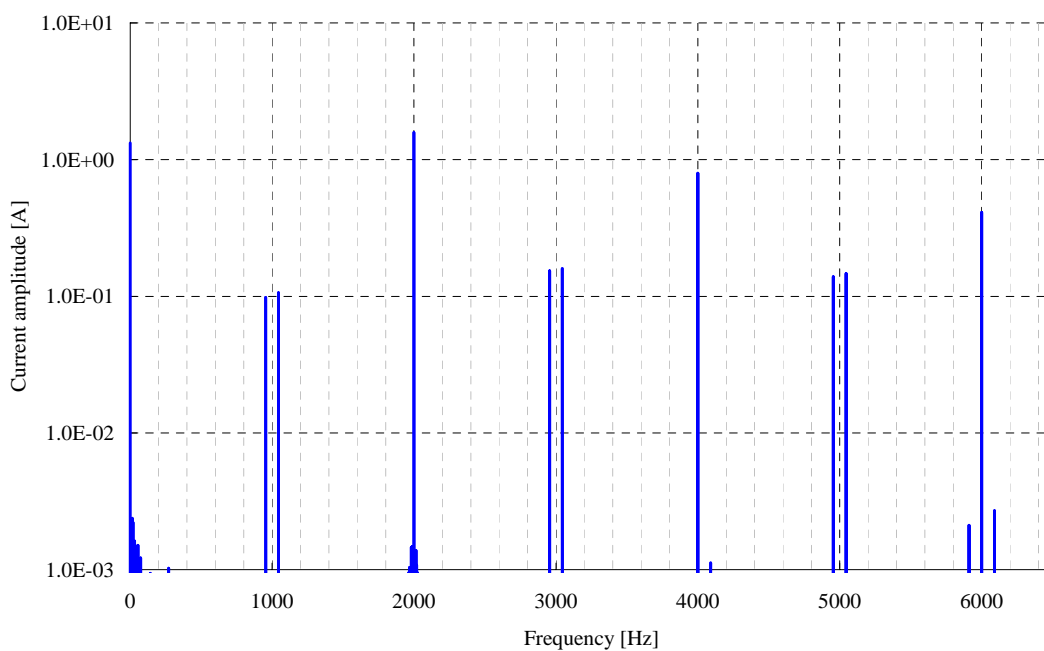


(b) 理論解析結果  
(b) Theoretical derivation result



(c) フィードフォワード制御による数値解析結果

(c) Numerical simulation result with feed forward control

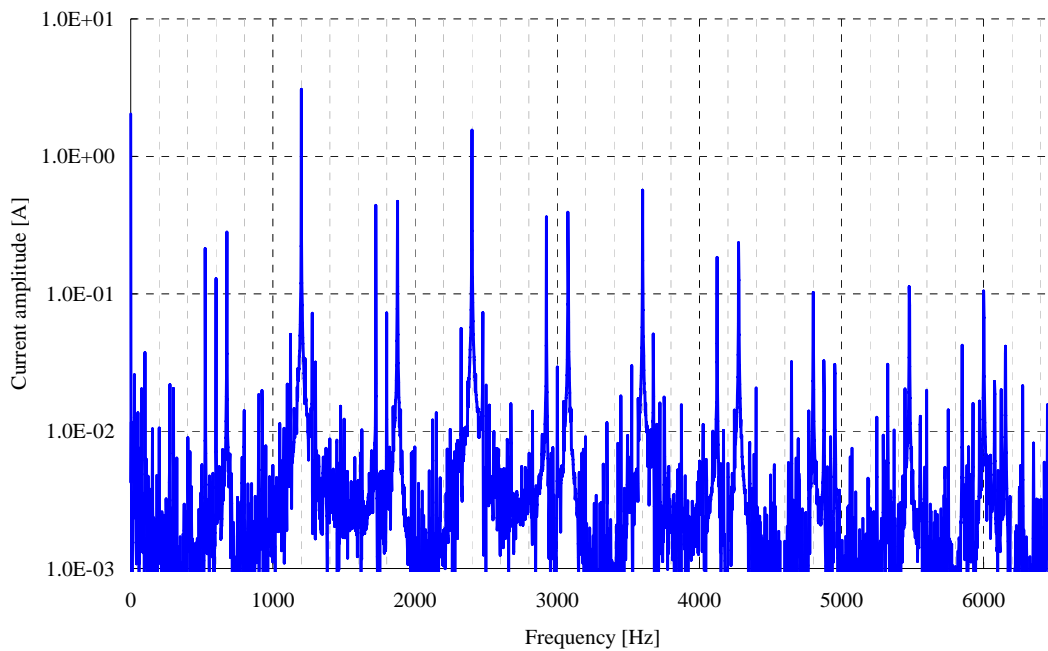


(d) フィードバック制御による数値解析結果

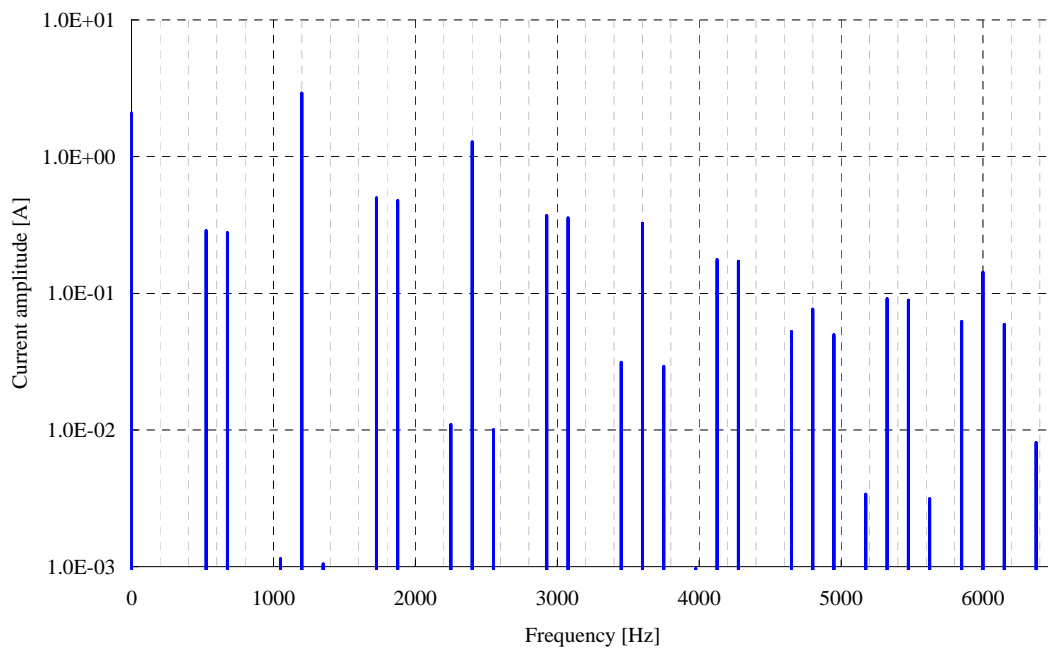
(d) Numerical simulation result with feed back control

図5. 2. 3 非同期PWMモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 15.0$  [Hz],  $f_c = 1000.0$  [Hz],  $I_{1q}^* = 11.1$  [A])

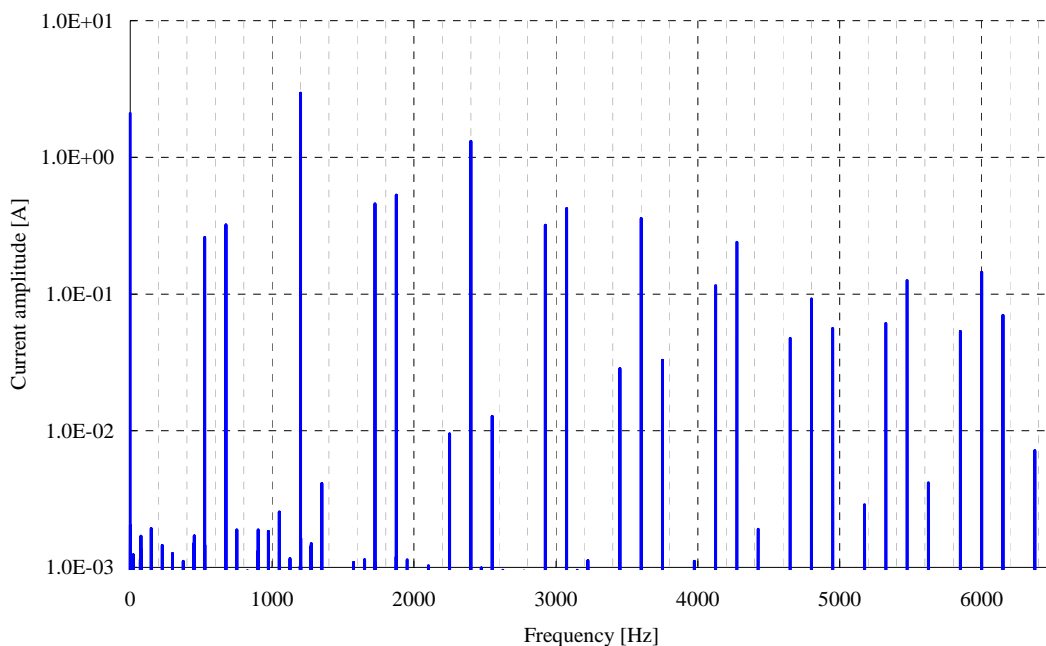
Fig.5.2.3 Frequency spectrums with an asynchronous PWM



(a) 実験結果  
(a) Experiment result

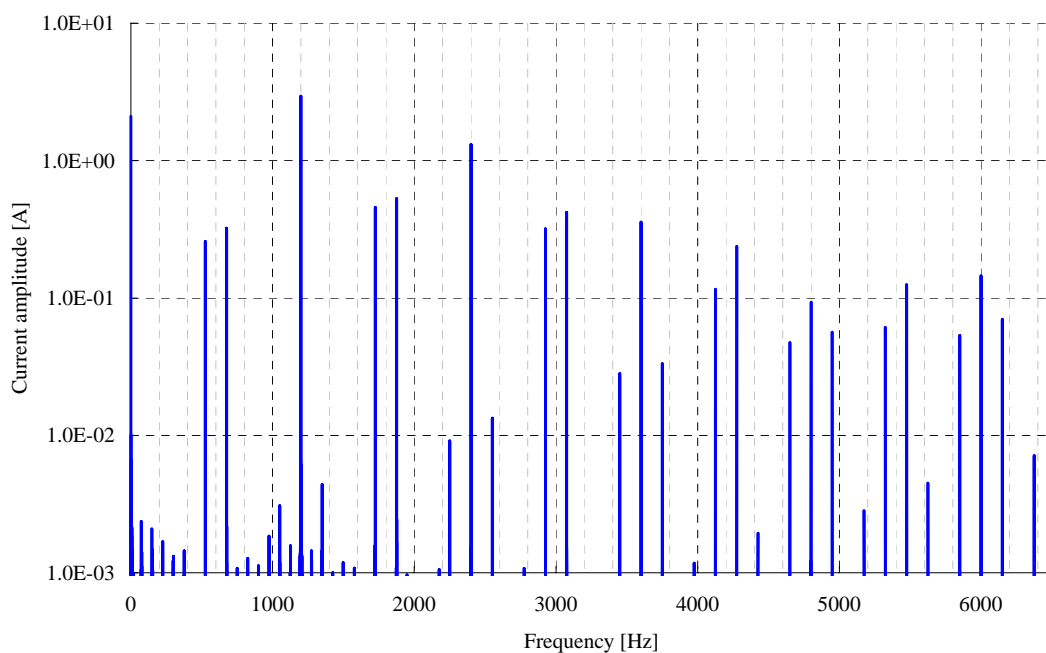


(b) 理論解析結果  
(b) Theoretical derivation result



(c) フィードフォワード制御による数値解析結果

(c) Numerical simulation result with feed forward control



(d) フィードバック制御による数値解析結果

(d) Numerical simulation result with feed back control

図5. 2. 4 非同期PWMモードの周波数スペクトラム ( $f_m = 25.0$  [Hz]、 $f_c = 600.0$  [Hz]、 $I_{1q}^* = 11.1$  [A])

Fig.5.2.4 Frequency spectrums with an asynchronous PWM



## 第6節 まとめ

本章においては、架線から集電し電気運転を行う鉄道車両に焦点を当て、インバータによる車両駆動システムの新たな設計手法の提示を目的とし、直流鉄道車両を対象とした帰線電流高調波の理論解析手法を提案した。

第1節では、研究の背景について紹介した。第2節では、解析対象モデルについて紹介した。続いて、第3節において、相電流の正弦波近似とともにスイッチング素子の動作を表現するスイッチング関数を導入することによって、直流側電流高調波の周波数成分だけでなく、その振幅値も明確に示す理論式を導出した。導出した理論式を元に、第4節では、実車両を想定したモデルを対象として、微分方程式に基づく数値解析と提案手法の理論解析結果を比較した。さらに、第5節において、ミニモデルにおいて実験を行い、実験結果、微分方程式に基づく数値解析結果、および提案手法の理論解析結果の3者を比較した。この結果、理論解析による値は、実験と数値解析で得られた主な高調波成分と比較して、周波数が一致するだけでなく振幅も実用上十分な精度で合致した。これにより、本章において開発した理論解析の妥当性を示した。開発手法は、インバータのPWMパルスモードに応じて、非同期PWMモード、同期PWMモード、1パルスモードに適用可能であり、帰線電流高調波の対策として高調波発生原理を体系的に整理することが可能となった。開発手法により、変調波周波数、搬送波周波数、変調率などのパラメータが、発生する高調波に及ぼす影響を理論式に基づき把握することが可能となった。これにより、高調波抑制対策など、今後のインバータによる車両駆動システムの設計に有益な情報を提示することが期待できる。

さらに、本章第3節では、高調波低減の一手法として、PWM搬送波の位相差運転の効果について開発した理論解析により理論式を導出した。この結果を本章第4節において分析・評価した。これにより、開発した理論解析の応用事例として、直流鉄道車両への位相差運転の効果を定量的に明らかにし、その有効性を示すことができた。





## 第7節 付録 高調波理論式の導出

### 7.1 三角関数の公式

三角関数の公式として、式(7.1.1)の三角関数の加法定理、式(7.1.2)の三角関数の積・和の公式が挙げられる。これらを多用して、直流側電流の理論式を導出する。

#### (A) 三角関数の加法定理

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}\tag{7.1.1}$$

#### (B) 三角関数の積・和の公式

$$\begin{aligned}\sin(\alpha)\sin(\beta) &= -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\} \\ \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\} \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\} \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}\end{aligned}\tag{7.1.2}$$

### 7.2 三相交流の基本関係式

三相交流を表す三角関数の基本的な関係式として、式(7.2.1)が挙げられる。

$$\begin{aligned}\sin(\theta) + \sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) &= 0 \\ \cos(\theta) + \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) &= 0\end{aligned}\tag{7.2.1}$$

式(7.2.1)は、式(7.2.2)の三角級数の定理、

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) + \sin(\alpha + \beta) + \dots + \sin(\alpha + (n-1)\beta) &= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \\ \cos(\alpha) + \cos(\alpha + \beta) + \dots + \cos(\alpha + (n-1)\beta) &= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\end{aligned}\tag{7.2.2}$$

において、

$$n = 3$$

$$\alpha = \theta, \beta = -\frac{2}{3}\pi \quad (7.2.3)$$

となるので、これを用いることで証明される。

## 7.3 三相交流の積の関係式

### 7.3.1 関係式の定義

直流側電流は、三角関数の積が三相分を足し合わせた形で表現される。これを整理するため三相交流の積の関係式を導く。はじめに、三相交流における三角関数の積を三相分の和として表した式を、式(7.3.1~4)のように定義する。

$$f_{\sin \sin x}(n, A, B) = \sin(A)\sin(B) + \sin\left(A - \frac{2}{3}x\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) + \sin\left(A - \frac{4}{3}x\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right) \quad (7.3.1)$$

$$f_{\cos \cos x}(n, A, B) = \cos(A)\cos(B) + \cos\left(A - \frac{2}{3}x\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) + \cos\left(A - \frac{4}{3}x\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right) \quad (7.3.2)$$

$$f_{\sin \cos x}(n, A, B) = \sin(A)\cos(B) + \sin\left(A - \frac{2}{3}x\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) + \sin\left(A - \frac{4}{3}x\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right) \quad (7.3.3)$$

$$f_{\cos \sin x}(n, A, B) = \cos(A)\sin(B) + \cos\left(A - \frac{2}{3}x\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) + \cos\left(A - \frac{4}{3}x\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right) \quad (7.3.4)$$

式(7.3.1~4)は、整数  $x$  に値を代入して表示すると、式(7.3.5~16)のような12個のパターンに分類される。

$$\begin{aligned}
f_{\sin \sin 0}(n, A, B) &= \sin(A)\sin(B) \\
&+ \sin(A)\sin\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) \\
&+ \sin(A)\sin\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right)
\end{aligned} \tag{7.3.5}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \sin 1}(n, A, B) &= \sin(A)\sin(B) \\
&+ \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) \\
&+ \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right)
\end{aligned} \tag{7.3.6}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \sin 2}(n, A, B) &= \sin(A)\sin(B) \\
&+ \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) \\
&+ \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right)
\end{aligned} \tag{7.3.7}$$

$$\begin{aligned}
f_{\cos \cos 0}(n, A, B) &= \cos(A)\cos(B) \\
&+ \cos(A)\cos\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) \\
&+ \cos(A)\cos\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right)
\end{aligned} \tag{7.3.8}$$

$$\begin{aligned}
f_{\cos \cos 1}(n, A, B) &= \cos(A)\cos(B) \\
&+ \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) \\
&+ \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right)
\end{aligned} \tag{7.3.9}$$

$$\begin{aligned}
f_{\cos \cos 2}(n, A, B) &= \cos(A)\cos(B) \\
&+ \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) \\
&+ \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right)
\end{aligned} \tag{7.3.10}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \cos 0}(n, A, B) &= \sin(A)\cos(B) \\
&+ \sin(A)\cos\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) \\
&+ \sin(A)\cos\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right)
\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \cos 1}(n, A, B) &= \sin(A)\cos(B) \\
 &+ \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) \\
 &+ \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right)
 \end{aligned}
 \tag{7. 3. 12}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \cos 2}(n, A, B) &= \sin(A)\cos(B) \\
 &+ \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) \\
 &+ \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right)
 \end{aligned}
 \tag{7. 3. 13}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \sin 0}(n, A, B) &= \cos(A)\sin(B) \\
 &+ \cos(A)\sin\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) \\
 &+ \cos(A)\sin\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right)
 \end{aligned}
 \tag{7. 3. 14}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \sin 1}(n, A, B) &= \cos(A)\sin(B) \\
 &+ \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) \\
 &+ \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right)
 \end{aligned}
 \tag{7. 3. 15}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \sin 2}(n, A, B) &= \cos(A)\sin(B) \\
 &+ \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}n\pi\right) \\
 &+ \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}n\pi\right)
 \end{aligned}
 \tag{7. 3. 16}$$

### 7. 3. 2 関係式の整理

式(7. 3. 5~16)を  $n$  によって場合分けして整理する。

(A)  $n=1,4,7,10,13,16\dots$  のとき、

$$n = 1 + 3m \tag{7. 3. 17}$$

と表すことができる。ただし、 $m$  は任意の整数である。これより、

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3}n\pi &= \frac{2}{3}\pi + 2m\pi = \frac{2}{3}\pi \\
 \frac{4}{3}n\pi &= \frac{4}{3}\pi + 4m\pi = \frac{4}{3}\pi
 \end{aligned}
 \tag{7. 3. 18}$$

となる。これを用いて、式(7. 3. 5~16)を整理すると、

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \sin 0}(n, A, B) &= \sin(A)\sin(B) + \sin(A)\sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin(A)\sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &= \sin(A)\left\{\sin(B) + \sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{7. 3. 19}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \sin 1}(n, A, B) &= \sin(A)\sin(B) \\
 &\quad + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &\quad + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &= -\frac{1}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\} \\
 &\quad - \frac{1}{2}\left\{\cos\left(A+B - \frac{4}{3}\pi\right) - \cos(A-B)\right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2}\left\{\cos\left(A+B - \frac{2}{3}\pi\right) - \cos(A-B)\right\} \\
 &= \frac{3}{2}\cos(A-B)
 \end{aligned} \tag{7. 3. 20}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \sin 2}(n, A, B) &= \sin(A)\sin(B) \\
 &\quad + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &\quad + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &= -\frac{1}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\} \\
 &\quad - \frac{1}{2}\left\{\cos(A+B) - \cos\left(A-B - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2}\left\{\cos(A+B) - \cos\left(A-B - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
 &= -\frac{3}{2}\cos(A+B)
 \end{aligned} \tag{7. 3. 21}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \cos 0}(n, A, B) &= \cos(A)\cos(B) + \cos(A)\cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos(A)\cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &= \cos(A)\left\{\cos(B) + \cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{7. 3. 22}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos\cos 1}(n, A, B) &= \cos(A)\cos(B) \\
 &\quad + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &\quad + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &= \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\left\{\cos\left(A+B - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos(A-B)\right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\left\{\cos\left(A+B - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos(A-B)\right\} \\
 &= \frac{3}{2}\cos(A-B)
 \end{aligned} \tag{7. 3. 23}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos\cos 2}(n, A, B) &= \cos(A)\cos(B) \\
 &\quad + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &\quad + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &= \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\left\{\cos(A+B) + \cos\left(A-B - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\left\{\cos(A+B) + \cos\left(A-B - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
 &= \frac{3}{2}\cos(A+B)
 \end{aligned} \tag{7. 3. 24}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\sin\cos 0}(n, A, B) &= \sin(A)\cos(B) + \sin(A)\cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin(A)\cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &= \sin(A)\left\{\cos(B) + \cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{7. 3. 25}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \cos 1}(n, A, B) &= \sin(A)\cos(B) \\
&+ \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
&+ \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
&= \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\sin\left(A+B - \frac{4}{3}\pi\right) + \sin(A-B)\right\} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\sin\left(A+B - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin(A-B)\right\} \\
&= \frac{3}{2}\sin(A-B)
\end{aligned} \tag{7. 3. 26}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \cos 2}(n, A, B) &= \sin(A)\cos(B) \\
&+ \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
&+ \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
&= \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\sin(A+B) + \sin\left(A-B - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\sin(A+B) + \sin\left(A-B - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
&= \frac{3}{2}\sin(A+B)
\end{aligned} \tag{7. 3. 27}$$

$$\begin{aligned}
f_{\cos \sin 0}(n, A, B) &= \cos(A)\sin(B) + \cos(A)\sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos(A)\sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
&= \cos(A)\left\{\sin(B) + \sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7. 3. 28}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \sin 1}(n, A, B) &= \cos(A)\sin(B) \\
 &+ \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &+ \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &= \frac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\} \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\sin\left(A+B - \frac{4}{3}\pi\right) - \sin(A-B)\right\} \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\sin\left(A+B - \frac{2}{3}\pi\right) - \sin(A-B)\right\} \\
 &= -\frac{3}{2}\sin(A-B)
 \end{aligned} \tag{7. 3. 29}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \sin 2}(n, A, B) &= \cos(A)\sin(B) \\
 &+ \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &+ \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &= \frac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\} \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\sin(A+B) - \sin\left(A-B - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\sin(A+B) - \sin\left(A-B - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
 &= \frac{3}{2}\sin(A+B)
 \end{aligned} \tag{7. 3. 30}$$

となる。

(B)  $n=2,5,8,11,14,17\dots$  のとき、

$$n = 2 + 3m \tag{7. 3. 31}$$

と表すことができる。ただし、 $m$  は任意の整数である。これより、

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3}n\pi &= \frac{4}{3}\pi + 2m\pi = \frac{4}{3}\pi \\
 \frac{4}{3}n\pi &= \frac{8}{3}\pi + 4m\pi = \frac{8}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi
 \end{aligned} \tag{7. 3. 32}$$

となる。これを用いて、式(7. 3. 5~16)を整理すると、



$$\begin{aligned}
f_{\sin \sin 0}(n, A, B) &= \sin(A)\sin(B) + \sin(A)\sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) + \sin(A)\sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
&= \sin(A)\left\{\sin(B) + \sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) + \sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7. 3. 33}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \sin 1}(n, A, B) &= \sin(A)\sin(B) \\
&\quad + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
&\quad + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
&= -\frac{1}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left\{\cos(A+B) - \cos\left(A - B - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left\{\cos(A+B) - \cos\left(A - B - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
&= -\frac{3}{2}\cos(A+B)
\end{aligned} \tag{7. 3. 34}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \sin 2}(n, A, B) &= \sin(A)\sin(B) \\
&\quad + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
&\quad + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
&= -\frac{1}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left\{\cos\left(A + B - \frac{2}{3}\pi\right) - \cos(A-B)\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left\{\cos\left(A + B - \frac{4}{3}\pi\right) - \cos(A-B)\right\} \\
&= \frac{3}{2}\cos(A-B)
\end{aligned} \tag{7. 3. 35}$$

$$\begin{aligned}
f_{\cos \cos 0}(n, A, B) &= \cos(A)\cos(B) + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
&= \cos(A)\left\{\cos(B) + \cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7. 3. 36}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos\cos 1}(n, A, B) &= \cos(A)\cos(B) \\
 &+ \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &+ \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &= \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\} \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\cos(A+B) + \cos\left(A - B - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\cos(A+B) + \cos\left(A - B - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
 &= \frac{3}{2}\cos(A+B)
 \end{aligned} \tag{7. 3. 37}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos\cos 2}(n, A, B) &= \cos(A)\cos(B) \\
 &+ \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &+ \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &= \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\} \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\cos\left(A + B - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos(A-B)\right\} \\
 &+ \frac{1}{2}\left\{\cos\left(A + B - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos(A-B)\right\} \\
 &= \frac{3}{2}\cos(A-B)
 \end{aligned} \tag{7. 3. 38}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\sin\cos 0}(n, A, B) &= \sin(A)\cos(B) + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &= \sin(A)\left\{\cos(B) + \cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{7. 3. 39}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \cos 1}(n, A, B) &= \sin(A)\cos(B) \\
&+ \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
&+ \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
&= \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\sin(A+B) + \sin\left(A - B - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\sin(A+B) + \sin\left(A - B - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
&= \frac{3}{2}\sin(A+B)
\end{aligned} \tag{7. 3. 40}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \cos 2}(n, A, B) &= \sin(A)\cos(B) \\
&+ \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
&+ \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
&= \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\sin\left(A + B - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin(A-B)\right\} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\sin\left(A + B - \frac{4}{3}\pi\right) + \sin(A-B)\right\} \\
&= \frac{3}{2}\sin(A-B)
\end{aligned} \tag{7. 3. 41}$$

$$\begin{aligned}
f_{\cos \sin 0}(n, A, B) &= \cos(A)\sin(B) + \cos(A)\sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos(A)\sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
&= \cos(A)\left\{\sin(B) + \sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) + \sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7. 3. 42}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \sin 1}(n, A, B) &= \cos(A)\sin(B) \\
 &\quad + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &\quad + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &= \frac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\left\{\sin(A+B) - \sin\left(A - B - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\left\{\sin(A+B) - \sin\left(A - B - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
 &= \frac{3}{2}\sin(A+B)
 \end{aligned} \tag{7. 3. 43}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \sin 2}(n, A, B) &= \cos(A)\sin(B) \\
 &\quad + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{4}{3}\pi\right) \\
 &\quad + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin\left(B - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &= \frac{1}{2}\{\sin(A+B) - \sin(A-B)\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\left\{\sin\left(A + B - \frac{2}{3}\pi\right) - \sin(A-B)\right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2}\left\{\sin\left(A + B - \frac{4}{3}\pi\right) - \sin(A-B)\right\} \\
 &= -\frac{3}{2}\sin(A-B)
 \end{aligned} \tag{7. 3. 44}$$

となる。

(C)  $n=3,6,9,12,15,18\dots$  のとき、

$$n = 3m \tag{7. 3. 45}$$

と表すことができる。ただし、 $m$  は任意の整数である。これより、

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3}n\pi &= 2m\pi = 0 \\
 \frac{4}{3}n\pi &= 4m\pi = 0
 \end{aligned} \tag{7. 3. 46}$$

となる。これを用いて、式(7. 3. 5~16)を整理すると、

$$\begin{aligned}
f_{\sin \sin 0}(n, A, B) &= \sin(A)\sin(B) + \sin(A)\sin(B) + \sin(A)\sin(B) \\
&= 3\sin(A)\sin(B) \\
&= -\frac{3}{2}\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\}
\end{aligned} \tag{7. 3. 47}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \sin 1}(n, A, B) &= \sin(A)\sin(B) + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin(B) + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin(B) \\
&= \left\{\sin(A) + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\right\}\sin(B) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7. 3. 48}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \sin 2}(n, A, B) &= \sin(A)\sin(B) + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin(B) + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin(B) \\
&= \left\{\sin(A) + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right) + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\right\}\sin(B) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7. 3. 49}$$

$$\begin{aligned}
f_{\cos \cos 0}(n, A, B) &= \cos(A)\cos(B) + \cos(A)\cos(B) + \cos(A)\cos(B) \\
&= 3\cos(A)\cos(B) \\
&= \frac{3}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\}
\end{aligned} \tag{7. 3. 50}$$

$$\begin{aligned}
f_{\cos \cos 1}(n, A, B) &= \cos(A)\cos(B) + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos(B) + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos(B) \\
&= \left\{\cos(A) + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\right\}\cos(B) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7. 3. 51}$$

$$\begin{aligned}
f_{\cos \cos 2}(n, A, B) &= \cos(A)\cos(B) + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos(B) + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos(B) \\
&= \left\{\cos(A) + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\right\}\cos(B) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7. 3. 52}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \cos 0}(n, A, B) &= \sin(A)\cos(B) + \sin(A)\cos(B) + \sin(A)\cos(B) \\
&= 3\sin(A)\cos(B) \\
&= \frac{3}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\}
\end{aligned} \tag{7. 3. 53}$$

$$\begin{aligned}
f_{\sin \cos 1}(n, A, B) &= \sin(A)\cos(B) + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos(B) + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos(B) \\
&= \left\{\sin(A) + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\right\}\cos(B) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7. 3. 54}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \cos 2}(n, A, B) &= \sin(A)\cos(B) + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\cos(B) + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\cos(B) \\
 &= \left\{ \sin(A) + \sin\left(A - \frac{4}{3}\pi\right) + \sin\left(A - \frac{2}{3}\pi\right) \right\} \cos(B) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{7. 3. 55}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \sin 0}(n, A, B) &= \cos(A)\sin(B) + \cos(A)\sin(B) + \cos(A)\sin(B) \\
 &= 3\cos(A)\sin(B) \\
 &= \frac{3}{2} \{ \sin(A+B) - \sin(A-B) \}
 \end{aligned} \tag{7. 3. 56}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \sin 1}(n, A, B) &= \cos(A)\sin(B) + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin(B) + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin(B) \\
 &= \left\{ \cos(A) + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right) \right\} \sin(B) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{7. 3. 57}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \sin 2}(n, A, B) &= \cos(A)\sin(B) + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right)\sin(B) + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right)\sin(B) \\
 &= \left\{ \cos(A) + \cos\left(A - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(A - \frac{2}{3}\pi\right) \right\} \sin(B) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{7. 3. 58}$$

となる。

### 7. 3. 3 関係式のまとめ

式(7. 3. 19~30、33~44、47~58)をまとめると、三相交流の積の関係式は、

(A) $n=1,4,7,10,13,16\dots$ のとき、

$$f_{\sin \sin 0}(n, A, B) = f_{\cos \cos 0}(n, A, B) = f_{\sin \cos 0}(n, A, B) = f_{\cos \sin 0}(n, A, B) = 0 \tag{7. 3. 59}$$

$$f_{\sin \sin 1}(n, A, B) = \frac{3}{2} \cos(A - B) \tag{7. 3. 60}$$

$$f_{\sin \sin 2}(n, A, B) = -\frac{3}{2} \cos(A + B) \tag{7. 3. 61}$$

$$f_{\cos \cos 1}(n, A, B) = \frac{3}{2} \cos(A - B) \tag{7. 3. 62}$$

$$f_{\cos \cos 2}(n, A, B) = \frac{3}{2} \cos(A + B) \tag{7. 3. 63}$$

$$f_{\sin \cos 1}(n, A, B) = \frac{3}{2} \sin(A - B) \tag{7. 3. 64}$$

$$f_{\sin \cos 2}(n, A, B) = \frac{3}{2} \sin(A + B) \tag{7. 3. 65}$$

$$f_{\cos \sin 1}(n, A, B) = -\frac{3}{2} \sin(A - B) \tag{7. 3. 66}$$

$$f_{\text{cossin}2}(n, A, B) = \frac{3}{2} \sin(A + B) \quad (7. 3. 67)$$

(B)  $n=2,5,8,11,14,17\dots$  のとき、

$$f_{\text{sin sin}0}(n, A, B) = f_{\text{cos cos}0}(n, A, B) = f_{\text{sin cos}0}(n, A, B) = f_{\text{cos sin}0}(n, A, B) = 0 \quad (7. 3. 68)$$

$$f_{\text{sin sin}1}(n, A, B) = -\frac{3}{2} \cos(A + B) \quad (7. 3. 69)$$

$$f_{\text{sin sin}2}(n, A, B) = \frac{3}{2} \cos(A - B) \quad (7. 3. 70)$$

$$f_{\text{cos cos}1}(n, A, B) = \frac{3}{2} \cos(A + B) \quad (7. 3. 71)$$

$$f_{\text{cos cos}2}(n, A, B) = \frac{3}{2} \cos(A - B) \quad (7. 3. 72)$$

$$f_{\text{sin cos}1}(n, A, B) = \frac{3}{2} \sin(A + B) \quad (7. 3. 73)$$

$$f_{\text{sin cos}2}(n, A, B) = \frac{3}{2} \sin(A - B) \quad (7. 3. 74)$$

$$f_{\text{cos sin}1}(n, A, B) = \frac{3}{2} \sin(A + B) \quad (7. 3. 75)$$

$$f_{\text{cos sin}2}(n, A, B) = -\frac{3}{2} \sin(A - B) \quad (7. 3. 76)$$

(C)  $n=3,6,9,12,15,18\dots$  のとき、

$$f_{\text{sin sin}0}(n, A, B) = -\frac{3}{2} \{\cos(A + B) - \cos(A - B)\} \quad (7. 3. 77)$$

$$f_{\text{cos cos}0}(n, A, B) = \frac{3}{2} \{\cos(A + B) + \cos(A - B)\} \quad (7. 3. 78)$$

$$f_{\text{sin cos}0}(n, A, B) = \frac{3}{2} \{\sin(A + B) + \sin(A - B)\} \quad (7. 3. 79)$$

$$f_{\text{cos sin}0}(n, A, B) = \frac{3}{2} \{\sin(A + B) - \sin(A - B)\} \quad (7. 3. 80)$$

$$\begin{aligned} f_{\text{sinsin}1}(n, A, B) &= f_{\text{sin sin}2}(n, A, B) = f_{\text{cos cos}1}(n, A, B) = f_{\text{cos cos}2}(n, A, B) = 0 \\ f_{\text{sin cos}1}(n, A, B) &= f_{\text{sin cos}2}(n, A, B) = f_{\text{cos sin}1}(n, A, B) = f_{\text{cos sin}2}(n, A, B) = 0 \end{aligned} \quad (7. 3. 81)$$

となる。

### 7.4 ベッセル関数

$k$ 次のベッセル関数 $J_k(x)$ は、

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt \tag{7.4.1}$$

と定義され、

$$\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1}(x) \sin(2l-1)\theta \tag{7.4.2}$$

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l}(x) \cos 2l\theta \tag{7.4.3}$$

の公式を用いる。

### 7.5 スイッチング関数の導出

スイッチング関数 $SW$ は、図7.5.1のように変調波 $e_m$ と搬送波 $e_c$ を比較して求められる。非同期PWMモードも考慮すると、変調波の1周期内に含まれるパルスに繰り返し性がない。このため、変調波の角周波数 $\omega_m$ を基準として、その倍調波をフーリエ変換する方法よりも、搬送波の角周波数 $\omega_c$ を基準にして、側帯波の分布を考察する方が優れている<sup>[7.1]</sup>。

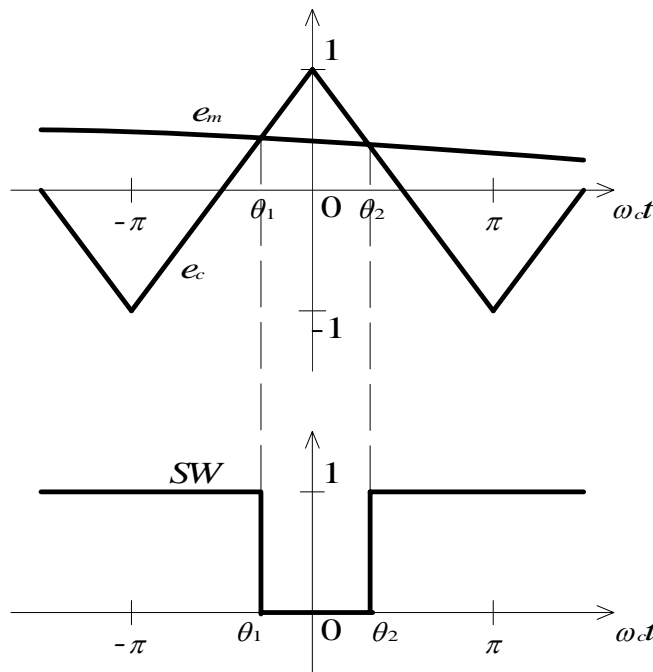


図7.5.1 変調波と搬送波とスイッチング関数の関係

Fig.7.5.1 Relation with a modulator wave, a carrier wave, and a switching function

変調波 $e_m$ と搬送波 $e_c$ を比較して、スイッチング関数 $SW$ は、

$$e_m > e_c \text{ のとき } SW = 1 \tag{7.5.1}$$



$$e_m < e_c \text{ のとき } SW = 0 \quad (7.5.2)$$

となる。スイッチング関数のフーリエ展開の一般式は、

$$SW = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_c t + b_n \sin n\omega_c t) \quad (7.5.3)$$

となる。ただし、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} SW \cos n\omega_c t d(\omega_c t) \quad (7.5.4)$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} SW \sin n\omega_c t d(\omega_c t) \quad (7.5.5)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。ここで、図7.5.1のように、スイッチング関数のオン・オフが切り替わるタイミングで、時刻 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ を取ると、

$$a_0 = \frac{1}{\pi} (2\pi + \theta_1 - \theta_2) \quad (7.5.6)$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi} (\sin n\theta_1 - \sin n\theta_2) \quad (7.5.7)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} (-\cos n\theta_1 + \cos n\theta_2) \quad (7.5.8)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。ここで、変調波 $e_m$ と搬送波 $e_c$ を、

$$e_m = a \sin(\omega_m t + \phi) \quad (7.5.9)$$

$$e_c = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi} \omega_c t & -\pi < \omega_c t < 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi} \omega_c t & 0 \leq \omega_c t < \pi \end{cases} \quad (7.5.10)$$

と定義する。変調波 $e_m$ と搬送波 $e_c$ が等しいときが、時刻 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ となるので、これを求めると、

$$e_m = e_c \quad (7.5.11)$$

より、

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \{a \sin(\omega_m t + \phi) - 1\} \quad (7.5.12)$$

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{2} \{a \sin(\omega_m t + \phi) - 1\} \quad (7.5.13)$$

となる。よって、これを、式(7.5.6~8)に用いると、

$$a_0 = 1 + a \sin(\omega_m t + \phi) \quad (7.5.14)$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \sin \left[ \frac{n\pi}{2} \{a \sin(\omega_m t + \phi) - 1\} \right] \quad (7.5.15)$$
$$(n = 1, 2, 3 \dots)$$

$$b_n = 0 \quad (7.5.16)$$

となる。これを、式(7.5.3)に用いると、スイッチング関数は、

$$SW = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sin(\omega_m t + \phi) \quad (7.5.17)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \left[ \frac{n\pi}{2} \{a \sin(\omega_m t + \phi) - 1\} \right] \cos n\omega_c t$$

として表される。

## 7.6 単相搬送波を用いた場合の高調波理論式の導出の詳細

本項では、単相搬送波において、任意の相電流を仮定して、それにより生じる直流側電流高調波の周波数と振幅を導出する。直流側電流は、スイッチング関数を用いることにより、

$$I_{dc} = SW_u \times i_u + SW_v \times i_v + SW_w \times i_w \quad (7.6.1)$$

として表される。単相搬送波を用いた場合において、スイッチング関数 $SW_u$ 、 $SW_v$ 、 $SW_w$ は、

$$\begin{aligned} SW_u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sin(\omega_m t + \phi) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{2} \{a \sin(\omega_m t + \phi) - 1\}\right] \cos n(\omega_c t + \delta) \\ SW_v &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{2}{3}\pi\right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{2} \left\{a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{2}{3}\pi\right) - 1\right\}\right] \cos n(\omega_c t + \delta) \\ SW_w &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{4}{3}\pi\right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{2} \left\{a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{4}{3}\pi\right) - 1\right\}\right] \cos n(\omega_c t + \delta) \end{aligned} \quad (7.6.2)$$

として表される。

ここで、式(7.6.3)のように、角周波数 $\omega_i$ の相電流 $i_u$ 、 $i_v$ 、 $i_w$ を想定し、これに対する直流側電流を導出する。

$$\begin{aligned} i_{ui} &= I_i \sin\{(\omega_i t + \phi_i) - \psi\} \\ i_{vi} &= I_i \sin\left\{(\omega_i t + \phi_i) - \psi - \frac{2}{3}\pi\right\} \\ i_{wi} &= I_i \sin\left\{(\omega_i t + \phi_i) - \psi - \frac{4}{3}\pi\right\} \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

- $I_i$  相電流振幅
- $\omega_i$  相電流角周波数
- $\phi_i$  相電流初期位相
- $\psi$  力率角

式(7.6.3)の相電流により生じる直流側電流 $I_{dci}$ は、式(7.6.1)より、

$$I_{dci} = SW_u \cdot i_{ui} + SW_v \cdot i_{vi} + SW_w \cdot i_{wi} \quad (7.6.4)$$

となる。さらに、直流側電流 $I_{dci}$ のu相分 $I_{dcui}$ 、v相分 $I_{dcvi}$ 、w相分 $I_{dcwi}$ を、

$$\begin{aligned} I_{dcui} &= SW_u \times i_{ui} \\ I_{dcvi} &= SW_v \times i_{vi} \\ I_{dcwi} &= SW_w \times i_{wi} \end{aligned} \quad (7.6.5)$$

とおく。なお、数式表現の簡略化のため、以降では式(7.6.6)のように位相を置き換えて計算を行う。

$$\theta_m = \omega_m t + \phi, \quad \theta_c = \omega_c t + \delta, \quad \theta_i = \omega_i t + \phi_i \quad (7.6.6)$$

u相分の直流側電流 $I_{dcui}$ は、

$$\begin{aligned} I_{dcui} &= I_i \frac{1}{2} \sin(\theta_i - \psi) + I_i \frac{a}{2} \sin \theta_m \sin(\theta_i - \psi) \\ &\quad + I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \left[ \frac{n\pi}{2} \{a \sin \theta_m - 1\} \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ &= I_i \frac{a}{4} \cos(\theta_m - \theta_i + \psi) + I_i \frac{1}{2} \sin(\theta_i - \psi) \\ &\quad + I_i \frac{a}{4} \cos(\theta_m + \theta_i - \psi) + i_{dcuih} \end{aligned} \quad (7.6.7)$$

となる。ただし、u相分の直流側電流 $I_{dcui}$ の高調波成分を $i_{dcuih}$ とする。同様に、v相分の直流側電流 $I_{dcvi}$ と、w相分の直流側電流 $I_{dcwi}$ は、

$$\begin{aligned} I_{dcvi} &= I_i \frac{a}{4} \cos \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi - \theta_i + \frac{2}{3}\pi + \psi \right) + I_i \frac{1}{2} \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad + I_i \frac{a}{4} \cos \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi + \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) + i_{dcvih} \end{aligned} \quad (7.6.8)$$

$$\begin{aligned} &= I_i \frac{a}{4} \cos(\theta_m - \theta_i + \psi) + I_i \frac{1}{2} \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad + I_i \frac{a}{4} \cos \left( \theta_m + \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) + i_{dcvih} \\ I_{dcwi} &= I_i \frac{a}{4} \cos \left( \theta_m - \frac{4}{3}\pi - \theta_i + \frac{4}{3}\pi + \psi \right) + I_i \frac{1}{2} \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad + I_i \frac{a}{4} \cos \left( \theta_m - \frac{4}{3}\pi + \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) + i_{dcwih} \\ &= I_i \frac{a}{4} \cos(\theta_m - \theta_i + \psi) + I_i \frac{1}{2} \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad + I_i \frac{a}{4} \cos \left( \theta_m + \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) + i_{dcwih} \end{aligned} \quad (7.6.9)$$

となる。ただし、v相分の直流側電流 $I_{dcvi}$ の高調波成分を $i_{dcvih}$ 、w相分の直流側電流 $I_{dcwi}$ の高調波成分を $i_{dcwih}$ とする。ここで、三相交流の基本関係式(式(7.2.1))より、三相分についてまとめると、直流側電流 $I_{dci}$ は、

$$\begin{aligned} I_{dci} &= I_{dcui} + I_{dcvi} + I_{dcwi} \\ &= I_i \frac{3}{4} a \cos(\theta_m - \theta_i + \psi) + i_{dcuih} + i_{dcvih} + i_{dcwih} \end{aligned} \quad (7.6.10)$$

となる。ここで、 $\theta_m = \theta_i$ のときに直流側電流 $I_{dci}$ の直流成分が、

$$I_i \frac{3}{4} a \cos(\theta_m - \theta_i + \psi) \quad (7.6.11)$$

となる。また、直流側電流の高調波成分 $i_{dcih}$ は、

$$i_{dcih} = i_{dcuih} + i_{dcvih} + i_{dcwih} \quad (7.6.12)$$

として表され、各相の高調波成分の和として考えられる。

次に、u相分の直流側電流 $I_{dcui}$ の高調波成分 $i_{dcuih}$ は、

$$i_{dcuih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \left[ \frac{n\pi}{2} \{a \sin \theta_m - 1\} \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \quad (7.6.13)$$

となる。これをベッセル関数の公式(式(7.4.2、3)参照)を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} i_{dcuih} &= I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \left[ \frac{an\pi}{2} \sin \theta_m - \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ &= I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \left( \frac{an\pi}{2} \sin \theta_m \right) \cos \frac{n\pi}{2} \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos \left( \frac{an\pi}{2} \sin \theta_m \right) \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \end{aligned} \quad (7.6.14)$$

より、

$$\begin{aligned} i_{dcuih} &= I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin(2l-1)\theta_m \cos \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos 2l\theta_m \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \end{aligned} \quad (7.6.15)$$

となる。同様に、v相分の直流側電流 $I_{dcvi}$ の高調波成分 $i_{dcvih}$ と、w相分の直流側電流 $I_{dcwi}$ の高調波成分 $i_{dcwih}$ は、

$$\begin{aligned} i_{dcvih} &= I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ (2l-1) \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \left\{ 2l \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \end{aligned} \quad (7.6.16)$$

$$\begin{aligned} i_{dcwih} &= I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ (2l-1) \left( \theta_m - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \left\{ 2l \left( \theta_m - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \end{aligned} \quad (7.6.17)$$

となる。

さらに、式(7.6.12)より、三相分についてまとめて、直流側電流の高調波成分 $i_{dcih}$ を整理する。直流側電流の高調波成分 $i_{dcih}$ は、 $n$ と $l$ の値によって、0となる周波数成分があるので場合分けして整理することを考える。はじめに、 $n$ が奇数か偶数かで場合分けする。

(i)  $n=1,3,5\cdots$ のとき、

$$\cos \frac{n\pi}{2} = 0, \sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \quad (7.6.18)$$

より、

$$\begin{aligned} i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos 2l\theta_m \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \left\{ 2l \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \left\{ 2l \left( \theta_m - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \end{aligned} \quad (7.6.19)$$

となる。これを、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos 2l\theta_m \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \left\{ 2l\theta_m - (2l)\frac{2}{3}\pi \right\} \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \left\{ 2l\theta_m - (2l)\frac{4}{3}\pi \right\} \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \end{aligned} \quad (7.6.20)$$

となる。これを、三相交流の積の関係式(式(7.3.1~8)参照)を用いて置き換えると、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{\sin \cos 1} (2l, \theta_i - \psi, 2l\theta_m) \right] \cos n\theta_c \quad (7.6.21)$$

となる。次に、 $l$ について場合分けする。

(i-a)  $n=1,3,5\cdots, l=1,4,7\cdots$ のとき、

$$f_{\sin \cos 1} (2l, \theta_i - \psi, 2l\theta_m) = \frac{3}{2} \sin \{ \theta_i - \psi + 2l\theta_m \} \quad (7.6.22)$$

より、式(7. 6. 21)は、三相交流の基本関係式(式(7. 2. 1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{6}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{2l\theta_m + \theta_i - \psi\} \right] \cos n\theta_c \quad (7. 6. 23)$$

となる。これを、三角関数の積・和の公式を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{2l\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \right] \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{2l\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\} \right] \end{aligned} \quad (7. 6. 24)$$

となる。

(i-b)  $n=1,3,5\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$f_{\sin \cos 1}(2l, \theta_i - \psi, 2l\theta_m) = \frac{3}{2} \sin \{\theta_i - \psi - 2l\theta_m\} \quad (7. 6. 25)$$

より、式(7. 6. 21)は、三相交流の基本関係式(式(7. 2. 1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{6}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{2l\theta_m - \theta_i + \psi\} \right] \cos n\theta_c \quad (7. 6. 26)$$

となる。これを、三角関数の積・和の公式を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} i_{dcih} = & I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{2l\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\} \right] \\ & I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{2l\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\} \right] \end{aligned} \quad (7. 6. 27)$$

となる。

(i-c)  $n=1,3,5\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$f_{\sin \cos 1}(2l, \theta_i - \psi, 2l\theta_m) = 0 \quad (7. 6. 28)$$

より、式(7. 6. 21)は、

$$i_{dcih} = 0 \quad (7. 6. 29)$$

となる。

(ii)  $n=2,4,6\dots$ のとき、

$$\sin \frac{n\pi}{2} = 0, \cos \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}} \quad (7. 6. 30)$$

より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin(2l-1)\theta_m \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ (2l-1) \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ (2l-1) \left( \theta_m - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \right] \cos n\theta_c \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right)
 \end{aligned} \tag{7.6.31}$$

となる。これを、三相交流の積の関係式(式(7.3.1~8)参照)を用いて置き換えると、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{\sin \sin 1} (2l-1, \theta_i - \psi, (2l-1)\theta_m) \right] \cos n\theta_c \tag{7.6.32}$$

となる。次に、 $l$ について場合分けする。

(ii-a)  $n=2,4,6\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$f_{\sin \sin 1} (2l-1, \theta_i - \psi, (2l-1)\theta_m) = \frac{3}{2} \cos \{ \theta_i - \psi - (2l-1)\theta_m \} \tag{7.6.33}$$

より、式(7.6.32)は、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{6}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \{ (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi \} \right] \cos n\theta_c \tag{7.6.34}$$

となる。これを、三角関数の積・和の公式を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \{ (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c \} \right] \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \{ (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c \} \right]
 \end{aligned} \tag{7.6.35}$$

となる。

(ii-b)  $n=2,4,6\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$f_{\sin \sin 1} (2l-1, \theta_i - \psi, (2l-1)\theta_m) = 0 \tag{7.6.36}$$

より、式(7.6.32)は、

$$i_{dcih} = 0 \tag{7.6.37}$$

となる。

(ii-c)  $n=2,4,6\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$f_{\sin \sin 1} (2l-1, \theta_i - \psi, (2l-1)\theta_m) = -\frac{3}{2} \cos \{ \theta_i - \psi + (2l-1)\theta_m \} \tag{7.6.38}$$

より、式(7.6.32)は、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{6}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \{ (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi \} \right] \cos n\theta_c \tag{7.6.39}$$

となる。これを、三角関数の積・和の公式を用いて整理すると、



$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \right] \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7.6.40}$$

となる。

さらに、式(7.6.24、27、29、35、37、40)を整理すると、

(i-a)  $n=1,3,5\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) [f_1(\theta_m, \theta_i, \theta_c)] \tag{7.6.41}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 f_1(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = & -[\sin\{2l\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} + \sin\{2l\theta_m + \theta_i - n\theta_c\}] \cos\psi \\
 & + [\cos\{2l\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} + \cos\{2l\theta_m + \theta_i - n\theta_c\}] \sin\psi
 \end{aligned} \tag{7.6.42}$$

(i-b)  $n=1,3,5\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) [f_2(\theta_m, \theta_i, \theta_c)] \tag{7.6.43}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 f_2(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = & [\sin\{2l\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} + \sin\{2l\theta_m - \theta_i - n\theta_c\}] \cos\psi \\
 & + [\cos\{2l\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} + \cos\{2l\theta_m - \theta_i - n\theta_c\}] \sin\psi
 \end{aligned} \tag{7.6.44}$$

(i-c)  $n=1,3,5\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = 0 \tag{7.6.45}$$

(ii-a)  $n=2,4,6\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) [f_3(\theta_m, \theta_i, \theta_c)] \tag{7.6.46}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 f_3(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = & [\cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} + \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - n\theta_c\}] \cos\psi \\
 & - [\sin\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} + \sin\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - n\theta_c\}] \sin\psi
 \end{aligned} \tag{7.6.47}$$

(ii-b)  $n=2,4,6\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = 0 \tag{7.6.48}$$

(ii-c)  $n=2,4,6\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) [f_4(\theta_m, \theta_i, \theta_c)] \tag{7.6.49}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 f_4(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = & -[\cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} + \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - n\theta_c\}] \cos\psi \\
 & - [\sin\{(2l-1)\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} + \sin\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - n\theta_c\}] \sin\psi
 \end{aligned} \tag{7.6.50}$$

式(7.6.41~50)を整理すると、式(7.6.3)の相電流により生じる直流側電流の高調波成分 $i_{dcih}$ の振幅と周波数は、

(o)  $f_m=f_i$ のとき、

直流成分  $I_i \frac{3}{4} a \cos \psi$  (7. 6. 51)

(i-a)  $n=1,3,5\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$nf_c \pm (2lf_m + f_i)$ [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right)$  (7. 6. 52)

(i-b)  $n=1,3,5\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$nf_c \pm (2lf_m - f_i)$ [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right)$  (7. 6. 53)

(ii-a)  $n=2,4,6\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$nf_c \pm \{(2l-1)f_m - f_i\}$ [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right)$  (7. 6. 54)

(ii-b)  $n=2,4,6\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$nf_c \pm \{(2l-1)f_m + f_i\}$ [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right)$  (7. 6. 58)

となる。

## 7.7 三相搬送波を用いた場合の高調波理論式の導出の詳細

本項では、三相搬送波において、任意の相電流を仮定して、それにより生じる直流側電流高調波の周波数と振幅を導出する。直流側電流は、スイッチング関数を用いることにより、

$$I_{dc} = SW_u \times i_u + SW_v \times i_v + SW_w \times i_w \quad (7.7.1)$$

として表される。三相搬送波を用いた場合において、スイッチング関数 $SW_u$ 、 $SW_v$ 、 $SW_w$ は、

$$\begin{aligned} SW_u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sin(\omega_m t + \phi) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{2} \{a \sin(\omega_m t + \phi) - 1\}\right] \cos n(\omega_c t + \delta) \\ SW_v &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{2}{3}\pi\right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{2} \left\{a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{2}{3}\pi\right) - 1\right\}\right] \cos n\left(\omega_c t + \delta - \frac{2}{3}\pi\right) \\ SW_w &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{4}{3}\pi\right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{2} \left\{a \sin\left(\omega_m t + \phi - \frac{4}{3}\pi\right) - 1\right\}\right] \cos n\left(\omega_c t + \delta - \frac{4}{3}\pi\right) \end{aligned} \quad (7.7.2)$$

として表される。

ここで、式(7.7.3)のように、周波数 $\omega_i$ の相電流 $i_u$ 、 $i_v$ 、 $i_w$ を想定し、これに対する直流側電流を導出する。

$$\begin{aligned} i_{ui} &= I_i \sin\{(\omega_i t + \phi_i) - \psi\} \\ i_{vi} &= I_i \sin\left\{(\omega_i t + \phi_i) - \psi - \frac{2}{3}\pi\right\} \\ i_{wi} &= I_i \sin\left\{(\omega_i t + \phi_i) - \psi - \frac{4}{3}\pi\right\} \end{aligned} \quad (7.7.3)$$

- $I_i$  相電流振幅
- $\omega_i$  相電流周波数
- $\phi_i$  相電流初期位相
- $\psi$  力率角

式(7.7.3)の相電流により生じる直流側電流 $I_{dci}$ は、式(7.7.1)より、

$$I_{dci} = SW_u \cdot i_{ui} + SW_v \cdot i_{vi} + SW_w \cdot i_{wi} \quad (7.7.4)$$

となる。さらに、直流側電流 $I_{dci}$ のu相分 $I_{dcui}$ 、v相分 $I_{dcvi}$ 、w相分 $I_{dcwi}$ を、

$$\begin{aligned} I_{dcui} &= SW_u \times i_{ui} \\ I_{dcvi} &= SW_v \times i_{vi} \\ I_{dcwi} &= SW_w \times i_{wi} \end{aligned} \quad (7.7.5)$$

とおく。なお、数式表現の簡略化のため、以降では式(7.7.6)のように位相を置き換えて計算を行う。

$$\theta_m = \omega_m t + \phi, \quad \theta_c = \omega_c t + \delta, \quad \theta_i = \omega_i t + \phi_i \quad (7.7.6)$$

u相分の直流側電流 $I_{dcui}$ は、

$$\begin{aligned} I_{dcui} &= I_i \frac{1}{2} \sin(\theta_i - \psi) + I_i \frac{a}{2} \sin \theta_m \sin(\theta_i - \psi) \\ &\quad + I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \left[ \frac{n\pi}{2} \{a \sin \theta_m - 1\} \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ &= I_i \frac{a}{4} \cos(\theta_m - \theta_i + \psi) + I_i \frac{1}{2} \sin(\theta_i - \psi) \\ &\quad + I_i \frac{a}{4} \cos(\theta_m + \theta_i - \psi) + i_{dcuih} \end{aligned} \quad (7.7.7)$$

となる。ただし、u相分の直流側電流 $I_{dcui}$ の高調波成分を $i_{dcuih}$ とする。同様に、v相分の直流側電流 $I_{dcvi}$ と、w相分の直流側電流 $I_{dcwi}$ は、

$$\begin{aligned} I_{dcvi} &= I_i \frac{a}{4} \cos \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi - \theta_i + \frac{2}{3}\pi + \psi \right) + I_i \frac{1}{2} \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad + I_i \frac{a}{4} \cos \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi + \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) + i_{dcvih} \\ &= I_i \frac{a}{4} \cos(\theta_m - \theta_i + \psi) + I_i \frac{1}{2} \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad + I_i \frac{a}{4} \cos \left( \theta_m + \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) + i_{dcvih} \end{aligned} \quad (7.7.8)$$

$$\begin{aligned} I_{dcwi} &= I_i \frac{a}{4} \cos \left( \theta_m - \frac{4}{3}\pi - \theta_i + \frac{4}{3}\pi + \psi \right) + I_i \frac{1}{2} \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad + I_i \frac{a}{4} \cos \left( \theta_m - \frac{4}{3}\pi + \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) + i_{dcwih} \\ &= I_i \frac{a}{4} \cos(\theta_m - \theta_i + \psi) + I_i \frac{1}{2} \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad + I_i \frac{a}{4} \cos \left( \theta_m + \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) + i_{dcwih} \end{aligned} \quad (7.7.9)$$

となる。ただし、v相分の直流側電流 $I_{dcvi}$ の高調波成分を $i_{dcvih}$ 、w相分の直流側電流 $I_{dcwi}$ の高調波成分を $i_{dcwih}$ とする。ここで、三相交流の基本関係式(式(7.2.1))より、三相分についてまとめると、直流側電流 $I_{dci}$ は、

$$\begin{aligned} I_{dci} &= I_{dcui} + I_{dcvi} + I_{dcwi} \\ &= I_i \frac{3}{4} a \cos(\theta_m - \theta_i + \psi) + i_{dcuih} + i_{dcvih} + i_{dcwih} \end{aligned} \quad (7.7.10)$$

となる。ここで、 $\theta_m = \theta_i$ のときに直流側電流 $I_{dci}$ の直流成分が、

$$I_i \frac{3}{4} a \cos(\theta_m - \theta_i + \psi) \quad (7.7.11)$$

となる。また、直流側電流の高調波成分 $i_{dcih}$ は、

$$i_{dcih} = i_{dcuih} + i_{dcvih} + i_{dcwih} \quad (7.7.12)$$

として表され、各相の高調波成分の和として考えられる。

次に、u相分の直流側電流 $I_{dcui}$ の高調波成分 $i_{dcuih}$ は、

$$i_{dcuih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \left[ \frac{n\pi}{2} \{a \sin \theta_m - 1\} \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \quad (7.7.13)$$

となる。これをベッセル関数の公式(式(7.4.2、3)参照)を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} i_{dcuih} &= I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \left[ \frac{an\pi}{2} \sin \theta_m - \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ &= I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \left( \frac{an\pi}{2} \sin \theta_m \right) \cos \frac{n\pi}{2} \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos \left( \frac{an\pi}{2} \sin \theta_m \right) \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \end{aligned} \quad (7.7.14)$$

より、

$$\begin{aligned} i_{dcuih} &= I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin(2l-1)\theta_m \cos \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos 2l\theta_m \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \end{aligned} \quad (7.7.15)$$

となる。同様に、v相分の直流側電流 $I_{dcvi}$ の高調波成分 $i_{dcvih}$ と、w相分の直流側電流 $I_{dcwi}$ の高調波成分 $i_{dcwih}$ は、

$$\begin{aligned} i_{dcvih} &= I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ (2l-1) \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \left\{ 2l \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \end{aligned} \quad (7.7.16)$$

$$\begin{aligned} i_{dcwih} &= I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ (2l-1) \left( \theta_m - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \\ &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \left\{ 2l \left( \theta_m - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \end{aligned} \quad (7.7.17)$$

となる。

さらに、式(7.7.12)より、三相分についてまとめて、直流側電流の高調波成分 $i_{dcih}$ を整理する。直流側電流の高調波成分 $i_{dcih}$ は、 $n$ と $l$ の値によって、0となる周波数成分があるので場合分けして整理することを考える。はじめに、 $n$ が奇数か偶数かで場合分けする。

(i)  $n=1,3,5\cdots$ のとき、

$$\cos \frac{n\pi}{2} = 0, \sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \quad (7.7.18)$$

より、直流側電流の高調波成分 $i_{dcih}$ は、

$$\begin{aligned} i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos 2l\theta_m \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \left\{ 2l \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \left\{ 2l \left( \theta_m - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \end{aligned} \quad (7.7.19)$$

となる。ここで、数式表現の簡略化のため、ベッセル関数の0次成分と2l次成分に分けて計算を行う。直流側電流の高調波成分 $i_{dcih}$ のうち、ベッセル関数の0次成分に起因する成分を $i_{dcih0}$ とし、ベッセル関数の2l次成分に起因する成分を $i_{dcih2l}$ とする。すなわち、

$$i_{dcih} = i_{dcih0} + i_{dcih2l} \quad (7.7.20)$$

ただし、

$$\begin{aligned} i_{dcih0} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \end{aligned} \quad (7.7.21)$$

$$\begin{aligned} i_{dcih2l} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos 2l\theta_m \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \left\{ 2l \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \left\{ 2l \left( \theta_m - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \right] \cos \left\{ n \left( \theta_c - \frac{4}{3}\pi \right) \right\} \sin \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right) \end{aligned} \quad (7.7.22)$$

となる。式(7. 7. 21)を、三相交流の積の関係式(式(7. 3. 1~8)参照)を用いて置き換えると、

$$i_{dcih0} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_{\sin \cos 1} (n, \theta_i - \psi, n\theta_c) \quad (7. 7. 23)$$

となる。また、式(7. 7. 22)を、三角関数の積・和の公式(式(7. 1. 1)参照)を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} i_{dcih2l} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi \} \right] \cos n\theta_c \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m - \theta_i + \psi \} \right] \cos n\theta_c \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ 2l\theta_m + \theta_i - (2l+1)\frac{2}{3}\pi - \psi \right\} \right] \cos \left\{ n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi \right\} \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ 2l\theta_m - \theta_i - (2l-1)\frac{2}{3}\pi + \psi \right\} \right] \cos \left\{ n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi \right\} \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ 2l\theta_m + \theta_i - (2l+1)\frac{4}{3}\pi - \psi \right\} \right] \cos \left\{ n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi \right\} \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ 2l\theta_m - \theta_i - (2l-1)\frac{4}{3}\pi + \psi \right\} \right] \cos \left\{ n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi \right\} \end{aligned} \quad (7. 7. 24)$$

として表される。次に、 $l$ について場合分けする。

(i-a)  $n=1,3,5\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$\begin{aligned} \sin \left\{ 2l\theta_m + \theta_i - (2l+1)\frac{2}{3}\pi - \psi \right\} &= \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi \} \\ \sin \left\{ 2l\theta_m - \theta_i - (2l-1)\frac{2}{3}\pi + \psi \right\} &= \sin \left\{ 2l\theta_m - \theta_i - \frac{2}{3}\pi + \psi \right\} \\ \sin \left\{ 2l\theta_m + \theta_i - (2l+1)\frac{4}{3}\pi - \psi \right\} &= \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi \} \\ \sin \left\{ 2l\theta_m - \theta_i - (2l-1)\frac{4}{3}\pi + \psi \right\} &= \sin \left\{ 2l\theta_m - \theta_i - \frac{4}{3}\pi + \psi \right\} \end{aligned} \quad (7. 7. 25)$$

より、式(7. 7. 24)は、三相交流の基本関係式(式(7. 2. 1))を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih2l} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi\} \right] \cos n\theta_c \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi\right\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi\right\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi\} \right] \cos n\theta_c \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\left\{2l\theta_m - \theta_i - \frac{2}{3}\pi + \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi\right\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\left\{2l\theta_m - \theta_i - \frac{4}{3}\pi + \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi\right\}
 \end{aligned} \tag{7.7.26}$$

となる。これを、三相交流の積の関係式(式(7.3.1~8)参照)を用いて置き換えると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih2l} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{\sin \cos 0}(n, 2l\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) \right] \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{\sin \cos 1}(n, 2l\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.27}$$

となる。さらに、 $n$  について場合分けする。

(i-a-i)  $n=1,7,13\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \cos 1}(n, \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin\{\theta_i - \psi - n\theta_c\} \\
 f_{\sin \cos 0}(n, 2l\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= 0 \\
 f_{\sin \cos 1}(n, 2l\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\}
 \end{aligned} \tag{7.7.28}$$

より、式(7.7.23)と(7.7.27)の和は、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \sin\{\theta_i - \psi - n\theta_c\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.29}$$

となる。

(i-a-ii)  $n=3,9,15\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、



$$\begin{aligned}
 f_{\sin \cos 1}(n, \theta_i - \psi, n\theta_c) &= 0 \\
 f_{\sin \cos 0}(n, 2l\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \\
 &\quad + \frac{3}{2} \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\} \\
 f_{\sin \cos 1}(n, 2l\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= 0
 \end{aligned} \tag{7. 7. 30}$$

より、式(7. 7. 23)と(7. 7. 27)の和は、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \right] \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 31}$$

となる。

(i-a-iii)  $n=5,11,17\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \cos 1}(n, \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin\{\theta_i - \psi + n\theta_c\} \\
 f_{\sin \cos 0}(n, 2l\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= 0 \\
 f_{\sin \cos 1}(n, 2l\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\}
 \end{aligned} \tag{7. 7. 32}$$

より、式(7. 7. 23)と(7. 7. 27)の和は、三相交流の基本関係式(式(7. 2. 1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \sin\{\theta_i - \psi + n\theta_c\} \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 33}$$

となる。

(i-b)  $n=1,3,5\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$\begin{aligned}
 \sin\left\{2l\theta_m + \theta_i - (2l+1)\frac{2}{3}\pi - \psi\right\} &= \sin\left\{2l\theta_m + \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi\right\} \\
 \sin\left\{2l\theta_m - \theta_i - (2l-1)\frac{2}{3}\pi + \psi\right\} &= \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi\} \\
 \sin\left\{2l\theta_m + \theta_i - (2l+1)\frac{4}{3}\pi - \psi\right\} &= \sin\left\{2l\theta_m + \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi\right\} \\
 \sin\left\{2l\theta_m - \theta_i - (2l-1)\frac{4}{3}\pi + \psi\right\} &= \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi\}
 \end{aligned} \tag{7. 7. 34}$$

より、式(7. 7. 24)は、三相交流の基本関係式(式(7. 2. 1))を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih2l} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi \} \right] \cos n\theta_c \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ 2l\theta_m + \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right\} \right] \cos \left\{ n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi \right\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ 2l\theta_m + \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right\} \right] \cos \left\{ n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi \right\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m - \theta_i + \psi \} \right] \cos n\theta_c \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m - \theta_i + \psi \} \right] \cos \left\{ n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi \right\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m - \theta_i + \psi \} \right] \cos \left\{ n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi \right\}
 \end{aligned} \tag{7.7.35}$$

となる。これを、三相交流の積の関係式(式(7.3.1~8)参照)を用いて置き換えると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih2l} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{\sin \cos 2} (n, 2l\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) \right] \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{\sin \cos 0} (n, 2l\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.36}$$

となる。さらに、 $n$  について場合分けする。

(i-b-i)  $n=1,7,13\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \cos 1} (n, \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin \{ \theta_i - \psi - n\theta_c \} \\
 f_{\sin \cos 2} (n, 2l\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c \} \\
 f_{\sin \cos 0} (n, 2l\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= 0
 \end{aligned} \tag{7.7.37}$$

より、式(7.7.23)と(7.7.36)の和は、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \sin \{ \theta_i - \psi - n\theta_c \} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c \} \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.38}$$

となる。

(i-b-ii)  $n=3,9,15\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \cos 1}(n, \theta_i - \psi, n\theta_c) &= 0 \\
 f_{\sin \cos 2}(n, 2l\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= 0 \\
 f_{\sin \cos 0}(n, 2l\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\} \\
 &\quad + \frac{3}{2} \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\}
 \end{aligned} \tag{7. 7. 39}$$

より、式(7. 7. 23)と(7. 7. 36)の和は、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\} \right] \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 40}$$

となる。

(i-b-iii)  $n=5,11,17\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \cos 1}(n, \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin\{\theta_i - \psi + n\theta_c\} \\
 f_{\sin \cos 2}(n, 2l\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\} \\
 f_{\sin \cos 0}(n, 2l\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= 0
 \end{aligned} \tag{7. 7. 41}$$

より、式(7. 7. 23)と(7. 7. 36)の和は、三相交流の基本関係式(式(7. 2. 1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \sin\{\theta_i - \psi + n\theta_c\} \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 42}$$

となる。

(i-c)  $n=1,3,5\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$\begin{aligned}
 \sin\left\{2l\theta_m + \theta_i - (2l+1)\frac{2}{3}\pi - \psi\right\} &= \sin\left\{2l\theta_m + \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi\right\} \\
 \sin\left\{2l\theta_m - \theta_i - (2l-1)\frac{2}{3}\pi + \psi\right\} &= \sin\left\{2l\theta_m - \theta_i - \frac{4}{3}\pi + \psi\right\} \\
 \sin\left\{2l\theta_m + \theta_i - (2l+1)\frac{4}{3}\pi - \psi\right\} &= \sin\left\{2l\theta_m + \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi\right\} \\
 \sin\left\{2l\theta_m - \theta_i - (2l-1)\frac{4}{3}\pi + \psi\right\} &= \sin\left\{2l\theta_m - \theta_i - \frac{2}{3}\pi + \psi\right\}
 \end{aligned} \tag{7. 7. 43}$$

より、式(7. 7. 24)は、三相交流の基本関係式(式(7. 2. 1))を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih2l} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi \} \right] \cos n\theta_c \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m - \theta_i + \psi \} \right] \cos n\theta_c \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ 2l\theta_m + \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi \right\} \right] \cos \left\{ n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi \right\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ 2l\theta_m - \theta_i - \frac{4}{3}\pi + \psi \right\} \right] \cos \left\{ n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi \right\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ 2l\theta_m + \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi \right\} \right] \cos \left\{ n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi \right\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \left\{ 2l\theta_m - \theta_i - \frac{2}{3}\pi + \psi \right\} \right] \cos \left\{ n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi \right\}
 \end{aligned} \tag{7.7.44}$$

となる。これを、三相交流の積の関係式(式(7.3.1~8)参照)を用いて置き換えると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih2l} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{\sin \cos 1} (n, 2l\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) \right] \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{\sin \cos 2} (n, 2l\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.45}$$

となる。さらに、 $n$  について場合分けする。

(i-c-i)  $n=1,7,13\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \cos 1} (n, \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin \{ \theta_i - \psi - n\theta_c \} \\
 f_{\sin \cos 1} (n, 2l\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c \} \\
 f_{\sin \cos 2} (n, 2l\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin \{ 2l\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c \}
 \end{aligned} \tag{7.7.46}$$

より、式(7.7.23)と(7.7.45)の和は、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ \theta_i - \psi - n\theta_c \} \right. \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c \} \right] \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c \} \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.47}$$

となる。

(i-c-ii)  $n=3,9,15\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \cos 1}(n, \theta_i - \psi, n\theta_c) &= 0 \\
 f_{\sin \cos 1}(n, 2l\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= 0 \\
 f_{\sin \cos 2}(n, 2l\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= 0
 \end{aligned} \tag{7. 7. 48}$$

より、式(7. 7. 23)と(7. 7. 45)の和は、

$$i_{dcih} = 0 \tag{7. 7. 49}$$

となる。

(i-c-iii)  $n=5,11,17\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\sin \cos 1}(n, \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin\{\theta_i - \psi + n\theta_c\} \\
 f_{\sin \cos 1}(n, 2l\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \\
 f_{\sin \cos 2}(n, 2l\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\}
 \end{aligned} \tag{7. 7. 50}$$

より、式(7. 7. 23)と(7. 7. 45)の和は、三相交流の基本関係式(式(7. 2. 1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0\left(\frac{an\pi}{2}\right) \right] \sin\{\theta_i - \psi + n\theta_c\} \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \right] \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 51}$$

となる。

(ii)  $n=2,4,6\dots$ のとき、

$$\sin \frac{n\pi}{2} = 0, \cos \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}} \tag{7. 7. 52}$$

より、直流側電流の高調波成分 $i_{dcih}$ は、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \sin(2l-1)\theta_m \right] \cos n\theta_c \sin(\theta_i - \psi) \\
 &\quad + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \sin\left\{(2l-1)\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \right] \cos\left\{n\left(\theta_c - \frac{2}{3}\pi\right)\right\} \sin\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi\right) \\
 &\quad + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \sin\left\{(2l-1)\left(\theta_m - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \right] \cos\left\{n\left(\theta_c - \frac{4}{3}\pi\right)\right\} \sin\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi\right)
 \end{aligned} \tag{7. 7. 53}$$

となる。これを、三角関数の積・和の公式(式(7. 1. 1)参照)を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi\} \right] \cos n\theta_c \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi\} \right] \cos n\theta_c \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - (2l)\frac{2}{3}\pi - \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi\right\} \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - (2l-2)\frac{2}{3}\pi + \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi\right\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - (2l)\frac{4}{3}\pi - \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi\right\} \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - (2l-2)\frac{4}{3}\pi + \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi\right\}
 \end{aligned} \tag{7.7.54}$$

として表される。次に、 $l$ について場合分けする。

(ii-a)  $n=2,4,6\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$\begin{aligned}
 \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - (2l)\frac{2}{3}\pi - \psi\right\} &= \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi\right\} \\
 \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - (2l-2)\frac{2}{3}\pi + \psi\right\} &= \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi\} \\
 \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - (2l)\frac{4}{3}\pi - \psi\right\} &= \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi\right\} \\
 \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - (2l-2)\frac{4}{3}\pi + \psi\right\} &= \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi\}
 \end{aligned} \tag{7.7.55}$$

より、式(7.7.54)は、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi\} \right] \cos n\theta_c \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi\right\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi\right\} \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi\} \right] \cos n\theta_c \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi\right\} \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi\right\}
 \end{aligned} \tag{7.7.56}$$

となる。これを、三相交流の積の関係式(式(7.3.1~8)参照)を用いて置き換えると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{\cos \cos 2} \left( n, (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c \right) \right] \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{\cos \cos 0} \left( n, (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c \right) \right]
 \end{aligned} \quad (7.7.57)$$

となる。さらに、 $n$  について場合分けする。

(ii-a-i)  $n=2,8,14\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \cos 2} \left( n, (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c \right) &= \frac{3}{2} \cos \{ (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c \} \\
 f_{\cos \cos 0} \left( n, (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c \right) &= 0
 \end{aligned} \quad (7.7.58)$$

より、式(7.7.57)は、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \{ (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c \} \right] \quad (7.7.59)$$

となる。

(ii-a-ii)  $n=4,10,16\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \cos 2} \left( n, (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c \right) &= \frac{3}{2} \cos \{ (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c \} \\
 f_{\cos \cos 0} \left( n, (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c \right) &= 0
 \end{aligned} \quad (7.7.60)$$

より、式(7.7.57)は、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \{ (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c \} \right] \quad (7.7.61)$$

となる。

(ii-a-iii)  $n=6,12,18\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\cos \cos 2} \left( n, (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c \right) &= 0 \\
 f_{\cos \cos 0} \left( n, (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c \right) &= \frac{3}{2} \cos \{ (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c \} \\
 &\quad + \frac{3}{2} \cos \{ (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c \}
 \end{aligned} \quad (7.7.62)$$

より、式(7.7.57)は、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \{ (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c \} \right] \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \{ (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c \} \right]
 \end{aligned} \quad (7.7.63)$$

となる。

(ii-b)  $n=2,4,6\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - (2l)\frac{2}{3}\pi - \psi\right\} &= \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi\right\} \\
 \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - (2l-2)\frac{2}{3}\pi + \psi\right\} &= \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - \frac{4}{3}\pi + \psi\right\} \\
 \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - (2l)\frac{4}{3}\pi - \psi\right\} &= \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi\right\} \\
 \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - (2l-2)\frac{4}{3}\pi + \psi\right\} &= \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - \frac{2}{3}\pi + \psi\right\}
 \end{aligned} \tag{7.7.64}$$

より、式(7.7.54)は、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi\} \right] \cos n\theta_c \\
 &+ I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi\} \right] \cos n\theta_c \\
 &- I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \frac{2}{3}\pi - \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi\right\} \\
 &+ I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - \frac{4}{3}\pi + \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi\right\} \\
 &- I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \frac{4}{3}\pi - \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi\right\} \\
 &+ I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right) \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - \frac{2}{3}\pi + \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi\right\}
 \end{aligned} \tag{7.7.65}$$

となる。これを、三角関数の積・和の公式(式(7.1.1)参照)を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right) f_{\cos\cos 1}(n, (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) \right] \\
 &+ I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right) f_{\cos\cos 2}(n, (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.66}$$

となる。さらに、 $n$  について場合分けする。

(ii-b-i)  $n=2,8,14,\dots$ ,  $l=2,5,8,\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\cos\cos 1}(n, (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \\
 f_{\cos\cos 2}(n, (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\}
 \end{aligned} \tag{7.7.67}$$

より、式(7.7.66)は、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、



$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \right] \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 68}$$

となる。

(ii-b-ii)  $n=4,10,16\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\cos\cos 1}(n, (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\} \\
 f_{\cos\cos 2}(n, (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\}
 \end{aligned} \tag{7. 7. 69}$$

より、式(7. 7. 66)は、三相交流の基本関係式(式(7. 2. 1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\} \right] \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 70}$$

となる。

(ii-b-iii)  $n=6,12,18\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\cos\cos 1}(n, (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= 0 \\
 f_{\cos\cos 2}(n, (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= 0
 \end{aligned} \tag{7. 7. 71}$$

より、式(7. 7. 66)は、

$$i_{dcih} = 0 \tag{7. 7. 72}$$

となる。

(ii-c)  $n=2,4,6\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$\begin{aligned}
 \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - (2l)\frac{2}{3}\pi - \psi\right\} &= \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi\} \\
 \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - (2l-2)\frac{2}{3}\pi + \psi\right\} &= \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - \frac{2}{3}\pi + \psi\right\} \\
 \cos\left\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - (2l)\frac{4}{3}\pi - \psi\right\} &= \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi\} \\
 \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - (2l-2)\frac{4}{3}\pi + \psi\right\} &= \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - \frac{4}{3}\pi + \psi\right\}
 \end{aligned} \tag{7. 7. 73}$$

より、式(7. 7. 54)は、三相交流の基本関係式(式(7. 2. 1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi\} \right] \cos n\theta_c \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi\right\} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi\right\} \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi\} \right] \cos n\theta_c \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - \frac{2}{3}\pi + \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{2}{3}n\pi\right\} \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\left\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - \frac{4}{3}\pi + \psi\right\} \right] \cos\left\{n\theta_c - \frac{4}{3}n\pi\right\}
 \end{aligned} \tag{7.7.74}$$

となる。これを、三相交流の積の関係式(式(7.3.1~8)参照)を用いて置き換えると、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{\cos\cos 0}(n, (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) \right] \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{\cos\cos 1}(n, (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.75}$$

となる。さらに、 $n$  について場合分けする。

(ii-c-i)  $n=2,8,14,\dots, l=3,6,9,\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\cos\cos 0}(n, (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= 0 \\
 f_{\cos\cos 1}(n, (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\}
 \end{aligned} \tag{7.7.76}$$

より、式(7.7.75)は、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\} \right] \tag{7.7.77}$$

となる。

(ii-c-ii)  $n=4,10,16,\dots, l=3,6,9,\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\cos\cos 0}(n, (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= 0 \\
 f_{\cos\cos 1}(n, (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\}
 \end{aligned} \tag{7.7.78}$$

より、式(7.7.75)は、三相交流の基本関係式(式(7.2.1)参照)の関係を用いて整理すると、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\} \right] \tag{7.7.79}$$

となる。

(ii-c-iii)  $n=6,12,18,\dots, l=3,6,9,\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 f_{\cos\cos 0}(n, (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi, n\theta_c) &= \frac{3}{2} \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \\
 &\quad + \frac{3}{2} \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\}
 \end{aligned} \tag{7. 7. 80}$$

$$f_{\cos\cos 1}(n, (2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi, n\theta_c) = 0$$

より、式(7. 7. 75)は、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \right] \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 81}$$

となる。

以上を整理すると

(i-i)  $n=1,7,13\dots$ のとき、

(i-i-a)  $n=1,7,13\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、式(7. 7. 29)より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \sin\{\theta_i - \psi - n\theta_c\} \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 82}$$

(i-i-b)  $n=1,7,13\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、式(7. 7. 38)より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \sin\{\theta_i - \psi - n\theta_c\} \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 83}$$

(i-i-c)  $n=1,7,13\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、式(7. 7. 47)より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \sin\{\theta_i - \psi - n\theta_c\} \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\} \right] \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin\{2l\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 84}$$

(i-ii)  $n=3,9,15\dots$ のとき、

(i-ii-a)  $n=3,9,15\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、式(7. 7. 31)より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c \} \right] \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c \} \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.85}$$

(i-ii-b)  $n=3,9,15\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、式(7.7.40)より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c \} \right] \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c \} \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.86}$$

(i-ii-c)  $n=3,9,15\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、式(7.7.49)より、

$$i_{dcih} = 0 \tag{7.7.87}$$

(i-iii)  $n=5,11,17\dots$  のとき、

(i-iii-a)  $n=5,11,17\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、式(7.7.33)より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \sin \{ \theta_i - \psi + n\theta_c \} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c \} \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.88}$$

(i-iii-b)  $n=5,11,17\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、式(7.7.42)より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \sin \{ \theta_i - \psi + n\theta_c \} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c \} \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.89}$$

(i-iii-c)  $n=5,11,17\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、式(7.7.51)より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] \sin \{ \theta_i - \psi + n\theta_c \} \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c \} \right] \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \sin \{ 2l\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c \} \right]
 \end{aligned} \tag{7.7.90}$$

(ii-i)  $n=2,8,14\dots$  のとき、

(ii-i-a)  $n=2,8,14\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、式(7.7.59)より、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos \{ (2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c \} \right] \tag{7.7.91}$$

(ii-i-b)  $n=2,8,14\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、式(7.7.68)より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \right] \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 92}$$

(ii-i-c)  $n=2,8,14\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、式(7. 7. 77)より、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\} \right] \tag{7. 7. 93}$$

(ii-ii)  $n=4,10,16\dots$  のとき、

(ii-ii-a)  $n=4,10,16\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、式(7. 7. 61)より、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \right] \tag{7. 7. 94}$$

(ii-ii-b)  $n=4,10,16\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、式(7. 7. 70)より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\} \right] \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 95}$$

(ii-ii-c)  $n=4,10,16\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、式(7. 7. 79)より、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\} \right] \tag{7. 7. 96}$$

(ii-iii)  $n=6,12,18\dots$  のとき、

(ii-iii-a)  $n=6,12,18\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、式(7. 7. 63)より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi + n\theta_c\} \right] \\
 & + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + \psi - n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 97}$$

(ii-iii-b)  $n=6,12,18\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、式(7. 7. 72)より、

$$i_{dcih} = 0 \tag{7. 7. 98}$$

(ii-iii-c)  $n=6,12,18\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、式(7. 7. 81)より、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi + n\theta_c\} \right] \\
 & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - \psi - n\theta_c\} \right]
 \end{aligned} \tag{7. 7. 99}$$

さらに、式(7. 7. 82~99)を整理すると、

(i-i)  $n=1,7,13\dots$  のとき、

(i-i-a)  $n=1,7,13\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$\begin{aligned} i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_1(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_3(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \end{aligned} \quad (7.7.100)$$

(i-i-b)  $n=1,7,13\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$\begin{aligned} i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_1(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_4(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \end{aligned} \quad (7.7.101)$$

(i-i-c)  $n=1,7,13\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$\begin{aligned} i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_1(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_5(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_6(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \end{aligned} \quad (7.7.102)$$

(i-ii)  $n=3,9,15\dots$ のとき、

(i-ii-a)  $n=3,9,15\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_7(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \quad (7.7.103)$$

(i-ii-b)  $n=3,9,15\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_8(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \quad (7.7.104)$$

(i-ii-c)  $n=3,9,15\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、式(7.7.49)より、

$$i_{dcih} = 0 \quad (7.7.105)$$

(i-iii)  $n=5,11,17\dots$ のとき、

(i-iii-a)  $n=5,11,17\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$\begin{aligned} i_{dcih} = & -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_2(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \\ & - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_6(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \end{aligned} \quad (7.7.106)$$

(i-iii-b)  $n=5,11,17\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_2(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_5(\theta_m, \theta_i, \theta_c)
 \end{aligned} \tag{7.7.107}$$

(i-iii -c)  $n=5,11,17\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ J_0 \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_2(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_4(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \\
 &\quad - I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_3(\theta_m, \theta_i, \theta_c)
 \end{aligned} \tag{7.7.108}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 f_1(\theta_m, \theta_i, \theta_c) &= \sin\{\theta_i - n\theta_c\} \cos\psi - \cos\{\theta_i - n\theta_c\} \sin\psi \\
 f_2(\theta_m, \theta_i, \theta_c) &= \sin\{\theta_i + n\theta_c\} \cos\psi - \cos\{\theta_i + n\theta_c\} \sin\psi \\
 f_3(\theta_m, \theta_i, \theta_c) &= \sin\{2l\theta_m - \theta_i - n\theta_c\} \cos\psi + \cos\{2l\theta_m - \theta_i - n\theta_c\} \sin\psi \\
 f_4(\theta_m, \theta_i, \theta_c) &= \sin\{2l\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} \cos\psi - \cos\{2l\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} \sin\psi \\
 f_5(\theta_m, \theta_i, \theta_c) &= \sin\{2l\theta_m + \theta_i - n\theta_c\} \cos\psi + \cos\{2l\theta_m + \theta_i - n\theta_c\} \sin\psi \\
 f_6(\theta_m, \theta_i, \theta_c) &= \sin\{2l\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} \cos\psi - \cos\{2l\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} \sin\psi \\
 f_7(\theta_m, \theta_i, \theta_c) &= [\sin\{2l\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} + \sin\{2l\theta_m + \theta_i - n\theta_c\}] \cos\psi \\
 &\quad - [\cos\{2l\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} + \cos\{2l\theta_m + \theta_i - n\theta_c\}] \sin\psi \\
 f_8(\theta_m, \theta_i, \theta_c) &= [\sin\{2l\theta_m - \theta_i + n\theta_c\}] + \sin\{2l\theta_m - \theta_i - n\theta_c\} \cos\psi \\
 &\quad + [\cos\{2l\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} + \cos\{2l\theta_m - \theta_i - n\theta_c\}] \sin\psi
 \end{aligned} \tag{7.7.109}$$

(ii-i)  $n=2,8,14\dots$  のとき、

(ii-i-a)  $n=2,8,14\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_9(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \tag{7.7.110}$$

(ii-i-b)  $n=2,8,14\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、

$$\begin{aligned}
 i_{dcih} &= -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_{10}(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \\
 &\quad + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_{11}(\theta_m, \theta_i, \theta_c)
 \end{aligned} \tag{7.7.111}$$

(ii-i-c)  $n=2,8,14\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \right] f_{12}(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \tag{7.7.112}$$

(ii-ii)  $n=4,10,16\dots$  のとき、

(ii-ii-a)  $n=4,10,16\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{10}(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \quad (7.7.113)$$

(ii-ii-b)  $n=4,10,16\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_9(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \\ + I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{12}(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \quad (7.7.114)$$

(ii-ii-c)  $n=4,10,16\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{11}(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \quad (7.7.115)$$

(ii-iii)  $n=6,12,18\dots$ のとき、

(ii-iii-a)  $n=6,12,18\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{13}(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \quad (7.7.116)$$

(ii-iii-b)  $n=6,12,18\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = 0 \quad (7.7.117)$$

(ii-iii-c)  $n=6,12,18\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = -I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) f_{14}(\theta_m, \theta_i, \theta_c) \right] \quad (7.7.118)$$

ただし、

$$f_9(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - n\theta_c\} \cos\psi + \sin\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - n\theta_c\} \sin\psi \\ f_{10}(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} \cos\psi + \sin\{(2l-1)\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} \sin\psi \\ f_{11}(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - n\theta_c\} \cos\psi - \sin\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - n\theta_c\} \sin\psi \\ f_{12}(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} \cos\psi - \sin\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} \sin\psi \\ f_{13}(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = [\cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} + \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - n\theta_c\}] \cos\psi \\ - [\sin\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} + \sin\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - n\theta_c\}] \sin\psi \\ f_{14}(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = [\cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} + \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - n\theta_c\}] \cos\psi \\ + [\sin\{(2l-1)\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} + \sin\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - n\theta_c\}] \sin\psi \quad (7.7.119)$$

式(7.7.100～118)を整理すると、式(7.7.3)の相電流により生じる直流側電流の高調波成分 $i_{dcih}$ の振幅と周波数は、

(o)  $f_m=f_i$ のとき、

$$\text{直流成分} \quad I_i \frac{3}{4} a \cos\psi \quad (7.7.120)$$

(i-i)  $n=1,7,13\dots$ のとき、



- $nf_c - f_i$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_0\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 121)
- (i-i-a)  $n=1,7,13\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、
- $nf_c - 2lf_m + f_i$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 123)
- (i-i-b)  $n=1,7,13\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、
- $nf_c + 2lf_m + f_i$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 124)
- (i-i-c)  $n=1,7,13\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、
- $nf_c \pm 2lf_m - f_i$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 125)
- (i-ii-a)  $n=3,9,15\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、
- $nf_c \pm (2lf_m + f_i)$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 126)
- (i-ii-b)  $n=3,9,15\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、
- $nf_c \pm (2lf_m - f_i)$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 127)
- (i-iii)  $n=5,11,17\dots$  のとき、
- $nf_c + f_i$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_0\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 128)
- (i-iii-a)  $n=5,11,17\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、
- $nf_c + 2lf_m - f_i$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 129)
- (i-iii-b)  $n=5,11,17\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、
- $nf_c - 2lf_m - f_i$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 130)
- (i-iii-c)  $n=5,11,17\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、
- $nf_c \pm 2lf_m + f_i$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l}\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 131)
- (ii-i-a)  $n=2,8,14\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、
- $nf_c - (2l-1)f_m - f_i$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 132)
- (ii-i-b)  $n=2,8,14\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、
- $nf_c \pm (2l-1)f_m + f_i$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 133)
- (ii-i-c)  $n=2,8,14\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、
- $nf_c + (2l-1)f_m - f_i$  [Hz]成分  $I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1}\left(\frac{an\pi}{2}\right)$  (7. 7. 134)
- (ii-ii-a)  $n=4,10,16\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、

$$nf_c + (2l-1)f_m + f_i \text{ [Hz]成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (7.7.135)$$

(ii-ii-b)  $n=4,10,16\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、

$$nf_c \pm (2l-1)f_m - f_i \text{ [Hz]成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (7.7.136)$$

(ii-ii-c)  $n=4,10,16\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、

$$nf_c - (2l-1)f_m + f_i \text{ [Hz]成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (7.7.137)$$

(ii-iii-a)  $n=6,12,18\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、

$$nf_c \pm \{(2l-1)f_m - f_i\} \text{ [Hz]成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (7.7.138)$$

(ii-iii-c)  $n=6,12,18\dots, l=3,6,9\dots$  のとき、

$$nf_c \pm \{(2l-1)f_m + f_i\} \text{ [Hz]成分} \quad I_i \frac{3}{n\pi} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \quad (7.7.139)$$

となる。

## 7.8 位相差運転を用いた場合の直流側電流高調波の導出

本項では、PWM搬送波の位相差運転を用いた場合の直流側電流高調波について、単相搬送波を対象に位相差運転の低減率を導出する。なお、三相搬送波を用いた場合においても、同様の低減率が導出できる。

位相差運転を適用する場合、 $k$ 番目のインバータの搬送波 $\theta_c(k)$ を、

$$\theta_c(k) = \theta_c' - k\theta_d \quad (7.8.1)$$

$\theta_c'$  基準搬送波

$\theta_d$  位相差角度

と設定する。

単相搬送波における直流側電流高調波の理論式である式(7.6.41~50)に対して、 $K$ 台のインバータ全体から生じる直流側電流高調波 $i_{dcih}(K)$ は、式(7.8.1)を適用し、 $K$ 台の和を取ることで、

(i-a)  $n=1,3,5\dots, l=1,4,7\dots$  のとき、

$$i_{dcih}(K) = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \left[ \sum_{k=0}^{K-1} f_1(\theta_m, \theta_i, \theta_c(k)) \right] \quad (7.8.2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} f_1(\theta_m, \theta_i, \theta_c(k)) = & -[\sin\{2l\theta_m + \theta_i + n(\theta_c' - k\theta_d)\} + \sin\{2l\theta_m + \theta_i - n(\theta_c' - k\theta_d)\}] \cos\psi \\ & + [\cos\{2l\theta_m + \theta_i + n(\theta_c' - k\theta_d)\} + \cos\{2l\theta_m + \theta_i - n(\theta_c' - k\theta_d)\}] \sin\psi \end{aligned} \quad (7.8.3)$$

(i-b)  $n=1,3,5\dots, l=2,5,8\dots$  のとき、

$$i_{dcih}(K) = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \left[ \sum_{k=0}^{K-1} f_2(\theta_m, \theta_i, \theta_c(k)) \right] \quad (7.8.4)$$

ただし、

$$f_2(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = [\sin\{2l\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} + \sin\{2l\theta_m - \theta_i - n\theta_c\}] \cos\psi \\ + [\cos\{2l\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} + \cos\{2l\theta_m - \theta_i - n\theta_c\}] \sin\psi \quad (7.8.5)$$

(i-c)  $n=1,3,5\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = 0 \quad (7.8.6)$$

(ii-a)  $n=2,4,6\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$i_{dcih}(K) = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \left[ \sum_{k=0}^{K-1} f_3(\theta_m, \theta_i, \theta_c(k)) \right] \quad (7.8.7)$$

ただし、

$$f_3(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = [\cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} + \cos\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - n\theta_c\}] \cos\psi \\ - [\sin\{(2l-1)\theta_m - \theta_i + n\theta_c\} + \sin\{(2l-1)\theta_m - \theta_i - n\theta_c\}] \sin\psi \quad (7.8.8)$$

(ii-b)  $n=2,4,6\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = 0 \quad (7.8.9)$$

(ii-c)  $n=2,4,6\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$i_{dcih}(K) = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \left[ \sum_{k=0}^{K-1} f_4(\theta_m, \theta_i, \theta_c(k)) \right] \quad (7.8.10)$$

ただし、

$$f_4(\theta_m, \theta_i, \theta_c) = -[\cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} + \cos\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - n\theta_c\}] \cos\psi \\ - [\sin\{(2l-1)\theta_m + \theta_i + n\theta_c\} + \sin\{(2l-1)\theta_m + \theta_i - n\theta_c\}] \sin\psi \quad (7.8.11)$$

として表される。

本項では、 $n=1,3,5\dots, l=1,4,7\dots$ のときについて、 $K$ 台のインバータ全体から生じる直流側電流高調波  $i_{dcih}(K)$  を導出する。式(7.8.2)は、

$$i_{dcih}(K) = I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \left[ \sum_{k=0}^{K-1} f_1(\theta_m, \theta_i, \theta_c(k)) \right] \quad (7.8.12)$$

ただし、

$$\sum_{k=0}^{K-1} f_1(\theta_m, \theta_i, \theta_c(k)) = -\sum_{k=0}^{K-1} \sin\{2l\theta_m + \theta_i + n\theta_c' - kn\theta_d\} \cos\psi \\ - \sum_{k=0}^{K-1} \sin\{2l\theta_m + \theta_i - n\theta_c' + kn\theta_d\} \cos\psi \\ + \sum_{k=0}^{K-1} \cos\{2l\theta_m + \theta_i + n\theta_c' - kn\theta_d\} \sin\psi \\ + \sum_{k=0}^{K-1} \cos\{2l\theta_m + \theta_i - n\theta_c' + kn\theta_d\} \sin\psi \quad (7.8.13)$$

として表される。ここで、式(7.2.2)の三角級数の定理を用いると、

$$\sin \frac{n\theta_d}{2} \neq 0 \quad (7.8.14)$$

のとき、

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{K-1} f_1(\theta_m, \theta_i, \theta_c(k)) &= -\frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} \sin\left(2l\theta_m + \theta_i + n\left(\theta_c' - \frac{K-1}{2}\theta_d\right)\right) \cos\psi \\
 &\quad - \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} \sin\left\{2l\theta_m + \theta_i - n\left(\theta_c' - \frac{K-1}{2}\theta_d\right)\right\} \cos\psi \\
 &\quad + \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} \cos\left\{2l\theta_m + \theta_i + n\left(\theta_c' - \frac{K-1}{2}\theta_d\right)\right\} \sin\psi \\
 &\quad + \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} \cos\left\{2l\theta_m + \theta_i - n\left(\theta_c' - \frac{K-1}{2}\theta_d\right)\right\} \sin\psi
 \end{aligned} \tag{7.8.15}$$

と整理できるので、位相差運転の考慮により置き換わった理論式の部分は、

$$\sum_{k=0}^{K-1} f_1(\theta_m, \theta_i, \theta_c(k)) = \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} f_1\left(\theta_m, \theta_i, \theta_c' - \frac{K-1}{2}\theta_d\right) \tag{7.8.16}$$

の関係が得られる。同様に、

$$\sum_{k=0}^{K-1} f_2(\theta_m, \theta_i, \theta_c(k)) = \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} f_2\left(\theta_m, \theta_i, \theta_c' - \frac{K-1}{2}\theta_d\right) \tag{7.8.17}$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} f_3(\theta_m, \theta_i, \theta_c(k)) = \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} f_3\left(\theta_m, \theta_i, \theta_c' - \frac{K-1}{2}\theta_d\right) \tag{7.8.18}$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} f_4(\theta_m, \theta_i, \theta_c(k)) = \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} f_4\left(\theta_m, \theta_i, \theta_c' - \frac{K-1}{2}\theta_d\right) \tag{7.8.19}$$

の関係が得られる。

これより、 $K$ 台のインバータ全体から生じる直流側電流高調波 $i_{dch}(K)$ は、

(i-a)  $n=1,3,5\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$i_{dcih}(K) = \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \left[ f_1 \left( \theta_m, \theta_i, \theta_c' - \frac{K-1}{2} \theta_d \right) \right] \quad (7.8.20)$$

(i-b)  $n=1,3,5\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$i_{dcih}(K) = \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \left[ f_2 \left( \theta_m, \theta_i, \theta_c' - \frac{K-1}{2} \theta_d \right) \right] \quad (7.8.21)$$

(i-c)  $n=1,3,5\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = 0 \quad (7.8.22)$$

(ii-a)  $n=2,4,6\dots, l=1,4,7\dots$ のとき、

$$i_{dcih}(K) = \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \left[ f_3 \left( \theta_m, \theta_i, \theta_c' - \frac{K-1}{2} \theta_d \right) \right] \quad (7.8.23)$$

(ii-b)  $n=2,4,6\dots, l=2,5,8\dots$ のとき、

$$i_{dcih} = 0 \quad (7.8.24)$$

(ii-c)  $n=2,4,6\dots, l=3,6,9\dots$ のとき、

$$i_{dcih}(K) = \frac{\sin \frac{Kn\theta_d}{2}}{\sin \frac{n\theta_d}{2}} I_i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{3}{n\pi} \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l-1} \left( \frac{an\pi}{2} \right) \left[ f_4 \left( \theta_m, \theta_i, \theta_c' - \frac{K-1}{2} \theta_d \right) \right] \quad (7.8.25)$$

となる。



# 参考文献

- [1.1] 電気学会:「交流電気鉄道車両の高調波対策」、電気学会技術報告、Vol. 676 (1998)
- [1.2] 電気鉄道ハンドブック編集委員会:「電気鉄道ハンドブック」、コロナ社 (2007)
- [1-3] Tomoki Watanabe: “EMC of Railway”, JIASC2005, 3-S2-1 (2005) (in Japanese)  
渡邊 朝紀:「鉄道の EMC」、電気学会産業応用部門大会講演論文集、3-S2-1 (2005)
- [1.4] Daisuke Itoh, and Toshifumi Michiba: “EMC with Signalling System from Rolling Stock Standpoint”, JIASC2005, 3-S2-2 (2005) (in Japanese)  
伊藤 大介・道場 俊文:「鉄道車両側から見た信号設備との EMC」、電気学会産業応用部門大会講演論文集、3-S2-2 (2005)
- [1.5] Takashi Wada, Ikuo Watanabe, Michio Seto, and Yoshihiro Youda: “EMC between signaling systems and rolling stocks”, JIASC2005, 3-S2-3 (2005) (in Japanese)  
和田 貴志・渡辺 郁夫・瀬戸 通夫・陽田 芳博:「信号設備側からみた車両との EMC」、電気学会産業応用部門大会講演論文集、3-S2-3 (2005)
- [1.6] 石川 栄:「“のぞみ”に結実した誘導電動機駆動システム」、電気学会論文誌 D、Vol. 114、No.6、pp.604-607 (1994)
- [1.7] 渋谷 進・氏家 昭彦・矢島 敦・大橋 幸喜・高原 英明:「交流電気車用 PWM コンバータの編成内搬送波位相差設定による電源高調波低減」、電気学会全国大会講演論文集、No.1073 (1995)
- [1.8] 電気学会:「最新 電気鉄道工学」、コロナ社 (2000)
- [1.9] 松本 雅行:「電気鉄道(第2版)」、森北出版 (2007)
- [1.10] Hiroshi Sameshima, and Hiroshi Taguchi: “Counter Measures for the EMI on Electric Railway Vehicles of Tokyo Metro”, JIASC2005, 3-S2-4 (2005) (in Japanese)  
鮫島 博・田口 弘史:「東京メトロにおける事例紹介」、電気学会産業応用部門大会講演論文集、3-S2-4 (2005)
- [1.11] 飯田 秀樹・加我 敦:「インバータ制御電車概論」、電気車研究会 (2003)

- [2.1] Keiichiro Kondo, Koichi Matsuoka, Kazuaki Yuki, and Toshio Hasebe: “An Analysis of an Induction Motor Speed Sensorless Control System for the Railway Vehicle Traction”, The paper of Joint Technical Meeting on Transportation and Electric Railway and Linear Drives, IEE Japan, TER-01-28 / LD-01-62 (2001) (in Japanese)  
近藤 圭一郎・松岡 孝一・結城 和明・長谷部 寿郎:「鉄道車両駆動用誘導電動機速度センサレス制御系の制御特性解析」、電気学会交通・電気鉄道／リニアドライブ合同研究会資料、TER-01-28 / LD-01-62 (2001)
- [2.2] Yooske Nakazawa, Shin-ichi Toda, and Ikuo Yasuoka: “A New Vector Control for Induction Motor Drives in Full Block Mode of Inverters”, IEEJ Trans. IA, Vol.118, No.9, pp.1071-1080 (1998) (in Japanese)  
中沢 洋介・戸田 伸一・安岡 育雄:「電圧固定モードでの誘導電動機ベクトル制御」、電気学会論文誌 D、Vol.189、No.9、pp.1071-1080 (1998)
- [2.3] 電気学会:「最新 電気鉄道工学」、コロナ社 (2000)
- [2.4] 飯田 秀樹・加我 敦:「インバータ制御電車概論」、電気車研究会 (2003)
- [2.5] Sakae Ishikawa: “A Success of Advanced AC Drive System for NOZOMI”, T.IEEE Japan, Vol. 114-D, No.6, pp.604-607 (1994) (in Japanese)  
石川 栄:「“のぞみ”に結実した誘導電動機駆動システム」、電気学会論文誌 D、Vol. 114、No.6、pp.604-607 (1994)
- [2.6] 渋谷 進・氏家 昭彦・矢島 敦・大橋 幸喜・高原 英明:「交流電気車用 PWM コンバータの編成内搬送波位相差設定による電源高調波低減」、電気学会全国大会講演論文集、No.1073 (1995)
- [2.7] 小嶋 修悦・石原 秀雄・中達 泰弘・東 隆司・平井 彰一・岩永 慎一郎・坂本 博文・小澤 寛之・石川 彰弘:「つくばエクスプレス TX-1000 系・TX-2000 系電車」、車両技術 226 号 (2003)
- [3.1] 電気学会:「パワーエレクトロニクス回路」、オーム社 (2000)
- [7.1] 電気学会:「半導体電力変換回路」、オーム社 (1987)



## 第3章

# ハイブリッド電源鉄道車両の 最適化設計手法



# 第1節 概要

本章においては、将来の車両駆動システムとして研究開発が進められているハイブリッド電源鉄道車両の設計・評価手法について提案する。ハイブリッド電源鉄道車両は、ディーゼルエンジンとリチウムイオン蓄電池によるディーゼルハイブリッド鉄道車両が我が国において営業運転を開始したことをはじめとして、実用化に向けて研究開発が進められている。ハイブリッド電源システムを用いた鉄道車両には様々な形態が考えられ、その構成によって得失が異なってくるが、代表的な利点として以下のような点が期待される。

- ブレーキ時に運動エネルギーを電気エネルギーに変換し架線に返す回生システムは、電気鉄道車両では広く用いられているが、非電化区間用のディーゼル鉄道車両(気動車、ディーゼル機関車)では、そのシステム構成から適用できない。ディーゼル鉄道車両に対して、電気システムと蓄電媒体を適用したハイブリッド電源鉄道車両を用いることにより、電力回生を行いエネルギー効率の向上を図ることができる。
- 電気鉄道車両(電車、電気機関車)においても、直流電化区間では回生電力を吸収する列車が近くにいない場合には、回生失効が発生するが、蓄電媒体の適用により、確実な電力回生が可能となる。
- ディーゼル鉄道車両では、列車の負荷に応じてディーゼルエンジンから動力を出力する必要があるため、列車の低負荷時などは、ディーゼルエンジンが効率の悪い運転点となってしまうが、ハイブリッド電源鉄道車両では蓄電媒体の適用により、負荷と発電装置の出力のタイミングをずらすことにより、発電装置の高効率点での運転時間を増やすことができる。
- ディーゼル鉄道車両では、ディーゼルエンジンによる振動・騒音が大きいですが、ディーゼルハイブリッド鉄道車両では電気システムと蓄電媒体の適用により、ディーゼルエンジンの高効率点での運転や駅停車時のディーゼルエンジン停止などにより、これらの削減が期待できる。

ハイブリッド電源鉄道車両として研究開発の対象となっているシステムは、図1.0.1に示すようなシリーズハイブリッドシステムが一般的である。発電装置としては、従来の気動車に用いられるディーゼルエンジンに発電機を接続したものや、次世代のエネルギー源として注目される燃料電池などが考えられる。また、電気鉄道車両に対してハイブリッドシステムを適用した場合には、発電装置にあたる部分が架線となる。蓄電装置としては、電気二重層キャパシタやリチウムイオン蓄電池が主な対象として扱われている。駆動装置は、近年の直流鉄道車両と同様にインバータにより誘導電動機を駆動する方式が主流である。ハイブリッド電源鉄道車両を実現する上での主な研究対象としては、電気二重層キャパシタやリチウムイオン蓄電池などの蓄電装置や燃料電池などの次世代の発電装置の要素技術の開発、蓄電装置の充放電と発電装置の発電を協調し電力・エネルギーを管理する電力制御システムの開発、蓄電装置と発電装置の種類や容量や機器配置などの設計などが挙げられる。これらのうち、本論文では、ハイブリッド電源鉄道車両の設計コンセプトを見いだすための基本設計手法の提案を行う。

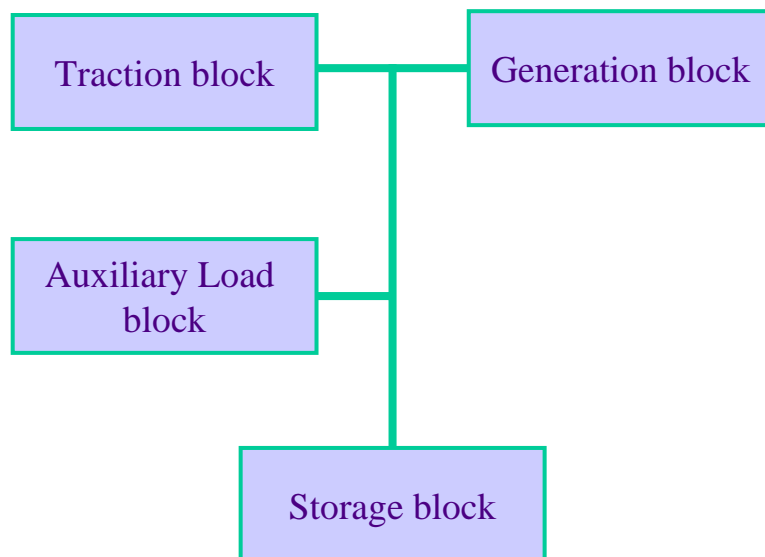


図1. 0. 1 鉄道車両用シリーズハイブリッド電源システムの基本構成

Fig. 1.0.1 Basic composition of a series hybrid power system for a railway vehicle

本章では、ハイブリッド電源鉄道車両の設計・評価手法として、次のような順序で検討を行う。はじめに、第1節において、ハイブリッド電源鉄道車両の研究状況について提示し、その課題を考慮して、ハイブリッド電源鉄道車両の最適化設計手法の必要性を示す。第2節において、対象とするハイブリッド電源鉄道車両のモデル化を行う。第3節において、電力制御について3つの手法を提案する。1つは、最適化に基づく動的計画法の導入である。動的計画法は、消費エネルギーを最小にするような電力制御パターンを算出するものである。これにより、理想的な電力制御パターンに基づき、ハイブリッド電源鉄道車両の走行をシミュレーションすることが可能となる。また、動的計画法によって得られた結果を目標として、実車両への適用が容易な2つの電力制御法を提案する。第4節においては、ハイブリッド電源鉄道車両における様々な評価項目を整理する手法として、多目的最適化を取り入れる。これにより、発電装置の種類や容量、蓄電装置の種類や容量、消費エネルギー、路線条件などを考慮し、ハイブリッド電源鉄道車両において効果的な設計パターンを示す。本研究では、第3節と第4節によって提案した手法を組み合わせることで、多目的最適化を適用すると同時に、そのプロセスにおいて電力制御パターンの算出に動的計画法を取り入れ、ネスト化された最適化計算手法を提案している。この結果、探索空間が極めて広範となり、通常の高速度ワークステーションを用いても実用上可能な時間範囲での処理が困難となる。そこで、本研究では、最適化プロセスを適切に並列化計算させることで、探索の大規模高速化を実現する。第5節においては、前節までに提案した最適化手法により実施した最適化計算の結果を提示し分析する。本節においては、第3節で提案した動的計画法と2つの電力制御法の結果を比較することによって、電力制御パターンの善し悪しについて議論するとともに、ハイブリッド電源鉄道車両の導入が効果的な機器構成や路線特性を示す。これにより、動的計画法と多目的最適化をネスト化した最適化設計手法の有効性を示すと同時に、具体的な電力制御法についても、動的計画法による理想的な消費エネルギーに近いものが得られることを確認し、提案手法の有効性を確認する。第6節においては、ハイブリッド電源鉄道車両に適した蓄電媒体を検討するために、多目的最適化と動的計画法を用いて最適化計算を行うことで、ハイブリッド電源鉄道車両の蓄電媒体に対する特性を分析する。第7節においては、燃料電池ハイブリッド鉄道車両よりも、実用化に近い段階にあるディーゼルハイブリッド鉄道車両を対象として最適化を行う。発電装置としてディーゼル発電

機を想定することで、発電機効率や排出ガスの排出量などを考慮した設計が必要となる。これに対して、動的計画法を導入することで、最適化された電力制御パターンに基づき、ディーゼルハイブリッド鉄道車両の設計に対する有用な情報を提示する。

## 1.1 研究動向

本項においては、鉄道車両駆動システムへの蓄電媒体の適用例を中心に、本研究に関連する分野における研究動向について紹介する。

### 1.1.1 スイスでのディーゼルハイブリッド鉄道車両の機器設計の検討

電気式ディーゼル鉄道車両に蓄電媒体を適用した場合の検討が、スイスのSwiss Federal School of Technologyにおいてなされている<sup>[1.1]</sup>。研究対象は、ディーゼル発電機と電気二重層キャパシタを電源としたハイブリッド電源鉄道車両であり、ディーゼル発電機と電気二重層キャパシタという2つの電源の出力配分について検討し、ハイブリッドシステムを適用した場合の燃料消費量の削減効果が示されている。この検討対象となる路線は、北イタリアのMerano - Malles railway lineであり、最大で700[m]程度の標高差がある路線であり、山岳路線といった位置づけになるものと考えられる。このような路線を対象として検討した結果、ディーゼル発電機を最小化し、電気二重層キャパシタを最大化した構成が最も燃料消費量が少なくなるという計算結果が示されている。なお、このような場合のハイブリッドシステム構成の場合は、ディーゼル発電機からの出力は常に一定の出力となり、走行全体の列車の負荷電力の平均値を出力するものとして示されている。さらに、蓄電装置の寿命を考慮した検討を行い、最も経済性に優れているハイブリッドシステムは、検討システムにおいてはディーゼル発電機が列車最大負荷の半分の出力とした場合であると結論づけている。

### 1.1.2 ドイツでのハイブリッド路面電車システムの開発

路面電車システムに蓄電媒体を適用したハイブリッド電源鉄道車両の実証試験が、Bombardier Transportationによって行われている<sup>[1.2-5]</sup>。これは、主に回生電力の有効回収や架線電圧の安定化などを狙った電気二重層キャパシタによる鉄道車両用蓄電システムである“MITRAC Energy Saver”を開発し、ドイツのマンハイムの路面電車において実証試験を行ったものである。この結果、30 [%]以上の省エネルギー効果と、約50 [%]のピーク電力削減効果が確認されている。さらに、路面電車の架線レス走行、600 [V]もしくは750 [V]き電の地下鉄システム、ディーゼルシステムに対する“MITRAC Energy Saver”の適用の可能性についても検討している。

### 1.1.3 鉄道総研でのハイブリッド路面電車システムと燃料電池システムの研究

我が国においては、路面電車システムに蓄電媒体を適用し、架線無しでの走行を狙ったハイブリッド電源鉄道車両の実証試験が、鉄道総合技術研究所(鉄道総研)によって行われている<sup>[1.6-10]</sup>。これは、蓄電媒体としてリチウムイオン蓄電池を用いて検証を行っているもので、これまでに鉄道総研の構内試験線による試験が行われ、現在、札幌市交通局の軌道線において試験走行が行われている。当初は図1.1.1に示す豊橋鉄道から譲り受けた路面電車にリチウムイオン蓄電池を搭載することで、回生電力の有効回収や架線レス走行の走行試験が鉄道総研の構内試験線にて行われていたが、現在は、図1.1.2に示す新製し

た架線・バッテリーハイブリッドLRV「Hi-tram」として、架線レス走行や回生電力の有効回収や路面電車ではない鉄道線への直通運転などを狙った走行試験が行われている。



(写真提供:財団法人鉄道総合技術研究所)

図1. 1. 1 鉄道総研の初代架線ハイブリッド tram

Fig. 1.1.1 The first hybrid electric vehicles using trolley power and on-board batteries by RTRI



(写真提供:財団法人鉄道総合技術研究所)

図1. 1. 2 鉄道総研の架線・バッテリーハイブリッド LRV「Hi-tram」

Fig. 1.1.2 The hybrid electric vehicles 'Hi-tram' using trolley power and on-board batteries by RTRI

また、鉄道総研においては、図1. 1. 3に示す燃料電池鉄道車両の研究開発も行われている。これは、非電化区間に用いられるディーゼル鉄道車両の動力源として、ディーゼルエンジンに換えて燃料電池システムを用いるものである<sup>[1,7,11-15]</sup>。1両の車両に出力 100 [kW]級の燃料電池を搭載した試験電車を新製し、鉄道総研の構内試験線及び車両試験台にて走行試験が行われている。これにより、燃料電池の特性について詳細なデータを取得し、研究成果が広く公表されている。特に列車は走行に伴い大きく負荷が変動す

るが、蓄電媒体なしで燃料電池を用いても列車の負荷変動に対して十分な特性が得られることを示していることなど、燃料電池を鉄道車両に適用するにあたっての有用な情報を提供している。これらの結果をふまえて、営業線での走行試験に向けて、蓄電媒体と燃料電池を組み合わせた燃料電池ハイブリッド鉄道車両の検討や、蓄電媒体の有無による燃料電池を用いた鉄道車両の走行パターンについての検討などが行われている。



(写真提供:財団法人鉄道総合技術研究所)

図1. 1. 3 鉄道総研の燃料電池試験車両

Fig. 1.1.3 The fuel cell powered railway vehicle by RTRI

#### 1. 1. 4 JR東日本での非電化区間用ハイブリッド電源鉄道車両の開発

東日本旅客鉄道(JR東日本)においては、図1. 1. 4に示す「NETレイン」や図1. 1. 5に示す「キハE200形」により、ディーゼルハイブリッド鉄道車両及び燃料電池ハイブリッド鉄道車両の研究が進められている[1.16-20]。

「NETレイン」は、ディーゼル発電機とリチウムイオン蓄電池を組み合わせたディーゼルハイブリッド鉄道車両の試験車両として開発された。ディーゼルハイブリッド鉄道車両「NETレイン」は、ディーゼル鉄道車両では困難な回生電力の回収や、ディーゼルエンジンの高効率点での運転、メンテナンス軽減のための電車部品の適用、ディーゼルエンジンの騒音低減などを目的としている。ディーゼルハイブリッド鉄道車両「NETレイン」は、信頼性の確保の観点から、リチウムイオン蓄電池の不具合時でも、ディーゼル発電機単体で走行が可能なエンジン出力を有している。このため、ディーゼル発電機を主体にしたエネルギー管理制御システムが構築されており、リチウムイオン蓄電池は、主に次の2つの場面での使用が考えられている。1つは低速での力行時に駅付近での騒音軽減を目的とした使用である。もう1つは、回生時の回生電力回収を目的とした使用である。また、ディーゼルハイブリッド鉄道車両「NETレイン」は、開発途上で蓄電装置の性能向上に伴いリチウムイオン蓄電池の交換を行い、蓄電装置容量が増加することによってエンジンの高効率点での運転を増やすなど、エネルギー効率の向上が図られている。その後、ディーゼルハイブリッド鉄道車両「NETレイン」の成果をふまえて、量産先行車として「キハE200形」が3両新製され、現在、JR小海線で営業運転を行っている。

燃料電池ハイブリッド鉄道車両については、ディーゼルハイブリッド鉄道車両の試験車両として開発され

た「NETレイン」のディーゼル発電機を燃料電池に置き換えて研究が行われている。これは、発電装置と蓄電装置によるハイブリッド電源鉄道車両という構成のもとで、発電装置に燃料電池を適用した場合の特性について研究が行われている。燃料電池ハイブリッド鉄道車両「NETレイン」は、蓄電媒体としてリチウムイオン蓄電池を有することから、列車の走行に伴い変動する負荷については、リチウムイオン蓄電池から供給し、燃料電池からは一定の出力を供給することを基本としている。このため、従来JR東日本が用いていたディーゼルハイブリッド鉄道車両「NETレイン」のエネルギー管理制御システムや、鉄道総研の燃料電池鉄道車両とは方式が異なることが特徴的である。燃料電池ハイブリッド鉄道車両「NETレイン」は、現在までに、東急車輛の構内試運転線および営業線での走行試験が行われている。



図1. 1. 4 JR東日本のバッテリー試験電車「NETレイン」

Fig. 1.1.4 The experimental railcar of hybrid traction system 'NE train' by JR-EAST



図1. 1. 5 JR東日本のディーゼルハイブリッド鉄道車両「キハE200形」

Fig. 1.1.5 The diesel hybrid commercial operation railcar 'kiha E200' by JR-EAST



### 1. 1. 5 川崎重工業でのハイブリッド路面電車システムの開発

蓄電媒体としてニッケル水素電池を用いたハイブリッド電源鉄道車両の路線電車としては、川崎重工業による「SWIMO」が挙げられる<sup>[1.21-22]</sup>。これまでに川崎重工業の実験線による試験が行われ、現在、札幌市交通局の軌道線において試験走行が行われている。当初は筑豊電鉄から譲り受けた路面電車にニッケル水素電池を搭載することで、「SWIMO」として架線レス走行の走行試験が川崎重工業の実験線にて行われていたが、現在は、新製した「SWIMO-X」として、架線レス走行や回生電力の有効回収などを狙った走行試験が行われている。

### 1. 1. 6 架線システムへの蓄電媒体の適用

これ以外にも、鉄道分野への蓄電媒体の適用に関する研究は広く行われており<sup>[1.23-28]</sup>、ここでは、主に架線電圧の安定化や、それによる回生電力の有効回収を目的とした蓄電媒体の適用事例を紹介する。直流電化されている鉄道路線においては、列車の回生電力は架線を通じて他の車両に供給される。しかしながら、閑散線区で他の車両が列車の近くにいない場合には、回生電力を供給することができずに回生失効が生じてしまう。また、変電所間隔や変電所容量が不足すると、列車の力行時に架線電圧の低下を招くことにもなる。これらの問題を解決することを主な目的とし、蓄電媒体を車上もしくは地上に設置する研究が行われている。東海旅客鉄道(JR東海)では、直流鉄道車両に電気二重層キャパシタを搭載し、閑散線区での回生失効防止を目的とする研究が行われている<sup>[1.23]</sup>。また、西日本旅客鉄道(JR西日本)は、直流変電所にリチウムイオン蓄電池を用いた電力補完装置を設置し、受電回線の停止時の信頼性確保及び回生失効防止を図っている<sup>[1.24]</sup>。同様に、鹿児島市交通局においても、東洋電機製造とジーエス・ユアサにより、リチウムイオン蓄電池による架線電圧補償システムを導入し、架線電圧の安定化を図り、回生電力の有効活用を図っている<sup>[1.25]</sup>。

## 1. 2 研究課題

前項で述べたように、鉄道車両にハイブリッドシステムを適用するにあたっては、様々な課題があり、その解決のための研究開発が広く行われている。これらの研究においては、ハイブリッドシステムの試作の実例は多くあるものの、ハイブリッドシステムのあり方を示すような文献は限られている。該当するものとしては、スイスの Swiss Federal School of Technology によるディーゼルハイブリッド鉄道車両の研究や、上智大学による直流鉄道車両に電気二重層キャパシタを搭載した場合の最適制御に関する研究などが挙げられる。しかしながら、このような観点からの研究事例は少なく、最適化手法を用いて、実際の設計上の方針を示すことが、ハイブリッド電源鉄道車両の開発に有用であると考えられる。そこで、本論文では、燃料電池ハイブリッド鉄道車両及びディーゼルハイブリッド鉄道車両を対象として、ハイブリッド電源鉄道車両の最適化設計手法を提案する。

また、電気鉄道分野において最適化手法が用いられる研究として、列車運転の最適制御に関する研究がしばしば発表されている<sup>[1.28-32]</sup>。従来の研究は、架線システムを前提に、消費エネルギーを削減するために運転曲線を最適化する研究が一般的である。これらの研究は、最適制御を用いるという点では、ハイブリッド電源鉄道車両を対象とした本研究との類似性が見られるが、架線システムとハイブリッド電源鉄道車両では、走行パターンや消費エネルギーの評価方法が違うことから、最適化問題としてはやや性質が異なるものとなる。前述のように架線システムに蓄電媒体を適用することを想定した上智大学による研究もある

が、これら架線システムを前提としている研究は、1駅間の走行で評価するものがほとんどであり、非電化区間用のハイブリッド電源鉄道車両に必要な始点から終点までの走行のような大規模な計算は行われていない。本研究では、非電化区間用のハイブリッド電源鉄道車両を前提とするため、1駅間の走行でなく、1路線での走行の最適化を実現し、ハイブリッド電源鉄道車両の導入効果を評価する。

## 第2節

# 検討対象モデル

本章においては、将来の車両駆動システムとして研究開発が進められているハイブリッド電源鉄道車両の設計・評価手法について提案する。本研究では、はじめに燃料電池と電気二重層キャパシタを用いたシリーズハイブリッドの機器構成を想定する。燃料電池鉄道車両は次世代の鉄道車両として期待されており、今後研究が進んでいくものと考えられる。燃料電池ハイブリッド鉄道車両は、架線による他の列車との電力のやりとりがないため、他の列車の走行状態の影響を受けずにハイブリッド電源鉄道車両の評価ができること、及び、燃料電池は出力による効率の変動が少ないことなど、ハイブリッド電源鉄道車両の基本的な検討を行うには適している。これは、ディーゼルハイブリッド鉄道車両のような燃料消費量や様々な排出ガス排出量など多くの評価項目が存在し、出力によってこれらの変動が大きいディーゼルエンジンとは異なった燃料電池ハイブリッド鉄道車両の特徴である。よって、本研究でははじめに、燃料電池ハイブリッド鉄道車両を対象にして、ハイブリッド電源鉄道車両の基本的な特性を明らかにし、その上でより評価が複雑になるディーゼルハイブリッド鉄道車両を対象にして検討を行う。また、蓄電媒体についても、はじめに次世代の蓄電媒体として期待されパワーの面で有利な電気二重層キャパシタを想定して検討を行い、その後にリチウムイオン蓄電池も含めて、ハイブリッド電源鉄道車両に適した蓄電媒体に関する検討を行う。

本節においては、想定するハイブリッド電源鉄道車両の構成について、シミュレーションモデルを構成する。具体的には、ハイブリッド電源システムのモデル化と、通常の直流鉄道車両と同様になる部分もモデル化を行う。本節のモデル化の対象は、ハイブリッド電源鉄道車両の基本的な評価を行いやすい燃料電池ハイブリッド鉄道車両とする。ディーゼルハイブリッド鉄道車両の検討や蓄電媒体の検討において、モデル化が異なる部分については、各節でモデルを定義する。また、ハイブリッド電源鉄道車両が走行する路線についても本節でモデル化する。

## 2.1 ハイブリッド電源鉄道車両の構成

本研究では、はじめに図2.1.1に示すような燃料電池と電気二重層キャパシタを用いたシリーズハイブリッドの機器構成を想定する。駆動ブロックでは、インバータにより誘導電動機を駆動する。発電ブロックでは、燃料電池により発電し、チョップパにより電力変換を行う。蓄電ブロックでは、電気二重層キャパシタにより蓄電し、チョップパにより電力変換を行う。車内負荷ブロックは、車内の照明・空調などの負荷を想定する。このため、車内負荷は、ハイブリッド電源のベース負荷となる。

主な諸元を表2.1.1に示す。なお、燃料電池の質量とキャパシタの質量の和をハイブリッド電源の質量 $M_h$ とし、これと列車基本質量 $M_b$ の和を列車総質量 $M_t$ とする。

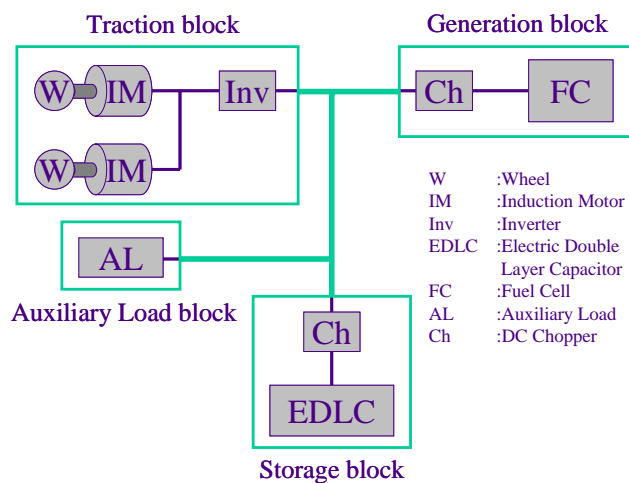


図2.1.1 ハイブリッド電源鉄道車両の構成

Fig. 2.1.1 Composition of a hybrid powered railway vehicle

表2. 1. 1 想定諸元

Table 2.1.1 An assumed specification

Vehicle	Number of cars $n$	2 [cars]
	Base mass $M_b$	74.0 [t]
	Gear ratio $G$	7.07
	Gear efficiency $\eta_g$	0.98
	Inverter efficiency $\eta_i$	0.975
	Wheel diameter $D$	0.82 [m]
	Inertia ratio	0.09
	Scheduled deceleration $a_b$	2.2 [km/h/s]
	Number of motors $N$	4
IM	Primary resistance $R_1$	0.186 [ $\Omega$ ]
	Secondary resistance $R_2$	0.194 [ $\Omega$ ]
	Primary inductance $L_1$	42.00 [mH]
	Secondary inductance $L_2$	42.00 [mH]
	Mutual inductance $M_m$	40.40 [mH]
	Number of poles $P$	4
Generation	FC power density	0.15 [kW/kg]
	Chopper efficiency $\eta_{ch}$	0.95
Storage	EDLC energy density	5.0 [Wh/kg]
	EDLC power density	1.0 [kW/kg]
	EDLC lower voltage limit	50 [%]
	Range of use for SOC	25 – 100 [%]
	Charge efficiency $\eta_c$	0.90
	Discharge efficiency $\eta_c$	0.90
AL	Load $P_A$	100 [kW]

### 2. 1. 1 駆動ブロック

駆動ブロックでは、列車の電動機や走行系を以下のような数式により模擬する<sup>[2,1-3]</sup>。電動機制御は、ベクトル制御系を想定して、dq軸上の固定子電圧指令値を決定し、それに応じた駆動電力や列車加速度を計算する。

はじめに、電動機とインバータのモデルを構築する。定常状態における固定子電圧は、次のように表される。

$$v_{1d} = R_1 i_{1d} - \omega_{st} \sigma L_1 i_{1q} \quad (2. 1. 1)$$

$$v_{1q} = R_1 i_{1q} + \omega_{st} L_1 i_{1d} \quad (2. 1. 2)$$

$v_{1d}$  d軸電圧 [V]

$v_{1q}$  q軸電圧 [V]

$i_{1d}$  d軸電流 [A]

$i_{1q}$  q軸電流 [A]

$\omega_{st}$  電動機の固定子の角速度 [rad/s]

ただし、漏れ係数 $\sigma$ は、

$$\sigma = 1 - \frac{M_m^2}{L_1 L_2} \quad (2. 1. 3)$$

である。駆動電力 $P_T$  [kW]は、力行時には式(2. 1. 4)を、回生時には式(2. 1. 5)を用いて求める。

$$P_T = \frac{N}{\eta_i} \frac{v_{1d} i_{1d} + v_{1q} i_{1q}}{1000} \quad (2. 1. 4)$$

$$P_T = N \eta_i \frac{v_{1d} i_{1d} + v_{1q} i_{1q}}{1000} \quad (2. 1. 5)$$

次に、列車の走行系のモデルを構築する。定常状態における電動機1台あたりのトルク $\tau$  [Nm]は、

$$\tau = \frac{P}{2} \frac{M_m^2}{L_2} i_{1d} i_{1q} \quad (2. 1. 6)$$

より算出する。車輪踏面での動輪周引張力 $T_e$  [kN]は、力行時には式(2. 1. 7)を、回生時には式(2. 1. 8)を用いて求める。

$$T_e = \frac{2G \tau N \eta_g}{1000D} \quad (2. 1. 7)$$

$$T_e = \frac{2G \tau N}{1000 \eta_g D} \quad (2. 1. 8)$$

また、単位質量あたりの走行抵抗 $R_r$  [kg/t]、勾配抵抗 $R_g$  [kg/t]、曲線抵抗 $R_c$  [kg/t]は、

$$R_r = 1.32 + 0.0164V + \{0.0280 + 0.0078(n-1)V^2\} / M_t \quad (2. 1. 9)$$

$$R_g = \pm n_g \quad (2.1.10)$$

$$R_c = \frac{800}{r_c} \quad (2.1.11)$$

$V$  列車速度 [km/h]

$M_t$  列車総質量 [t]

$n_g$  勾配 [%]

$r_c$  曲線半径 [m]

を用いて算出する。これらより、列車抵抗  $R$  [kN]は、

$$R = \frac{(R_r + R_g + R_c)M_t g}{1000} \quad (2.1.12)$$

$g$  重力加速度 [m/s/s]

より求める。加速力  $f$  [N/kg]は、

$$f = \frac{T_e - R}{M_t} \quad (2.1.13)$$

として表され、慣性係数  $C_i$ を考慮して、加速度  $a$  [km/h/s]は、

$$f = \frac{1000}{3600}(1 + C_i)a \quad (2.1.14)$$

の関係より算出する。さらに、加速度  $a$  [km/h/s]より列車速度と位置を求める。また、電動機の回転数  $n_{rpm}$  [/min]は、

$$n_{rpm} = \frac{1000G}{60\pi D}V \quad (2.1.15)$$

を用いて求める。電動機の電気角での回転角速度  $\omega_{re}$  [rad/s]、すべり角速度  $\omega_{se}$  [rad/s]、固定子の角速度  $\omega_{st}$  [rad/s]は、

$$\omega_{re} = 2\pi P \frac{n_{rpm}}{120} \quad (2.1.16)$$

$$\omega_{se} = \frac{R_2 i_{1q}}{L_2 i_{1d}} \quad (2.1.17)$$

$$\omega_{st} = \omega_{re} + \omega_{se} \quad (2.1.18)$$

より求める。

以上の駆動系モデルのもと、図2. 1. 2、3のような力行時と回生時の電動機による引張力特性を規定する。この引張力特性を満たすのに必要な電力を発電ブロックと蓄電ブロックから出力する。

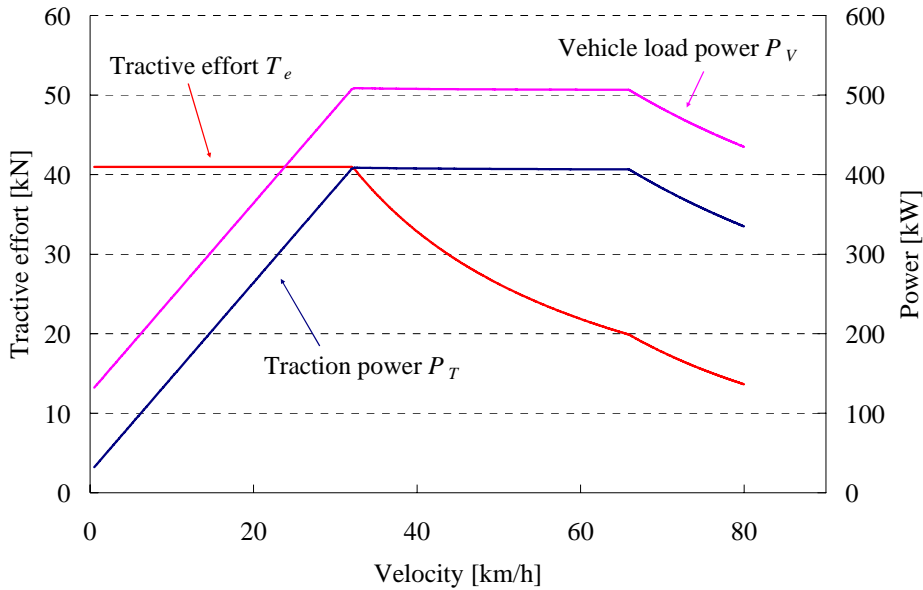


図2. 1. 2 力行時の引張力特性

Fig. 2.1.2 Characteristics of the tractive effort for powering

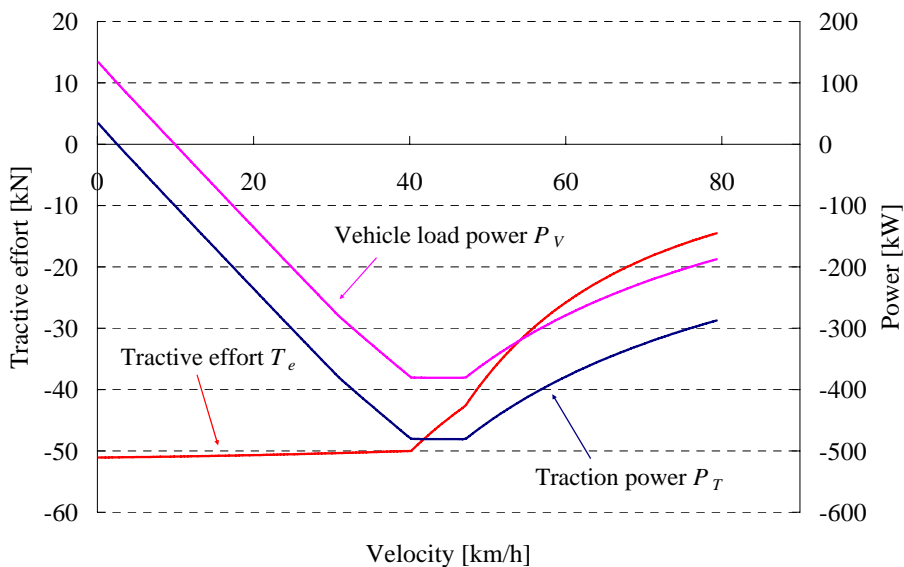


図2. 1. 3 回生時の引張力特性

Fig. 2.1.3 Characteristics of the tractive effort for regeneration

### 2. 1. 2 発電ブロック

本研究では、ピークカット効果を期待して<sup>[24]</sup>、多目的最適化の目的関数の1つとなる発電装置の最大出力を抑えることを前提とする。すなわち、発電ブロックでは列車の最大負荷を賄うことを条件とせず、発電ブロックの最大出力は列車の最大負荷を下回る設計も考慮するものとする。このため、列車負荷に対して発電電力が足りない場合には、蓄電媒体から電力の供給を行うものとする。

本検討では、はじめに発電媒体として燃料電池を想定する。また、後の検討では、ディーゼル発電機も想定した検討を行う。燃料電池は、極端に低い出力の場合を除いては、効率はほぼ一定になるものと考え



られる<sup>[2,5]</sup>。このため、燃料電池最大出力の 10 [%]～100 [%]の範囲で効率がほぼ一定になると考え、この範囲内で出力を変化させるものとする。

また、燃料電池を想定した検討では、列車の消費エネルギーを示す指標として、発電装置の発電電力量 $E_G$ を

$$E_G = \int_0^T P_G(t) dt \quad (2.1.19)$$

$P_G(t)$   $t$  [s]における発電電力 [kW]

$T$  所要時間 [s]

と定義し、これを評価の対象とする。

### 2.1.3 蓄電ブロック

本検討では、はじめに蓄電媒体として電気二重層キャパシタを想定する。また、後の検討では、リチウムイオン蓄電池も想定した検討を行う。電気二重層キャパシタは、表2.1.1のパワー密度とエネルギー密度を用いて、蓄電装置容量 $C_S$ の値から最大充電電力 $P_{Cmax}$ と最大放電電力 $P_{Cmin}$  ( $< 0$ )が決定される。なお、電気二重層キャパシタは、最大電圧の 100 [%]から 50 [%]までの範囲を使用するものとする。このため、残存容量は、蓄電装置容量の 100 [%]から 25 [%]までの範囲を使用する。

また、力行時に出力できる電力は最大放電電力 $P_{Cmin}$ により制限される。発電ブロックの出力と合わせて、列車の負荷に満たない場合は、設計条件を満たさないものとして実行可能解から外される。一方、回生時に回収できる電力は最大充電電力 $P_{Cmax}$ により制限される。最大充電電力 $P_{Cmax}$ を超える場合には、電流指令値を絞り込みことによって、回生電力を抑制する。また、蓄電装置が満充電状態(使用範囲の最大蓄電装置残存容量)になった場合には、回生を停止する。なお、回生による減速力が計画減速度 $a_b$ に対して不足する場合には、機械ブレーキを併用するものとする。

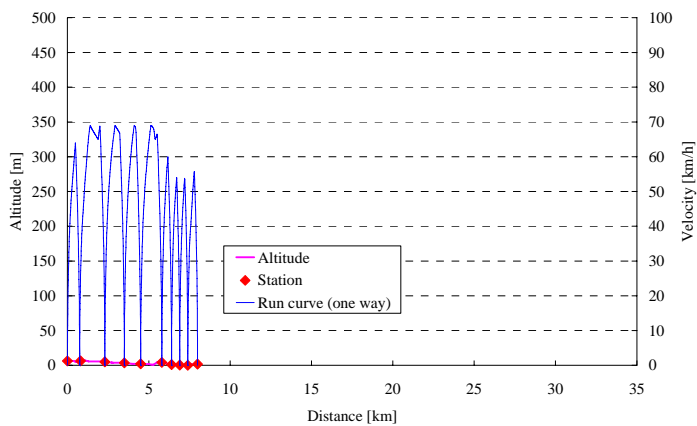
### 2.1.4 車内負荷ブロック

車内負荷ブロックは、車内の照明・空調などの負荷を想定する。夏期の負荷の大きい時期を目安として、表2.1.1のような一定の車内負荷電力 $P_A$ を想定する。

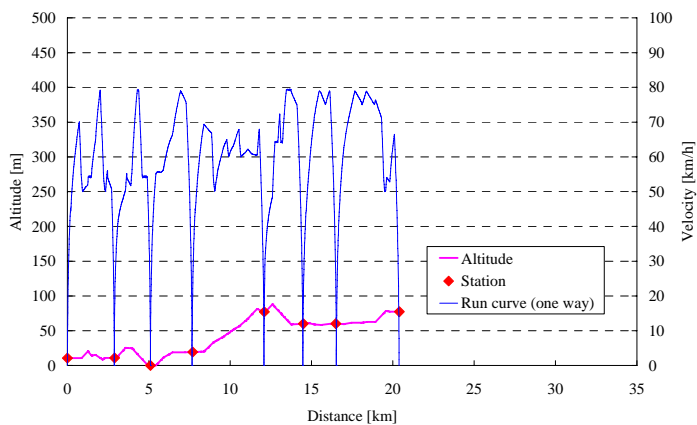
## 2.2 対象路線

対象とする路線として、図2.2.1に示す特徴の異なる3つの路線を採用した。駅間距離の比較的短い都市路線の最高速度は 70 [km/h]、駅間距離の比較的長い丘陵路線と山岳路線の最高速度は 80 [km/h]とした。また、これに加えて、曲線やポイントの速度制限も考慮した。なお、始点と終点に標高差があると妥当な比較ができないため、往復走行の結果を示した。また、停車中の蓄電装置残存容量(SOC)の回復時間を考慮して、終点駅での折り返し時間は 600 [s]とし、起点駅に戻ってから 300 [s]が経過した時点までを発電電力量の算出の対象とした。なお、各駅の停車時間は 30 [s]とした。

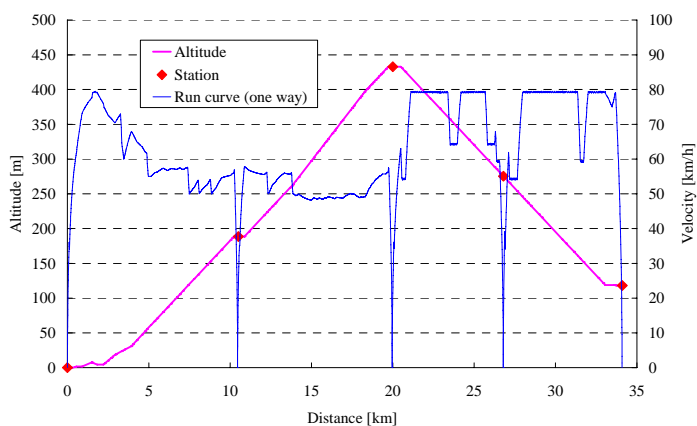
また、図2.2.1に運転曲線の例を示す。運転曲線は、引張力、列車抵抗、路線毎の速度制限、列車質量によって算出される。後述するように、所要時間及び運転曲線は、多目的最適化の設計変数である機器容量の変化に伴う列車質量の変化によってわずかではあるが変動する。



(a) 都市路線 / An urban line



(b) 丘陵路線 / A hill line



(c) 山岳路線 / A mountain line

図2. 2. 1 路線特性と運転曲線の例

Fig. 2.2.1 Line profiles and examples of run curve

## 第3節

# 電力制御法の検討

本節では、ハイブリッド電源鉄道車両の消費エネルギーを算出し、その導入効果を評価するために必要なハイブリッド電源鉄道車両の発電装置の運転方法(換言すると蓄電装置の充放電方法)について検討する。はじめに、ハイブリッド電源鉄道車両の消費エネルギーを最小にする発電装置の運転方法を算出する目的で動的計画法を導入する。これにより、最適電力制御に基づいたハイブリッド電源鉄道車両の基本設計が可能となるが、設計結果を実際のハイブリッド電源鉄道車両に適用するには、動的計画法により得られた結果と遜色ない程度のエネルギー消費を実現できる現実的な電力制御法が求められる。そこで、本節では、代表的な2通りの考え方を基本として、2通りの電力制御法を提案する。

### 3.1 動的計画法の導入

本研究では、最適な発電装置の運転方法を導出するために、動的計画法を適用する<sup>[3.1]</sup>。これにより、ハイブリッド電源鉄道車両の消費エネルギーを最小にする蓄電装置残存容量(SOC)の軌跡が求まる。動的計画法はベルマンの最適性の原理に基づいた理論、すなわち、「最適手段は、システムの初期状態と初期に行われた決定がどのようなものであっても、初期の決定で決まる状態に関し、必ず最適手段を構成する」に基づいている。これは言い換えると、「最適経路中の部分経路もまた最適経路になっている」ということである。つまり、まず小さな部分問題における最適経路を算出し、その部分問題を徐々に拡大し部分的な最適経路の候補群を求める。そして、最終的に全体問題における最適経路を算出することが可能となる。

ハイブリッド電源鉄道車両の電力制御に対して、動的計画法の理論を次のように適用する。規定の運転曲線に基づき列車が走行するものとする、運転曲線から駆動電力が算出される。これに対し、発電装置の発電電力は規定の範囲内で自由に制御することができるので、発電電力と駆動電力の差分が、蓄電装置に充放電されることとなる。このため、動的計画法によりSOCの軌跡を求めることにより、発電装置の発電電力が決定する。

次に、ハイブリッド電源鉄道車両に適用した場合の動的計画法の概念図を図3.1.1に示す。ここでは、消費エネルギーに関する目的関数として、燃料電池の発電電力量を最小化する場合について詳細を述べる。はじめに、終点と隣接する全ての節点の間で発電電力量を式(3.1.1)より計算し、これによりその区間におけるSOCの最適経路を求める。

$$E_G(T - \Delta T) = \int_{T-\Delta T}^T P_G(t) dt \quad (3.1.1)$$

$\Delta T$  探索時間刻み [s]

続いて、次式のように、時刻  $\tau$  における最小となる消費エネルギーの候補を、時刻  $\tau + \Delta T$  における最小となる消費エネルギーと、時刻  $\tau$  と時刻  $\tau + \Delta T$  における発電電力量から算出する。

$$E_G(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+\Delta T} P_G(t) dt + E_G(\tau + \Delta T) \quad (3.1.2)$$

計算対象とする節点を1段左にずらし同様の計算を行うことで、最終的に、消費エネルギーが最小となる全

経路におけるSOCの最適経路が求められる。

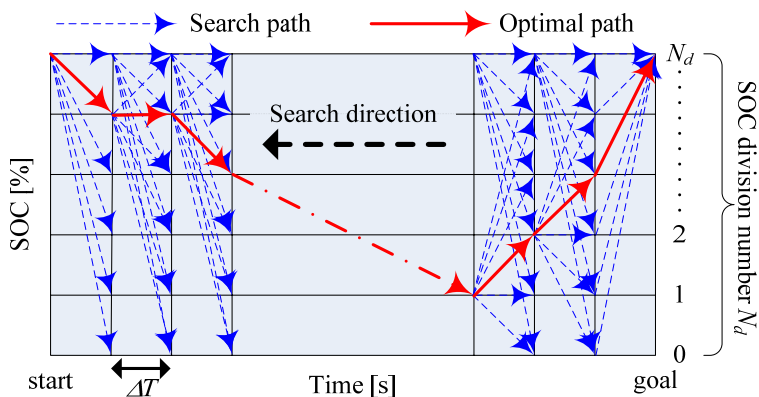


図3. 1. 1 動的計画法の概念図

Fig. 3.1.1 A conceptual figure of the dynamic programming

本計算では、分割数 $N_d$ は、蓄電装置容量 $C_s$ の増大に伴い大きくする必要があるので、

$$N_d = 50 \cdot C_s \tag{3. 1. 3}$$

$C_s$  蓄電装置容量 [kWh]

より算出した。また、探索時間刻み $\Delta T$ は10.0 [s]とした。なお、動的計画法の探索パラメータの決定にあたっては、探索時間刻み $\Delta T$ とSOC分割数 $N_d$ のバランスを適切に取ることが重要となる。具体的には、探索時間刻みを小さくする場合には、それに対応して、SOC分割数を大きくする必要があるのである。SOC分割数が小さいまま、探索時間刻みを小さくしてしまうと、動的計画法における離散化の影響で、選択できるSOCの経路が限られてしまう。また一方、SOC分割数を大きくすると計算時間の極端な増大を招く。このため、本論文では、計算負荷と計算精度のバランスを考慮して、動的計画法の探索パラメータを決定した。

なお、動的計画法による探索回数は、時間刻み毎に前後の節点間での探索が行われるため、SOC分割数 $N_d$ の2乗に比例して増大する。このため、蓄電装置容量 $C_s$ が大きい場合には、探索に時間を要することとなる。

### 3. 2 関数による電力制御法のモデル化

ハイブリッド電源鉄道車両の電力制御法として、蓄電エネルギーと運動エネルギーの和となる車両総エネルギー $E_V$ を一定に保つように燃料電池の発電電力を操作する方法が提案されている<sup>[3,2]</sup>。損失や勾配の影響が小さければ、回生エネルギーとして回収されるエネルギー分が、走行中に運動エネルギーとして保持されているものとみなすことができる。このため、車両総エネルギー $E_V$ を一定に保つことにより、蓄電装置残容量が良好な範囲内に収まるものと考えられる。具体的には、蓄電装置が満充電で駅を出発し、次駅の出発までに満充電に戻ることを目指して燃料電池の発電電力を操作する。本論文では、この考え方を基本として、様々な機器容量に対応できる電力制御法を提案する。これは、図3. 2. 1～3に示すように、車両エネルギー制御関数とSOC重み関数による電力制御法(関数制御)となる。

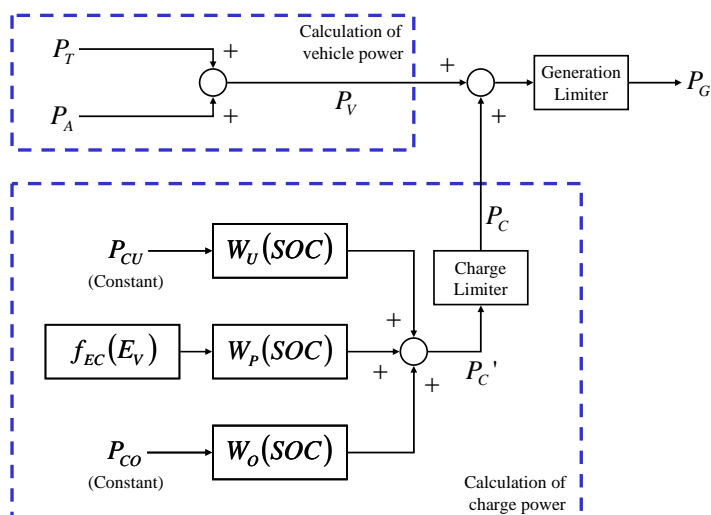


図3. 2. 1 電力制御法の構成

Fig. 3.2.1 A diagram of the electric power control

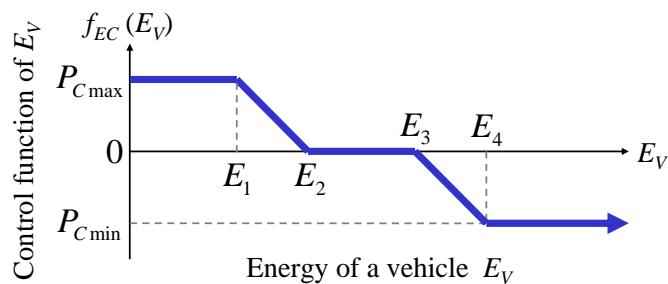


図3. 2. 2 車両エネルギー制御関数

Fig. 3.2.2 A control function of the energy of a vehicle

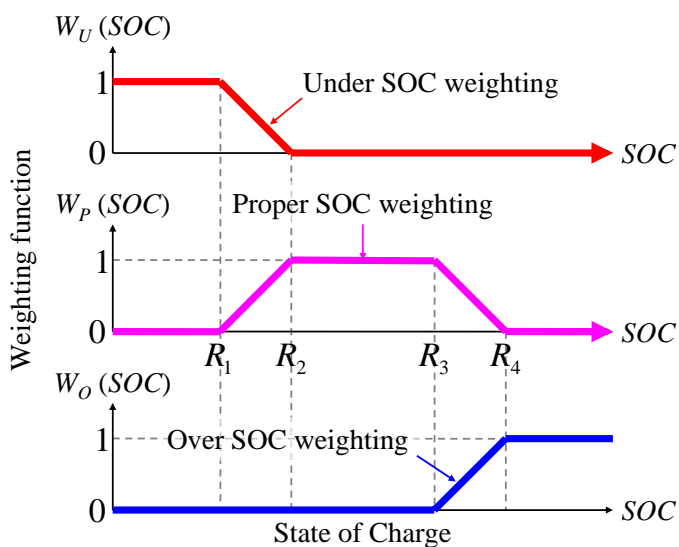


図3. 2. 3 SOC重み関数

Fig. 3.2.3 Weighting functions of the state of charge

### 3. 2. 1 ハイブリッドシステムの電力融通

電力制御法について検討するために、ハイブリッド電源鉄道車両における電力の相互関係について考察する。車両負荷電力 $P_V$ は、駆動電力 $P_T$ と車内負荷電力 $P_A$ の和として次式のように表される。ただし、駆動電力 $P_T$ は、回生時には負の値となる。

$$P_V = P_T + P_A \quad (3. 2. 1)$$

また、燃料電池の発電電力 $P_G$ は、蓄電装置の充電電力 $P_C$ と車両負荷電力 $P_V$ の和として次式のように考えられる。ただし、蓄電装置の充電電力 $P_C$ は、放電時には負の値となる。

$$P_G = P_C + P_V \quad (3. 2. 2)$$

この関係より、車両総エネルギーや蓄電装置残存容量を制御する場合に、蓄電装置の充電電力 $P_C$ を算出して、その値に基づき燃料電池の発電電力 $P_G$ の操作量を求める。

### 3. 2. 2 SOC重み関数と車両エネルギー制御関数の提案

蓄電装置残存容量SOCを適正な範囲に収めながら、機器容量の縮小化や回生電力の有効な回収を目標として、図3. 2. 1に示す電力制御法を提案する。ここで新たに、車両エネルギー制御関数 $f_{EC}(E_V)$ とSOC重み関数を図3. 2. 2、3に示すように定義する。蓄電装置の充電電力 $P_C$ は以下のように決定される。

$$P_C = W_U(SOC)P_{CU} + W_P(SOC)f_{EC}(E_V) + W_O(SOC)P_{CO} \quad (3. 2. 3)$$

$$W_U(SOC) + W_P(SOC) + W_O(SOC) = 1 \quad (3. 2. 4)$$

$W_U(SOC)$  SOC過小範囲の重み関数

$W_P(SOC)$  SOC適正範囲の重み関数

$W_O(SOC)$  SOC過大範囲の重み関数

$P_{CU}$  SOC過小範囲の充電電力

$P_{CO}$  SOC過大範囲の充電電力

このように、SOC重み関数により、SOCの値に応じて制御方法が適切に切り替わる。具体的には、SOCが適正範囲(制御閾値: $R_2 \sim R_3$ )内にある場合は、車両エネルギー制御関数に基づいた制御が行われる。一方、SOCが適正範囲よりも小さい場合や大きい場合には、SOCを適正範囲に戻すための制御が新たに付加される。

SOC重み関数の詳細は以下の通りである。SOCが小さい場合は、SOCの下限値を下回ることを防止するという観点から、SOC過小範囲の重み関数 $W_U(SOC)$ により、積極的に充電が行われるようにする。今回の検討では、SOC過小範囲の充電電力 $P_{CU}$ は、最大充電電力 $P_{Cmax}$ の値を設定している。SOCが大きい場合は、満充電状態でのさらなる充電を防止するという観点から、SOC過大範囲の重み関数 $W_O(SOC)$ により、充電を行わないようにする。今回の検討では、SOC過大範囲の充電電力 $P_{CO}$ は、最大放電電力 $P_{Cmin}$ の値を設定している。

一方、SOCが適正な範囲にあるときには、車両エネルギー制御関数に基づいた制御が行われる。車両エネルギー制御関数 $f_{EC}(E_V)$ は、車両総エネルギー $E_V$ が制御閾値 $E_2$ を下回ると、以降の放電に備えた充電制御となる。また、制御閾値 $E_3$ を上回ると、力行時や惰行時に蓄電装置からの積極的な放電を行って、回

生電力の有効な回収を狙った放電制御となる。

以上のアルゴリズムにより、蓄電装置の充電電力 $P_C$ (放電時には負となる)を求めるが、蓄電装置の特性から、最大充電電力 $P_{Cmax}$ と最大放電電力 $P_{Cmin}$ の制限があるため、充電電力 $P_C$ に次式のような充電電力リミッタを設ける。

$$P_C = \max(\min(P_C', P_{Cmax}), P_{Cmin}) \quad (3.2.5)$$

次に、蓄電装置の充電電力 $P_C$ から、式(3.2.2)をもとに燃料電池の発電電力 $P_G$ を次式のように計算する。

$$P_G' = P_C + P_V \quad (3.2.6)$$

さらに、燃料電池の出力には、最大出力 $P_{Gmax}$ と最小出力 $P_{Gmin}$ の制限があるため、次式のような発電電力リミッタを設ける。なお、燃料電池を想定した今回の検討では、最小出力 $P_{Gmin}$ は最大出力 $P_{Gmax}$ の10 [%]の値としている。

$$P_G = \max(\min(P_G', P_{Gmax}), P_{Gmin}) \quad (3.2.7)$$

また、車両総エネルギー $E_V$ は、蓄電エネルギー $E_S$ と運動エネルギー $E_K$ と後述する制御目標位置エネルギー $E_P^*$ を用いることで次式のように考える。

$$E_V = E_S + \eta_r \cdot \eta_g \cdot \eta_m \cdot \eta_i \cdot \eta_c \cdot (E_K + E_P^*) \quad (3.2.8)$$

すなわち、運動エネルギー $E_K$ 及び列車の制御目標位置エネルギー $E_P^*$ として見込まれる回生エネルギーは、全てが回収できるわけではないので、式(3.2.8)のように回生見込み率 $\eta_r$ と歯車伝達効率 $\eta_g$ と電動機効率 $\eta_m$ とインバータ効率 $\eta_i$ と充電効率 $\eta_c$ を用いて損失を表現する。ここで、走行抵抗や機械ブレーキによる損失分を考慮して回生見込み率 $\eta_r$ は0.75、電動機効率 $\eta_m$ は0.92と一定値を仮定している。

### 3.2.3 標高推定手法の提案

勾配の多い路線では、位置エネルギーの変化が大きいため、蓄電装置残容量と運動エネルギーを考慮して制御を行うだけでは、不十分であると考えられる。そこで、位置エネルギーの推定を行い、蓄電装置残容量と運動エネルギーと位置エネルギーを考慮して制御を行うことを提案する。

列車の位置エネルギーを算出するためには、列車の標高を取得する必要がある。本節では、駅の情報として距離と標高を事前に与えておき、列車の距離が随時取得できるとして、標高を図3.2.4のように推定する。具体的には、列車の走行中に走行距離を取得できれば、次式のように一次補間を行うことにより、列車の現在位置 $x_v$ における標高が推定できる。

$$h_e(x_v) = \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} (x_v - x_1) + h_1 \quad (3.2.9)$$

なお、標高推定を電力制御に用いるにあたっては、位置エネルギー推定値 $E_E$ を、

$$E_E = M_t g \cdot h_e(x_v) \quad (3.2.10)$$

より求める。さらに、次駅の標高を位置エネルギーの基準として考えるために、次駅の位置エネルギー $E_N$ を算出し、

$$E_P^* = K_A \frac{x_v - x_1}{x_2 - x_1} (E_E - E_N) \tag{3.2.11}$$

$K_A$  標高目標ゲイン

の関係より、列車の制御目標位置エネルギー $E_P^*$ を算出する。ここで、式(3.2.11)による標高推定制御の例を図3.2.5に示す。基本方針としては、現在位置の推定位置エネルギー $E_E$ から次駅の位置エネルギー $E_N$ までの差分を制御目標とする。ただし、駅間の標高差が大きい場合は、前駅を出発した直後に大きな差分が生じてしまう。このため、電力制御に用いる車両総エネルギー $E_V$ の急激な変化を避ける目的で、走行位置 $(x_v - x_1)$ と駅間距離 $(x_2 - x_1)$ の比率に応じた係数をかけることによって、位置エネルギーの制御目標値を調節している。

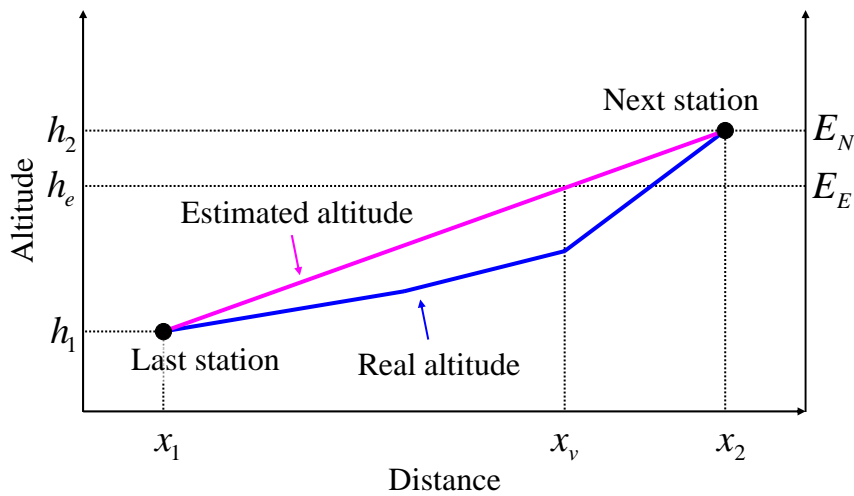


図3.2.4 標高推定方法

Fig. 3.2.4 An estimation method of an altitude

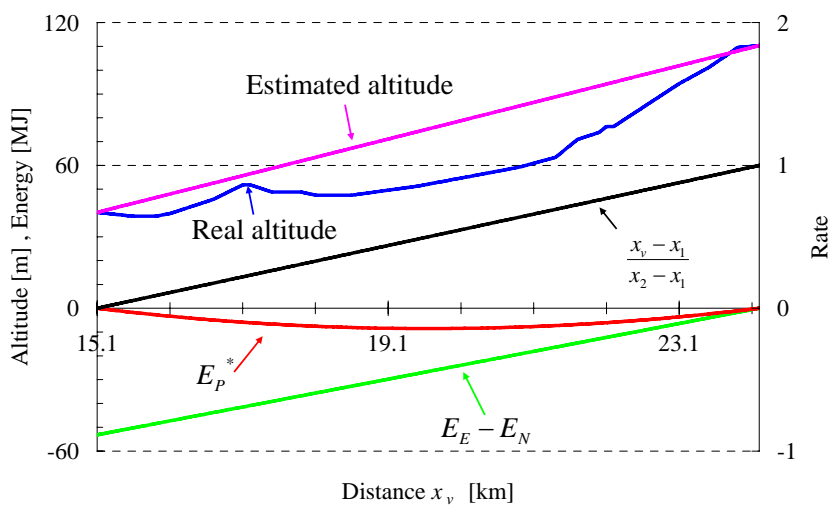


図3.2.5 標高推定例

Fig. 3.2.5 An example of altitude estimation



関数制御のパラメータとなる制御閾値 $E_1 \sim E_4$ 、 $R_1 \sim R_4$ 及び標高目標ゲイン $K_A$ は遺伝的アルゴリズムによる最適化計算により、表3. 2. 1の設計変数のもとで、発電電力量を最小とする値を探索した。なお、制御閾値が全て独立であると考えて、極度に広い設計空間で最適化を行ったとしても、有用な結果は得られないものと考えられる。このため、制御閾値を絞り込むこととして、制御閾値 $E_1$ 、 $R_1$ は、制御閾値 $E_2$ 、 $R_2$ よりも0.1 小さい値を、制御閾値 $E_4$ 、 $R_4$ は、制御閾値 $E_3$ 、 $R_3$ よりも0.1 大きい値をそれぞれ設定した。なお、制御閾値 $E_1 \sim E_4$ の値に関しては、初期状態における車両総エネルギー $E_V$ を基準として規格化する。

表3. 2. 1 関数制御の設計変数一覧

Table 3.2.1 Design variables for the function control

Design variables	Minimum	Maximum	Bit
Threshold value $E_2$	-2.00	5.75	5
Threshold value $E_3$	0.00	7.75	5
Threshold value $R_2$	0.000	0.484375	5
Threshold value $R_3$	0.700	1.184375	5
Altitude reference gain $K_A$	0.00	3.75	4

### 3. 3 一定出力による電力制御法のモデル化

ハイブリッド電源鉄道車両の消費エネルギー削減の観点からは、発電装置を小さくし、蓄電装置を大きくするほど効果的であり、発電装置から消費エネルギーの平均値を一定に出力し続けることが、最も消費エネルギーを最小にすることが示されている<sup>[3.3]</sup>。このため、この考え方を基本として、様々な機器容量に対応できる電力制御法を提案する。提案方式は、発電装置を一定出力で運転し続けることを原則とした一定出力による電力制御法(一定出力制御)となる。提案方式の発電装置の出力は、終点において蓄電装置残存容量が初期値に回復する最小限の値としている。このため、実際の発電装置最大出力に比べて出力に余裕がある運転となる。このことから、発電装置を小さくすることが可能であるが、他の手法と同一の機器容量で比較するため、余裕のある発電装置の出力のままに比較することとする。また、一定の出力を原則とするが、蓄電装置残存容量が目標の上限(使用範囲の最大SOCより2 [%]減じた値)に達した場合には、発電装置は、最小出力(燃料電池を想定した場合は最大出力の10 [%])で運転するものとする。

### 3. 4 蓄電エネルギーの制約

消費エネルギーを評価するにあたって、走行前と走行後での蓄電装置のエネルギーの増減がある場合、すなわち初期SOCと最終SOCが一致しない場合には、正しい評価を行うことができない。このため、各手法において、

$$SOC(T) = SOC(0) \quad (3. 4. 1)$$

となるような処理を行った。

動的計画法を用いた場合は、最終SOCを初期SOCと等しくする制約を加えて探索を行った。その結果を評価することで、蓄電装置のエネルギーの増減による影響を排除した。

また、関数制御と一定出力制御の場合は、終着駅到着後に、最終SOCを初期SOCと一致させるための制御を行うことで、消費エネルギーの妥当な評価を行った。具体的には、終着駅到着後に、蓄電装置のエネルギーの増減を 0 とするように制御するアルゴリズムを付加した。なお、終着駅でのSOCの回復時間 (300 [s]) が経過しても、初期のSOCに回復できなかった場合は、制約条件を満たさないものとして、実行可能解から除外した。これは、この制約条件を満たさない場合には、次の運用でSOCが不足してしまう可能性があり、実行可能解とは見なせないと考え、このような取り扱いとした。

## 第4節

# 評価手法

本論文では、前節で提案した電力制御に関する手法を用いて、多目的最適化の考え方にに基づき、ハイブリッド電源鉄道車両の適用路線に対する機器容量と消費エネルギーの特性及び電力制御法の特性を分析する。本節では、ハイブリッド電源鉄道車両の評価に用いる多目的最適化について述べる。また、動的計画法と多目的最適化を組み合わせた最適化手法では、計算時間が膨大なものとなる。そこで、本節では並列化計算を導入する。

### 4.1 多目的最適化の適用

多目的最適化問題は、設計変数 $x$ (ベクトル)によって表される $p$ 個の目的関数 $f_k(x)$  ( $k=1, \dots, p$ )を、制約条件を満たす可能領域 $F$ において、なるべく小さくする問題であると定義される。異なる設計変数 $x_1, x_2$ において、

$$x_1, x_2 \in F \quad (4.1.1)$$

の条件下で、 $p$ 個の目的関数 $f_k(x)$ に関して比較を行い、

$$f_k(x_1) \leq f_k(x_2) \quad (\forall k=1, \dots, p) \quad (4.1.2)$$

かつ、

$$f_k(x_1) < f_k(x_2) \quad (\exists k=1, \dots, p) \quad (4.1.3)$$

となるとき、 $x_1$ は $x_2$ に優越するという。ある $x_0$ に優越する

$$x \in F \quad (4.1.4)$$

が存在しないとき、 $x_0$ はパレート最適解であるという。パレート最適解は、複数の目的関数間でのトレードオフをバランスさせ得る解である<sup>[4.1-3]</sup>。

パレート最適解は解の集合として算出される。目的関数が2つである場合のパレート最適解の例を図4.1.1に示す。図4.1.1において、太線で示した原点寄りの境界部分がパレート最適解となる。

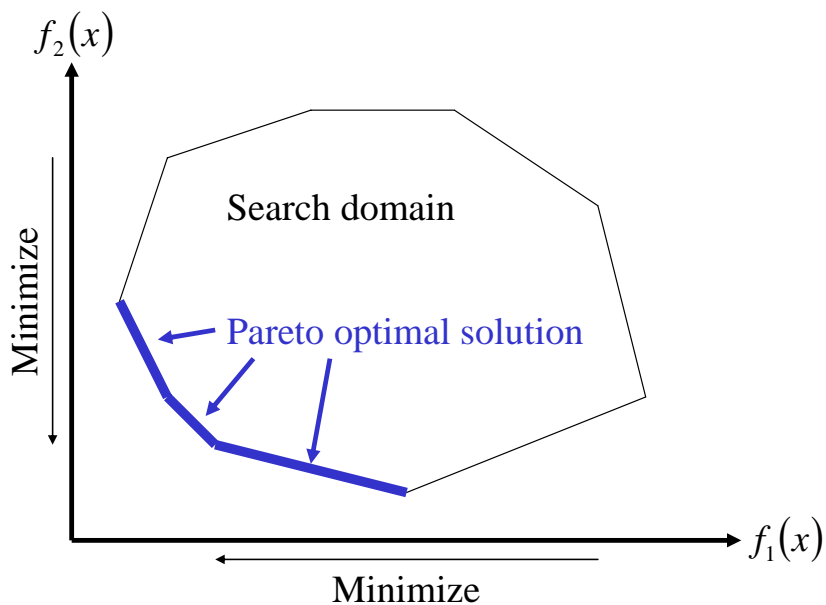


図4. 1. 1 多目的最適化の概念図

Fig. 4.1.1 A conceptual figure of the multiobjective optimization

本論文では、表4. 1. 1に示す設計変数のもとで探索を行う。各設計変数について、提案の電力制御手法に基づきシミュレーションを行う。これにより、各設計変数が実行可能解であるかどうかを判定するとともに、後述する目的関数の値を算出する。設計変数である発電装置出力 $P_{Gmax}$ の探索間隔は 25 [kW]で設定した。一方、蓄電装置容量 $C_S$ の探索間隔は、均等に割り振るのではなく、計算時間と計算精度を考慮して蓄電装置容量の小さい部分は密に、大きい部分は粗に設定した。

そして、表4. 1. 2に示す目的関数により、実行可能解の中からパレート最適解を抽出する。目的関数には、機器容量の縮小化の観点から、発電装置出力 $P_{Gmax}$ と蓄電装置容量 $C_S$ を設定した。また、消費エネルギーの削減の観点から、発電電力量 $E_G$ を設定した。

表4. 1. 1 最適化の設計変数一覧

Table 4.1.1 Design variables for the optimization

Design variables	Minimum	Maximum	Division
Generator power $P_{Gmax}$	175 [kW]	575 [kW]	17
Storage capacity $C_S$	0.00 [kWh]	36.00 [kWh]	32

表4. 1. 2 最適化の目的関数

Table 4.1.2 Objective functions for the optimization

Generator power $P_{Gmax}$	Minimize
Storage capacity $C_S$	Minimize
Generated energy $E_G$	Minimize

## 4.2 並列化計算の適用

動的計画法と多目的最適化を組み合わせた探索を実施すると、広範な探索空間からの大域的な探索が可能となるが、膨大な計算時間を要してしまう。そこで、図4.2.1に示す並列化計算を導入し、大規模計算を可能にする。並列化計算では、はじめに、並列化サーバから、設計変数の値を並列化クライアントに渡す。次に、シミュレーションを並列化クライアントで実行し、目的関数の値を並列化サーバに返す。この結果に対して並列化サーバにより多目的最適化を行う。具体的には、並列化サーバから与えられた機器容量の値により、動的計画法による電力制御法のもとで並列化クライアントが消費エネルギーを算出し、並列化サーバに返す。本計算は、設計変数毎に独立した計算を行うことができるため、計算機の台数を多くするほど、効果的な並列化計算が可能となる。並列化クライアントは、主に Xeon X5365 Quad Core Dual CPU、3.0 [GHz]、8.0 [GB]を使用した。並列化クライアントは、8台のCPUコアを搭載しており、一度に8個のプロセスを平行して実行できる。これを、計算負荷に応じて2台もしくは4台用いることにより、16個もしくは32個のプロセスの並列化を行った。

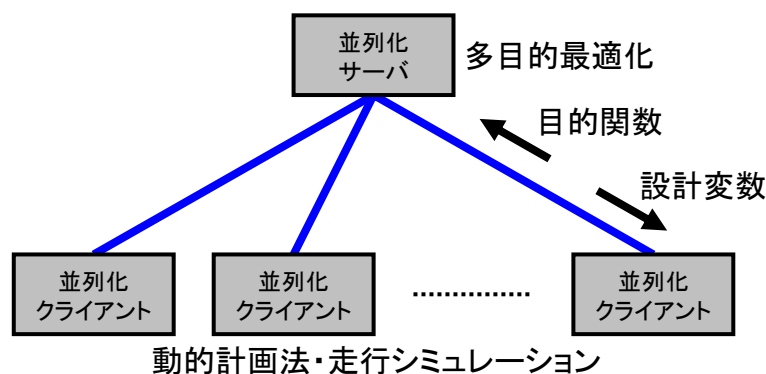


図4.2.1 並列化の概念図

Fig. 4.2.1 A conceptual figure of the parallelization

また、並列化計算の効果を確認するために、計算時間の測定を行った。実在する路線での検証は計算時間の観点から困難であるため、直線 3 [km]の路線(勾配・曲線なし)を対象として、動的計画法と多目的最適化を組み合わせた計算を行った。図4.2.2より、使用する計算機台数にほぼ比例した計算時間の短縮効果が見られる。例えば、並列化クライアントを4台用いて、CPUコア32個の条件においては、30.6倍の計算速度向上が図られている。本手法では、計算時間を要するとともに、機器容量毎に個別に計算が可能であるという特徴を持つ動的計画法について並列化計算により分散処理を行ったことにより、計算台数にほぼ比例した計算の高速化を図ることができたものと考えられる。

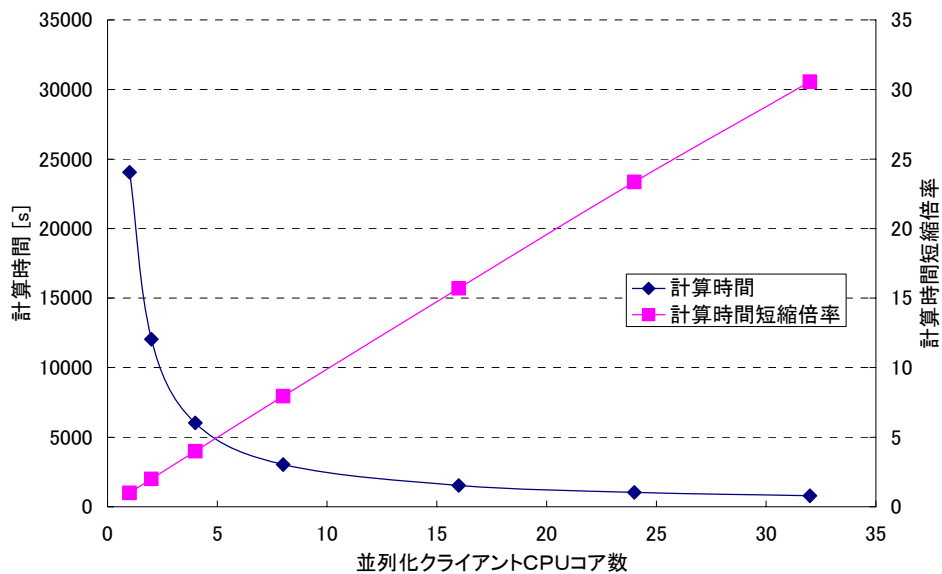


図4. 2. 2 並列化計算の効果の検証 (Xeon X5365 Quad Core Dual CPU、3.0 [GHz]、8.0 [GB])

Fig. 4.2.2 A verification of the parallelization

## 第5節

# 最適化結果

本節では、動的計画法と多目的最適化をネスト化した最適化手法により得られた結果を示し、ハイブリッド電源鉄道車両の導入に適した路線について議論するとともに、ハイブリッド電源鉄道車両の設計において有用な情報を提供する。併せて、提案した2つの電力制御法についても、多目的最適化による探索を行い、その結果について動的計画法を用いた場合の結果と比較し、電力制御法の善し悪しについても評価する。このため、本節では、電力制御手法に関して、動的計画法を用いた場合、関数制御を用いた場合、一定出力制御を用いた場合の結果を並べて示す。

### 5.1 計算結果

各路線に対する実行可能解とパレート最適解の分布を図5.1.1～9に示す。また、パレート最適解の中で、特異なものを Pareto-A～C として分類した。Pareto-A は発電電力量が最小となるもの、Pareto-B は発電装置が最小となるもの、Pareto-C は蓄電装置が最小となるものである。なお、Pareto-C は、ハイブリッド電源鉄道車両ではなく、蓄電装置の付いていない燃料電池単独の車両となる。

また、計算時間、実行可能解やパレート最適解の数などの計算結果を表5.1.1に示す。並列化クライアントは、Xeon X5365 Quad Core Dual CPU、3.0 [GHz]、8.0 [GB]を使用した。電力制御手法に動的計画法を用いた場合は、2台の計算機(CPUコア数:16)を使用し並列化計算を行った。並列化計算の適用により、計算時間を要する動的計画法を用いる場合でも概ね半日～1日程度の計算時間を実現した。それぞれのパレート最適解は機器容量が異なるため、列車質量の変動により所要時間は多少異なっているが、最大の所要時間と最小の所要時間を比較しても、その変動はわずかであり、大きな影響はないことが確認できる。

表5. 1. 1 計算結果一覧

Table 5.1.1 Lists of the optimization results

(a) 動的計画法／Dynamic programming

	An urban line	A hill line	A mountain line
Total computation time [s]	24303	33033	39303
Number of client CPU	16	16	16
Average computation time [s]	715	972	1156
Number of the Pareto-Optimal solutions	28	29	18
Number of the feasible solutions	334	204	106
Generated energy of Pareto-A [kWh]	135.6	246.8	393.5
Generated energy of Pareto-C [kWh]	173.1	293.3	451.6
Reduction ratio [%]	21.7	15.9	12.9
Maximum running time $T$ in the Paretos [s]	2912.1	4051.9	5424.8
Minimum running time $T$ in the Paretos [s]	2907.3	4023.5	5351.5
Maximum difference of the running time [%]	0.16	0.70	1.35

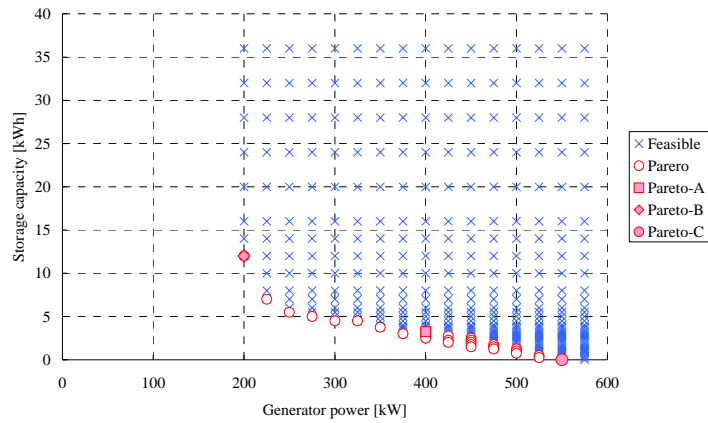
(b) 関数制御／Function control

	An urban line	A hill line	A mountain line
Total computation time [s]	17172	18396	14131
Number of client CPU	1	1	1
Average computation time [s]	32	34	26
Number of the Pareto-Optimal solutions	71	52	29
Number of the feasible solutions	344	213	110
Generated energy of Pareto-A [kWh]	135.2	246.2	392.4
Generated energy of Pareto-C [kWh]	173.1	293.3	451.6
Reduction effect [%]	21.9	16.1	13.1
Maximum running time $T$ in the Paretos [s]	2913.6	4061.0	5424.8
Minimum running time $T$ in the Paretos [s]	2907.3	4023.5	5351.4
Maximum difference of the running time [%]	0.22	0.92	1.35

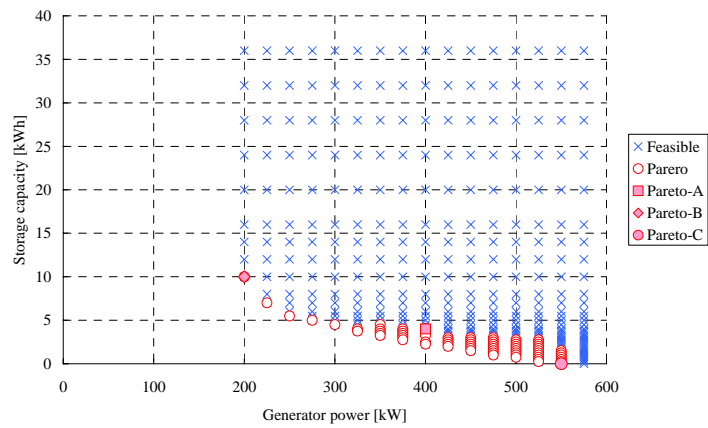
(c) 一定出力制御／Constant output control

	An urban line	A hill line	A mountain line
Total computation time [s]	173	293	268
Number of client CPU	1	1	1
Average computation time [s]	0.32	0.54	0.49
Number of the Pareto-Optimal solutions	22	21	6
Number of the feasible solutions	343	210	109
Generated energy of Pareto-A [kWh]	144.4	271.5	443.3
Generated energy of Pareto-C [kWh]	173.1	293.3	451.6
Reduction effect [%]	16.6	7.4	1.8
Maximum running time $T$ in the Paretos [s]	2911.4	4061.0	5424.8
Minimum running time $T$ in the Paretos [s]	2907.3	4023.5	5351.4
Maximum difference of the running time [%]	0.14	0.92	1.35

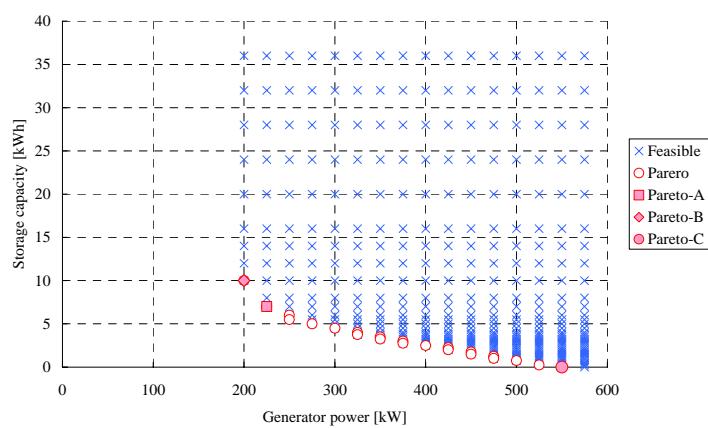




(a) 動的計画法／Dynamic programming



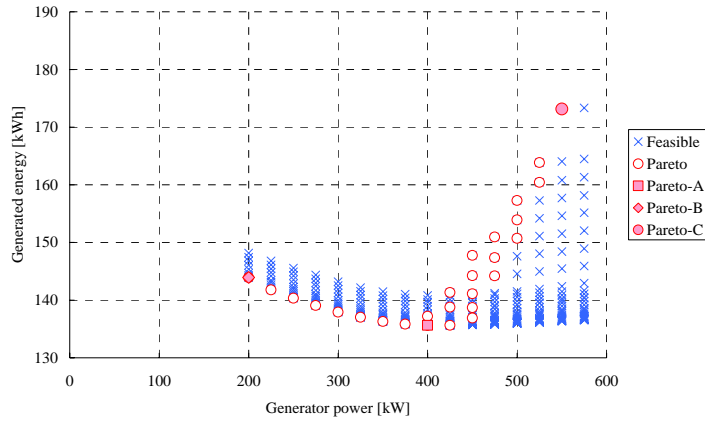
(b) 関数制御／Function control



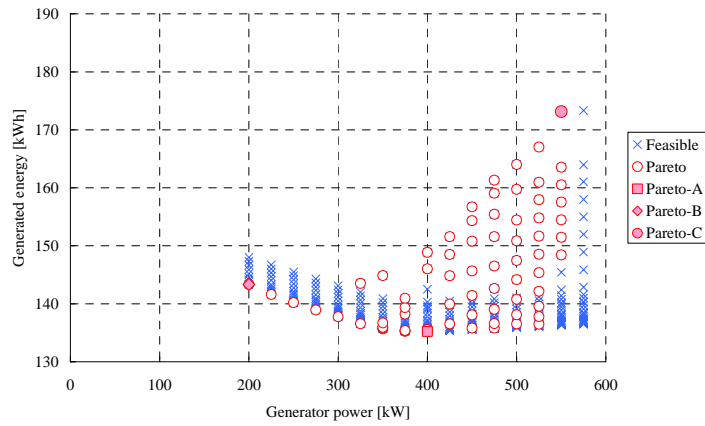
(c) 一定出力制御／Constant output control

図5. 1. 1 都市路線に対する実行可能解の分布

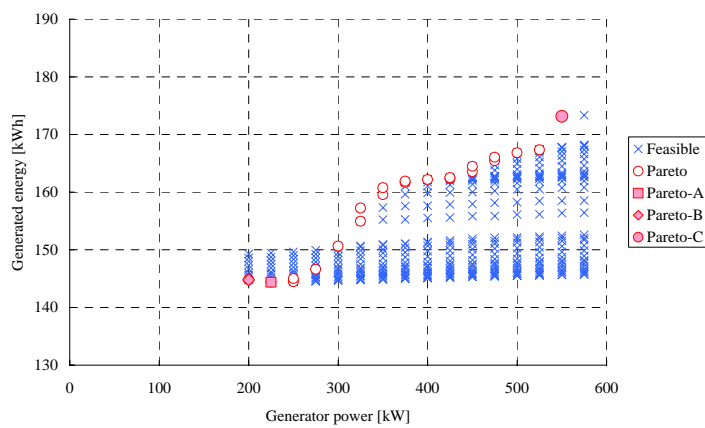
Fig. 5.1.1 Distribution of Pareto-Optimal solutions and feasible solutions for an urban line



(a) 動的計画法/Dynamic programming



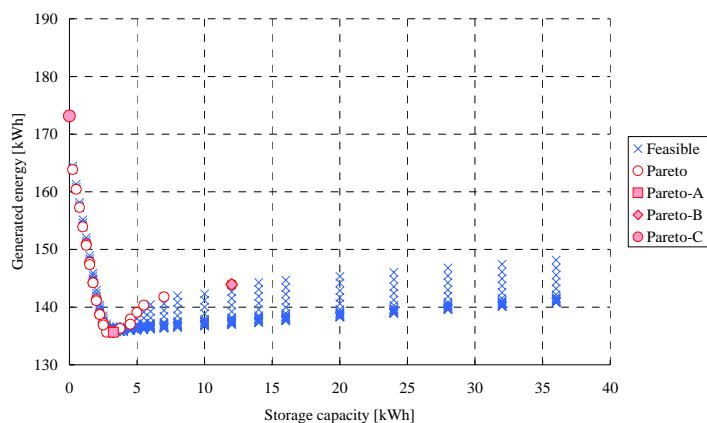
(b) 関数制御/Function control



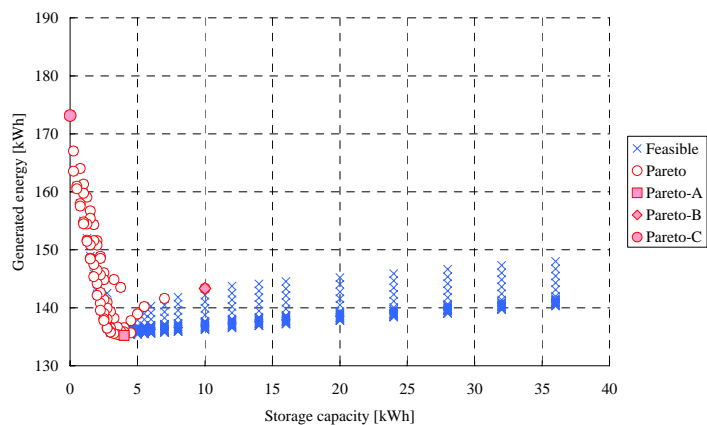
(c) 一定出力制御/Constant output control

図5. 1. 2 都市路線に対する燃料電池出力と発電電力量の関係

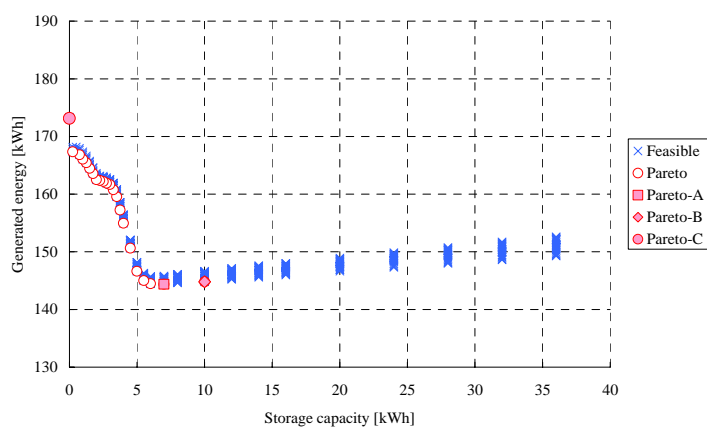
Fig. 5.1.2 Relationship between FC power and generated energy for an urban line



(a) 動的計画法/Dynamic programming



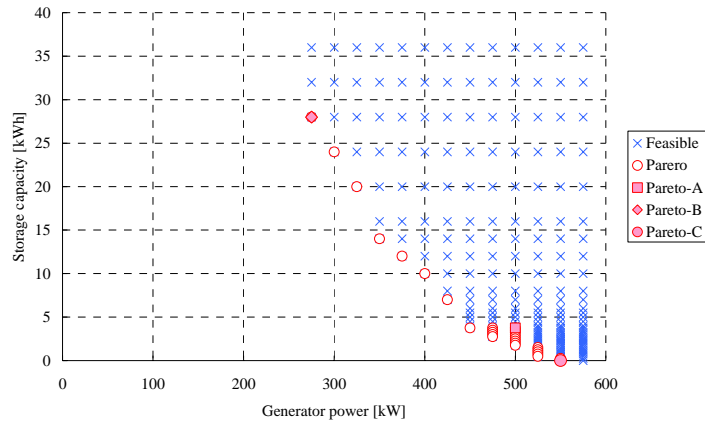
(b) 関数制御/Function control



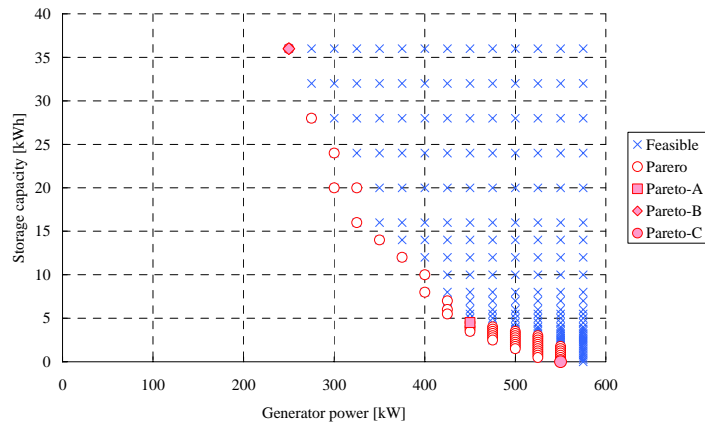
(c) 一定出力制御/Constant output control

図5. 1. 3 都市路線に対する蓄電装置容量と発電電力量の関係

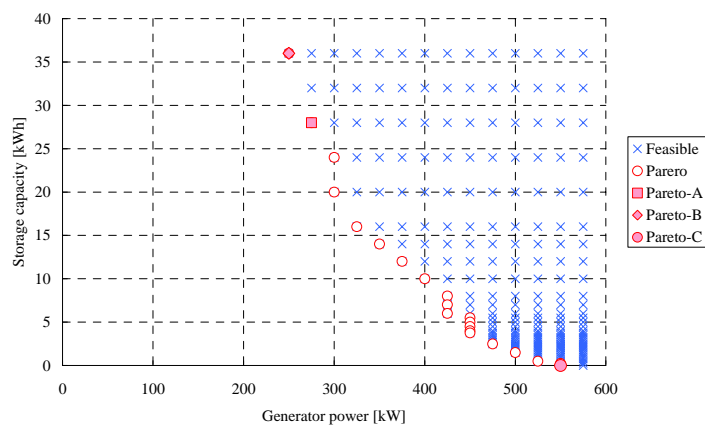
Fig. 5.1.3 Relationship between EDLC capacity and generated energy for an urban line



(a) 動的計画法/Dynamic programming



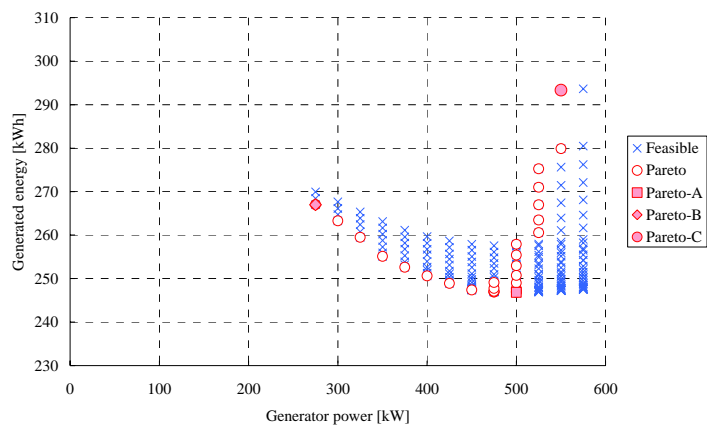
(b) 関数制御/Function control



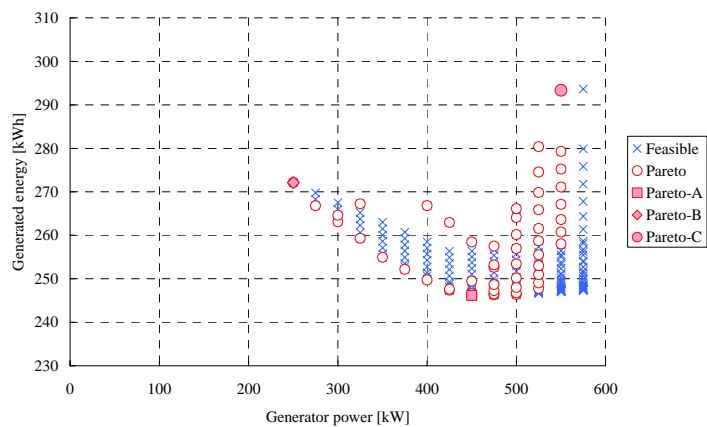
(c) 一定出力制御/Constant output control

図5. 1. 4 丘陵路線に対する実行可能解の分布

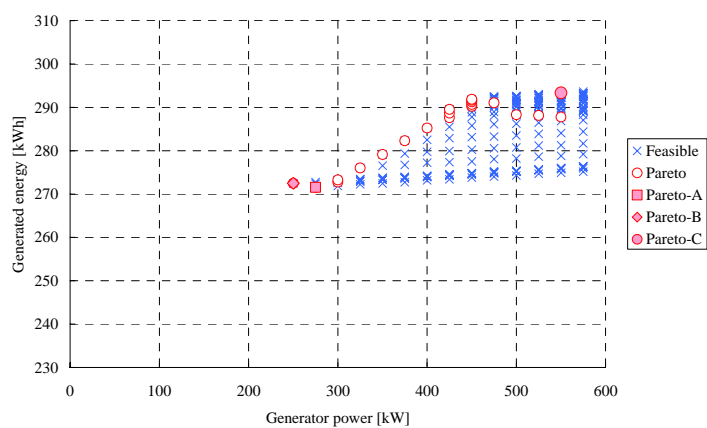
Fig. 5.1.4 Distribution of Pareto-Optimal solutions and feasible solutions for a hill line



(a) 動的計画法/Dynamic programming



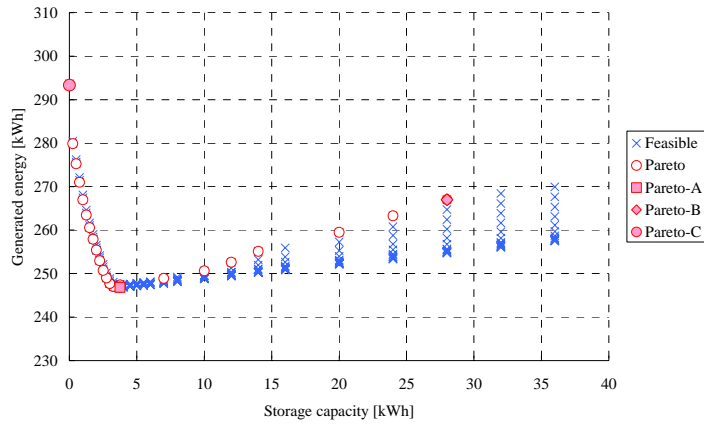
(b) 関数制御/Function control



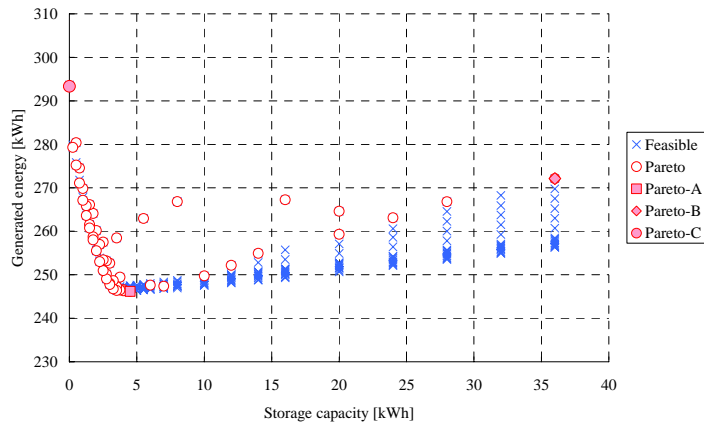
(c) 一定出力制御/Constant output control

図5. 1. 5 丘陵路線に対する燃料電池出力と発電電力量の関係

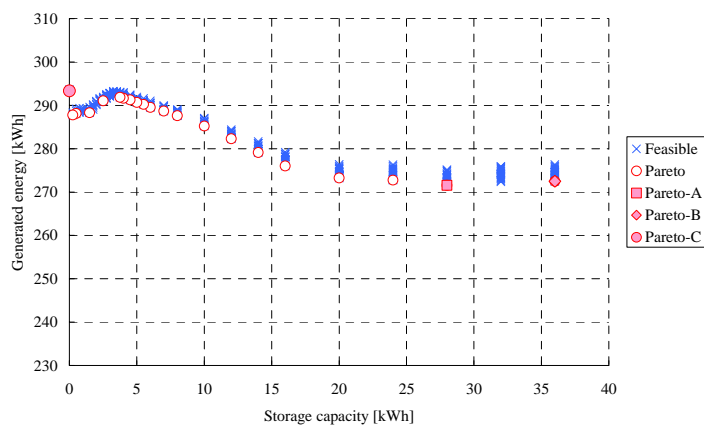
Fig. 5.1.5 Relationship between FC power and generated energy for a hill line



(a) 動的計画法/Dynamic programming



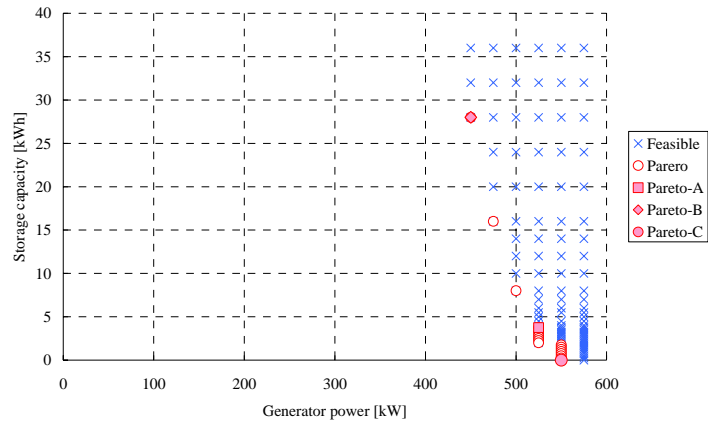
(b) 関数制御/Function control



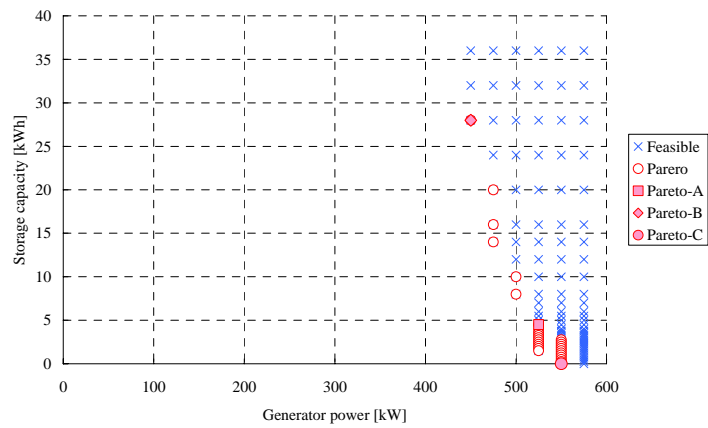
(c) 一定出力制御/Constant output control

図5. 1. 6 丘陵路線に対する蓄電装置容量と発電電力量の関係

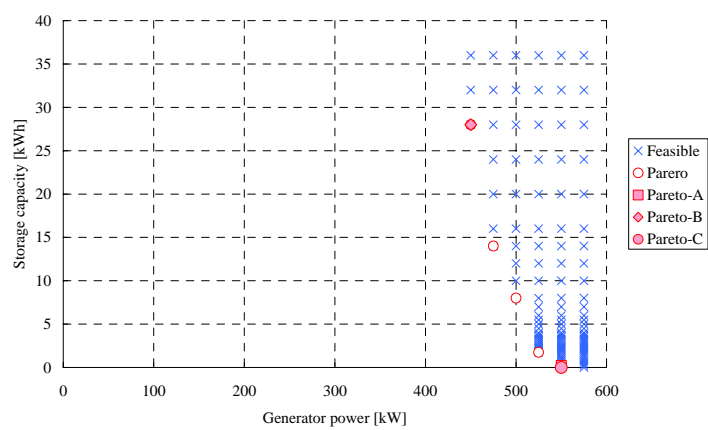
Fig. 5.1.6 Relationship between EDLC capacity and generated energy for a hill line



(a) 動的計画法/Dynamic programming



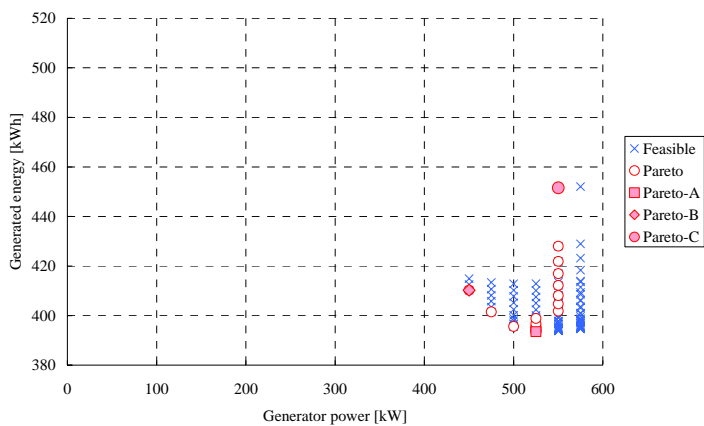
(b) 関数制御/Function control



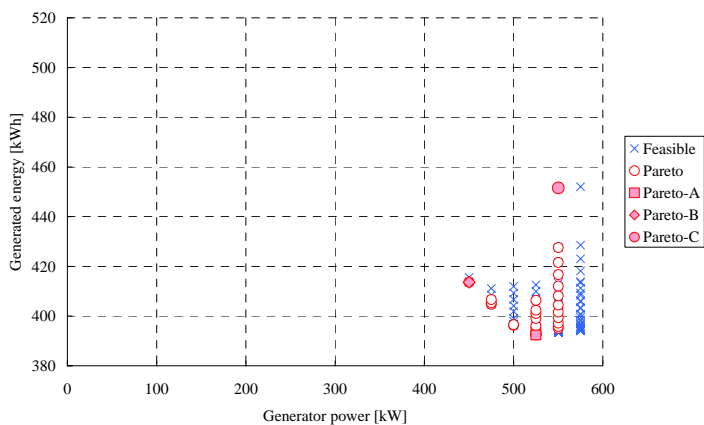
(c) 一定出力制御/Constant output control

図5. 1. 7 山岳路線に対する実行可能解の分布

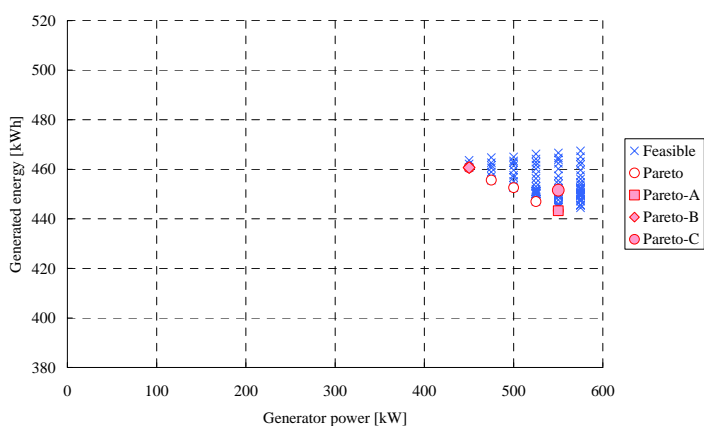
Fig. 5.1.7 Distribution of Pareto-Optimal solutions and feasible solutions for a mountain line



(a) 動的計画法/Dynamic programming



(b) 関数制御/Function control

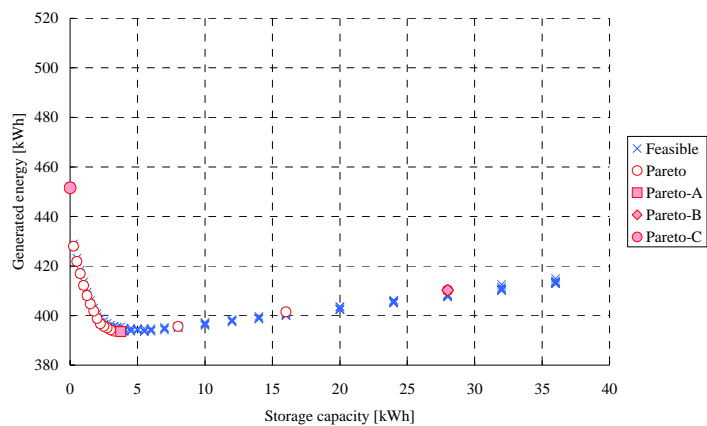


(c) 一定出力制御/Constant output control

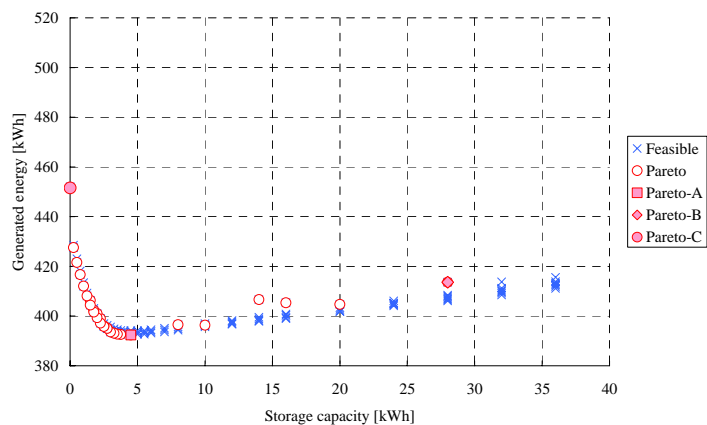
図5. 1. 8 山岳路線に対する燃料電池出力と発電電力量の関係

Fig. 5.1.8 Relationship between FC power and generated energy for a mountain line

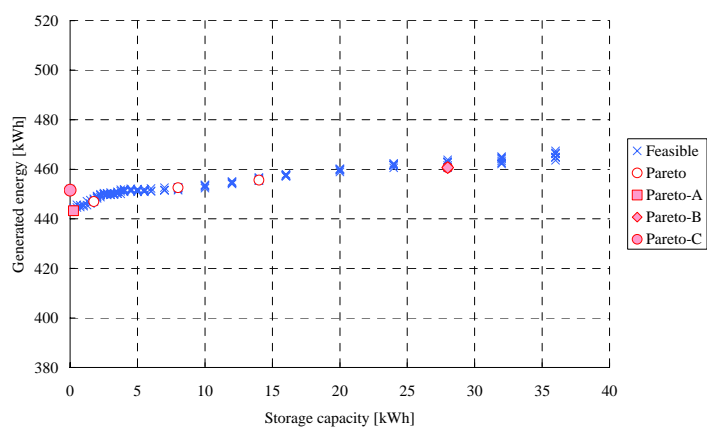




(a) 動的計画法/Dynamic programming



(b) 関数制御/Function control



(c) 一定出力制御/Constant output control

図5. 1. 9 山岳路線に対する蓄電装置容量と発電電力量の関係

Fig. 5.1.9 Relationship between EDLC capacity and generated energy for a mountain line

## 5.2 パレート最適解の分析

本項では、理想的な電力制御がなされていると考えられる動的計画法の結果をもとに、パレート最適解に着目し、機器容量と消費エネルギーの関係について主に考察する。

図5.1.1、4、7の機器容量の分布より、発電装置出力と蓄電装置容量の間には、トレードオフ関係があることがわかる。多くのパレート最適解は、このトレードオフのカーブを構成している。ただし、トレードオフ関係はあるものの発電装置出力の縮小化には限度があり、発電装置を極小にしようとする、特に大きな蓄電装置が必要となる。また、路線毎に比較すると、表5.1.1に示す実行可能解の数及び図5.1.1、4、7に示す実行可能な範囲が大きく異なっている。これは、駅間が長く、勾配の厳しい路線ほど、大きな機器容量が要求されるためである。このため、パレート最適解も都市路線では様々なものを取り得るが、山岳路線では限られた範囲に集中している。すなわち、都市路線では、様々な機器容量のハイブリッド電源鉄道車両が想定されるのに対して、山岳路線では、ハイブリッド電源鉄道車両の機器容量に選択の余地は少なくなる。

図5.1.2(a)、5(a)、8(a)の動的計画法における発電電力量の発電装置出力との関係より、発電電力量は発電装置出力に対して極小値を持つことがわかる。この極小値が Pareto-A となっている。ここを境にして、パレート最適解の分布は傾向が変わっている。Pareto-A よりも発電装置出力が小さくなるにつれて、発電電力量は増大するが、変化量はあまり大きくない。一方、Pareto-A よりも発電装置出力が大きくなるにつれて、発電電力量は大幅に増大する。

図5.1.3(a)、6(a)、9(a)の動的計画法における発電電力量の蓄電装置容量との関係より、発電電力量は蓄電装置容量に対して極小値を持つことがわかる。Pareto-A よりも蓄電装置容量が小さくなるにつれて、発電電力量は大幅に増大する。これは、蓄電装置容量が小さくなると回生できる電力量が減少するためである。一方、Pareto-A よりも蓄電装置容量が大きくなるにつれて、発電電力量は増大するが、変化量はあまり大きくない。これは、蓄電装置容量が大きくなると列車の質量が増大するためである。以上より、消費エネルギーの観点から考えると、蓄電装置容量が Pareto-A よりも小さい範囲での設計を行う場合は、なるべく蓄電装置容量が大きくなるように設計を行った方が良いことがわかる。一方、蓄電装置容量が Pareto-A よりも大きい範囲での設計を行う場合は、消費エネルギーについてはあまり考慮しなくても良好な結果が得られることがわかる。

また、提案する設計・評価手法により、各路線におけるハイブリッド電源鉄道車両の導入効果も提示することができる。ここでは、表5.1.1の消費エネルギーの削減率の観点から検討を行う。消費エネルギーの削減率は、蓄電装置を有しない Pareto-C に対して、発電電力量(消費エネルギー)が最小となるハイブリッド電源鉄道車両である Pareto-A の発電電力量の削減量を示したものである。表5.1.1(a)に示すように、消費エネルギーの削減率は、都市路線で 21.7 [%]、丘陵路線で 15.9 [%]、山岳路線で 12.9 [%]となっている。これより、消費エネルギーの観点からすると、ハイブリッド電源鉄道車両は、駅間距離が短く、勾配の少ない都市路線に効果的であると考えられる。

### 5.3 電力制御法の検証

提案の電力制御法について検証するために、丘陵路線に対する電力制御の結果を図5. 3. 1～7に示す。発電電力量が最小となる Pareto-A と、発電装置が最小となる Pareto-B については、各電力制御手法の結果を示す。また、蓄電装置の付いていない Pareto-C については、必要な車両負荷電力を全て発電装置から賄う形となるため、電力制御手法の区別はなく、どの手法を用いても同様の結果となる。

はじめに、発電電力量が最小となる Pareto-A の場合について検討する。図5. 3. 1より、動的計画法と関数制御の発電電力は、負荷に追従し、力行時は最大出力、回生時・惰行時は最小出力となることが多い。図5. 3. 2より、動的計画法と関数制御の蓄電装置残存容量(SOC)は満充電状態となることは少なく、回生電力も有効に回収されている。一方、一定出力制御においては、他の電力制御手法と比べて蓄電装置容量が大きいものが Pareto-A となっているにもかかわらず、満充電状態となることがしばしばあり、回生電力が回収できていない場合が見られる。また、SOCと速度の関係から検討すると図5. 3. 3より、一定出力制御ではSOCの変動範囲が広く、あまり適切なSOC範囲にないものと考えられる。一方、関数制御では車両エネルギーの考え方に基づいているため、速度の上昇とともにSOCが低下するような傾向となっている。また、動的計画法では速度が高い領域においてもSOCが高い状態も見られるが、上限に達した状態が続くことはなく、回生電力の回収は確実にできていると考えられる。この結果、図5. 1. 5、6に示すように、ほとんどの発電装置出力において、一定出力制御の発電電力量は他の電力制御手法の結果よりも大きな値となってしまう。

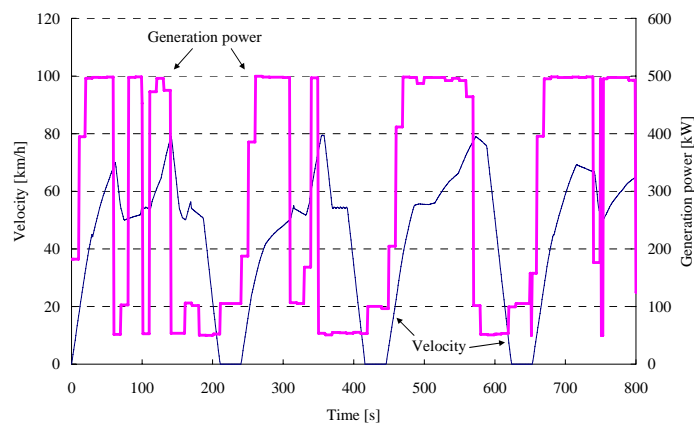
次に、発電装置が最小となる Pareto-B の場合について検討する。図5. 3. 4より、いずれの電力制御手法でも、発電電力に変動は少なく、多くの時間において最大発電電力となっている。これは、発電装置が小さいため、常に最大出力付近で発電を続けると必要な消費エネルギーを賄うことができないためであると考えられる。この結果、図5. 1. 5、6に示すように、発電装置が特に小さい場合は、発電電力量に大きな差は生じていない。すなわち、Pareto-B の機器容量においては、いずれの電力制御手法を用いても一定出力制御に近くなり、制御されるパターンとその結果として得られる消費エネルギーの観点からは、手法による違いはほとんど見られない。なお、速度とSOCの関係から見ると、Pareto-B においては、発電装置に余裕が少なく蓄電装置が大きいため、いずれの電力制御手法においてもSOCの変動範囲が大きくなっている。すなわち、列車の運転に伴う負荷の変動にほぼ依存する形で、SOCが変化しているものと考えられる。

また、図5. 1. 2、3、5、6の発電電力量の特性において、関数制御の結果を、動的計画法の結果と比較すると、蓄電装置容量が Pareto-A よりも小さい領域、言い換えると、発電装置出力が Pareto-A よりも大きい領域においては、パレート最適解が分散しており、パレート最適解の数も多くなっている。これは、この領域においては、蓄電装置容量が小さいため、回生電力に対して蓄電装置容量の余裕は少なく、適切な電力制御が難しい領域であるためと考えられる。このため、この領域では電力制御が多少変動しただけでも発電電力量の変化は大きく、高精度な電力制御法が求められると考えられる。この結果、この領域の関数制御は、動的計画法で求めた最小な消費エネルギーよりも多少劣っていることがあり、改良の余地が残されている場合も見受けられる。しかしながら、概して関数制御の結果は、一定出力制御の結果に比べると動的計画法の結果に近くっており、関数制御は、どのような路線条件や機器容量においても、広く適用できると考えられる。

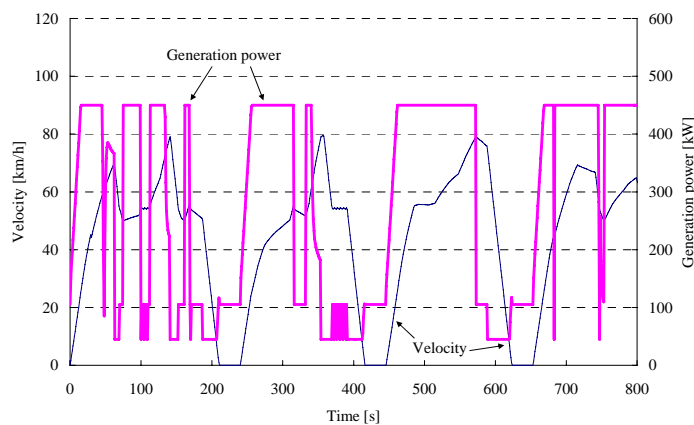
以上をまとめると、動的計画法を用いることにより、Pareto-A の場合は負荷に追従した制御となり、

Pareto-B の場合は一定出力の制御と、コンセプトの異なる電力制御法を1つの手法で実現していることが確認できる。これより、動的計画法は、路線条件や機器容量に応じた様々な電力制御を実現し、各条件下での最適化が実現されていると考えられる。このため、様々な条件に対する消費エネルギーを分析するのにあたり、動的計画法の結果を用いて評価することの有効性が示されたものと考えられる。

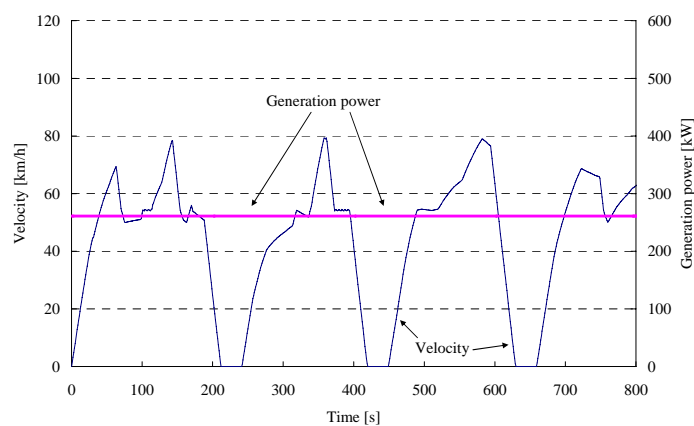
また、現実的な電力制御法を検討するにあたっては、発電装置が最小となる Pareto-B に近い場合は、一定出力制御のような簡便な電力制御においても、与えられた機器容量下で良好な制御が可能であることが確認できる。一方、車両エネルギーの考え方に基づく関数制御のような電力制御を用いることで、様々な路線条件や機器容量に対して、個々の条件下での概ね最小の消費エネルギーに近い良好な制御が可能であることが確認できる。



(a) 動的計画法/Dynamic programming

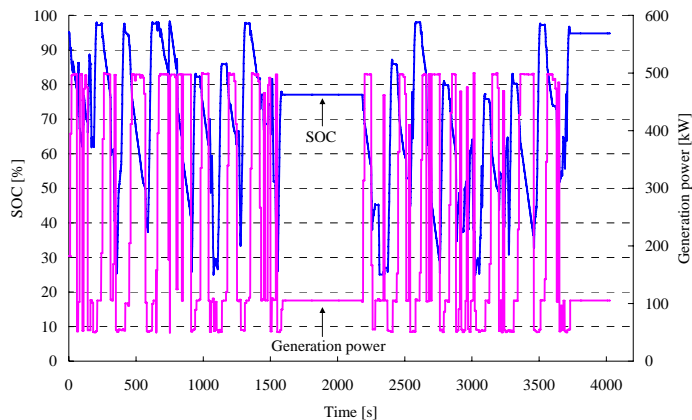


(b) 関数制御/Function control

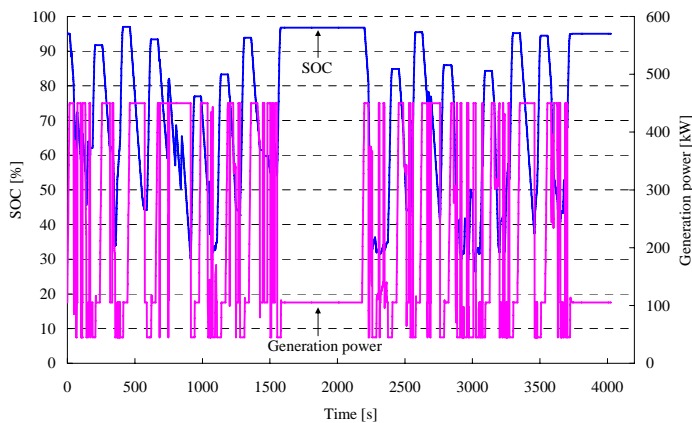


(c) 一定出力制御/Constant output control

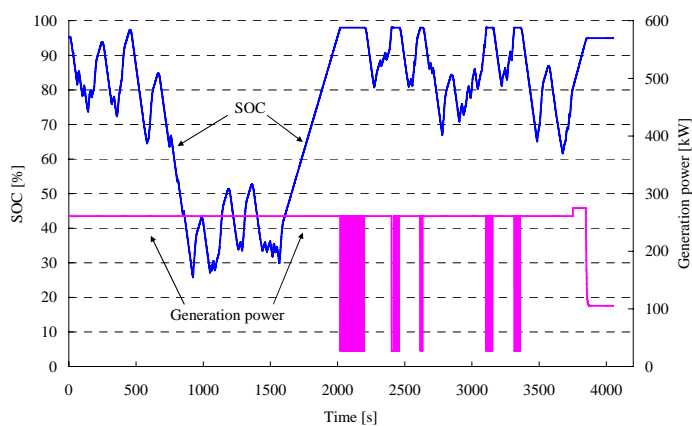
図5.3.1 丘陵路線の Pareto-A における電力制御(速度と発電電力の関係)  
 Fig. 5.3.1 Power control of Pareto-A for a hill line (velocity and generation power)



(a) 動的計画法/Dynamic programming

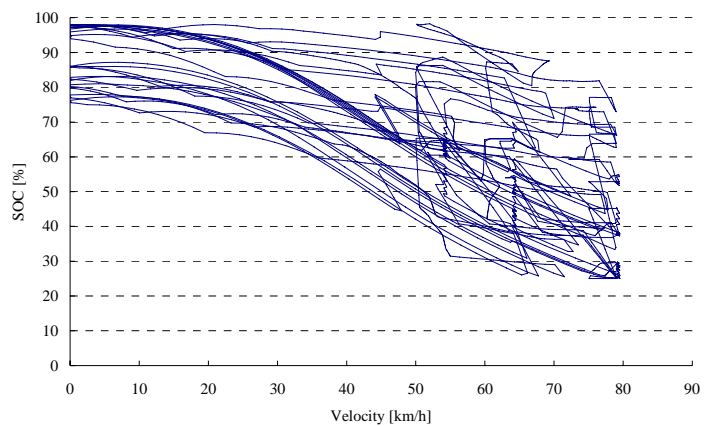


(b) 関数制御/Function control

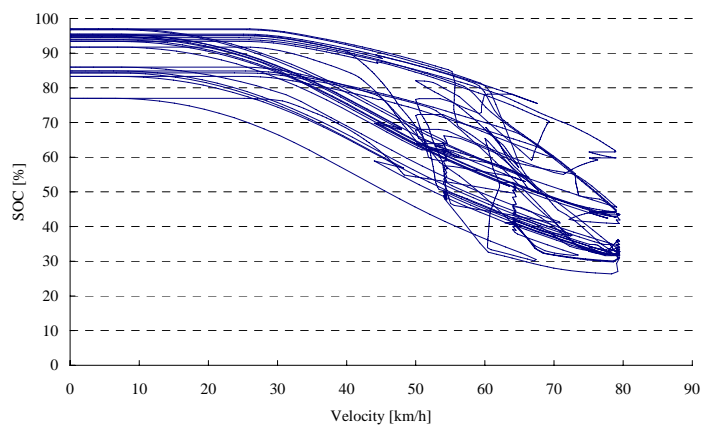


(c) 一定出力制御/Constant output control

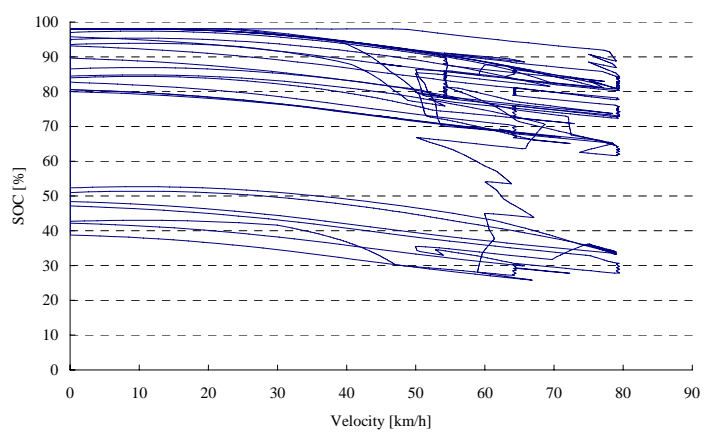
図5. 3. 2 丘陵路線の Pareto-A における電力制御 (SOC と発電電力の関係)  
 Fig. 5.3.2 Power control of Pareto-A for a hill line (SOC and generation power)



(a) 動的計画法／Dynamic programming



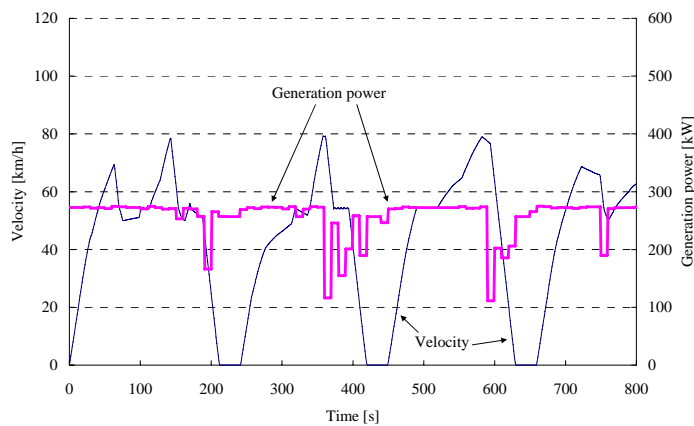
(b) 関数制御／Function control



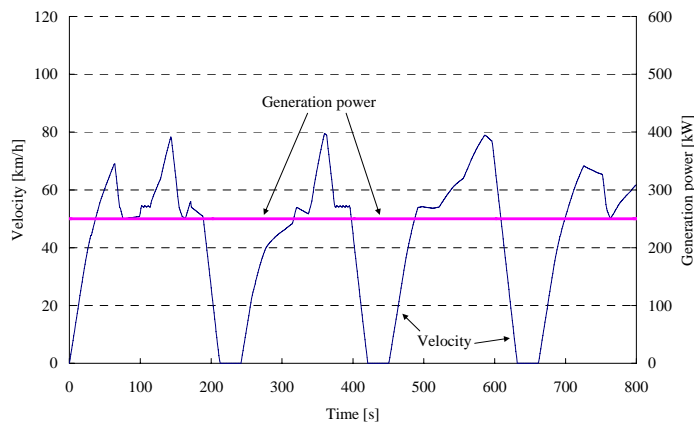
(c) 一定出力制御／Constant output control

図5. 3. 3 丘陵路線の Pareto-A における電力制御(速度と SOC の関係)

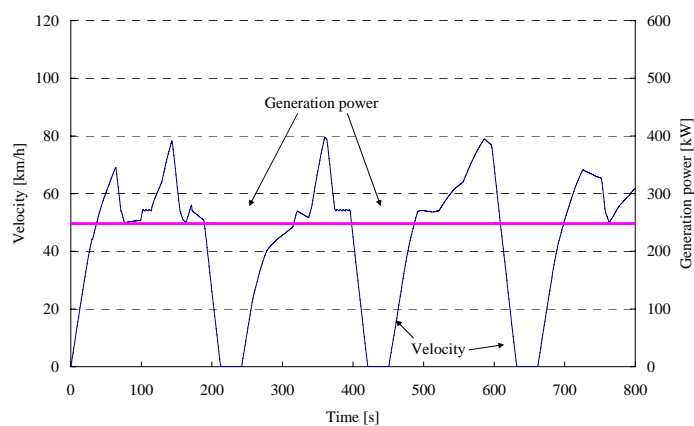
Fig. 5.3.3 Power control of Pareto-A for a hill line (Velocity and SOC)



(a) 動的計画法/Dynamic programming



(b) 関数制御/Function control

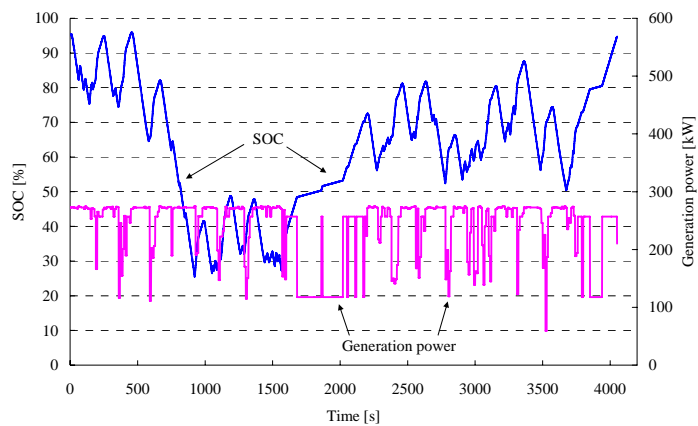


(c) 一定出力制御/Constant output control

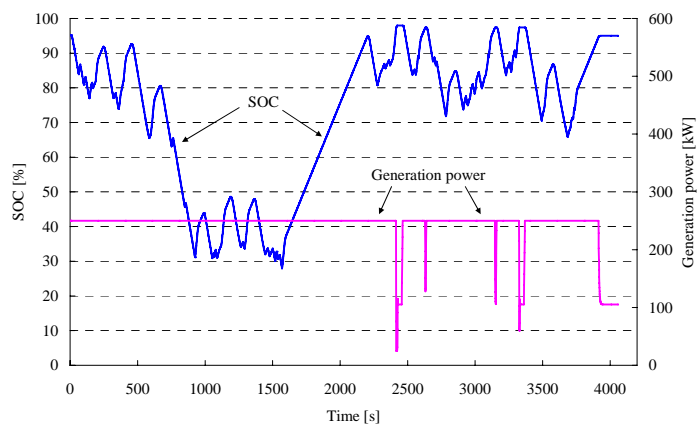
図5.3.4 丘陵路線の Pareto-B における電力制御(速度と発電電力の関係)

Fig. 5.3.4 Power control of Pareto-B for a hill line (velocity and generation power)

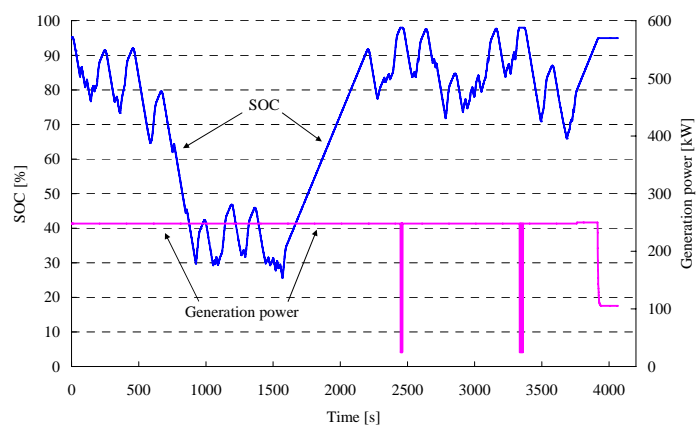




(a) 動的計画法/Dynamic programming

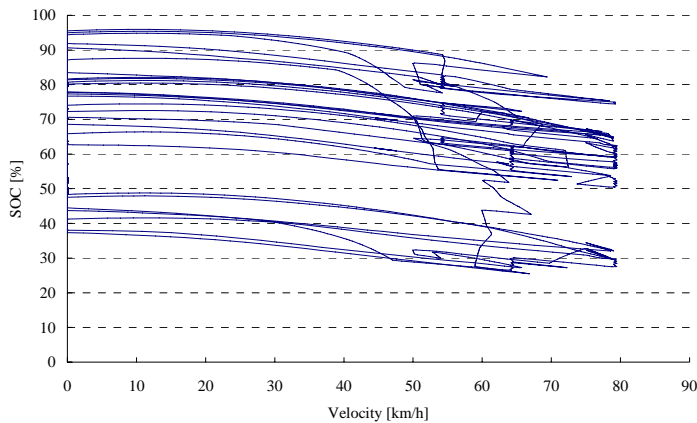


(b) 関数制御/Function control

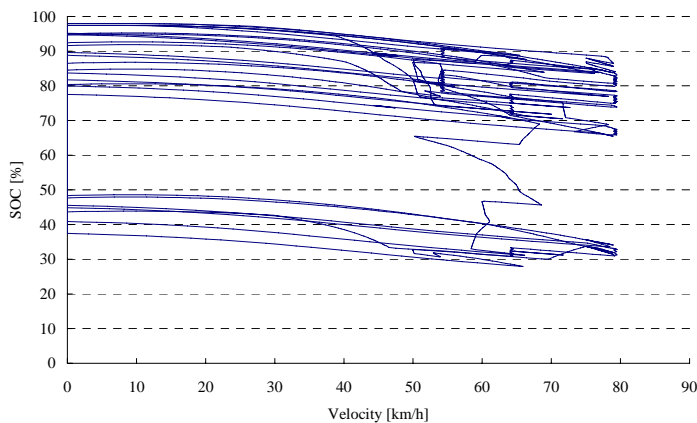


(c) 一定出力制御/Constant output control

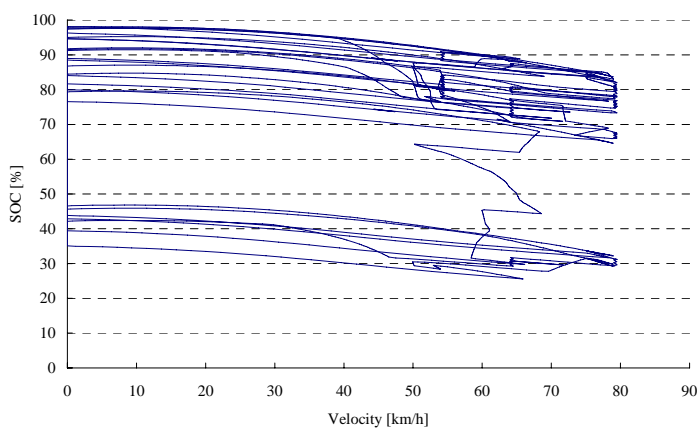
図5. 3. 5 丘陵路線の Pareto-B における電力制御 (SOC と発電電力の関係)  
 Fig. 5.3.5 Power control of Pareto-B for a hill line (SOC and generation power)



(a) 動的計画法/Dynamic programming



(b) 関数制御/Function control



(c) 一定出力制御/Constant output control

図5. 3. 6 丘陵路線の Pareto-B における電力制御(速度と SOC の関係)

Fig. 5.3.6 Power control of Pareto-B for a hill line (Velocity and SOC)

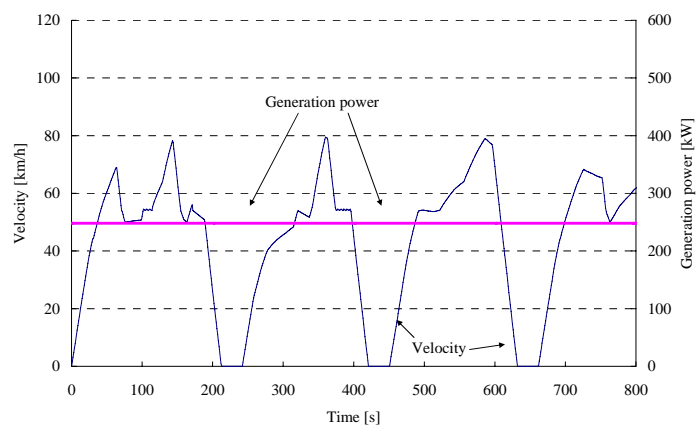


図5. 3. 7 丘陵路線の Pareto-C における電力制御(速度と発電電力の関係)

Fig.5.3.7 Power control of Pareto-C for a hill line (velocity and generation power)



## 第6節

# 蓄電媒体の検討

本節では、ハイブリッド電源鉄道車両に適した蓄電媒体を検討するために、提案した動的計画法と多目的最適化をネスト化した最適化手法を用いて最適化計算を行うことで、ハイブリッド電源鉄道車両の蓄電媒体に対する特性を分析する。

### 6.1 蓄電媒体のモデル

対象とする蓄電装置は、電気二重層キャパシタとリチウムイオン蓄電池とする。リチウムイオン蓄電池は、パワー密度が高いものと、エネルギー密度が高いものの2種類を想定した。蓄電装置のモデルは、表6. 1. 1に示すようにパワー密度、エネルギー密度、蓄電装置残存容量(SOC)の使用範囲を変化させた。

表6. 1. 1 蓄電装置諸元

Table 6.1.1 Assumed specifications of storage devices

	EDLC	High-Power Li-ion battery	High-Capacity Li-ion battery
Energy density	5.0 [Wh/kg]	50.0 [Wh/kg]	100.0 [Wh/kg]
Power density	1.0 [kW/kg]	1.0 [kW/kg]	0.5 [kW/kg]
Range of use for SOC	25 – 100 [%]	20 – 60 [%]	20 – 60 [%]

## 6.2 多目的最適化の適用

本節では、表6. 2. 1に示す設計変数のもとで、シミュレーションを行う。電気二重層キャパシタに比べてエネルギー密度が高く、パワー密度の低いリチウムイオン蓄電池も想定するため、表4. 1. 1の設計変数に比べて、蓄電装置容量の探索範囲を広めている。なお、蓄電装置に関する設計変数には、蓄電装置容量を用いているが、蓄電装置の最大充電電力と最大放電電力は、表6. 1. 1に示すパワー密度とエネルギー密度から計算される。

そして、表6. 2. 2に示す目的関数により、実行可能解の中からパレート最適解を抽出する。目的関数に関しては、前節までと同様である。

表6. 2. 1 最適化の設計変数一覧

Table 6.2.1 Design variables for the optimization

Design variables	Minimum	Maximum	Division
Generator power $P_{Gmax}$	175 [kW]	575 [kW]	17
Storage capacity $C_S$	0.00 [kWh]	96.00 [kWh]	32

表6. 2. 2 最適化の目的関数

Table 6.2.2 Objective functions for the optimization

Generator power $P_{Gmax}$	Minimize
Storage capacity $C_S$	Minimize
Generated energy $E_G$	Minimize

## 6.3 計算結果

各路線に対する実行可能解とパレート最適解の分布を図6. 3. 1～6に示す。また、パレート最適解の中で、特異なものを Pareto-A～C として分類した。Pareto-A は発電電力量が最小となるもの、Pareto-B は蓄電装置が最小となるもの、Pareto-C は蓄電装置が最小となるものである。なお、Pareto-C は、ハイブリッド電源鉄道車両ではなく、蓄電装置の付いていない燃料電池単独の車両となる。

また、計算時間、実行可能解やパレート最適解の数などの計算結果を表6. 3. 1に示す。並列化クライアントは、Xeon X5365 Quad Core Dual CPU、3.0 [GHz]、8.0 [GB]を4台使用した。計算時間は、路線や蓄電媒体の種類によって異なるが、11～32 時間程度を要している。前節の動的計画法を適用した場合に比べて、計算機台数が増加しているにもかかわらず、これだけの計算時間を要しているのは、蓄電装置容量の探索範囲が広がったためである。第4節での検討結果からすると、4台の計算機(CPUコア数:32)を使用した場合、並列化計算により約 30 倍の高速化が図られている。すなわち、並列化計算を用いないで本節の最適化計算を行ったとすると、1条件あたり 14～40 日ほどを要してしまうこととなり、実用的な計算時間での最適化計算は不可能である。これより、提案手法において並列化計算の有用性が確認された。

表6. 3. 1 計算結果一覧

Table 6.3.1 Lists of the optimization results

(a) 都市路線／An urban line

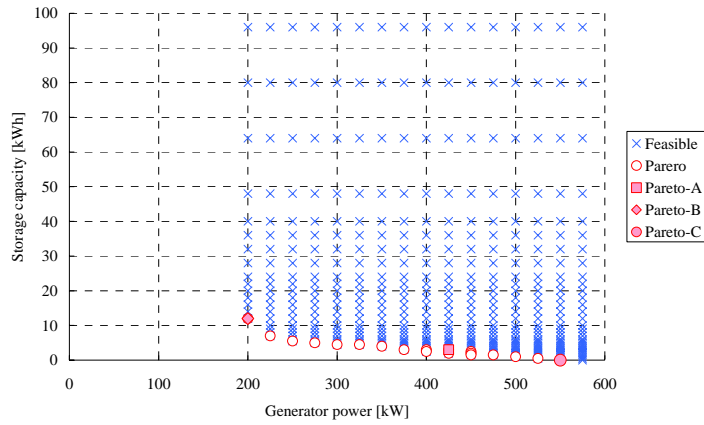
	EDLC	High-Power Li-ion battery	High-Capacity Li-ion battery
Total computation time [s]	38861	71532	64564
Number of client CPU	32	32	32
Average computation time [s]	1851	3406	3074
Number of the Pareto-Optimal solutions	19	80	74
Number of the feasible solutions	410	327	188
Generated energy of Pareto-A [kWh]	135.6	135.2	135.5
Generated energy of Pareto-C [kWh]	173.1	173.1	173.1
Reduction ratio [%]	21.7	21.9	21.7
Maximum running time $T$ in the Paretos [s]	2912.1	2911.7	2911.7
Minimum running time $T$ in the Paretos [s]	2907.3	2902.4	2904.2
Maximum difference of the running time [%]	0.16	0.32	0.26

(b) 丘陵路線／A hill line

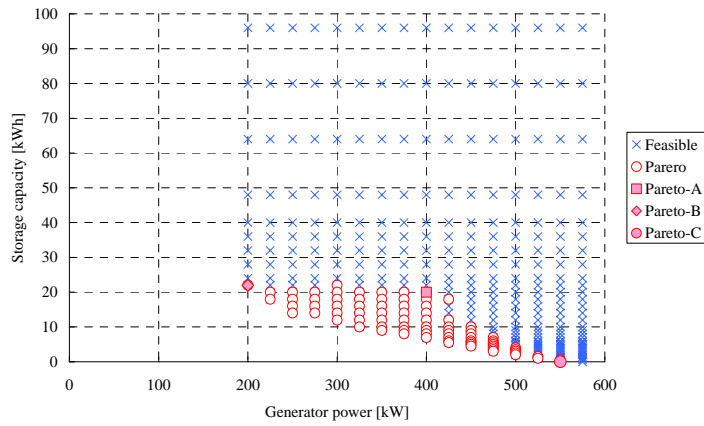
	EDLC	High-Power Li-ion battery	High-Capacity Li-ion battery
Total computation time [s]	64564	101863	95044
Number of client CPU	32	32	32
Average computation time [s]	3074	4851	4526
Number of the Pareto-Optimal solutions	20	46	95
Number of the feasible solutions	270	215	181
Generated energy of Pareto-A [kWh]	246.8	246.0	246.6
Generated energy of Pareto-C [kWh]	293.3	293.3	293.3
Reduction ratio [%]	15.9	16.1	15.9
Maximum running time $T$ in the Paretos [s]	4066.8	4024.8	4027.5
Minimum running time $T$ in the Paretos [s]	4023.5	4017.4	4015.3
Maximum difference of the running time [%]	1.06	0.18	0.30

(c) 山岳路線／A mountain line

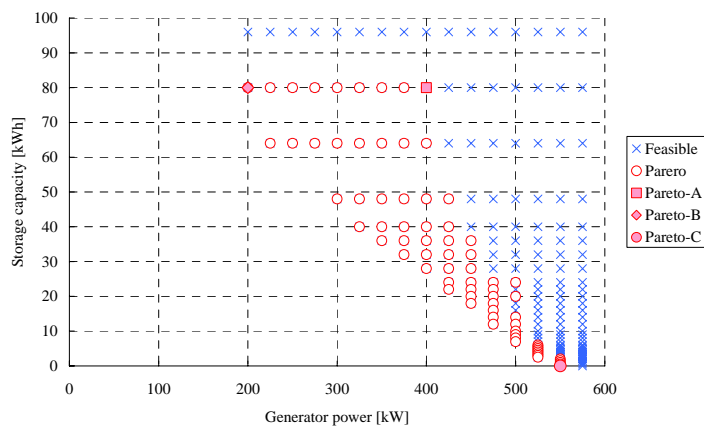
	EDLC	High-Power Li-ion battery	High-Capacity Li-ion battery
Total computation time [s]	72591	114879	116934
Number of client CPU	32	32	32
Average computation time [s]	3457	5470	5568
Number of the Pareto-Optimal solutions	16	31	40
Number of the feasible solutions	139	114	105
Generated energy of Pareto-A [kWh]	393.5	390.6	391.8
Generated energy of Pareto-C [kWh]	451.6	451.6	451.6
Reduction ratio [%]	12.9	13.5	13.2
Maximum running time $T$ in the Paretos [s]	5612.3	5364.1	5356.9
Minimum running time $T$ in the Paretos [s]	5351.5	5350.4	5348.8
Maximum difference of the running time [%]	4.65	0.26	0.15



(a) 電気二重層キャパシタ/EDLC



(b) 高出力型リチウムイオン蓄電池/High-Power Li-ion battery

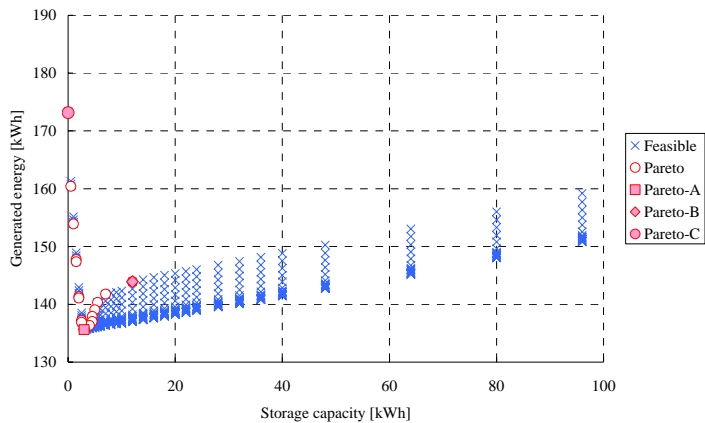


(c) 高容量型リチウムイオン蓄電池/High-Capacity Li-ion battery

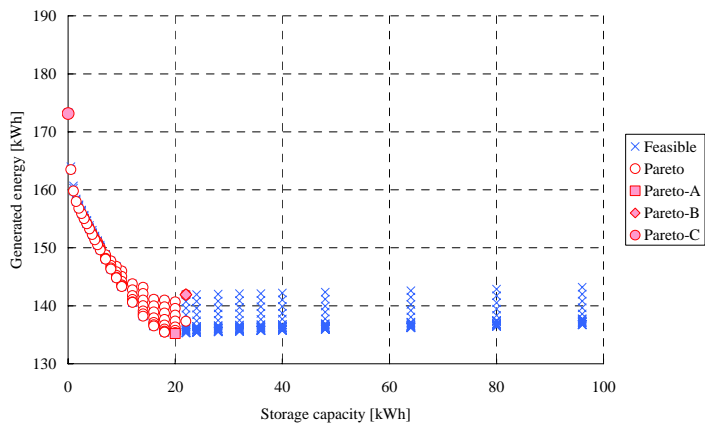
図6. 3. 1 都市路線に対する実行可能解の分布

Fig. 6.3.1 Distribution of feasible solutions for an urban line

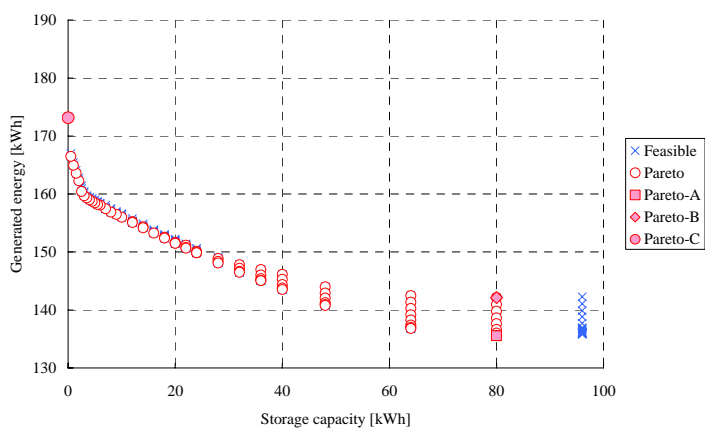




(a) 電気二重層キャパシタ/EDLC



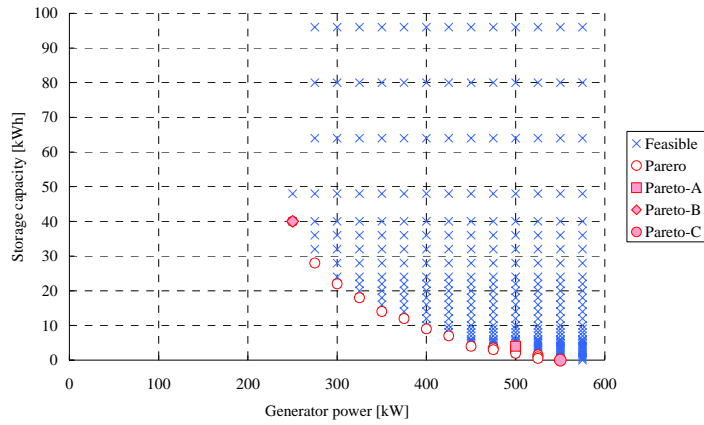
(b) 高出力型リチウムイオン蓄電池/High-Power Li-ion battery



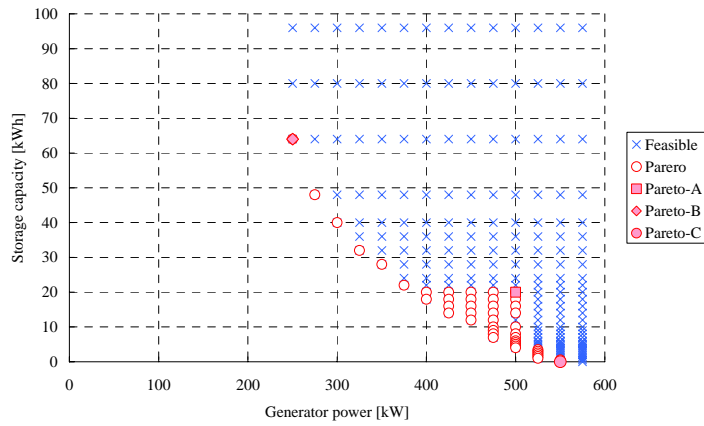
(c) 高容量型リチウムイオン蓄電池/High-Capacity Li-ion battery

図6. 3. 2 都市路線に対する蓄電装置容量と発電電力量の関係

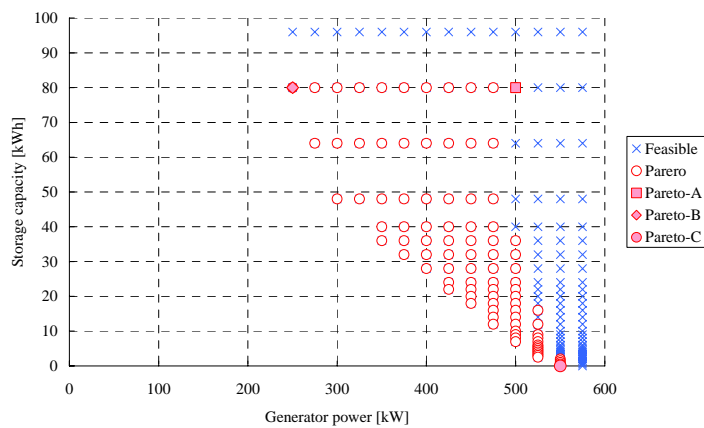
Fig. 6.3.2 Relationship between storage capacity and generated energy for an urban line



(a) 電気二重層キャパシタ/EDLC



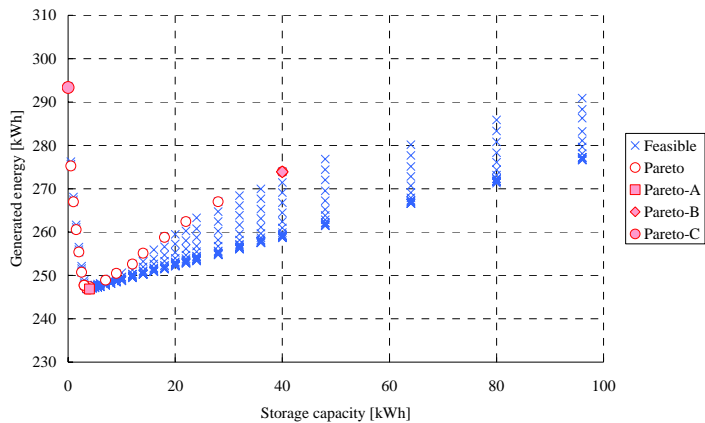
(b) 高出力型リチウムイオン蓄電池/High-Power Li-ion battery



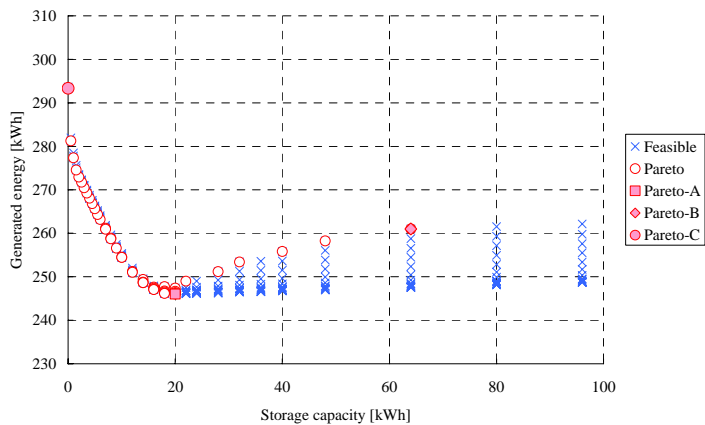
(c) 高容量型リチウムイオン蓄電池/High-Capacity Li-ion battery

図6. 3. 3 丘陵路線に対する実行可能解の分布

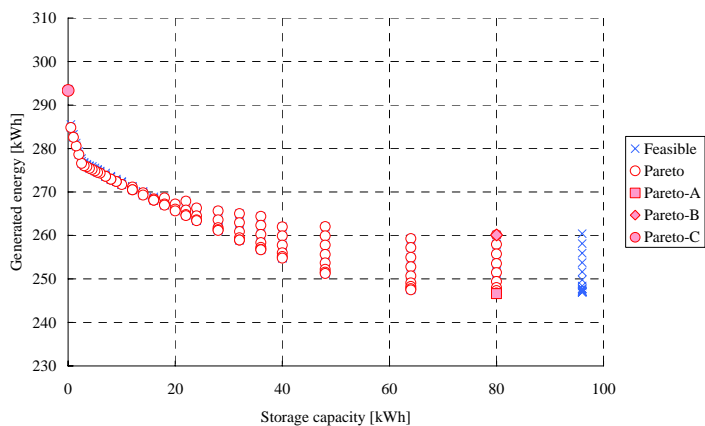
Fig. 6.3.3 Distribution of feasible solutions for a hill line



(a) 電気二重層キャパシタ/EDLC



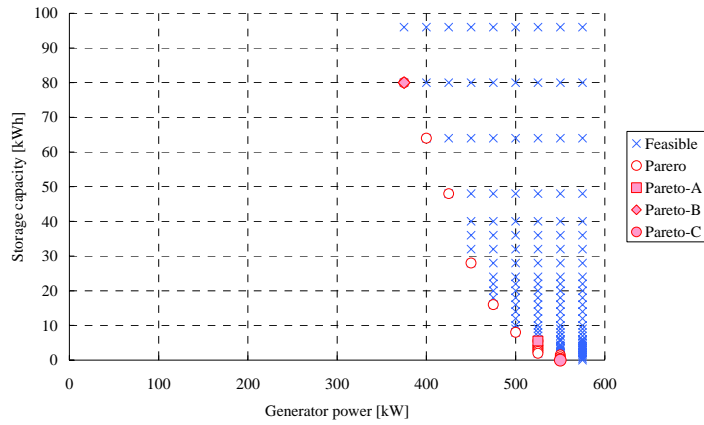
(b) 高出力型リチウムイオン蓄電池/High-Power Li-ion battery



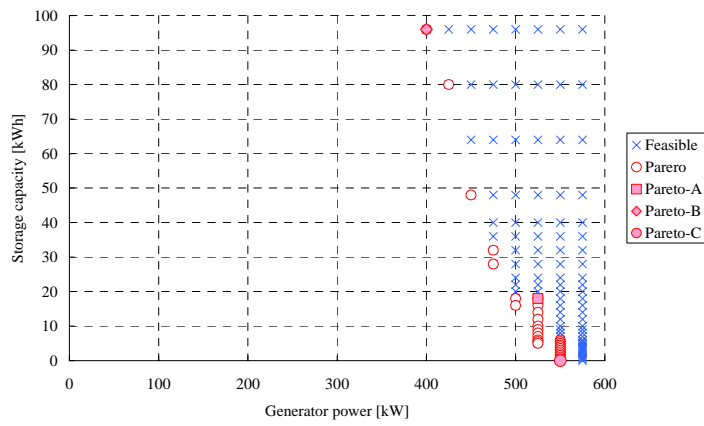
(c) 高容量型リチウムイオン蓄電池/High-Capacity Li-ion battery

図6.3.4 丘陵路線に対する蓄電装置容量と発電電力量の関係

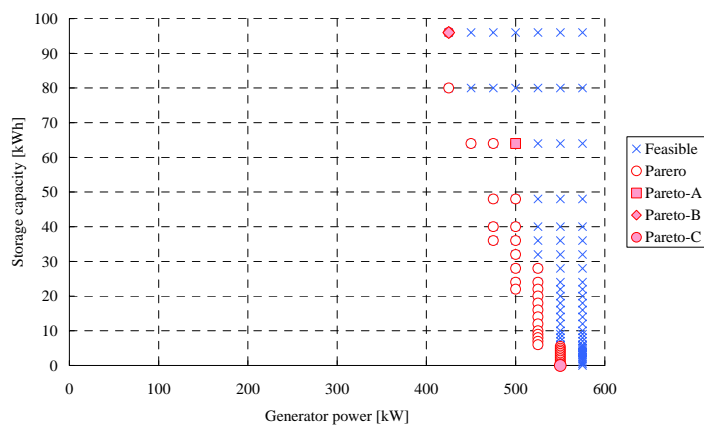
Fig. 6.3.4 Relationship between storage capacity and generated energy for a hill line



(a) 電気二重層キャパシタ/EDLC



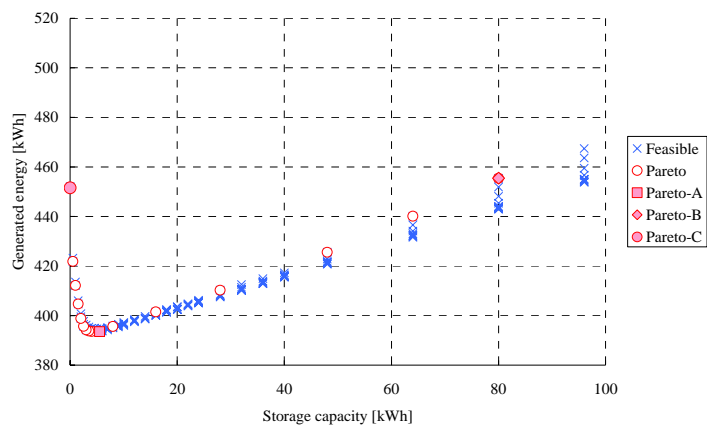
(b) 高出力型リチウムイオン蓄電池/High-Power Li-ion battery



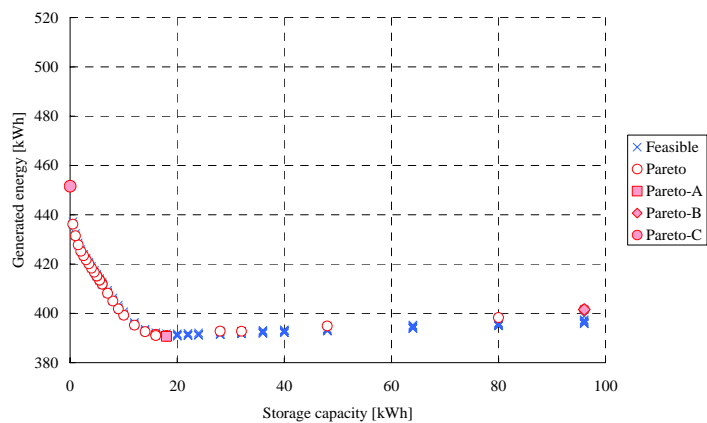
(c) 高容量型リチウムイオン蓄電池/High-Capacity Li-ion battery

図6.3.5 山岳路線に対する実行可能解の分布

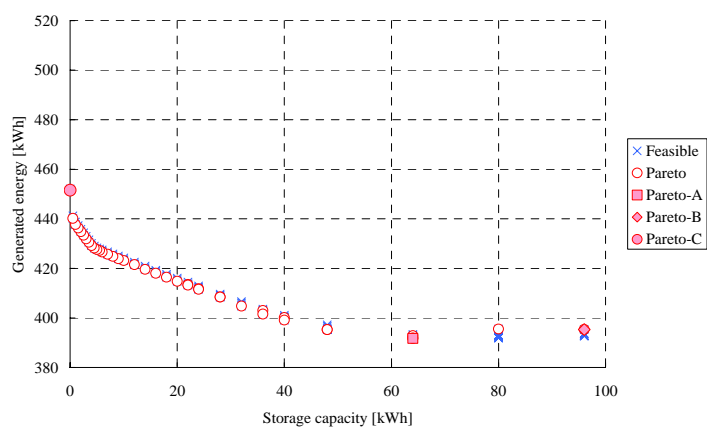
Fig. 6.3.5 Distribution of feasible solutions for a mountain line



(a) 電気二重層キャパシタ/EDLC



(b) 高出力型リチウムイオン蓄電池/High-Power Li-ion battery



(c) 高容量型リチウムイオン蓄電池/High-Capacity Li-ion battery

図6. 3. 6 山岳路線に対する蓄電装置容量と発電電力量の関係

Fig. 6.3.6 Relationship between storage capacity and generated energy for a mountain line

## 6.4 パレート最適解の分析

はじめに、表6. 3. 1の消費エネルギーの削減率の観点から検討を行う。消費エネルギーの削減率は、蓄電装置を有しない Pareto-C に対して、発電電力量(消費エネルギー)が最小となるハイブリッド電源鉄道車両である Pareto-A の発電電力量の削減量を示したものである。

表6. 3. 1(a)より、都市路線において、消費エネルギーの削減率は、電気二重層キャパシタを用いた場合に 21.7 [%]、高出力型リチウムイオン蓄電池を用いた場合に 21.9 [%]、高容量型リチウムイオン蓄電池を用いた場合に 21.7 [%]となり、どのような蓄電媒体を用いても、消費エネルギーの削減率には大きな違いは見られない。ただし、発電電力量が最小となるハイブリッド電源鉄道車両である Pareto-A の蓄電装置容量は、蓄電媒体によって大きく異なり、図6. 3. 2のように、電気二重層キャパシタを用いた場合に 3.0 [kWh] (600 [kW])、高出力型リチウムイオン蓄電池を用いた場合に 20.0 [kWh] (400 [kW])、高容量型リチウムイオン蓄電池を用いた場合に 80.0 [kWh] (400 [kW])となっている。

表6. 3. 1(b)より、丘陵路線において、消費エネルギーの削減率は、電気二重層キャパシタを用いた場合に 15.9 [%]、高出力型リチウムイオン蓄電池を用いた場合に 16.1 [%]、高容量型リチウムイオン蓄電池を用いた場合に 15.9 [%]となり、どのような蓄電媒体を用いても、消費エネルギーの削減率には大きな違いは見られない。また、発電電力量が最小となる Pareto-A の蓄電装置容量は、図6. 3. 4のように、電気二重層キャパシタを用いた場合に 4.0 [kWh] (800 [kW])、高出力型リチウムイオン蓄電池を用いた場合に 20.0 [kWh] (400 [kW])、高容量型リチウムイオン蓄電池を用いた場合に 80.0 [kWh] (400 [kW])となっている。

表6. 3. 1(c)より、山岳路線において、消費エネルギーの削減率は、電気二重層キャパシタを用いた場合に 12.9 [%]、高出力型リチウムイオン蓄電池を用いた場合に 13.5 [%]、高容量型リチウムイオン蓄電池を用いた場合に 13.2 [%]となり、蓄電媒体により、消費エネルギーの削減効果に多少の差が見られる。また、発電電力量が最小となる Pareto-A の蓄電装置容量は、図6. 3. 6のように、電気二重層キャパシタを用いた場合に 5.5 [kWh] (1100 [kW])、高出力型リチウムイオン蓄電池を用いた場合に 18.0 [kWh] (360 [kW])、高容量型リチウムイオン蓄電池を用いた場合に 64.0 [kWh] (320 [kW])となっている。

以上より、発電電力量が最小となる Pareto-A を採用する場合には、どのような路線においても、消費エネルギーの削減効果には蓄電媒体による大きな差は見られないと考えられる。また、エネルギー密度とパワー密度の観点から考えると、発電電力量を最小にするパワーについては蓄電媒体による差は小さく、エネルギーについては蓄電媒体による差が大きく見られた。これより、消費エネルギーを最小にするような設計を行うには、蓄電媒体には一定のパワーが必要であると考えられる。なお、以上の議論は、発電電力量を最小とするような消費エネルギー最小化の観点から機器設計をした場合であり、他の観点からの機器設計においては、蓄電媒体の選定における特性は変わってくるものと考えられる。

続いて、図6. 3. 2、4、6の発電電力量と蓄電装置容量の関係から見ると、発電電力量は蓄電装置容量に対して極小値を持つことが確認できる。Pareto-A よりも蓄電装置容量が小さくなるにつれて、発電電力量は大幅に増大する。これは、蓄電装置容量が小さくなると回生できる電力量が減少するためである。一方、Pareto-A よりも蓄電装置容量が大きくなるにつれて、発電電力量は増大する。これは、蓄電装置容量が大きくなると列車の質量が増大するためである。また、蓄電装置容量に対する発電電力量の変化量について考察すると、蓄電媒体によって変化量が大きく異なり、エネルギー密度の低い電気二重層キャパシタを用いた場合の方が、発電電力量に大きな変化が見られる。

## 6.5 回生エネルギーと蓄電装置容量の関係の分析

本項では、列車の回生エネルギーと蓄電装置容量の関係について、解析的に算出し考察する。列車の回生エネルギーは、標高に伴う位置エネルギー分と、速度に伴う運動エネルギー分から生じていると考えられる。ここでは、位置エネルギー分と運動エネルギー分に分けて分析する。なお、電動機損失・変換器損失・充放電損失や蓄電装置のパワー面での制約(不足分は機械ブレーキを使用)などのため全ての回生エネルギーを回収することはできないが、これらについて定量的に扱うにはシミュレーションなどを実施する必要があるため、ここでは、解析的に表される項目についてのみ考慮して、基本的な関係について明らかにする。

はじめに、位置エネルギーの回収に必要な蓄電装置容量について検討する。最高標高地点での位置エネルギー $E_P$ は、最高標高 $h$ に対して次式で表される。

$$E_P = \frac{m_V gh}{3600} \quad (6.5.1)$$

$E_P$  位置エネルギー [kWh]

$m_V$  列車総質量 [t]

$g$  重力加速度 [m/s/s]

$h$  最高標高 [h]

位置エネルギーは、列車の質量によって変化するので、蓄電媒体の増加に伴う列車の質量増加を考慮する。ここでは、列車の質量を、蓄電媒体の質量とそれ以外の質量を列車基本質量として分けて考える。これにより、列車総質量 $m_V$ は次式のように表される。

$$m_V = m_B + m_S \quad (6.5.2)$$

$m_B$  列車基本質量 [t]

$m_S$  蓄電媒体質量 [t]

さらに、蓄電媒体質量 $m_S$ は次式のように表される。

$$m_S = \frac{C_S}{D_S} \quad (6.5.3)$$

$C_S$  蓄電媒体容量 [kWh]

$D_S$  エネルギー密度 [Wh/kg]

ここで、位置エネルギーの全てが回収できるとすると、蓄電媒体容量 $C_S$ と位置エネルギー $E_P$ の関係は、次式のように表される。

$$C_S = \frac{E_P}{R_S} \quad (6.5.4)$$

$R_S$  SOC使用範囲幅

式(6.5.4)が満たされる場合が、位置エネルギーに関して最高標高までのエネルギーを回収できる平衡点と考えられる。よって、位置エネルギーに関する平衡蓄電媒体容量 $C_{S-P}$ は次式のように表される。

$$C_{S-P} = \frac{D_S m_B gh}{3600 R_S D_S - gh} \quad (6.5.5)$$

続いて、運動エネルギーの回収に必要な蓄電装置容量について検討する。最高速度での運動エネル

ギー $E_K$ は、最高速度 $v$ に対して次式で表される。

$$E_K = \frac{m_v v^2}{93312} \tag{6.5.6}$$

$E_K$  運動エネルギー [kWh]

$v$  最高速度 [km/h]

ここで、運動エネルギーの全てが回収できるとすると、蓄電媒体容量 $C_S$ と運動エネルギー $E_K$ の関係は、次式のように表される。

$$C_S = \frac{E_K}{R_S} \tag{6.5.7}$$

式(6.5.7)が満たされる場合が、運動エネルギーに関して最高標高までのエネルギーを回収できる平衡点と考えられる。よって、運動エネルギーに関する平衡蓄電媒体容量 $C_{S\_K}$ は次式のように表される。

$$C_{S\_K} = \frac{D_S m_B v^2}{93312 D_S R_S - v^2} \tag{6.5.8}$$

式(6.5.5)、(6.5.8)より求めた平衡蓄電装置容量を表6.5.1に示す。表6.5.1より、位置エネルギーの観点から考えると、都市路線においては位置エネルギーの影響は無視できるが、山岳路線においては位置エネルギーを全て吸収する蓄電装置容量は大きなものになってしまう。以上の計算は、理想的な回生を想定したものであり、発電電力量を最小にするパレート最適解となる蓄電装置容量とはずれが見られるが、導入する路線と適用する蓄電媒体に応じた蓄電装置容量の検討を行うにあたっては設計上の1つの指針となるものと考えられる。

表6.5.1 平衡蓄電装置容量

Table 6.5.1 Equilibrium storage capacity

	電気二重層キャパシタ			高出力型リチウムイオン蓄電池			高容量型リチウムイオン蓄電池			
	都市路線	丘陵路線	山岳路線	都市路線	丘陵路線	山岳路線	都市路線	丘陵路線	山岳路線	
列車質量 [t]	78.00	78.00	78.00	78.00	78.00	78.00	78.00	78.00	78.00	
エネルギー密度 [Wh/kg]	5.0	5.0	5.0	50.0	50.0	50.0	100.0	100.0	100.0	
SOC使用範囲幅	0.75	0.75	0.75	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	
位置エネルギー	最高標高 [m]	6.90	87.77	432.95	6.90	87.77	432.95	6.90	87.77	432.95
	平衡蓄電装置容量 [kWh]	<b>2.0</b>	<b>26.5</b>	<b>178.8</b>	<b>3.7</b>	<b>47.2</b>	<b>244.2</b>	<b>3.7</b>	<b>46.9</b>	<b>236.8</b>
運動エネルギー	列車総質量 [t]	78.39	83.31	113.75	78.07	78.94	82.88	78.04	78.47	80.37
	最高速度 [km/h]	70.0	80.0	80.0	70.0	80.0	80.0	70.0	80.0	80.0
運動エネルギー	平衡蓄電装置容量 [kWh]	<b>5.54</b>	<b>7.27</b>	<b>7.27</b>	<b>10.27</b>	<b>13.42</b>	<b>13.42</b>	<b>10.25</b>	<b>13.40</b>	<b>13.40</b>
	列車総質量 [t]	79.11	79.45	79.45	78.21	78.27	78.27	78.10	78.13	78.13



## 第7節

# ディーゼルハイブリッドシステムの検討

本節では、発電装置としてディーゼルエンジンに発電機を接続したディーゼル発電機を用いるディーゼルハイブリッド鉄道車両を対象にした検討を行う。現状のディーゼル鉄道車両は、大別して、比較的出力な機器構成により各駅停車の列車を中心に運用される普通列車用と、高速走行を前提とした特急・快速などを中心に運用される優等列車用に分けられる。前節までに想定した燃料電池システムによるハイブリッド鉄道車両は、燃料電池の出力の問題から普通列車を前提とした研究が進められている。一方、ディーゼルハイブリッド鉄道車両を想定した場合、既存のディーゼルシステムでも発電装置として大出力のものも適用が可能である。また、現在のディーゼルハイブリッド鉄道車両は普通列車用については様々な研究開発が行われているが、優等列車用については、適用の可能性があるものの十分な検討が公表されていないと考えられる。加えて、ディーゼルハイブリッド鉄道車両を優等列車用に用いた場合に期待される利点も多い。非電化区間を走る優等列車用においては、線形の悪い路線が多く、高頻度の加減速が行われることが多い。そこで、ハイブリッドシステムの適用による減速時の回生電力の有効回収によりエネルギー効率の改善が期待される。また、優等列車用は普通列車用に比べて編成が長い運用が多く、本研究で提案する協調運転の効果が期待される。協調運転とは、列車の低負荷時に編成内で電力を融通することにより、ディーゼルエンジンを低効率点で各車両で個別に運転するのではなく、一部のディーゼルエンジンを停止し、残りのディーゼルエンジンを高効率点で運転するものである。これにより、編成全体で見た省エネルギー化が期待される。

以上のような背景のもと、本研究では、特急列車用のディーゼルハイブリッド鉄道車両を対象にして、最適化手法の適用によりハイブリッドシステムの得失を分析する。特に、ディーゼルハイブリッド鉄道車両においては、発電装置としてディーゼル発電機を想定することで、発電機効率や排出ガスの排出量などを考慮した設計が必要となる。このため、本検討では、評価項目として、燃料消費量、NO<sub>x</sub>排出量、CO<sub>2</sub>排出量、CO排出量を対象とし、これらの評価項目を最小化するため、燃料噴射パターンの最適化、複数台のエンジン出力配分の最適化、発電装置と蓄電装置の電力制御に関する動的計画法による最適化を組み合わせたエンジン運転パターンに関する最適化を用いることによって、最小となる燃料消費量・ガス排出量を算出する。以上により、3つの視点からディーゼルハイブリッド鉄道車両の電力制御パターンを最適化することにより、ディーゼルハイブリッド鉄道車両の設計に対する有用な情報を提示する。

## 7.1 ディーゼルハイブリッドシステムのモデル化

### 7.1.1 ディーゼルハイブリッド鉄道車両の構成

本節では、図7.1.1に示すようなディーゼル発電機と電気二重層キャパシタを用いたディーゼルハイブリッド鉄道車両を想定する。特急列車用の車両として表7.1.1に示すような諸元を想定し検討を行う。これにより、図7.1.2、3のような力行時と回生時の電動機による引張力特性を規定する。

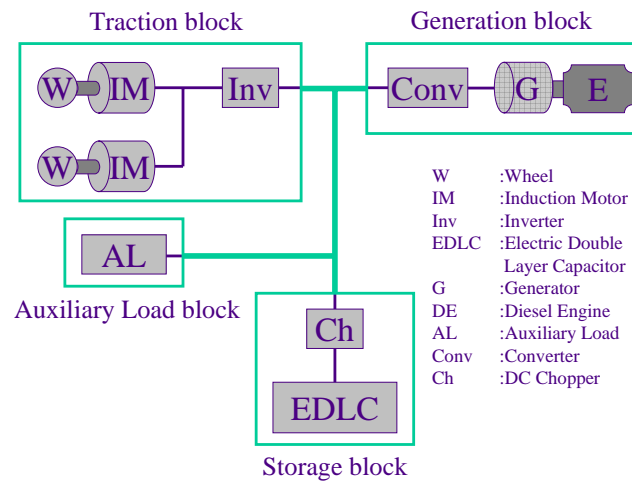


図7.1.1 ハイブリッドの構成

Fig. 7.1.1 Characteristics of the tractive effort for powering

表7. 1. 1 想定諸元

Table 7.1.1 An assumed specification

Vehicle	Number of cars $n$	3 [cars]
	Base mass $M_b$	111.0 [t]
	Gear ratio $G$	7.07
	Gear efficiency $\eta_g$	0.98
	Inverter efficiency $\eta_i$	0.975
	Wheel diameter $D$	0.82 [m]
	Inertia ratio	0.09
	Scheduled deceleration $a_b$	2.2 [km/h/s]
	Number of motors $N$	6
IM	Primary resistance $R_1$	0.186 [ $\Omega$ ]
	Secondary resistance $R_2$	0.194 [ $\Omega$ ]
	Primary inductance $L_1$	42.00 [mH]
	Secondary inductance $L_2$	42.00 [mH]
	Mutual inductance $M_m$	40.40 [mH]
	Number of poles $P$	4
Generation	Number of engines	3
	Maximum engine power	340 [kW]
	Chopper efficiency $\eta_{ch}$	0.90
Storage	EDLC energy density	5.0 [Wh/kg]
	EDLC power density	1.0 [kW/kg]
	EDLC lower voltage limit	50 [%]
	Charge efficiency $\eta_c$	0.90
	Discharge efficiency $\eta_c$	0.90
AL	Load $P_A$	150 [kW]

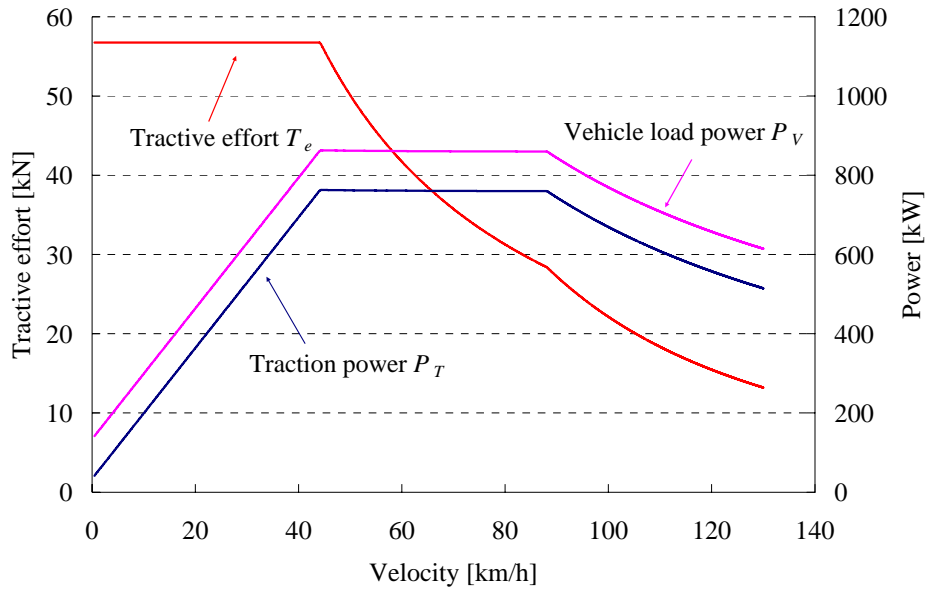


図7. 1. 2 力行時の引張力特性

Fig. 7.1.2 Characteristics of the tractive effort for powering

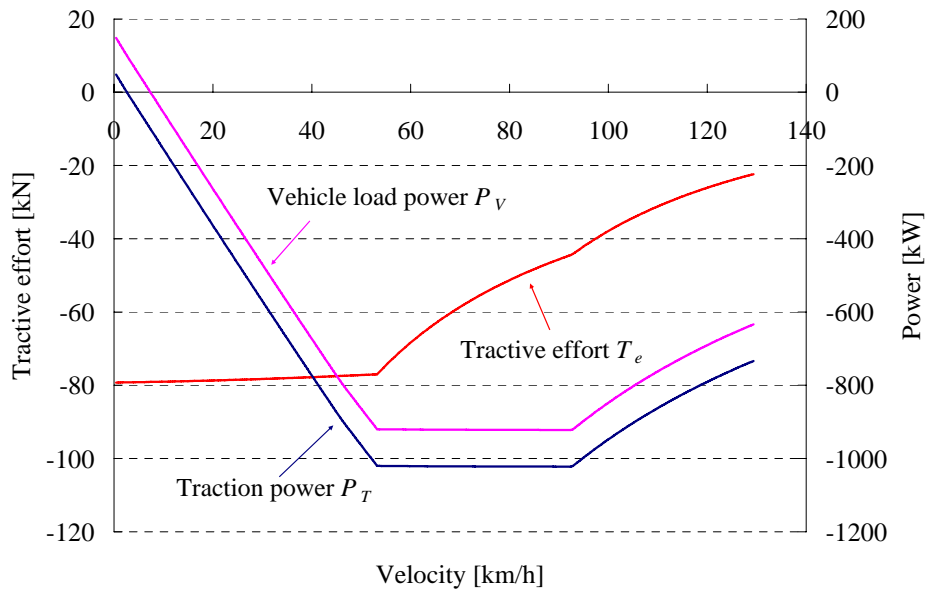


図7. 1. 3 回生時の引張力特性

Fig. 7.1.3 Characteristics of the tractive effort for regeneration

### 7.1.2 機関性能

本論文では、図7.1.4に示すような機関性能特性を持つディーゼルエンジンを想定する。これらは、燃料噴射量を示すエンジンノッチ毎に測定した実測値を基に多項式近似を行い、シミュレーションに組み込んだものである。

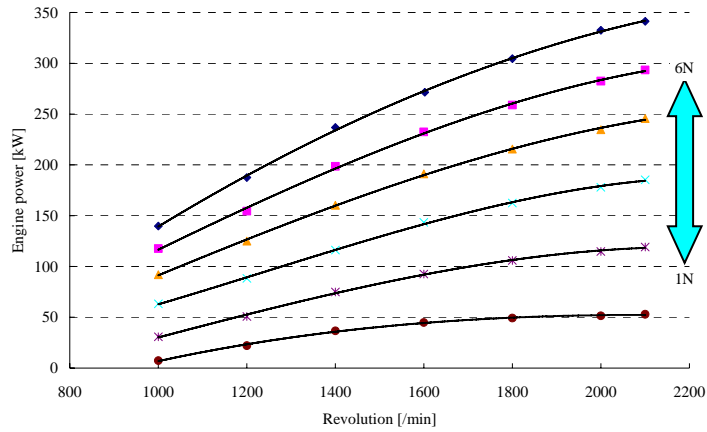
図7.1.4(a)にエンジン出力の特性を示す。回転数やエンジンノッチが高くなるほどエンジン出力が大きくなる。

燃料消費率に関しては、図7.1.4(b)より、エンジンノッチが高くなるにつれて燃料消費率が小さくなる。回転数と燃料消費率の関係から見ると、極小点を持つようなグラフとなっており、最大出力点と最高効率点は異なることが確認できる。

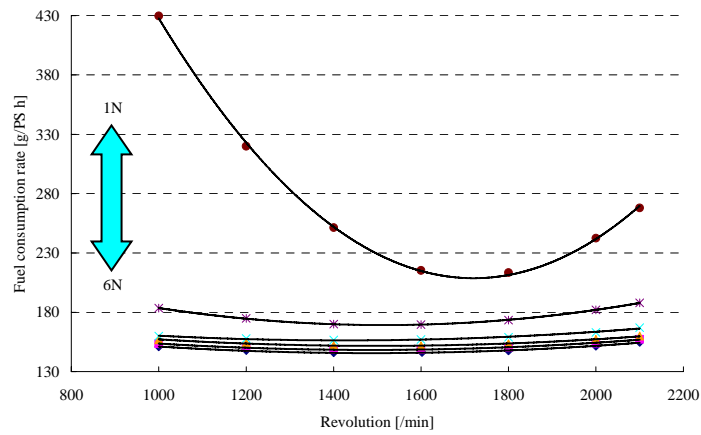
NO<sub>x</sub>排出量に関しては、図7.1.4(c)より、エンジンノッチが高くなるにつれてNO<sub>x</sub>排出量が大きくなる。回転数とNO<sub>x</sub>排出量の関係から見ると、極大点を持つようなグラフとなっており、燃料消費量の観点からの最高効率点よりも最大出力点の方がNO<sub>x</sub>排出量は少なくなっている。

CO<sub>2</sub>排出量に関しては、図7.1.4(d)より、回転数やエンジンノッチが高くなるほどCO<sub>2</sub>排出量が大きくなることが確認できる。すなわち、図7.1.4(a)のエンジン出力の特性と近くなっており、エンジン出力が大きくなるほどCO<sub>2</sub>排出量が大きくなるという特性を示している。

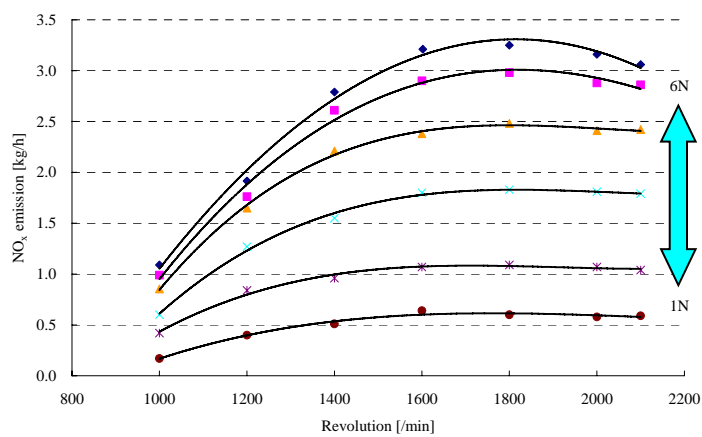
CO排出量に関しては、図7.1.4(e)より、回転数の増加に伴いCO排出量が減少していく傾向が確認できる。またエンジンノッチが高いほど、CO排出量が大きくなるとともに、エンジンノッチが高いときには、CO排出量は回転数への依存性が高く大きな範囲で変化していることが確認できる。



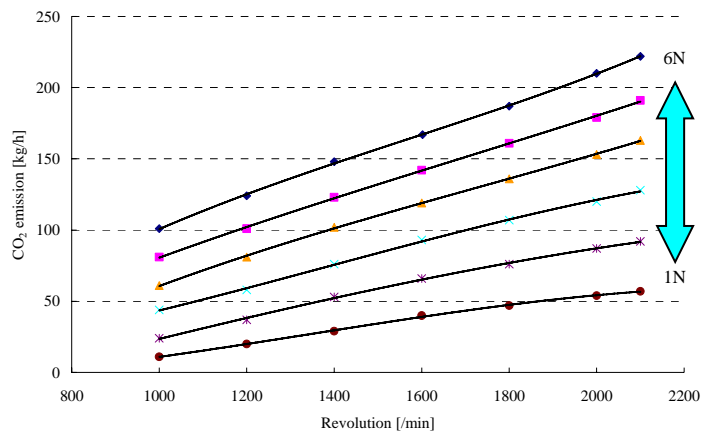
(a) 回転数－エンジン出力／Revolution – engine power



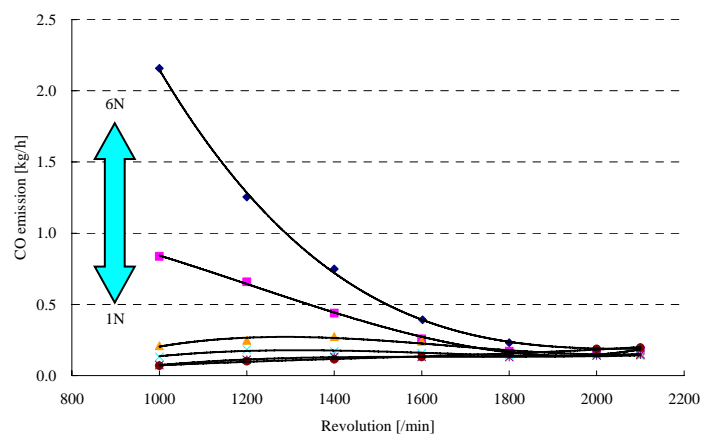
(b) 回転数－燃料消費率／Revolution – fuel consumption rate



(c) 回転数－NO<sub>x</sub>排出量／Revolution – NO<sub>x</sub> emission



(d) 回転数-CO<sub>2</sub>排出量/Revolution - CO<sub>2</sub> emission



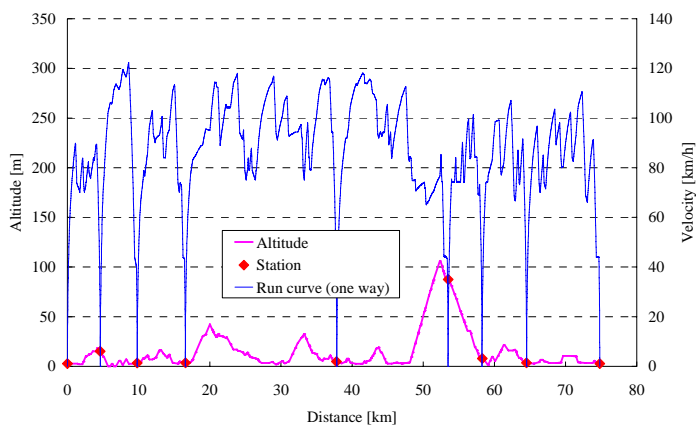
(e) 回転数-CO 排出量/Revolution - CO emission

図7. 1. 4 機関性能曲線

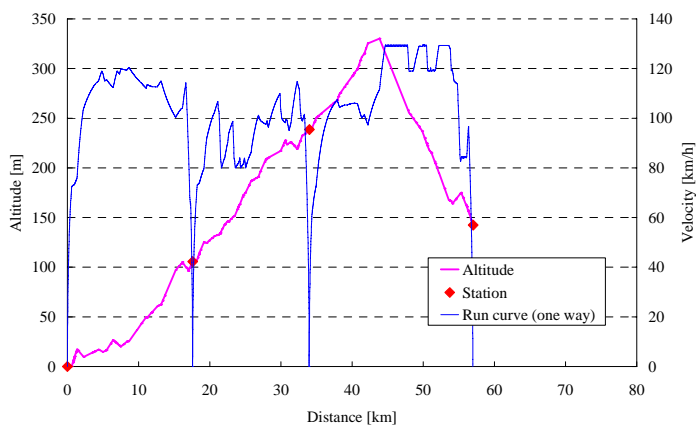
Fig. 7.1.4 Performance curve of diesel engine

### 7.1.3 対象路線

特急列車が走行する対象路線として、図7.1.5に示す特徴の異なる2つの路線を採用した。比較的勾配が少ない平坦都市間路線と、勾配が続く勾配都市間路線の2つの路線を想定した。また、図7.1.5に運転曲線の例を示す。



(a) 平坦都市間路線／A flat intercity line



(b) 勾配都市間路線／A gradient intercity line

図7.1.5 路線特性と運転曲線の例

Fig. 7.1.5 Line profiles and examples of run curve



## 7.2 エンジン運転パターン最適化手法

本論文では、燃料消費量とガス排出量の評価項目として、燃料消費量、 $\text{NO}_x$ 排出量、 $\text{CO}_2$ 排出量、 $\text{CO}$ 排出量を対象とする。これらの評価項目は、図7.1.4の機関性能曲線からわかるように相反する項目も含まれる。そこで、ここでは各々の評価項目を目的関数として最適化し評価を行う。これにより、それぞれの評価項目について着目し、対象となる評価項目を最も削減できるディーゼルハイブリッドシステムの運転パターンを算出する。

また、具体的な最適化手法としては、燃料噴射パターンの最適化、複数台のエンジン出力配分の最適化、発電装置と蓄電装置の電力制御に関する動的計画法による最適化を組み合わせたエンジン運転パターンに関する最適化を用いる。これによって、最小となる燃料消費量・ガス排出量を算出する。燃料噴射パターンの最適化は、1台のディーゼルエンジンについて、回転数とエンジンノッチの運転点を最適化するものである。エンジン出力配分の最適化は、複数台のディーゼルエンジンを協調して運転することにより、編成全体での燃料消費量・ガス排出量を最小化するものである。発電装置と蓄電装置の電力制御に関する動的計画法による最適化は、回生電力の有効回収やディーゼルエンジンの高効率点運転により、1往復分の走行全体で見た場合の燃料消費量・ガス排出量を最小化するものである。

### 7.2.1 燃料噴射パターン最適化

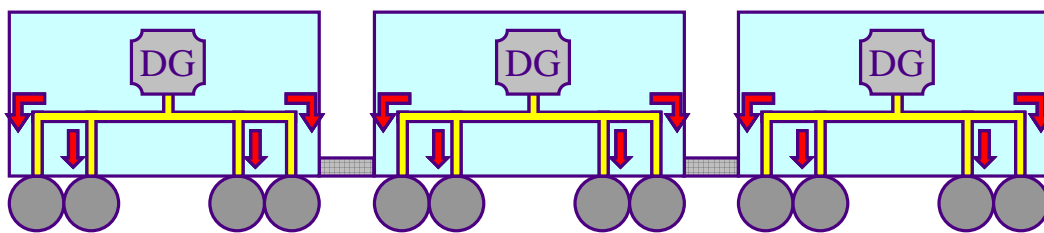
燃料噴射パターンの最適化は、1台のディーゼルエンジンについて、燃料噴射量と回転数を最適化するものである。車両負荷から決まるディーゼル発電機の出力を供給するにあたって、その出力を満たす燃料噴射量と回転数の組み合わせは複数考えられる。その中で、目的関数を最小とする燃料噴射量と回転数の組み合わせを選定する。

具体的には、次のような手順で、ディーゼルエンジンの燃料噴射量を示すエンジンノッチと回転数を決定する。はじめに、機関性能曲線のうち図7.1.4(a)のエンジン出力の特性から、与えられた出力を実現するエンジンノッチと回転数を運転点の候補とする。この際、エンジンノッチと回転数の候補は複数となることが多い。そこで、それぞれのエンジンノッチと回転数の組み合わせに対して、機関性能曲線のうち図7.1.4(b)～(e)の各評価項目の特性を用いて、目的関数となる燃料消費量・ガス排出量を算出する。これら複数の候補のうち目的関数を最小とするエンジンノッチと回転数の組み合わせを採用とする。

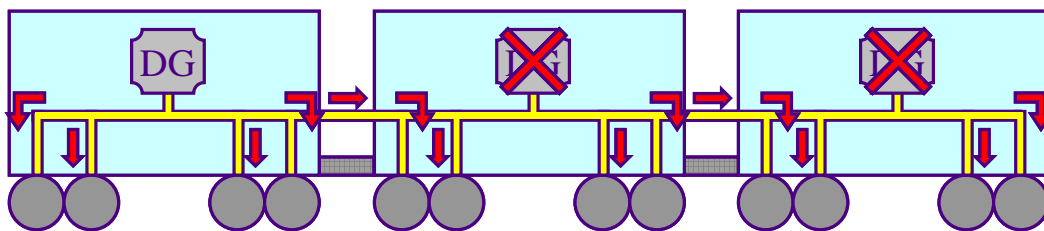
### 7.2.2 エンジン出力配分最適化

エンジン出力配分の最適化は、編成内のディーゼル発電機全体で協調した制御を行い、ディーゼルエンジン使用台数を最適化するものである。本研究で想定するディーゼルハイブリッド鉄道車両は、1編成を3両単位とし、各車両に1台のディーゼル発電機を有している。そこで、図7.2.1のように各車両間を電氣的に接続し、電力の融通を可能にすれば、1両単位でのディーゼル発電機の制御でなく、編成全体の負荷から各車両のディーゼル発電機を制御する協調運転が可能となる。ディーゼルハイブリッド鉄道車両は、惰行や低速で力行している場合など車両の負荷が小さい場合には、編成内の全てのディーゼル発電機を用いなくても、一部のディーゼル発電機のみで必要な負荷を賄える。このようにした方が、編成全体での燃料消費量・ガス排出量が小さくなることが考えられる。そこで、エンジン出力配分の最適化では、目的関数を最小にするディーゼル発電機の使用台数を採用する。具体的には、列車の低負荷時に、ディーゼルエンジンを低効率点で各車両個別に運転するのではなく、一部のディーゼルエンジンを停止し、残りのディ

ーゼルエンジンを高効率点で運転する。これにより、編成全体で見た場合の省エネルギー化が期待される。



(a) 最適化なし / Without the optimization



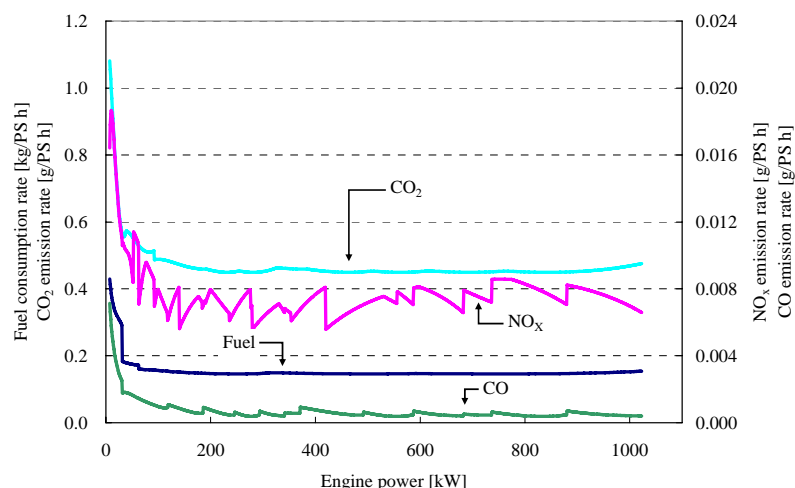
(b) 最適化あり / With the optimization

図7. 2. 1 エンジン出力配分最適化の概念図

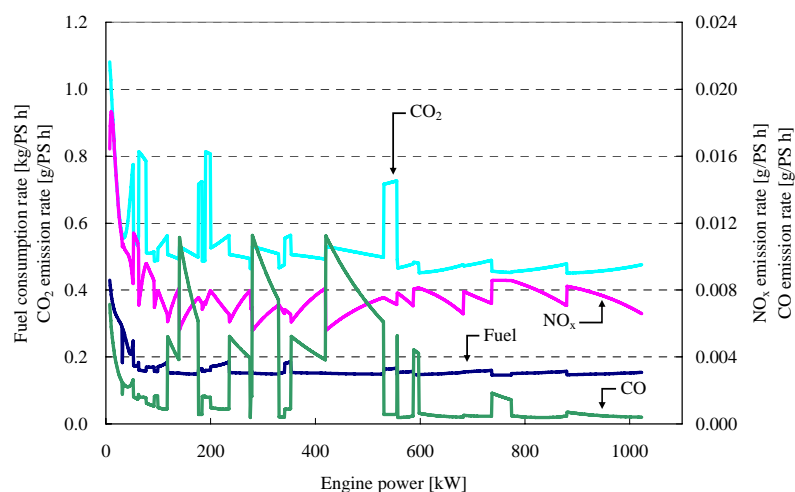
Fig. 7.2.1 A conceptual figure of optimization of load distribution

### 7. 2. 3 最適化された燃料消費量・ガス排出量特性

以上の最適化により、編成全体の出力が決定されたときの燃料消費率・ガス排出率の特性が図7. 2. 2のように決定する。ただし、図7. 2. 2(a)の各評価項目を目的関数とした場合の結果は、目的関数として最適化された評価項目をそれぞれ抽出したものであり、目的関数とならなかった評価項目の特性は図7. 2. 2(a)とは異なる。例えば、 $\text{NO}_x$ 排出量を目的関数として最適化した場合の各評価項目の結果は、図7. 2. 2(b)のようになる。図7. 2. 2(b)において、 $\text{NO}_x$ 排出量は最適化されているが、その他の評価項目に関しては最適化されていない。特に、図7. 2. 2(a)と図7. 2. 2(b)を比較すると、 $\text{CO}$ 排出量に関して、両者の特性が大きく異なっており、 $\text{CO}$ 排出量は最適化した場合と最適化していない場合で大きな差が生じることが確認できる。



(a) 各評価項目を目的関数として最適化した場合／Optimization for each evaluation items



(b) NO<sub>x</sub>排出量を目的関数として最適化した場合／Optimization for NO<sub>x</sub> emission

図7. 2. 2 最適化された燃料消費率とガス排出率特性

Fig. 7.2.2 Optimized fuel consumption rate and gas emission rate

### 7. 2. 4 動的計画法による最適化

燃料噴射パターンの最適化とエンジン出力配分の最適化により、編成全体で最適化されたディーゼル発電機の運転を算出した上で、発電装置と蓄電装置の電力制御に関する動的計画法による最適化を行う。動的計画法による最適化は、1往復分の走行全体で見た場合の燃料消費量・ガス排出量を最小化するものである。これは、動的計画法を用いることにより、目的関数を最小にするようなディーゼル発電機の出力を決定し、回生電力の有効回収やディーゼルエンジンの高効率点運転を行うものである。動的計画法の適用方法は、前節までと同様であり、目的関数が燃料噴射量やガス排出量の評価項目のいずれかに変更されている。これにより、電力制御法の善し悪しが及ぼす影響を除外して、ディーゼルハイブリッド鉄道車両の特性について、より一般性を持たせた考察が可能となる。

## 7.3 エンジン運転パターン最適化結果

本節では、ディーゼルハイブリッド鉄道車両の導入による燃料消費量・ガス排出量の削減効果の検証として、4つの評価項目の中からそれぞれを目的関数とした場合について、蓄電装置容量を変化させて検討を行った。ディーゼルハイブリッド鉄道車両のエンジン運転パターンの最適化により、それぞれの機器容量について最適化された結果同士を比較することができる。本節で示す削減率は、蓄電装置容量が 0.0 [kWh]で燃料消費量を目的関数とした場合のそれぞれの評価項目の値を基準とした。

図7.3.1、2に各評価項目の削減率を示す。各図の実線で結ばれている系列が最適化した評価項目となる。最適化した評価項目について注目すると、概ね蓄電装置容量が 12.0 [kWh]付近で極大値を取っており、それより大きい蓄電装置容量では飽和する傾向にある。これは、この付近よりも小さい蓄電装置容量では全ての回生電力を回収することができずに、回生失効が生じてしまうものと考えられる。このため、回生電力に対してある程度の大きさの蓄電装置容量が求められる。一方、蓄電装置容量の増加に伴い、列車質量は増加する。これらの関係から、削減率を最大にする蓄電装置容量が決まるものと考えられる。これら、蓄電装置容量の増加に伴う削減率の増加要因と減少要因のバランスから、このような極大点を持つ特性になったものと考えられる。

また、図7.3.3、4にそれぞれの発電パターンについて発電電力の度数分布を示す。

### 7.3.1 燃料消費量を最適化した場合の燃料消費量とガス排出量の特性

図7.3.1(a)、2(a)より、燃料消費量を最適化した場合には、CO<sub>2</sub>排出量は、燃料消費量とほぼ同様の傾向を示し、削減率もほぼ同等となっている。また、平坦都市間路線においては、NO<sub>x</sub>排出量についても燃料消費量の削減効果の半分程度の削減効果が確認できる。また、図7.3.3(a)、4(a)に示す発電電力は、800 ~ 900 [kW]と100 ~ 200 [kW]が選択されることが多くなっている。前者はディーゼル発電機を3台用いた運転であり、後者はディーゼル発電機を1台用いた運転である。

### 7.3.2 NO<sub>x</sub>排出量を最適化した場合の燃料消費量とガス排出量の特性

図7.3.1(b)、2(b)より、NO<sub>x</sub>排出量を最適化した場合には、平坦都市間路線で 30 [%]程度、勾配都市間路線で 25 [%]程度と、良好な削減効果が確認できる。また、平坦都市間路線においては、燃料消費量とCO<sub>2</sub>排出量についても、10 [%]前後の削減効果が確認できる。一方、CO排出量については、蓄電装置容量の増加とともに削減率は負となり、CO排出量は最大で3倍以上に増加してしまっている。これは、図7.1.4や図7.2.2(b)に示すように、CO排出量の特性は、他の評価項目と異なる特性であるためと考えられる。このため、NO<sub>x</sub>排出量を最小化するようなエンジン運転パターンでは、CO排出量に関しては、大幅に増加してしまうものと考えられる。また、図7.3.3(b)、4(b)の発電電力は、燃料消費量を最適化した場合と比べて、1000 ~ 1100 [kW]と400 ~ 500 [kW]が選択されることが多くなっている。これは、燃料消費量の観点からの最高効率点が 800 ~ 900 [kW] (ディーゼル発電機3台使用時)となっていたのに対して、最大出力点の方がNO<sub>x</sub>排出量は小さくなるため、最高効率点での発電が減少し、最大出力点での発電が増加したものと考えられる。

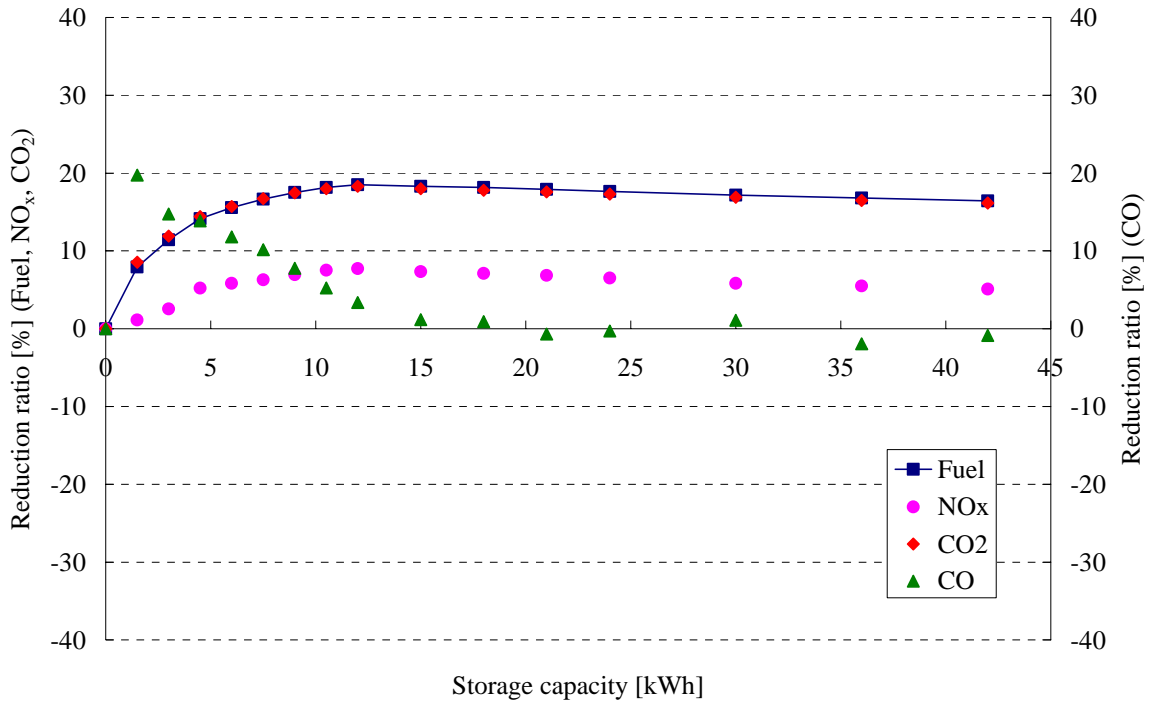
### 7.3.3 CO<sub>2</sub>排出量を最適化した場合の燃料消費量とガス排出量の特性

図7.3.1(c)、2(c)より、CO<sub>2</sub>排出量を最適化した場合には、平坦都市間路線で 20 [%]程度、勾配都

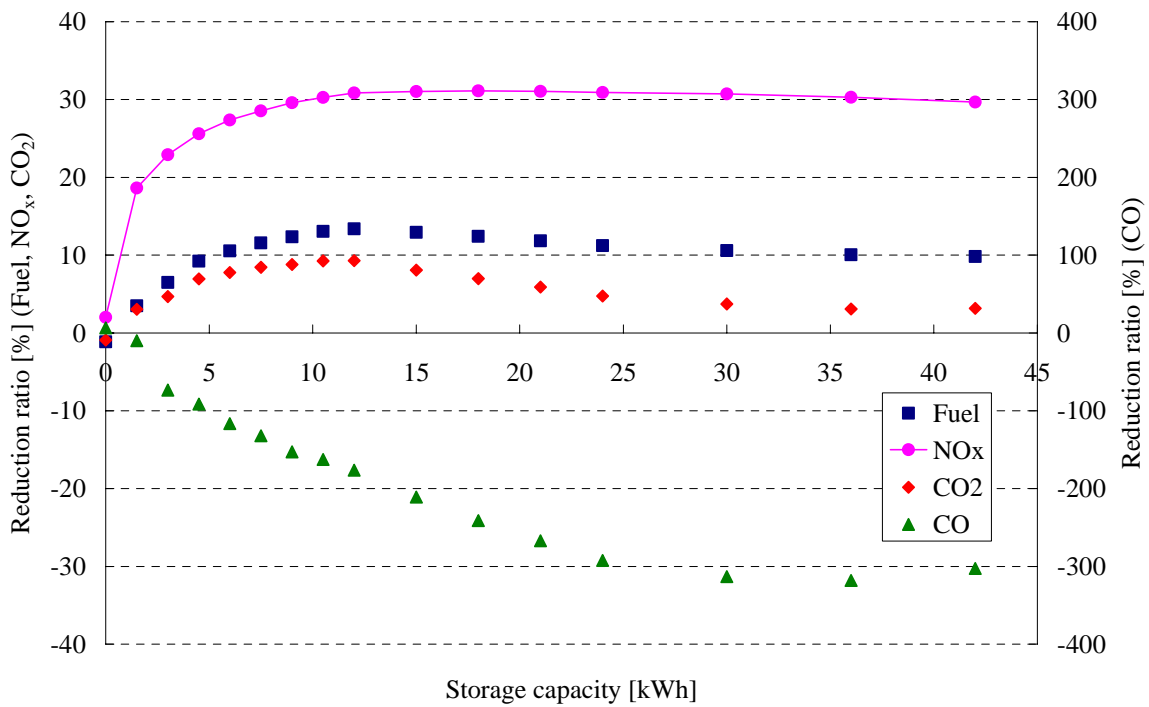
市間路線で 10 [%]程度と、良好な削減効果が確認できる。また、燃料消費量についても、CO<sub>2</sub>排出量に近い削減効果が確認できている。一方、CO排出量についても、50 [%]程度の削減効果が得られている。燃料消費量の特性とCO<sub>2</sub>排出量の特性は概ね一致しているが、CO排出量については、燃料消費量を最適化した場合と、CO<sub>2</sub>排出量を最適化した場合で、その削減率の特性は大きく異なっており、わずかでも排出量特性が異なると、CO排出量は大きな差が生じることが確認された。また、図7. 3. 3(c)、4(c)の発電電力は、燃料消費量を最適化した場合に近い結果となっている。

#### 7. 3. 4 CO 排出量を最適化した場合の燃料消費量とガス排出量の特性

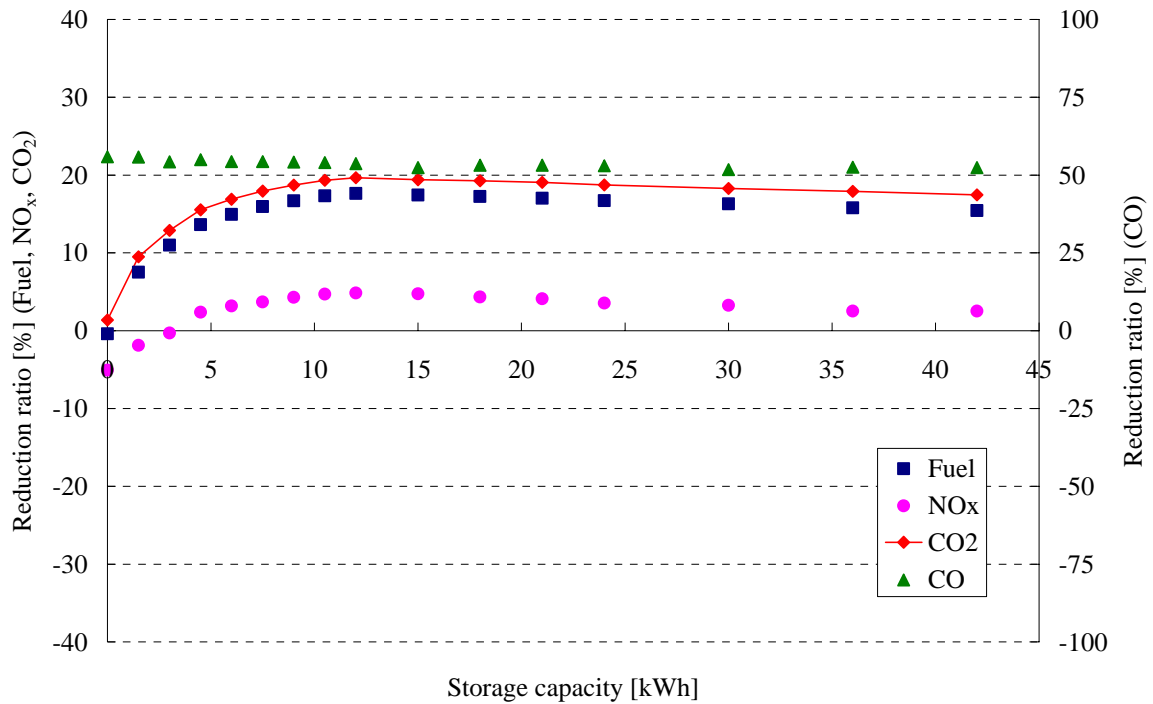
図7. 3. 1(d)、2(d)より、CO 排出量を最適化した場合には、80 [%]程度の良好な削減効果が確認できる。CO 排出量に関しては、蓄電装置容量が0.0 [kWh]の場合でも、70 [%]程度の削減効果が得られている。これは、蓄電装置の有無にかかわらず、燃料噴射パターンの最適化とエンジン出力配分の最適化について、燃料消費量を最適化するパターンから CO 排出量を最適化するパターンに変更したことにより、大幅な削減効果があったものと考えられる。これは、前述の通り、CO 排出量の特性は、他の評価項目と異なる特性であるためであると考えられる。なお、この場合にも、他の評価項目についても平坦都市間路線で 10～15 [%]程度の削減効果が見られるなど、他の項目が大幅に悪化することはなく、CO 排出量は大幅に改善されていることが確認される。また、図7. 3. 3(d)、4(d)の発電電力は、燃料消費量を最適化した場合と比べて、200 ～ 300 [kW]が選択されることが多くなっている。これより、燃料消費量と違い、CO 排出量に関しては、この付近の出力においても、CO 排出率の良好なエンジン運転点が生じていることが確認できる。



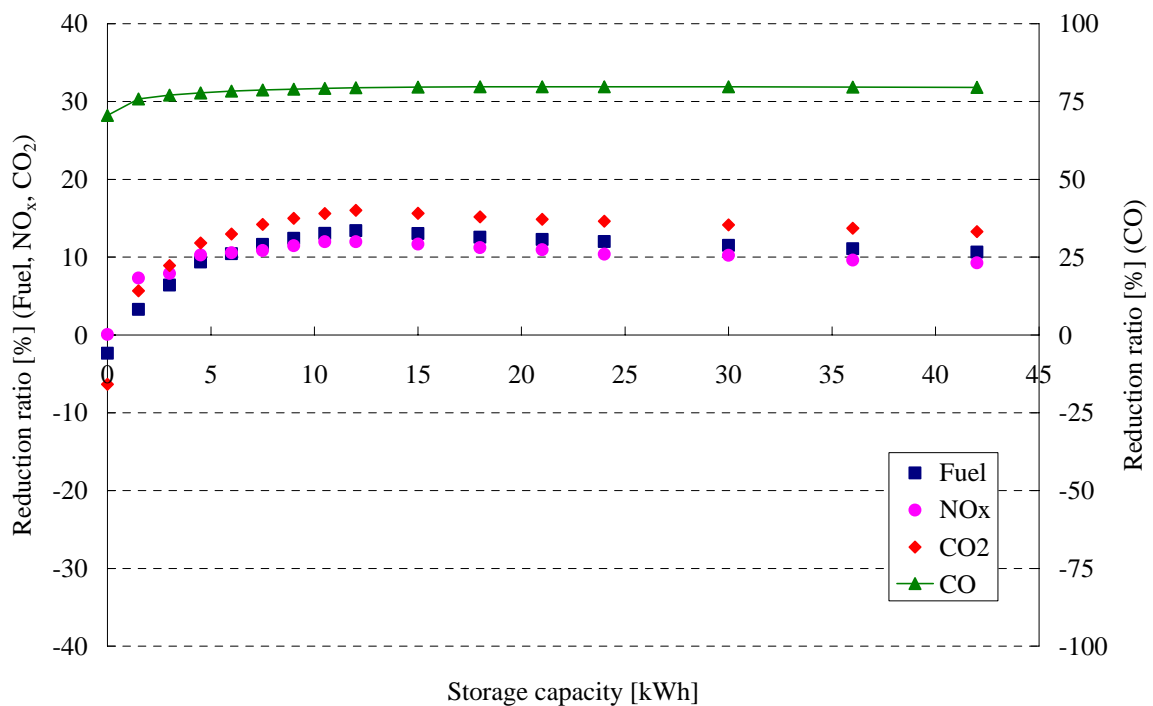
(a) 燃料消費量を目的関数として最適化した場合 / Optimization for fuel consumption



(b) NO<sub>x</sub>排出量を目的関数として最適化した場合 / Optimization for NO<sub>x</sub> emission



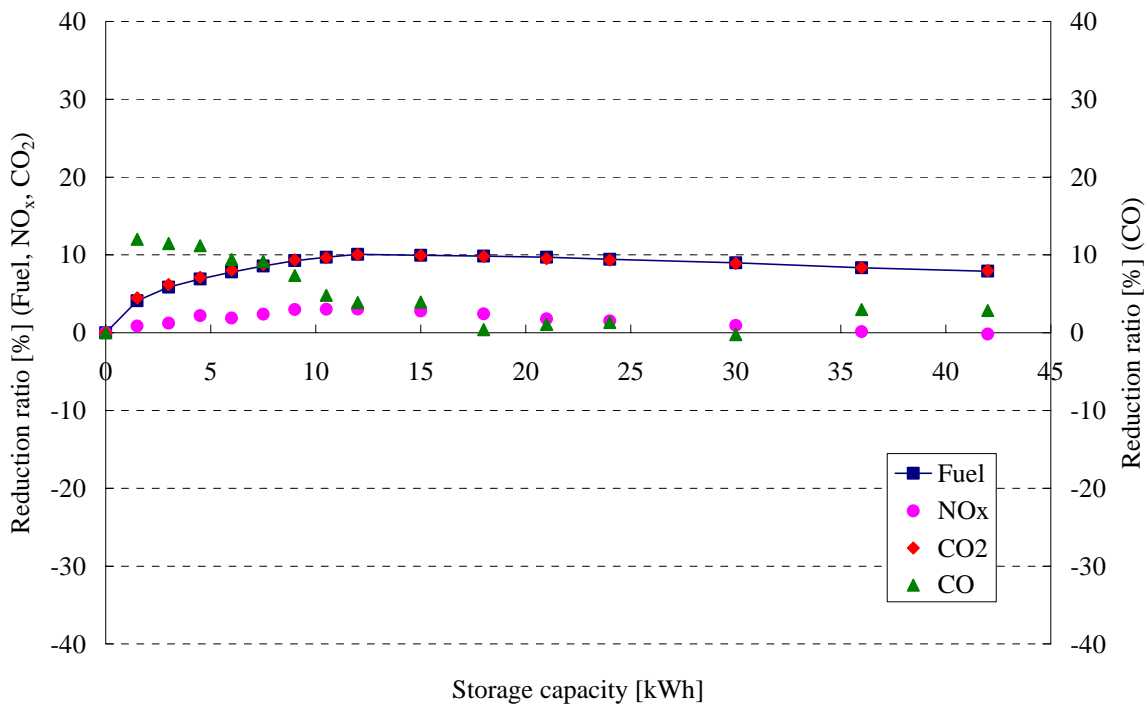
(c) CO<sub>2</sub>排出量を目的関数として最適化した場合／Optimization for CO<sub>2</sub> emission



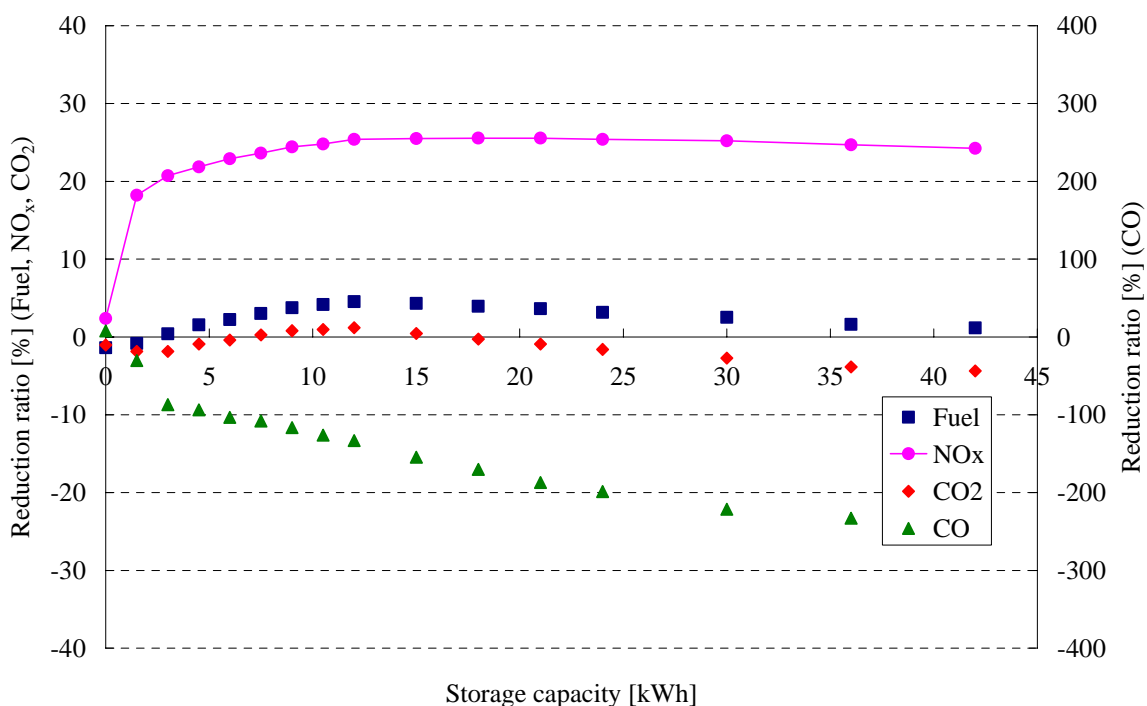
(d) CO 排出量を目的関数として最適化した場合／Optimization for CO emission

図7. 3. 1 平坦都市間路線に対する各評価項目の削減率

Fig. 7.3.1 Reduction ratio for each evaluation items for a flat intercity line

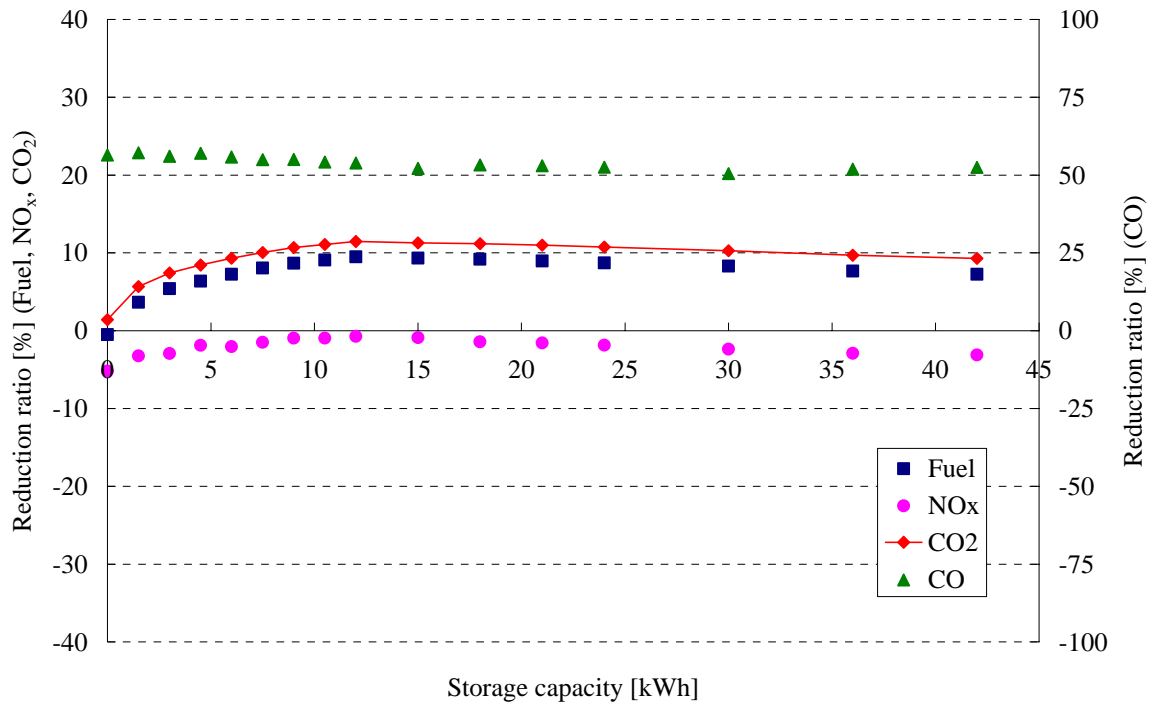


(a) 燃料消費量を目的関数として最適化した場合 / Optimization for fuel consumption

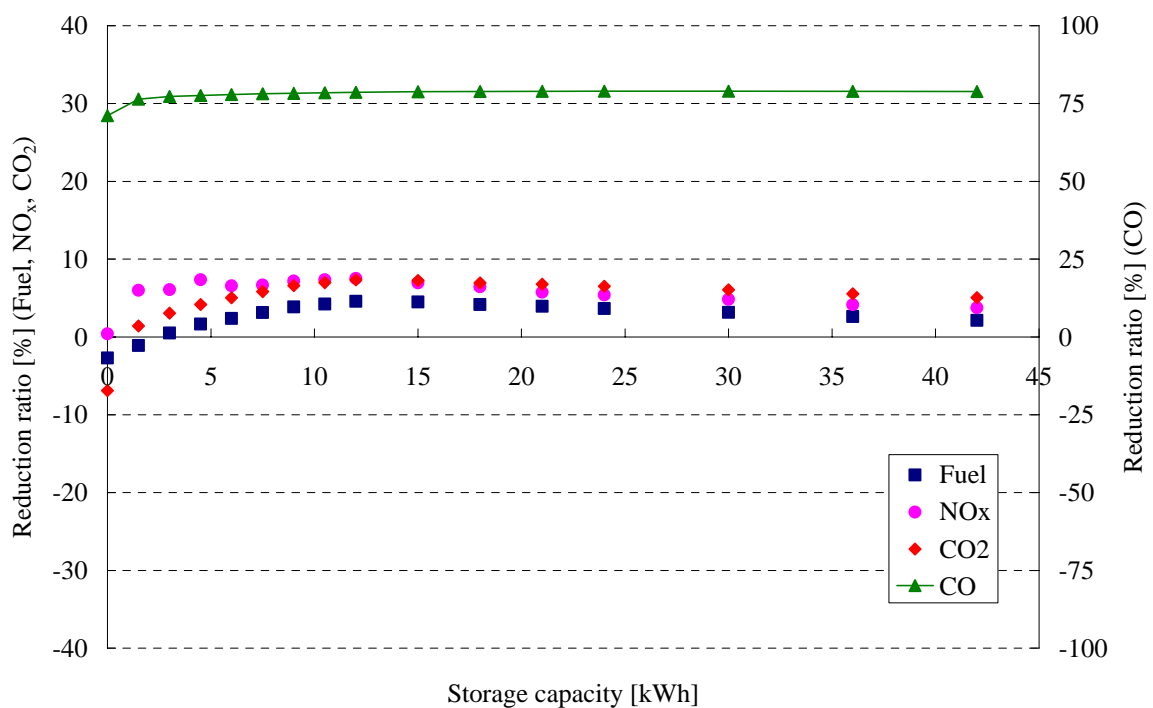


(b) NO<sub>x</sub>排出量を目的関数として最適化した場合 / Optimization for NO<sub>x</sub> emission





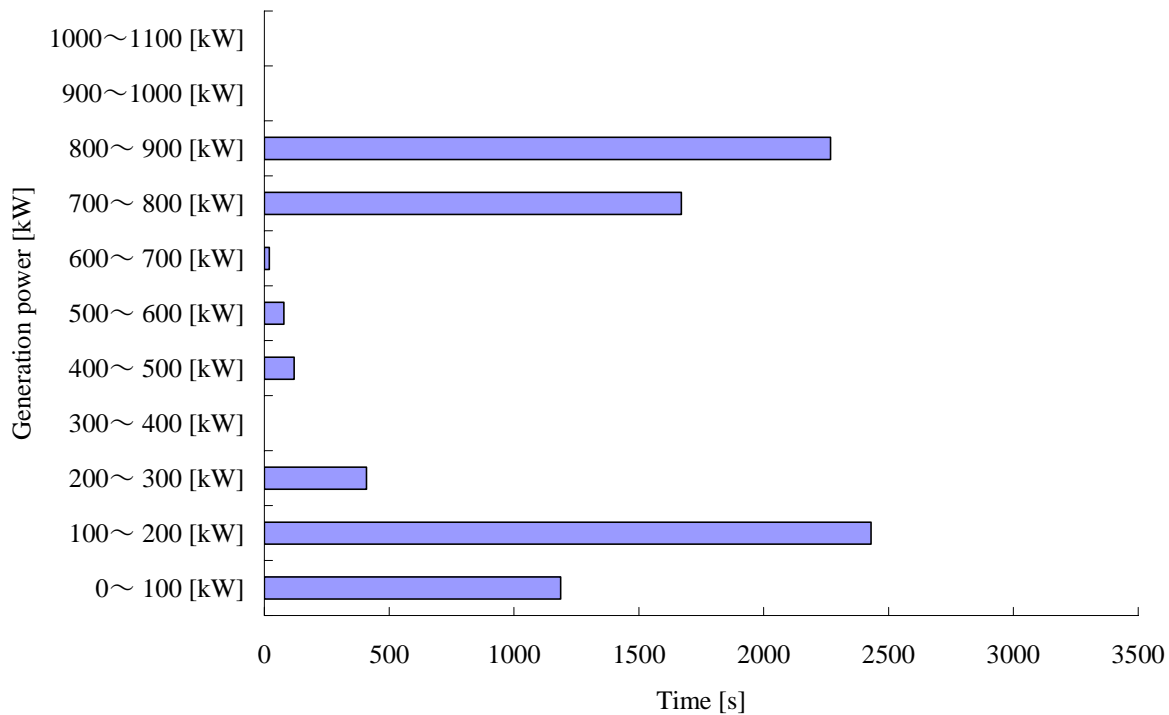
(c) CO<sub>2</sub>排出量を目的関数として最適化した場合 / Optimization for CO<sub>2</sub> emission



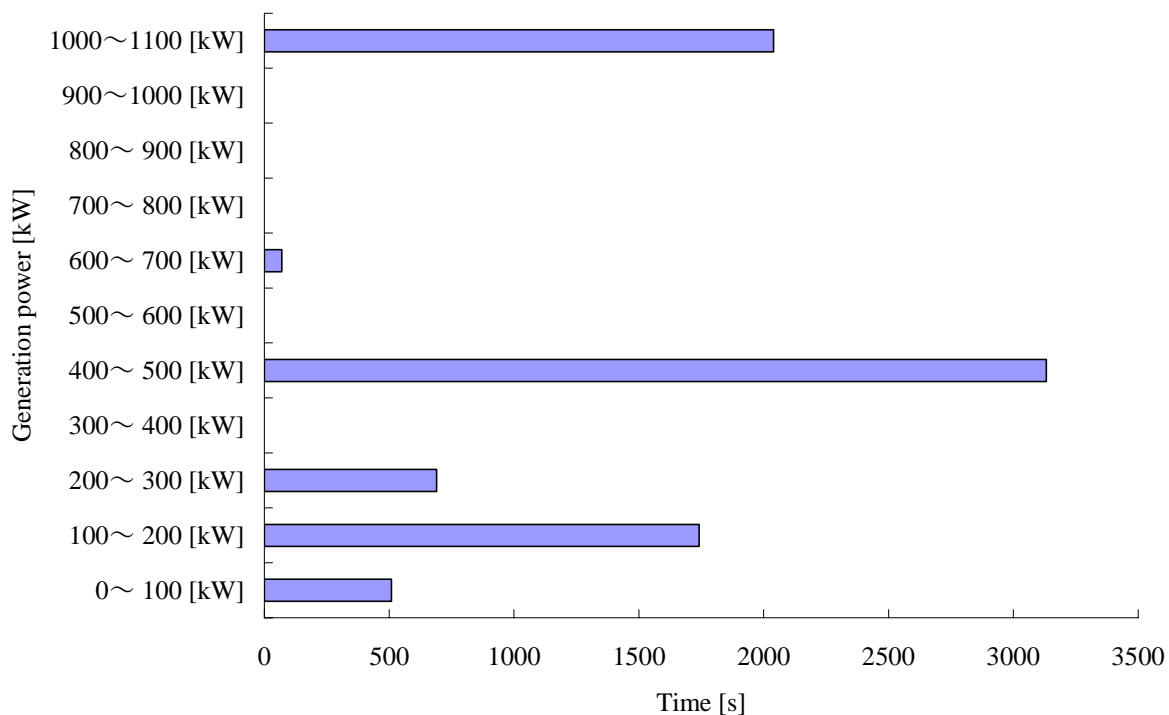
(d) CO 排出量を目的関数として最適化した場合 / Optimization for CO emission

図7. 3. 2 勾配都市間路線に対する各評価項目の削減率

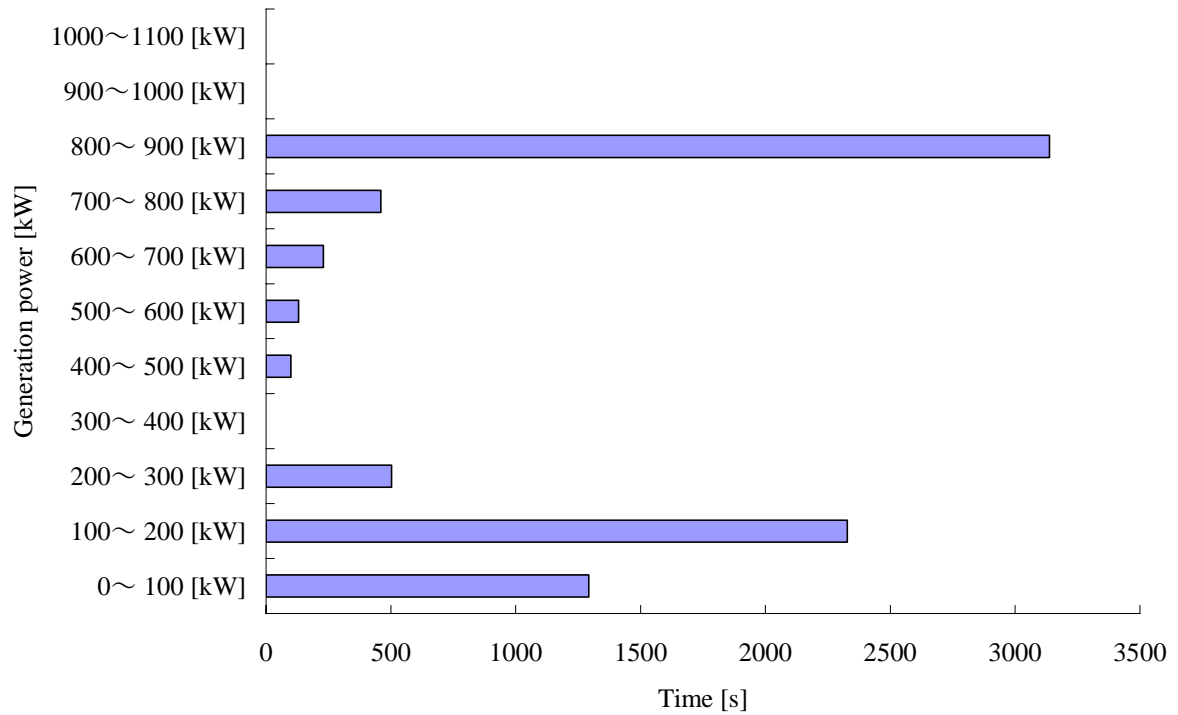
Fig. 7.3.2 Reduction ratio for each evaluation items for a gradient intercity line



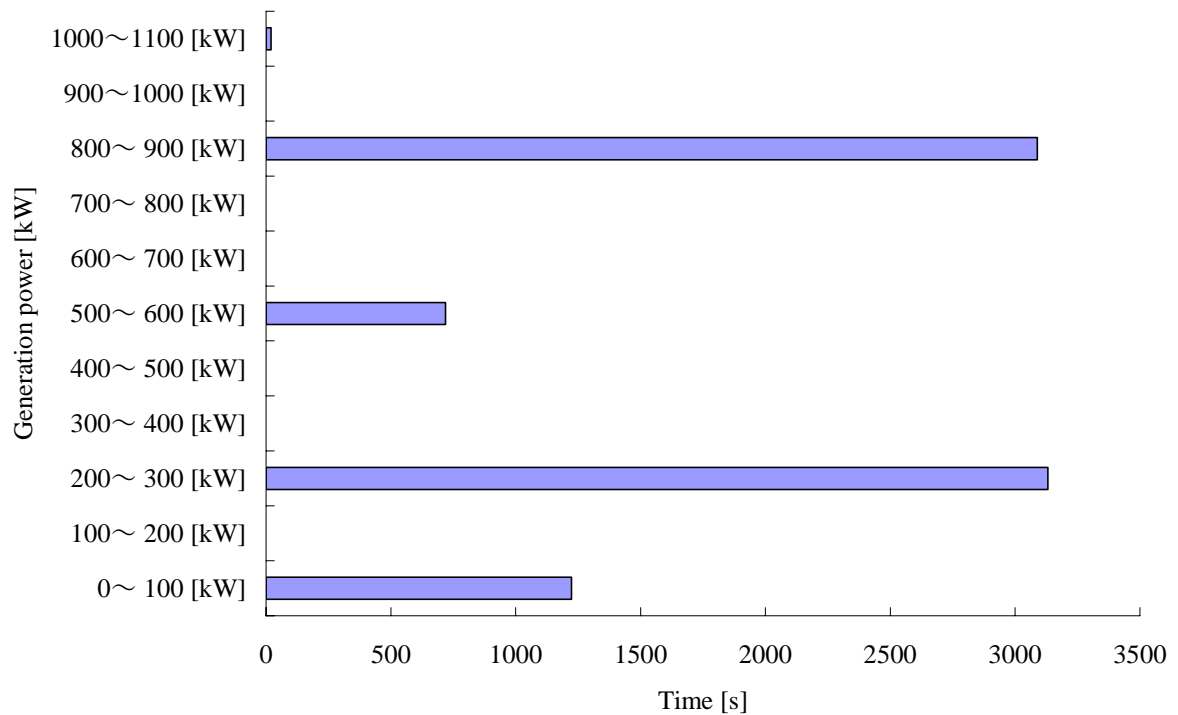
(a) 燃料消費量を目的関数として最適化した場合 / Optimization for fuel consumption



(b) NO<sub>x</sub>排出量を目的関数として最適化した場合 / Optimization for NO<sub>x</sub> emission



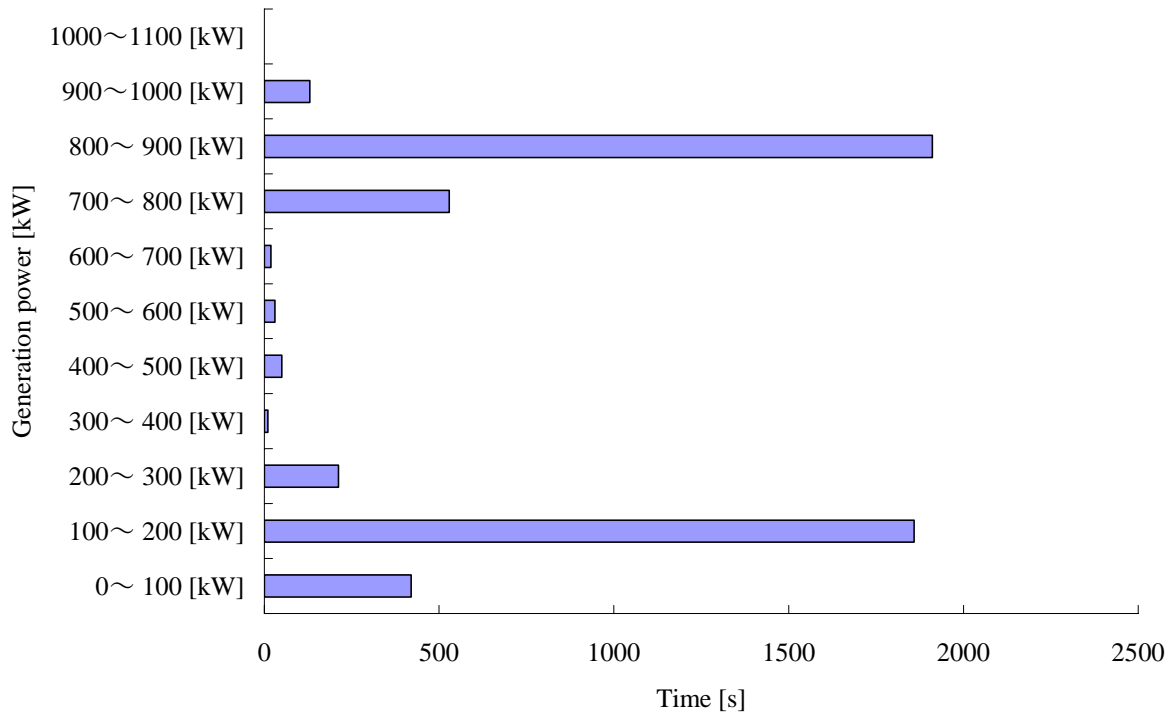
(c) CO<sub>2</sub>排出量を目的関数として最適化した場合／Optimization for CO<sub>2</sub> emission



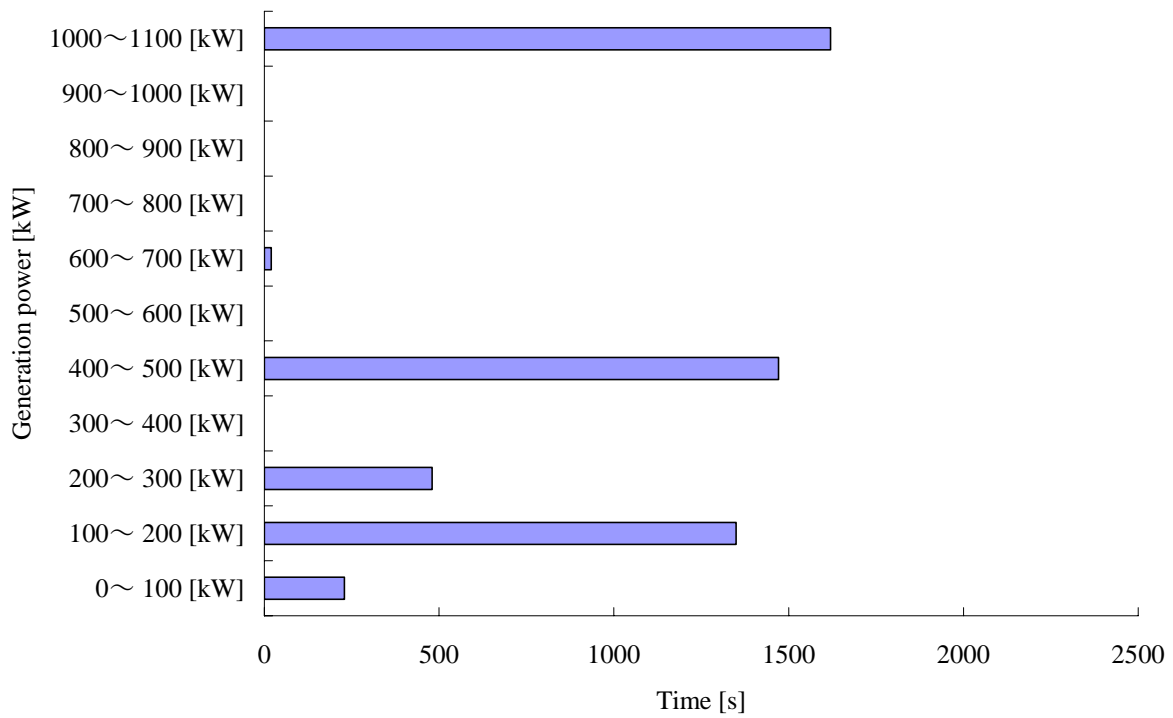
(d) CO 排出量を目的関数として最適化した場合／Optimization for CO emission

図7.3.3 平坦都市間路線における発電電力のヒストグラム

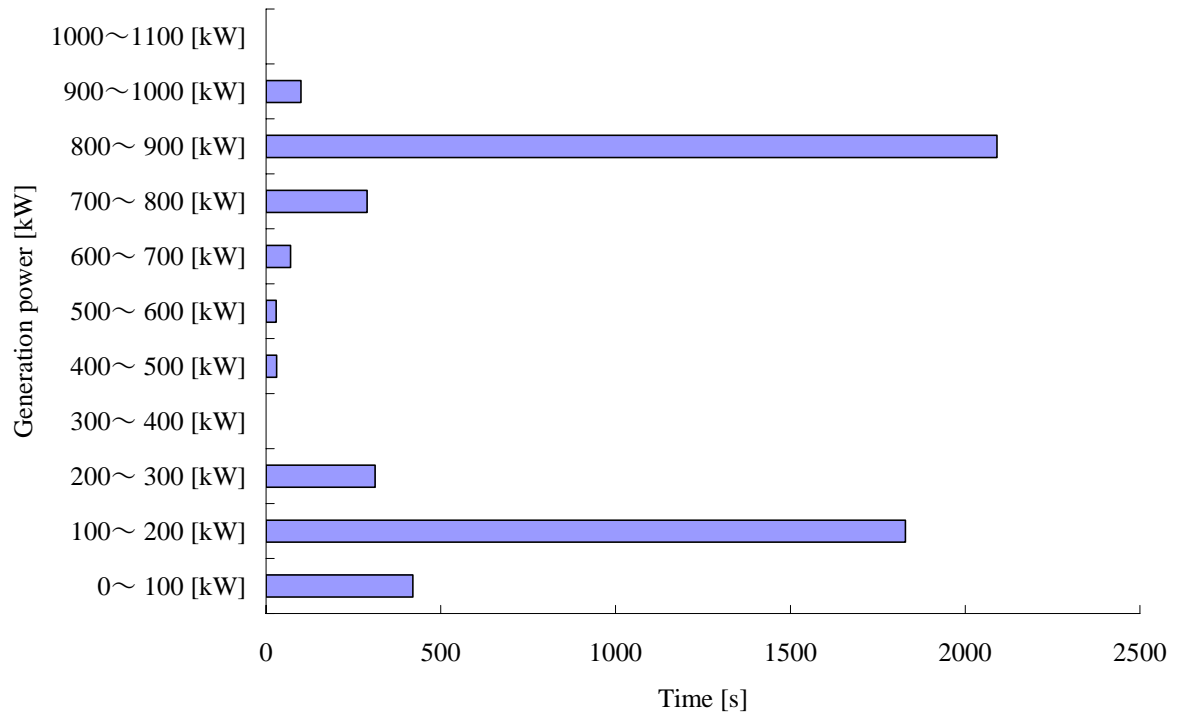
Fig. 7.3.3 Histogram of the generation power for a flat intercity line



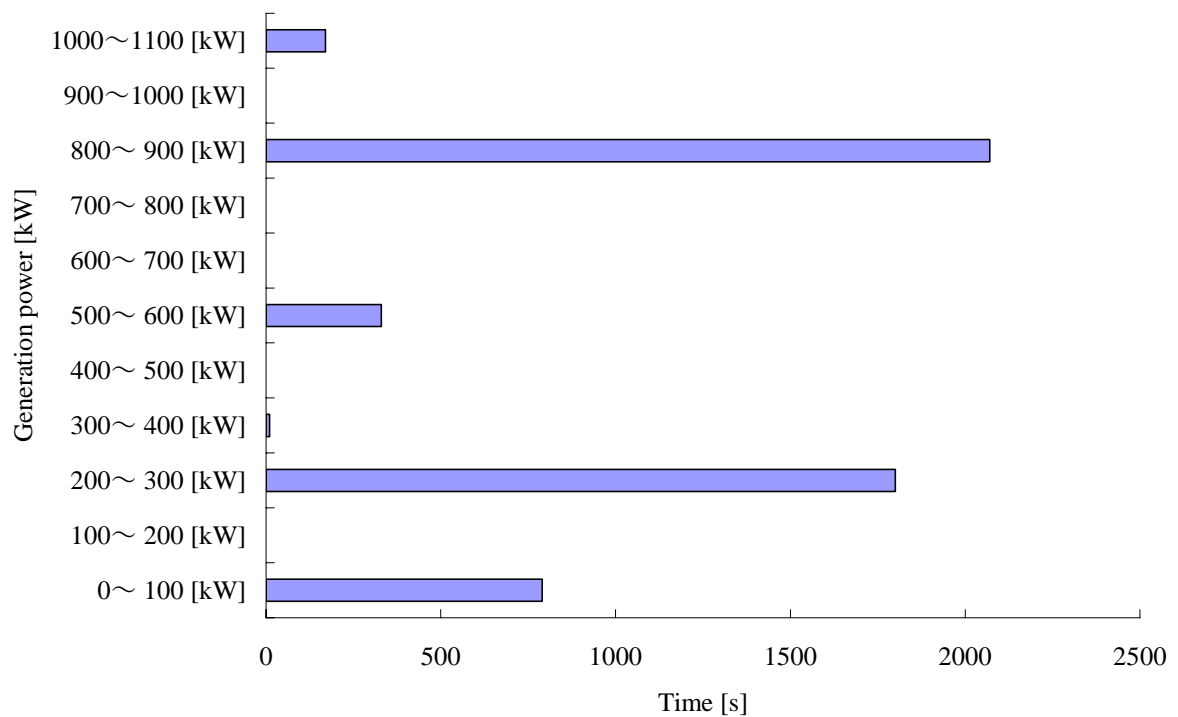
(a) 燃料消費量を目的関数として最適化した場合 / Optimization for fuel consumption



(b) NO<sub>x</sub>排出量を目的関数として最適化した場合 / Optimization for NO<sub>x</sub> emission



(c) CO<sub>2</sub>排出量を目的関数として最適化した場合／Optimization for CO<sub>2</sub> emission



(d) CO 排出量を目的関数として最適化した場合／Optimization for CO emission

図7. 3. 4 勾配都市間路線における発電電力のヒストグラム

Fig. 7.3.4 Histogram of the generation power for a gradient intercity line

## 7.4 ディーゼルハイブリッド鉄道車両の設計指針

本節での検討により、ディーゼルハイブリッド鉄道車両に関して以下のような特徴が明らかになった。

- ・蓄電装置を適用することにより、燃料消費量やガス排出量の削減効果が期待できるが、その効果は一定の蓄電装置容量で飽和する。
- ・勾配都市間路線より平坦都市間路線の方が、燃料消費量やガス排出量の削減効果が期待できる。
- ・燃料消費量やガス排出量の削減効果は、エンジン運転パターンによって大きく異なり、複数の評価項目の間での適切な目的関数の決定が重要である。
- ・燃料消費量削減を目指した設計を行うと、CO<sub>2</sub>排出量に関しても同程度の削減効果を期待でき、NO<sub>x</sub>排出量に関してもある程度の削減効果が得られる。
- ・NO<sub>x</sub>排出量の削減を目指した設計を行うと、NO<sub>x</sub>排出量を大幅に削減させた上で、燃料消費量も削減することができる。
- ・CO 排出量は出力に対する排出量の変動性が極めて大きいため、設計の際に留意することによって、他の評価項目を悪化されることなく、CO 排出量を大幅に改善できる。

以上のような知見は、ディーゼルハイブリッド鉄道車両について、燃料噴射パターンの最適化、複数台のエンジン出力配分の最適化、発電装置と蓄電装置の電力制御に関する動的計画法による最適化を組み合わせ合わせたエンジン運転パターンに関する最適化を用いることによって、最小となる燃料消費量・ガス排出量を算出することによって得られた。最適化手法を用いることにより、多くの評価項目が存在するディーゼルハイブリッド鉄道車両の設計においても、有用な知見を示すことができたと考えている。

## 第8節 まとめ

本論文において、ハイブリッド電源鉄道車両について機器容量と消費エネルギーの最小化の観点から、多目的最適化を適用し、機器容量と電力制御法の設計に有用な分析を行った。電力制御手法については、ハイブリッド電源鉄道車両の消費エネルギーを最小にする電力制御パターンを算出する目的で動的計画法を導入した。また、代表的な2通りの考え方を基本として、検討対象となる2通りの電力制御法を提案した。この結果、ハイブリッド電源鉄道車両の適用路線に対する機器容量と消費エネルギーの特性及び電力制御法の特性を定量的に提示した。

動的計画法により理想的な電力制御パターンを仮定することで、消費エネルギーの傾向について、電力制御法から独立した議論を行うことができる。このため、提案手法は、それぞれの路線条件や機器容量に対して最適化された状態で様々な路線に対する結果を比較できる。提案手法は、様々な特徴の異なる路線に対して、様々な設計コンセプトを網羅した広い探索空間から大域的に最適な特性を提示した。具体的には、動的計画法と多目的最適化による大域的な探索により得られたパレート最適解から、対象路線と機器容量を決定し、動的計画法によって得られた電力制御パターンを目指して具体的な電力制御法を設計することで、最適な設計を行うことが可能となる。このような設計プロセスは、様々な路線や様々な種類のハイブリッド電源システムに広く適用可能である。これにより、ハイブリッド電源鉄道車両の概念設計にあたって、有用な設計指針を提示できることが確認された。これは、燃料電池とキャパシタによるハイブリッド電源鉄道車両という将来的な導入の可能性を探る段階の概念設計において、特に有用であると考えられる。

また、多目的最適化と電力制御法による最適化に続く設計プロセスとして、具体的な電力制御法も提案した。提案の電力制御法を、動的計画法の結果と比較し分析した。これにより、発電装置が特に小さいときには、一定出力制御のような簡便な電力制御においても良好な制御が可能であることを確認した。また、車両エネルギーの考え方に基づく関数制御のような電力制御を用いることで、多くの路線条件や機器容量に対して、個々の条件下での最小な消費エネルギーに近い良好な制御が可能であることを確認した。すなわち、動的計画法を導入することで、電力制御法を設計するにあたっての指針を提示することができ、機器容量に応じて、良好な電力制御法を提案することができた。

本論文の検討により、次のような知見が定量的に明らかになった。

- ハイブリッド電源鉄道車両は、駅間距離が短く、勾配の少ない路線において、消費エネルギー削減の効果が大きく得られる。
- 発電装置出力と蓄電装置容量の間には、トレードオフ関係があり、機器容量と消費エネルギーの最小化の観点からは、トレードオフカーブ上の機器容量が良好な設計パターンである。すなわち、発電装置が小さく、蓄電装置が小さい機器容量構成は、当然のことながら実現が困難であるが、消費エネルギーの観点から考えると、発電装置が大きく、蓄電装置が大きい機器容量構成は、利点が出る場合は限られていることが明らかになった。
- 発電装置が小さく、蓄電装置が大きい機器容量構成の場合には、一定の出力を行う電力制御が有効であり、簡便な電力制御により良好なハイブリッド電源鉄道車両を実現できる。

- ・機器容量構成にかかわらず、車両エネルギーの考え方に基づく電力制御が有効である。
- ・消費エネルギー最小化の観点からは回生電力の確実な回収が重要であり、蓄電媒体の選定を行う場合には、回生時の引張り特性に対して十分なパワーを持たせることが必要である。また、エネルギーに関しては、検討対象とした電気二重層キャパシタやリチウムイオン蓄電池であれば、回生エネルギーを吸収するのに大きな問題はない。
- ・ディーゼルハイブリッド鉄道車両は、燃料消費量やガス排出量の削減効果が期待できるが、その効果は一定の蓄電装置容量で飽和する。
- ・ディーゼルハイブリッド鉄道車両の燃料消費量やガス排出量の削減効果は、エンジン運転パターンによって大きく異なり、複数の評価項目の間での適切な目的関数の決定が重要である。

本研究において、ハイブリッド電源鉄道車両の設計に最適化手法を適用することにより、様々な知見が明らかになった。これにより、開発した最適化手法によって理想的な結果を示すことにより定量的な設計上の目標も提示できたものと考えている。特に提案の最適化手法を実現するにあたっては、単純化された路線ではなく実在する路線をモデル化した点や、多数の設計変数に対して探索を行った点など、設計上必要十分な広範な探索を可能にしたことが特徴と考えられる。ハイブリッド電源鉄道車両に対する最適化手法の適用事例はほとんどないが、鉄道車両の一般的な走行シミュレーションの最適化などにおいても、このような規模で最適化を実行している例は見られない。本研究においては、最適化手法を提案するとともに、提案の最適化手法を実現するために、並列化計算の適用も行った。第4節に示したように並列化計算の適用により、本計算では約 30 倍の高速化を図っていると推定される。すなわち、第6節の蓄電媒体の検討においては、1条件あたり 14～40 日程度を要する計算を 11～32 時間程度に短縮できたと考えられる。このように、並列化計算の適用により、実用的な計算時間内で最適化計算を実施することが可能となった。以上により、本研究は、ハイブリッド電源鉄道車両の最適化による設計・評価手法を提案し、今後の設計に対する有用な指針を示したと考えられる。



## 参考文献

- [1.1] B. Destraz, P. Barrade, and A. Rufer: “Power Assistance for Diesel - Electric Locomotives with Supercapacitive Energy Storage”, 2004 35th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference, pp.677-682 (2004)
- [1.2] Michael Steiner, Markus Klohr, and Stanislaus Pagiela: “Energy Storage System with UltraCaps on Board of Railway Vehicles”, EPE 2007 (2007)
- [1.3] Michael Steiner, and Johannes Scholten: “Improving Overall Energy Efficiency of Traction Vehicles”, WCRR 2006 (2006)
- [1.4] SCHOLTEN Johannes, and STEINER Michael: “Energy Storage on Board of Railway Vehicles”, EPE 2005 (2005)
- [1.5] Michael Steiner, and Johannes Scholten: “Energy Storage on board of DC fed railway vehicles”, 2004 35th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference, pp.666-671 (2004)
- [1.6] Masamichi OGASA, Yoshiaki TAGUCHI, Eiichi MAEBASHI, Satoshi KADOWAKI, and Hiroshi SUEKANE: ““Hi-tram”, a new LRV vehicle with trolley and battery hybrid (contact-wire-less) technology”, J-RAIL2007, S4-4 (2007) (in Japanese)  
小笠 正道・田口 義晃・前橋 栄一・門脇 悟志・末包 洋士:「架線ハイブリッド(架線レス)LRVの新車概要と車両性能」、第14回鉄道技術連合シンポジウム講演論文集、S4-4 (2007)
- [1.7] Keiichiro Kondo, Ryosuke Furuta, Yasunao Sekijima, and Takamitsu Yamamoto: “Energy Storage Technologies Applied to Railway Vehicle Traction”, The Papers of technical Meeting on Vehicle Technology, IEE Japan, VT-07-16 (2007) (in Japanese)  
近藤 圭一郎・古田 良介・関島 康直・山本 貴光:「鉄道車両駆動におけるエネルギーストレージ応用」、電気学会自動車研究会資料、VT-07-16 (2007)
- [1.8] Masamichi OGASA, and Yoshiaki TAGUCHI: “Power Flow Control for Hybrid Electric Vehicles Using Trolley Power and On-board Batteries”, QR of RTRI, Vol. 48, No. 1, Feb. (2007)

- [1.9] Masamichi Ogasa: “Contact-wire-less tramcar driven by battery energy (Trolley and on-board battery hybrid controlled vehicle)”, JIASC2006, IEE Japan, 1-O5-2 (2006) (in Japanese)  
小笠 正道:「バッテリー駆動架線レストラム(架線・バッテリーハイブリッド)」、電気学会産業応用部門大会講演論文集、1-O5-2 (2006)
- [1.10] Hiroshi SAMEISHIMA, Masamichi OGASA, and Takamitsu YAMAMOTO: “On-board Characteristics of Rechargeable Lithium Ion Batteries for Improving Energy Regenerative Efficiency”, QR of RTRI, Vol. 45, No. 2, May. (2004)
- [1.11] Kenichi Ogawa, Takamitsu Yamamoto, and Takashi Yoneyama: “The running test results of test vehicle powered by fuel cells and the running simulation under the condition of commercial line”, The Papers of the Technical Meeting on Vehicle Technology, IEE Japan, VT-07-22 (2007) (in Japanese)  
小川 賢一・山本 貴光・米山 崇:「燃料電池試験電車の走行試験結果と実路線走行シミュレーション」、電気学会自動車研究会資料、VT-07-22 (2007)
- [1.12] 山本 貴光・古谷 勇真・米山 崇・小川 賢一:「燃料電池車両の開発～100kW 級燃料電池による走行試験結果概要～」、Railway Research Review、2007年8月号 (2007)
- [1.13] KEIICHIRO KONDO, TAKASHI YONEYAMA, and TAKAMITSU YAMAMOTO: “FEASIBILITY STUDY ON FUEL CELL RAILWAY TRACTION SYSTEM”, EVS-22 (2006)
- [1.14] Takamitsu Yamamoto: “Apply fuel cells power to the railway vehicle traction”, JIASC2006, IEE Japan, 1-O5-6 (2006) (in Japanese)  
山本 貴光:「燃料電池の鉄道車両駆動への適用検討」、電気学会産業応用部門大会講演論文集、1-O5-6 (2006)
- [1.15] Takemasa Furuya, Keiichiro Kondo, and Takamitsu Yamamoto: “Experimental Study on a Voltage Source Inverter-fed Induction Motor Traction System Connected to Fuel Cell”, IEEE Trans. IA, Vol.126, No.1, pp.42-47 (2006) (in Japanese)  
古谷 勇真・近藤 圭一郎・山本 貴光:「燃料電池による鉄道車両用インバータ・誘導電動機駆動特性」、電気学会論文誌 D、Vol.126, No.1, pp.42-47 (2006)
- [1.16] 野元 浩:「エコロジートレイン」、山海堂 (2007)
- [1.17] Masahito Nakagami, Kazuyoshi Machida, Yoshimitu Sugiura, Hideki Sonoda, Naoki Shiraki, and Tetsuro Oomura: “Development of the World’s First Hybrid Railcar”, J-RAIL2007, S4-4 (2007) (in Japanese)  
中神 匡人・町田 一善・杉浦 芳光・藺田 秀樹・白木 直樹・大村 哲郎:「世界初のハイブリッド営業車両の開発」、第14回鉄道技術連合シンポジウム講演論文集、S4-4 (2007)

- [1.18] Masahito nakagami, Ryosuke Furuta, Motomi Shimada, Takashi Kaneko, and Eiichi Toyota: “Energy Management of The Fuel Cell Hybrid Traction System for Railcars”, JIASC2004, IEE Japan, 3-34 (2007) (in Japanese)  
中神 匡人・古田 良介・嶋田 基巳・金子 貴志・豊田 瑛一:「燃料電池車両ハイブリッドシステムのエネルギー管理」、電気学会産業応用部門大会講演論文集、3-34 (2007)
- [1.19] Motomi Shimada, Masahito Nakagami, Ryosuke Furuta, Eiichi Toyota, and Takashi Kaneko: “The Energy Control System of Fuel Cell Hybrid Traction System for Railcars”, EVS-22 (2006)
- [1.20] Tetsuro Omura, Ryohei Shimamune, Hiroshi Nomoto, Motoki Shimada, Takashi Kaneko, and Eiichi Toyota: “Energy Management of Hybrid Propulsion System for ‘ne@train’”, JIASC2004, IEE Japan, 3-3-18 (2004) (in Japanese)  
大村 哲朗・島宗 亮平・野元 浩・嶋田 基巳・金子 貴志・豊田 瑛一:「NEトレイン用ハイブリッド動力システムのエネルギー管理」、電気学会産業応用部門大会講演論文集、3-3-18 (2004)
- [1.21] Koki Ogura, Kenji Yoshida, Kazuo Tsutsumi, and Kazuya Nishimura: “The development of low floor battery-driven LRV”, J-RAIL2007, S4-5 (2007) (in Japanese)  
小倉 弘毅・吉田 賢治・堤 香津雄・西村 和也:「低床電池駆動路面電車(LRV)の開発」、第14回鉄道技術連合シンポジウム講演論文集、S4-5 (2007)
- [1.22] AKIYAMA Satoru, Nishimura Kazuya, and MATSUO Kazuya: “The development of low floor battery-driven LRV”, J-RAIL2006, 3412 (2006) (in Japanese)  
秋山 悟・西村 和也・松尾 和也:「ニッケル水素電池による電車走行実験」、第13回鉄道技術連合シンポジウム講演論文集、3412 (2006)
- [1.23] Yasunao Sekijima, Masayuki Inui, Ikuya Aoyama, and Yukitaka Monden: “A trial of Regenerated Energy storage with an Electric Double Layer Capacitor for Rolling Stock”, JIASC2006, IEE Japan, 1-O5-5 (2006) (in Japanese)  
関島 康直・乾 正幸・青山 育也・門田 行生:「車両搭載型電気二重層キャパシタによる回生エネルギー吸収の試み」、電気学会産業応用部門大会講演論文集、1-O5-5 (2006)
- [1.24] 「西日本旅客鉄道株式会社新疋田変電所向け電力補完装置」、東洋電機技報、No.115 (2007)
- [1.25] 星 吉輝・東 直親:「鹿児島市交通局向けの架線電圧補償システムの概要」、鉄道車両と技術、No.132 (2007)

- [1.26] Takashi Ogihara, Hironori Ozawa, Hitoshi Aikiyo, Takashi Ookawa, and Kazunori Ozawa: “Development and Running Performance of Lithium Ion Battery Type Railway”, JIASC2007, IEE Japan, 3-54 (2007) (in Japanese)  
荻原 隆・小沢 浩典・愛清 仁・大川 隆・小沢 和典:「リチウムイオン電池式鉄道の開発および走行性能に関する研究」、電気学会産業応用部門大会講演論文集、3-54 (2007)
- [1.27] Yoshiaki Taguchi, Masamichi Ogasa, Hiroshi Hata, Hiroyasu Iijima, Sumiaki Ohtsuyama, and Tsuyoshi Funaki: “Simulation Results of Novel Energy Storage Equipment Series-Connected to the Traction Inverter”, EPE 2007 (2007)
- [1.28] Masafumi Miyatake, Hideyoshi Ko, Kunihiko Matsuda, and Hiroto Haga: “Optimal Train Speed Control and Introduction of On-board Energy Storage Devices for Minimum Energy Operation”, RTS 2007 (2007)
- [1.29] Satoru SONE: “Re-examination of Feeding Characteristics and Squeezing Control of Regenerative Trains”, The paper of Joint Technical Meeting on Transportation and Electric Railway and Linear Drives, IEE Japan, TER-02-49 / LD-02-64 (2002) (in Japanese)  
曾根 悟:「回生車時代の饋電特性と絞り込み特性の再検討」、電気学会交通・電気鉄道／リニアドライブ合同研究会資料、TER-02-49 / LD-02-64 (2002)
- [1.30] Satoru SONE: “Optimisation of Regenerative Train Operation – Pt. 1 Contents of “Optima””, JIASC2001, IEE Japan, 250 (2001) (in Japanese)  
曾根 悟:「電力回生車の最適運転法－その1『最適』の内容」、電気学会産業応用部門大会講演論文集、250 (2001)
- [1.31] Hideyoshi Ko, and Masafumi Miyatake: “A Numerical Method for Optimal Operating Problem of A Train Considering DC Power Feeding System”, IEEJ Trans. IA, Vol.126, No.1, pp.1104-1112 (2006) (in Japanese)  
高 英聖・宮武 昌史:「直流饋電特性を考慮した列車運転曲線最適化問題の数値解法」、電気学会論文誌 D、Vol.126, No.8, pp.1104-1112 (2006)
- [1.32] Yuruki Okada, and Takafumi Koseki: “Vehicle and electrical system for effective usage of regenerative brake in DC-electrified railway”, The paper of Joint Technical Meeting on Transportation and Electric Railway and Linear Drives, IEE Japan, TER-04-39 / LD-04-60 (2004) (in Japanese)  
岡田 万基・古関 隆章:「直流電気鉄道における回生ブレーキ有効活用のための車両と電気システム」、電気学会交通・電気鉄道／リニアドライブ合同研究会資料、TER-04-39 / LD-04-60 (2004)
- [2.1] 運転理論研究会:「運転理論」、日本鉄道運転協会 (2002)

- [2.2] 電気学会:「最新 電気鉄道工学」、コロナ社 (2000)
- [2.3] 松本 雅行:「電気鉄道(第2版)」、森北出版 (2007)
- [2.4] Tomoyuki Ogawa, Haruo Kaneko, Shinji Wakao, and Keiichiro Kondo: “A Study on Capacities of the Devices for a Fuel Cell Hybrid Power Railway Vehicle”, The paper of Joint Technical Meeting on Transportation and Electric Railway and Linear Drives, IEE Japan, TER-05-38 / LD-05-41 (2005) (in Japanese)  
小川 知行・金子 晴郎・若尾 真治・近藤 圭一郎:「燃料電池ハイブリッド鉄道車両導入に向けた機器容量の検討」、電気学会交通・電気鉄道／リニアドライブ合同研究会資料、TER-05-38 / LD-05-41 (2005)
- [2.5] Kenichi Ogawa, Takamitsu Yamamoto, and Takashi Yoneyama: “The running test results of test vehicle powered by fuel cells and the running simulation under the condition of commercial line”, The Papers of technical Meeting on Vehicle Technology, IEE Japan, VT-07-22 (2007) (in Japanese)  
小川 賢一・山本 貴光・米山 崇:「燃料電池試験電車の走行試験結果と実路線走行シミュレーション」、電気学会自動車研究会資料、VT-07-22 (2007)
- [3.1] Richard Bellman: “Dynamic Programming”, Princeton University Press (1957)
- [3.2] Tetsuro Omura, Ryohei Shimamune, Hiroshi Nomoto, Motoki Shimada, Takashi Kaneko, and Eiichi Toyota: “Energy Management of Hybrid Propulsion System for ‘ne@train’”, JIASC2004, IEE Japan, 3-3-18 (2004) (in Japanese)  
大村 哲朗・島宗 亮平・野元 浩・嶋田 基巳・金子 貴志・豊田 瑛一:「NEトレイン用ハイブリッド動力システムのエネルギー管理」、電気学会産業応用部門大会講演論文集、3-3-18 (2004)
- [3.3] B. Destraz, P. Barrade, and A. Rufer: “Power Assistance for Diesel - Electric Locomotives with Supercapacitive Energy Storage”, 2004 35th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference, pp.677-682 (2004)
- [4.1] Yann Collette, and Patrick Siarry: “Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies”, Springer (2003)
- [4.2] Carlos M. Fonseca, and Peter J. Fleming: “Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization”, Genetic Algorithms: Proceedings of the Fifth International Conference, pp.416-423 (1993)

- [4-3] Jeffrey Horn, Nicholas Nafpliotis, and Davie E. Goldberg: “A Niche Pareto Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization”, Proceedings of the First IEEE Conference on, IEEE World Congress on Computational Intelligence, Vol.1, pp. 82-87 (1994)

# 第4章

## 結論





# 本研究の成果

本研究の主な成果は以下の通りである。

## ＜第1章＞緒論

第1章においては、本研究の背景をまとめるとともに、帰線電流高調波の理論解析とハイブリッド電源鉄道車両の最適化設計手法を対象とする本研究の概要を述べた。

## ＜第2章＞帰線電流高調波の理論解析

第2章においては、架線から集電し電気運転を行う鉄道車両に焦点を当て、インバータによる車両駆動システムの新たな設計手法の提示を目的とし、帰線電流高調波の理論解析手法を提案した。本章における開発手法により、相電流の正弦波近似とともにスイッチング素子の動作を表現するスイッチング関数を導入することによって、直流側電流高調波の周波数成分だけでなく、その振幅値も明確に示す理論式を導出した。続いて、実験結果、微分方程式に基づく数値解析結果、および提案手法の理論解析結果を比較した。この結果、理論解析による高調波成分は、実験と数値解析で得られた主な高調波成分と比較して、周波数が一致するだけでなく振幅も良好に合致した。これにより、本章において開発した理論解析の妥当性を示した。開発手法は、インバータのPWMパルスモードに応じて、非同期PWMモード、同期PWMモード、1パルスモードに適用可能である。これにより、帰線電流高調波の対策として、高調波発生原理を体系的に整理することが可能となった。開発手法により、変調波周波数、搬送波周波数、変調率などのパラメータが、発生する高調波に及ぼす影響を理論式に基づき把握することが可能となった。これは、微分方程式に基づく数値解析では得ることができなかった情報の抽出を可能とするものであり、開発手法の大きな特徴である。本手法を用いることで、高調波抑制対策など、今後のインバータによる車両駆動システムの設計に有益な情報を提示することが期待できる。本研究は、これまで十分に整理されていない車両から発生する高調波についてPWMパルスモードに応じて体系的に整理し、高調波発生量を明確に提示した。これにより、今後の車両駆動システムや信号システムの設計を改善するものと期待する。

さらに、本章では、高調波低減の一手法として、PWM搬送波の位相差運転の効果について開発した理論解析により分析・評価した。開発した理論解析の応用事例として、直流鉄道車両への位相差運転の効果を理論式により定量的に明らかにし、その有効性を示した。今後、高調波低減手法として位相差運転の適用が期待される。

## ＜第3章＞ハイブリッド電源鉄道車両の最適化設計手法

第3章においては、将来の車両駆動システムとして研究開発が進められているハイブリッド電源鉄道車両を対象にして、設計コンセプトを見いだすための基本設計手法として最適化による設計手法を提案した。開発手法においては、多目的最適化を適用すると同時に、そのプロセスにおいて電力制御パターンの算出に動的計画法を取り入れ、ネスト化された最適化計算手法を提案している。この結果、探索空間が極めて広範となり、通常の高速度ワークステーションを用いても実用上可能な時間範囲で処理が困難となる。そこで、最適化プロセスを適切に並列化計算させることで、探索の大規模高速化を実現した。以上の結果、動的計画法により種々の路線条件や機器容量の下で消費エネルギーを最小にする最適な電力制御を実現

した上で、発電装置容量・蓄電装置容量・消費エネルギー・路線条件の相関を広範な探索空間にわり把握することが可能となった。このような詳細な分析結果に基づき、最終的に、電源システムのハイブリッド化による効果が大きい機器容量構成をパレート最適解として抽出した。同時に、路線特性の観点からも分析することで、ハイブリッド化の効果が大きい対象路線の特徴を明らかにした。これにより、ハイブリッド電源鉄道車両の設計の概念設計にあたって、有用な設計指針を提示できることが確認された。これは、燃料電池とキャパシタによるハイブリッド電源鉄道車両という将来的な導入の可能性を探る段階の概念設計において、特に有用であると考えられる。

また、ここまでの議論では、動的計画法により最適化された電力制御パターンに基づき、ハイブリッド電源鉄道車両の基本設計を行っている。したがって、設計結果を実際のハイブリッド電源鉄道車両に適用するには、動的計画法により得られた結果と遜色ない程度のエネルギー消費を実現できる現実的な電力制御法が求められる。そこで、本論文では、代表的な2通りの考え方を基本とし、新たな2通りの電力制御法を開発した。提案する電力制御法について、動的計画法の結果と比較することで、実用的な電力制御についても分析した。これにより、発電装置が特に小さいときには、一定出力制御のような簡便な電力制御においても、与えられた機器容量下で良好な制御が可能であることを確認した。また、車両エネルギーの考え方に基づく関数制御のような電力制御を用いることで、多くの路線条件や機器容量に対して、個々の条件下での最小な消費エネルギーに近い良好な制御が可能であることが確認した。動的計画法を導入することで、電力制御法を設計するにあたっての指針を提示することができ、機器容量に応じて、良好な電力制御法を提案することができた。

本研究において、ハイブリッド電源鉄道車両の設計に最適化手法を適用することにより、設計上有用な様々な知見が明らかになった。今回の最適化手法を用いた検討により、理想的な結果を示すことによって設計上の目標を定量的に提示できたものと考えている。特に提案の最適化手法を実現するにあたっては、単純化された路線ではなく実在する路線をモデル化した点や、多数の設計変数に対して探索を行った点など、設計上必要十分な広範な探索を可能にしたことが特徴と考えられる。本研究においては、最適化手法を提案するとともに、実用的な計算時間内で最適化計算を実施することを可能にした。本研究により、ハイブリッド電源鉄道車両の最適化による設計・評価手法を提案し、今後の設計に対する有用な指針を示したと考えている。

## まとめと今後の課題

本論文では、はじめに、電気運転を行うインバータによる車両駆動システムに対して新たな設計指針を示すことを目指して、帰線電流高調波の理論解析手法を提案した。続いて、導入に向けて研究開発が現在進められている段階であるハイブリッド電源鉄道車両の車両駆動システムの設計・評価手法を提案した。

帰線電流高調波の理論解析手法は、車両駆動用インバータによる高調波発生量を理論式により明確に提示し、その妥当性も検証された。開発手法は、インバータのPWMパルスモードに応じて、非同期PWMモード、同期PWMモード、1パルスモードに適用可能であり、帰線電流高調波の対策として、高調波発生原理を体系的に整理した。これにより、変調波周波数、搬送波周波数、変調率などのパラメータが、発生する高調波に及ぼす影響を理論式に基づき把握することが可能となった。これは、微分方程式に基づく数値解析では得ることができなかった情報の抽出を可能とするものであり、開発手法の大きな特徴である。今後は、提案の理論解析結果を生かした車両駆動システム及び信号システムの開発が課題となる。また、理論解析に基づき、高調波の低減を図ることも有効と考えられる。提案の位相差運転をはじめとして、高調波発生量を抑制するようなPWM制御パターンの検討や、信号システムの対応なども考えられる。

また、ハイブリッド電源鉄道車両の設計・評価手法は、今後、車両駆動システムに蓄電媒体を適用するにあたっての有用な情報を提示できたものと考えている。最適化によって、機器容量構成と電力制御パターンの優れた組み合わせを提示したことにより、今後の設計上の目標を提示できたものと考えられる。ハイブリッド電源鉄道車両は、発電装置と蓄電装置という2つの電源を有することから、従来の鉄道車両設計のような手法が用いることができず、適切なハイブリッドシステムの設計は非常に難しいものとなっている。これに対して、本手法は、最適化手法を用いて、広い観点から最適化を行ったことにより、設計者に有用な情報を提示できたものと考えられる。今後の課題としては、構成機器のモデルを詳細化することや、運転曲線と電力制御パターンを同時に最適化する手法の検討などが考えられる。前者は、詳細な損失モデルの組み込みや、蓄電媒体の寿命予測も含めた最適化や、発電装置や蓄電装置の過渡特性の考慮などが考えられる。これらは、機器単体の特性に関する研究にとともにモデル化を実現することが課題となる。また、後者に関しては、運転曲線の最適化はいくつかの取り組みが見られるが、運転曲線と電力制御という2つの自由度を考慮することで、探索空間の次元が増加することに伴う劇的な計算負荷の増大に関する対策や、1駅間での最適化が主流である運転曲線に関する最適制御と、1路線での最適化が必要なハイブリッド電源鉄道車両に関する最適制御の探索空間の違いを適切に処理することなどが今後の主たる課題と考えられる。



## 研究業績

種類別	題名、発表・発行掲載誌名、発表・発行年月、連名者
○論文	<p>“Design Estimation of the Hybrid Power Source Railway Vehicle based on the Multiobjective Optimization by the Dynamic Programming”            IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering Vol. 3 (2008), No. 1, pp.48-55            Jan. 2008  <u>Tomoyuki Ogawa</u>, Hiroaki Yoshihara, Shinji Wakao, Keiichiro Kondo, Minoru Kondo</p>
○論文	<p>「鉄道車両への導入を想定したハイブリッド電源システムの多目的最適化設計」            電気学会論文誌 D Vol. 126 (2006), No. 12 pp.1690-1698            2006年12月  <u>小川知行</u>, 若尾真治, 近藤圭一郎</p>
○論文	<p>「鉄道車両駆動用インバータにおける直流側電流の側帯高調波の理論解析」            電気学会論文誌 D Vol. 126 (2006), No. 7 pp.1049-1057            2006年7月  <u>小川知行</u>, 若尾真治, Jat Taufiq, 近藤圭一郎, 寺内伸雄</p>
論文	<p>「鉄道高架橋の電磁遮蔽効果に対する解析手法の高度化」            電気学会論文誌 D Vol. 128 (2008), No. 3            2007年3月(掲載決定)            奥谷民雄, 中村信幸, 寺田夏樹, 館裕, 稲田聡, <u>小川知行</u>, 孫佳男, 若尾真治</p>
講演	<p>「ランダム PWM 法による帰線電流高調波低減効果に関する実験検証」            平成20年電気学会全国大会            2008年3月(発表予定)            本間俊宏, 谷口峻, <u>小川知行</u>, 若尾真治, 近藤圭一郎, 米山崇</p>
講演	<p>「遮蔽導体の接続抵抗にばらつきがある場合のトンネル遮蔽効果の解析」            第14回鉄道技術連合シンポジウム S9-5            2007年12月            孫佳男, <u>小川知行</u>, 若尾真治, 奥谷民雄, 中村信幸, 寺田夏樹, 館裕, 稲田聡</p>
講演	<p>「ディーゼルハイブリッド鉄道車両の燃料消費量と排出ガス削減を目的としたエンジン運転パターンの最適化」            電気学会交通・電気鉄道/ITS 合同研究会 TER-07-42/ITS-07-29            2007年11月  <u>小川知行</u>, 吉原博昭, 若尾真治, 近藤圭一郎, 近藤稔</p>

講演	<p>“A Theoretical Calculation Method of the Return Current Harmonics caused by the PWM Converters of AC EMU”                  The Third International Conference on Railway Traction Systems                  Nov. 2007  <u>Tomoyuki Ogawa</u>, Yoshio Son, Shinji Wakao, Tamio Okutani, Satoru Hatsukade, Tomoki Watanabe, Syuetsu Kojima</p>
講演	<p>“ Theoretical analysis of cancellation of DC-link current harmonics in the inverter-controlled DC electric railcar”                  12th European Conference on Power Electronics and Applications 420                  Sep. 2007  <u>Tomoyuki Ogawa</u>, Shinji Wakao, Jat Taufiq, Keiichiro Kondo, Nobuo Terauchi</p>
講演	<p>“Energy Consumption Analysis of FC-EDLC Hybrid Railway Vehicle by Dynamic Programming”                  12th European Conference on Power Electronics and Applications 498                  Sep. 2007  <u>Tomoyuki Ogawa</u>, Hiroaki Yoshihara, Shinji Wakao, Keiichiro Kondo, Minoru Kondo</p>
講演	<p>「動的計画法を用いた多目的最適化によるハイブリッド電源鉄道車両の設計評価手法」                  平成 19 年電気学会産業応用部門大会 No. 3-36                  2007 年 8 月  <u>小川知行</u>, 吉原博昭, 若尾真治, 近藤圭一郎, 近藤稔</p>
講演	<p>「動的計画法によるディーゼルハイブリッド鉄道車両の燃料消費量特性」                  電気学会交通・電気鉄道／リニアドライブ合同研究会 TER-07-27/LD-07-23                  2007 年 7 月                  吉原博昭, <u>小川知行</u>, 若尾真治, 近藤圭一郎, 近藤稔</p>
講演	<p>「新幹線高架橋での電磁誘導測定試験と解析」                  電気学会交通・電気鉄道／リニアドライブ合同研究会 TER-07-26/LD-07-22                  2007 年 7 月                  孫佳男, <u>小川知行</u>, 若尾真治, 奥谷民雄, 中村信幸, 寺田夏樹, 館裕, 稲田聡</p>
講演	<p>「交流鉄道車両用コンバータによる帰線電流高調波の理論計算手法の検討」                  電気学会交通・電気鉄道研究会 TER-07-20                  2007 年 5 月  <u>小川知行</u>, 若尾真治, 奥谷民雄, 廿日出悟, 渡邊朝紀</p>

講演	<p>「動的計画法を用いたハイブリッド電源鉄道車両の消費エネルギー削減効果に関する検討」 平成 19 年電気学会全国大会 No. 5-156 2007 年 3 月 <u>小川知行</u>, 吉原博昭, 若尾真治, 近藤圭一郎, 近藤稔</p>
講演	<p>「ハイブリッド電源鉄道車両における動的計画法を用いた最適電力制御法の検討」 電気学会交通・電気鉄道／フィジカルセンサ合同研究会 TER-07-3/PHS-07-3 2007 年 2 月 <u>小川知行</u>, 吉原博昭, 若尾真治, 近藤圭一郎, 近藤稔</p>
講演	<p>“A Multiobjective Optimal Design of a Hybrid Power Source Railway Vehicle” The 2006 International Conference on Electrical Machines and Systems DS1F3-09 Nov. 2006 <u>T Ogawa</u>, H Yoshihara, S Wakao, K Kondo</p>
講演	<p>「高架橋の電磁遮蔽効果を考慮した誘導予測計算法の提案(2)」 電気学会交通・電気鉄道／ITS 合同研究会 TER-06-87/ITS-06-44 2006 年 11 月 三枝雄一郎, <u>小川知行</u>, 孫佳男, 若尾真治, 奥谷民雄, 中村信幸, 寺田夏樹, 館裕, 稲田聡</p>
講演	<p>「高架橋の電磁遮蔽効果を考慮した誘導予測計算法の提案」 電気学会交通・電気鉄道研究会 TER-06-72 2006 年 9 月 <u>小川知行</u>, 三枝雄一郎, 若尾真治, 奥谷民雄, 中村信幸, 寺田夏樹, 館裕, 稲田聡</p>
講演	<p>「燃料電池ハイブリッド電源鉄道車両における多目的最適化手法を用いた所要時間短縮効果と消費電力量削減効果の検討」 平成 18 年電気学会産業応用部門大会 No. 3-63 2006 年 8 月 <u>小川知行</u>, 吉原博昭, 若尾真治, 近藤圭一郎</p>
講演	<p>「ハイブリッド鉄道車両による所要時間短縮効果と消費電力量低減効果のトレードオフ関係に関する検討」 電気学会交通・電気鉄道／リニアドライブ合同研究会 TER-06-56/LD-06-34 2006 年 7 月 吉原博昭, <u>小川知行</u>, 若尾真治, 近藤圭一郎</p>

<p>講演</p>	<p>「ディーゼルハイブリッド鉄道車両による加速性能向上効果の検討」 平成 18 年電気学会全国大会 No. 5-158 2006 年 3 月 吉原博昭, <u>小川知行</u>, 若尾真治, 近藤圭一郎</p>
<p>講演</p>	<p>「燃料電池ハイブリッド電源鉄道車両の多目的最適設計手法の提案」 電気学会交通・電気鉄道／半導体電力変換合同研究会 TER-06-29/SPC-06-76 2006 年 3 月 <u>小川知行</u>, 若尾真治, 近藤圭一郎</p>
<p>講演</p>	<p>「燃料電池ハイブリッド鉄道車両導入に向けた機器容量の検討」 電気学会交通・電気鉄道／リニアドライブ合同研究会 TER-05-38/LD-05-41 2005 年 7 月 <u>小川知行</u>, 金子晴郎, 若尾真治, 近藤圭一郎</p>
<p>講演</p>	<p>「鉄道車両駆動用インバータにおける直流側電流の側帯高調波の理論解析」 電気学会半導体電力変換／産業電力電気応用合同研究会 SPC-05-55/IEA-05-10 2005 年 6 月 <u>小川知行</u>, 若尾真治, <u>Jat Taufiq</u>, 近藤圭一郎, 寺内伸雄</p>
<p>講演</p>	<p>「インバータ直流側電流の側帯高調波の理論解析」 平成 17 年電気学会全国大会 No. 5-170 2005 年 3 月 <u>小川知行</u>, 若尾真治, <u>Jat Taufiq</u>, 近藤圭一郎, 寺内伸雄</p>
<p>講演</p>	<p>“Theoretical analysis of return current harmonics in the inverter-controlled DC electric railcar” 2004 35th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference pp.711-716 Jun. 2004 <u>T Ogawa</u>, S Wakao, K Kondo, N Terauchi</p>
<p>講演</p>	<p>「鉄道車両駆動用インバータにおける直流側電流高調波の理論解析」 電気学会半導体電力変換／産業電力電気応用合同研究会 SPC-04-100/IEA-04-27 2004 年 6 月 <u>小川知行</u>, 若尾真治, 近藤圭一郎, 寺内伸雄</p>
<p>講演</p>	<p>「シミュレーションによる直流インバータ車の帰線電流高調波の検討」 電気学会交通・電気鉄道／リニアドライブ合同研究会 TER-03-47/LD-03-72 2003 年 7 月 <u>小川知行</u>, 若尾真治, 近藤圭一郎</p>



# 謝辞

本研究の遂行及び論文の作成にあたり、卒業論文より長い間ご指導頂いた早稲田大学理工学術院若尾真治教授には、終始、親身にご指導頂きました。心よりお礼申し上げます。また、ご査読に多くの時間を割いて頂きました副査の同学術院内田健康教授、岩本伸一教授、石山敦士教授にも大変感謝しております。さらに、千葉大学大学院工学研究科近藤圭一郎准教授には、鉄道総合技術研究所在職中からご指導頂きました。ここに深く感謝いたします。

また、本研究を遂行するにあたり、鉄道総合技術研究所に実習学生として受け入れを頂き、実験装置を提供させて頂くとともに、研究内容に関してもご指導頂きました。鉄道総合技術研究所車両制御技術研究部部長秦広様、同研究部動力システム研究室室長寺内伸雄様、同研究室近藤稔様、古谷勇真様、米山崇様、小川賢一様をはじめとして、鉄道総合技術研究所の多くの方々にご協力頂きました。ここに謝意を表します。

早稲田大学理工学術院若尾研究室におきましては、博士後期課程に在籍しご指導頂いた鉄道建設・運輸施設整備支援機構奥谷民雄氏、研究室配属時より博士後期課程まで同期として切磋琢磨してきた早稲田大学理工学術院助手高橋康人氏、ハイブリッド電源鉄道車両に関する研究をともに進めてきた同大学大学院理工学研究科修士課程吉原博昭氏、さらに研究テーマは異なるにもかかわらず本研究に多くの意見を頂いた同研究科修士課程谷口峻氏をはじめとして、若尾研究室で出会った多くの先輩・同期・後輩の方々に謝意を表します。

最後に、早稲田大学における学生生活を暖かく見守って頂いた私の両親、弟、妻に心から感謝の意を表します。特に、両親には何としても代え難い格別の援助を頂きました。重ね重ねお礼を申し上げます。