行列によって貸借複記を表現する簿記代数モデルの構築とその数学的性質

小澤　圭都

要　旨

群や環上の加群といった代数系を用いた複式簿記の数理モデル（簿記代数モデル）のなかでも、Rambaud et al.（2010）が導入したバランス加群モデルはその数学的厳密さから重要性が高い。しかし実務的観点からは、バランス加群モデルには貸借に同じ勘定科目が現れる仕訳および逆仕訳を適切に表現できないという問題がある。そこで本稿では、借方と貸方を2つの列に対応させた行列を用いて仕訳をモデル化し、上記問題を克服するような新しい簿記代数モデルである複記加群モデルを構築する。さらに本稿では複記加群モデルの数学的性質を調べ、複記加群モデルが数学的な性質を保ちながらバランス加群モデルに変換できることを示す。複記加群モデルに基づけば、Rambaud et al.（2010）で展開されたような会計システムのアルゴリズムの検討を、更に現実的な設定のもと行うことができる。

1. 序　論

本稿の目的は、Rambaud et al.（2010）が提示した複式簿記の代数学的モデルよりも広範な仕訳を表現できるような新たなモデルを構築し、その数学的性質を明らかにすることである。ここで複式簿記の代数学的モデル（以下、簿記代数モデル）とは、複式簿記における帳簿の構造を群や環上の加群といった代数系によってモデル化したものであり、代数系とは適当な演算が定まった集合を指す。Rambaud et al.（2010）はバランス加群というオリジナルの代数系を定義し、それを用いて複式簿記の数学的構造を論じた。本稿が提示する簿記代数モデルは、Rambaud et al.（2010）のモデルでは表現できなかった仕訳、すなわち貸借に同じ勘定科目が現れる仕訳および逆仕訳を忠実に表現できるため、会計システムが普遍的に備える性質は何かを数理的に論じる際に、実務で登場する前述の仕訳を明示的に扱うことができる。

本稿では複式簿記における仕訳と合計試算表を行列によって表現する新しい数理モデルを提案する。そのモデルは勘定科目の数だけ行をもち、借方と貸方に対応する2つの列を持つような行列によって表現される。本稿ではこれを複記行列と呼ぶ。

複記行列は Rambaud et al.（2010）が提示したベクトル形式の簿記代数モデルを発展させたものである。複記行列は仕訳を行列によって表現する方法であるため、仕訳の貸借を行と列に対応付ける行列簿記（Mattessich 1957）との関連が想起される。しかし複記行列における行と列は前述の通り勘定科目と借方・貸方に対応しており、他方、行列簿記の行と列はいずれも勘定科目に対応している。つまり行と列が持つ意味が全く異なる。また、行列簿記では代数系にフォーカスした議論がなされていない点でも、研究上の位置づけは全く異なる。ただし、行列が代数学における概念であることは明らかであり、行列簿記のなす集合を代数系として明示的に考察する場合には、これも簿記代数モデルに含まれると解される。

簿記代数モデルの先行研究として重要な Rambaud et al.（2010）のモデルは、バランス加群と呼ばれる代数系によって仕訳と残高試算表の集合をモデル化しているため、本稿ではこれをバランス加群モデルと呼ぶ。バランス加群モデルでは仕訳と残高試算表をベクトルで表現しており、貸借平均の原理がベクトルの要素和が 0 であるという性質に対応している。そのようなベクトルはバランスベクトルと呼ばれ、列ベクトルという単純な数学的概念によって複式簿記を表現できるメリットがある。バランスベクトルは勘定科目の数だけ成分をもち、順序集合として定義された勘定科目の集合の順に残高が並べられたベクトルであり、借方金額が正、貸方金額が負で表現される。例えばある企業において勘定科目が順序集合 $A = \{$現金$, \ldots,$ 借入金$, \ldots\}$ として定まっているとする。このとき次の仕訳

（借）現金 100（貸）借入金 100

はバランスベクトル $(100, \ldots, -100, \ldots)^t$ で表される。ここで添え字 t は転置を表し、ベクトル内の「…」で省略された部分はすべて 0 である（以下同様）。仕訳としてのバランスベクトルを期中にわたり集計したものは残高試算表と解釈できる。バランスベクトルの数学的な定義は第 3.1 項で改めて示される。

バランス加群モデルが現実の複式簿記に基づく会計処理をどれほど忠実に表現できるのかという観点から当該モデルを考察すると、バランス加群モデルでは適切に表現できない 2 つのケースが存在することに気づく。1 つ目は仕訳の貸借に同じ勘定科目が現れるケースであり、2 つ目は逆仕訳およびマイナス仕訳を使い分けるケースである。これら 2 つのケースは、仕訳をベクトル表現したバランスベクトルにおいて、借方貸方をベクトルの成分の正負で表すという性質から、以下のような問題を生じさせる。

1 つ目の問題は、貸借に同じ勘定が現れる場合に、バランスベクトルでは貸借金額の純額しか把握されないということである。そのようなバランスベクトルからは仕訳の意味を正確に理解できなくなるというデメリットがある。代表的な例は資産の交換取引である。いま、簿価 120 万円の車両運搬具を下取りに出し、その下取価額 100 万円でもって新たな車両運搬具を取得したとする。この取引は以下のような仕訳で表現される。

（借）	車両運搬具	1,000,000	（貸）	車両運搬具	1,200,000
（借）	固定資産売却損	200,000			

この仕訳は勘定科目集合 $A = \{\ldots$, 車両運搬具, …, 固定資産売却損, …} に伴うバランスベクトル $(\ldots, -200{,}000, \ldots, 200{,}000, \ldots)^t$ によって表される。バランスベクトルの各成分は仕訳に現れる勘定科目の金額に対応しており、借方計上額は正、貸方計上額は負で表される。このルールに則れば上記仕訳は、「車両運搬具」勘定に対応するベクトル成分に 1,000,000（借方金額）−1,200,000（貸方金額）= −200,000（貸借純額）が入力され、「固定資産売却損」に対応する成分は 200,000 であるようなベクトルで表わされることとなる。このバランスベクトルからは貸借に「車両運搬具」が計上される資産の交換取引の仕訳が全く読み取れないうえ、交換前後の「車両運搬具」の価額を把握することもできない。また、仮に取得する「車両運搬具」の価額が 1,200,000 であり、「固定資産売却損」が 0 であれば、この取引はすべての成分が 0 であるようなバランスベクトルで表されることとなる。すべての成分が 0 であるようなバランスベクトルは残高試算表に影響を与えない仕訳であり、その意味では「仕訳なし」という会計処理と識別できない。この問題の 1 つの解決策として「車両運搬具 A」「車両運搬具 B」のような異なる勘定科目を設定し使用することも考えられる。しかしこの方法では取引数の増加に応じて勘定科目数も増やさざるを得ず、情報管理コストが膨大になる可能性がある。そこで本稿では勘定科目数に制限があるケースを扱う。

2 つ目の問題は、逆仕訳とマイナス仕訳が区別できないことである。ここで逆仕訳とは、ある仕訳の貸借を逆転させた仕訳であり、またマイナス仕訳とは、ある仕訳の貸借の勘定科目はそのままに仕訳金額をマイナスとする仕訳である。実務上、仕訳の取消には逆仕訳を用い、仕訳金額の修正にはマイナス仕訳を用いるといったように両者を使い分けるケースがある。また、会計システムにキャッシュ・フロー計算書や資金収支計算書の作成機能が実装されているような場合には、現金勘定が借方貸方のいずれに置かれるかでシステムの挙動が変わるケースがあり、例えば仕訳の修正に逆仕訳ではなくマイナス仕訳を用いることが推奨されることがある（シンシステムデザイン 2022）。さらに、近年政策的に導入されたマイナス金利下での利息の会計処理にも、マイナスの金額を用いた仕訳を行うべきとする考え方がある（岡本 2016 pp. 26-27）。不正の検出に製造原価のマイナス仕訳を挙げている事例もある(CIA フォーラム研究会 No.e17 2017)[(1)]。いずれのケースにおいても、逆仕訳とマイナス仕訳とが明確に使い分けられているが、バランス加群モデルではこれらケースに対応できない。

上記のようなバランス加群モデルの問題がこれまで指摘されてこなかったのは、Rambaud et al.（2010）が複式簿記をモデル化するに際して、実務上の仕訳を適切に表現するという

(1) 仕訳金額にマイナスを用いることは複式簿記の性質の 1 つである負数の忌避に反するが、上記の例はいずれも負数の忌避を行わない実務として現実に観察されているものであり、本稿ではその事実を尊重し、負数の忌避が行われないことの是非には立ち入らない。

点を必ずしも重視しなかったためと推察される。Rambaud et al.（2010）はバランスベクトルに基づく会計システムの抽象的考察を行うことが目的であった。その目的を果たすうえでは、貸借に同じ勘定科目が現れる仕訳やマイナス仕訳という実務的・具体的な仕訳を扱う重要性は小さいため、本稿が指摘するような問題が認識されなかったと思われる。しかし本稿では簿記代数モデルが現実の複式簿記を忠実に表現できているかという点に着目したため、上記の問題の認識に至った。

上記 2 つの問題を解決することは、簿記代数モデルを考察するメリット、すなわち複式簿記の理解促進と会計システム設計への役立ちを補強するという意味で、非常に重要である。Rambaud et al.（2010）が指摘する通り、簿記代数モデルは、複式簿記の理解を深める視座を与え会計システム開発に役立つ理論である。そうした簿記代数の役立ちは第 2 節で取り上げる先行研究においても広く認識され共有されている。そのような簿記代数モデルの中でバランス加群モデルは数学的に厳密と評されているにもかかわらず、実務で観察される仕訳が適切に表現できていないということは、バランス加群モデルが実際の複式簿記の一部の側面が十分に捉えきれていないことを示唆する。これは簿記代数モデルの役立ちを阻害する要因となりうるので、上記問題の解決は重要な意味を持つのである。

バランス加群モデルにおける前述の問題は、貸借複記と仕訳金額の正負を区別して扱うことで解決可能である。バランス加群モデルにおいて 2 つの問題が生じている原因は、バランスベクトルにおいて成分の正負と借方貸方の概念を同一視している点にある。バランス加群モデルは仕訳を列ベクトルによって表現する過程で、仕訳の貸借に同じ勘定科目が現れるとそれらの金額を相殺するという単純化を行っており、そこで実務上の問題が生じる。また、もう 1 つの実務上の問題としては、バランスベクトルにおいて正の成分は借方金額、負の成分は貸方金額と規約しているため、マイナスの仕訳金額を表現できなくなる点が挙げられる。これら問題に対して本稿では、複記加群モデル、すなわち借方と貸方を 2 つの列によって表した行列形式の簿記代数モデルを提案する。バランス加群モデルが仕訳を列ベクトル（すなわち 1 つの列からなる行列）によって表現したのに対し、複記加群モデルは 2 つの列を持つ行列（以下、複記行列）によって仕訳を表現する。

複記加群モデルとバランス加群モデルとの関連性、特に代数系としての類似性および数学的性質を確認することで、比較可能性を数学的に担保できるようになる。前述の通りバランス加群モデルは代数学の概念を用い、会計システムの数学的性質を考察する重要な道具となっている。したがって複記加群モデルがバランス加群モデルの数学的性質を引き継いでいるのかという点は、重要な関心事である。そこで本稿では複記加群モデルがバランス加群モデルの性質を受け継いだ発展的モデルであることを数学的に示し、複記加群モデルの数学的性質を明らかにする。

本稿の構成は次のとおりである。第 2 節においては本稿に関連する文献をレビューし、本

稿が提示する新たな簿記代数モデルの位置づけを明確化する。第 3 節では複記行列と複記加群モデルを定義する。第 4 節では複記加群モデルが既存モデルの問題を克服していることを述べる。第 5 節においては、複記加群モデルとバランス加群モデルとを関連付けながら、複記加群モデルの数学的性質を明らかにする。最後に第 6 節において、本稿が明らかにした内容をまとめ、今後の課題や研究の発展可能性について述べる。

2. 先行研究のレビュー

簿記代数モデルの中心的研究と位置付けられるのが、Rambaud et al.（2010）ならびに Ellerman によるパチョーリ群の一連の研究（Ellerman, 1982; 1985; 1986; 2014）である。前述の通り Rambaud et al.（2010）は貸借平均の原理を含意したバランスベクトルという概念によって仕訳と残高試算表をモデル化し、抽象会計システムの概念を定義することで、会計システム一般の性質やアルゴリズムを考察した。

Ellerman（1982）は仕訳が持つ代数学的構造に着目し、これをパチョーリ群と名付け簿記代数モデルを構築した先駆的研究である。パチョーリ群は複式簿記における貸借の金額を順序対として表現し、その集合に適当な同値関係を導入することによって得られるアーベル群である。Ellerman（1982）はパチョーリ群を用いて複式簿記を数学的に記述し、多次元会計への拡張を行った。Ellerman のその後の研究ではこのパチョーリ群を理論的基礎として、複式簿記の性質や代数学的性質の検討を行っている（Ellerman, 1985; 1986; 2014）。

Liu（2017）は代数学の概念を明示的に扱ってはいないものの、本質的に同等の概念を用いてキャッシュレット理論を提唱した。キャッシュレット理論は化学反応における電子の移動と仕訳における勘定科目間の金額の移動との類似性に着目し、両者を有向グラフによって可視化することで会計の理解を促すものである。有向グラフは隣接行列や隣接行列によって代数学的に表現できるため、簿記代数モデルと関係が深い。

本稿では数学的厳密性の観点から、Rambaud et al.（2010）の研究を簿記代数モデルの文献の中で特に重要なものと位置付けている。Ellerman（2014）は Rambaud et al.（2010）のモデルについて、自身のモデルとの違いを強調しつつも「最近の文献の中では数理会計を最もよく扱っている」と評している。また Botafogo（2019）も Ellerman（2014）と対比させる形で Rambaud et al.（2010）のモデルの厳密性を評価している。さらに Rambaud et al. (2010) は、Ellerman (2014) が提案したパチョーリ群の基礎となるアーベル群にスカラー乗算の構造を付加した、環上の加群という代数系を用いて複式簿記をモデル化しており、会計システムの数学的性質を深く考察している点でオリジナリティを有する。このように Rambaud et al.（2010）のバランス加群モデルは先行研究の中での優位性が認められるため、本稿ではバランス加群モデルを基礎として新たなモデルを提案する。

前述の通り簿記代数モデル自体を構築・提案する先行研究は少ないものの、特定の簿記代数モデルのメリットを活かす形で議論を派生させていく研究は数多く存在し、大きく2つの方向性がある。1つ目は簿記と会計の理解を促進できるというメリットを強調する研究であり、2つ目はデータベースや会計システムなどの情報技術に対するメリットを強調する研究である。それぞれ以下のような先行研究が存在する。

簿記と会計の理解を促進するという立場の研究として、例えば Warsono（2015）は複式簿記における貸借平均の原理が代数学的等式とみなせることから、会計情報を正確かつ効率的に把握するのに役立つと述べている。Botafogo（2019）は Ellerman（2014）のパチョーリ群に触れながら、取引を借方と貸方の二側面から捉える複式簿記の構造的特徴を理解するのに役立つと述べており、ストックとフローの2通りの利益計算がT勘定においてどのように調和するかという観点から会計測定の問題を論じている。Renes（2020）は Ellerman（2014）のパチョーリ群を中心とした議論を展開しており、会計システムに代数学の視点を取り入れることで、財務情報をより正確かつ効率的に処理できるため、財務報告の品質が向上し、意思決定者がより良い判断を下すことができると述べている。

簿記代数モデルが情報技術との連携に資するという立場の研究として、Babad and Balachandran（1989）は行列簿記と同じ形式を用いた会計システムの数理モデルをデータベース技術と組み合わせることで、会計情報のセキュリティ管理と情報処理のあり方を論じている。また Barra et al.（2010）もデータベースに関連した不正防止の統制を設計できるとしている。そのためには式変換により0と等号で結ばれるような形式で表せる会計システム（Equational zero vector accounting systems）が重要であると述べており、そのような会計システムは貸借平均の原理に立脚した複式簿記に基づいていると考えられる。

小澤（2023）はブロックチェーンのような新しい技術と複式簿記を融合させる理論的根拠として、簿記代数モデルが有用であるとの考えを示している。また小澤（2023）はバランス加群モデルに基づいてキャッシュ・フロー計算書を作成する方法を構成しており、当該方法によってキャッシュ・フロー計算書を自動作成できる可能性があると述べている。

上記の先行研究はいずれも簿記代数の役立ちに焦点を当てているものの、実際の複式簿記に基づく会計実務を簿記代数モデルが適切に表現しているかどうかという点については、踏み込んだ考察を行っていない。しかし前述の通りバランス加群モデルは実務で目にする仕訳を忠実に表現できないという問題をはらんでおり、先行研究では当該問題は認識されていない。本稿は簿記代数モデルの限界に焦点を当てているという意味で従来にない視点を提供するものであり、そのうえで当該モデルの問題を解決する新たなモデルの提示を行っているため、簿記代数モデルの有用性を高めることに貢献している。

3. 複記行列と複記加群モデルの定義

本節のモデルは、仕訳の貸借複記を会計実務に近い形で表現した複記行列と称する $n \times 2$ 行列を用いるものであり、バランス加群モデルに変換可能で広範な仕訳を表現できるという有用性を持つ。

3.1 バランスベクトルとバランス加群モデル

Rambaud et al.（2010）は複式簿記に基づく会計システムの状態をベクトルで表現し、代数学的な会計システムのモデルを提案した。モデル化に際して Rambaud et al.（2010）はまず、会計システムに記録される会計数値がとりうる値の集合として順序整域を採用している。順序整域は順序構造を持つ代数系の 1 つであり、数の加算と減算が定義でき、0 を含み、数の正負を定義できるという性質を持つので、勘定科目残高の集合に相応しい。整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は順序整域の例である。以後、順序整域を 1 つ固定し R と書く。

Rambaud et al.（2010）はある時点の会計システムの状態が R 上の n 次元ベクトル $v = (v_1, v_2..., v_n)^t \in R^n$ で表されると考え、R^n の部分空間で会計的な解釈が可能なものを考察対象とした。ここで自然数 n は会計システムにおいて予め定められた勘定科目の数を表す。R^n には R の加法とスカラー倍が引き継がれ、n 個の基底を持つ自由加群と呼ばれる代数系をなす。

R^n のベクトルのうち、各成分の和が 0 になるようなものの全体は会計システムの状態を表すと解釈できる。その理由を示すために $n = 3$ のケース、すなわちこの会計システムに 3 つの勘定科目（資産、負債、資本）が存在し、これらによって会計システムの状態が記述される場合を考える。それぞれの金額が R の元 $A, L, E > 0$ で表されるとき、資本等式より

$$A - L = E \Leftrightarrow A - L - E = 0 \Leftrightarrow (1, 1, 1)\,(A, -L, -E)^t = 0$$

が成り立つから、列ベクトル $(A, -L, -E)^t$ は資本等式を含意している。ここで借方科目である資産の金額は正の値 A で、貸方科目である負債と資本の金額は負の値 $-L, -E$ で表されている。このように、ある時点の企業の会計システムの状態を表すベクトルであって、成分和が 0 であるようなベクトル $(A, -L, -E)^t$ をバランスベクトルと呼ぶ。バランスベクトルは勘定科目が n 個存在するケースに一般化され、次のように定義される。

定義 1　勘定科目集合 A の要素数が n であるとき、順序整域 R 上の n 次元ベクトル

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in R^n$$

で $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$ であるようなものを、勘定科目集合 A に伴う R 上のバランスベクトルという。

標準的な記法ではないものの、勘定科目集合 A の要素を縦に並べて書き、バランスベクトル v の成分を以下のように併記することで、勘定科目 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ と各勘定科目の残高との対応関係がわかりやすくなる。

$$A = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \xleftrightarrow{\text{対応}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v$$

1 つのバランスベクトルは会計システムの特定の 1 状態をベクトル表現したものである。会計システムがとりうる状態全体の集合は、バランスベクトルの集合として以下のように定義される。

定義 2　勘定科目集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ に伴う R 上のバランスベクトルの集合 $\mathrm{Bal}(A, R) = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n)^{\mathrm{t}} \mid v_i \in R (i = 1, 2, \ldots, n), \sum_{i=1}^{n} v_i = 0\}$ を、勘定科目集合 A に伴う R 上のバランス加群という。

バランスベクトルは会計システムの状態を表すとともに、その変化も表すことができる。状態変化の前後でバランスする性質が不変であることを考えると、会計システムの状態変化はバランスベクトルにバランスベクトルと足すという操作と捉えられる。会計システムの状態を表すバランスベクトルの集合も、会計システムの状態変化を表すバランスベクトルの集合も、いずれも $\mathrm{Bal}(A, R)$ として表される（Rambaud et al. 2010, p. 52（3.1.1））。

バランスベクトルはある時点の会計システムの状態とその変化を表し、各成分は勘定科目に対応していることから（Rambaud et al. 2010, pp. 74-75）、会計システムの状態とその変化とは残高試算表と仕訳と解釈してよい。残高試算表はある時点において定まる勘定科目のリストとその残高の組であり、仕訳は残高試算表を変化させるからである。本稿では残高試算表と仕訳をバランス加群で表現するモデルをバランス加群モデルとよぶ。

次の命題は、任意のバランスベクトルは $n-1$ 個の 1 次独立なバランスベクトルの線形和で一意に表されることを意味する。

命題 1　勘定科目集合 A の要素数が n であるとき、$\mathrm{Bal}(A, R)$ はランク $n-1$ の自由加群である。

証明　Rambaud et al.（2010）, pp. 39-40（2.3.1）参照。

この命題を複式簿記の視点から解釈すると、$n-1$ 個の「基本的な」仕訳を定めれば、それらの組み合わせによってどのような仕訳も表せるということである。

3.2　複記行列と複記加群モデル

本項ではバランスベクトルを発展させた複記行列の定義を述べ、複記行列によって仕訳を

表現する簿記代数モデルとして複記加群モデルを提示する。Rambaud et al.（2010）のバランスベクトルは列ベクトルによって表現された仕訳あるいは残高試算表のモデルであり、会計等式の変形によって借方貸方がベクトルの成分の正負に対応づけられている。一方、複記行列は $n \times 2$ 行列によって表現された仕訳あるいは合計試算表のモデルである。仕訳に現れる勘定科目は、バランスベクトルと同様、複記行列の行の位置に対応づけられる。また、仕訳の借方と貸方はそれぞれ複記行列の第 1 列と第 2 列に対応づけられる。複記行列を用いると、第 1 節で例示した仕訳

（借）	車両運搬具	1,000,000	（貸）	車両運搬具	1,200,000
（借）	固定資産売却損	200,000			

は勘定科目集合 $A = \{\ldots,$ 車両運搬具$, \ldots,$ 固定資産売却損$, \ldots\}$ のもとで、次のような複記行列によって表現される。

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \text{車両運搬具} \\ \vdots \\ \text{固定資産売却損} \\ \vdots \end{array} \right\} \overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ 1,000,000 & 1,200,000 \\ \vdots & \vdots \\ 200,000 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

ここで第 3.1 項で導入した勘定科目集合 A の要素を縦に並べて書く記法を用いており、車両運搬具 , 固定資産売却損 $\in A$ とそれら勘定科目の借方計上額および貸方計上額との対応関係を明示している。バランスベクトルとは異なり、1 つの勘定科目（例えば車両運搬具）に対して 2 つの数（借方金額 1,000,000 と貸方金額 1,200,000）が対応付けられる点が、複記行列の特徴である。

Rambaud et al.（2010）のバランスベクトルが借方貸方を各成分の正負に対応させ仕訳を単純化した一方、複記行列は借方貸方を 2 つの列に対応させることで、通常の仕訳との対応関係を直感的なものとしている。複記行列は、以下のように定義される概念である。

定義 3　$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ を勘定科目集合とし、$i = 1, 2, \ldots, n$ とする。各勘定科目 a_i に対応する借方金額 $v_i^d \in R$ が第 1 列目に、貸方金額 $v_i^c \in R$ が第 2 列目に、それぞれ置かれているような行列で、第 1 列と第 2 列のそれぞれの成分和が等しいもの、すなわち

$$\begin{pmatrix} v_1^d & v_1^c \\ v_2^d & v_2^c \\ \vdots & \vdots \\ v_n^d & v_n^c \end{pmatrix} \text{ s.t. } \sum_{i=1}^{n} v_i^d = \sum_{i=1}^{n} v_i^c$$

という行列を、勘定科目集合 A に伴う R 上の複記行列という。

複記行列は会計等式から直接導かれるものではなく、貸借の合計額が一致するという条件を制約として、バランスベクトルという抽象化された仕訳から定義されるものである。

複記行列の複記という名前の由来は、次の命題に求められる。

命題 2　すべての成分が 0 であるような零複記行列を除き、複記行列は 2 つ以上の 0 でない成分を持つ。

証明　零複記行列でない複記行列 M について、$v_j^d \neq 0$ とする。このとき $\sum_{i=1}^n v_i^d = v_j^d + \sum_{i\neq j}^n v_i^d = \sum_{i=1}^n v_i^c \Leftrightarrow v_j^d = \sum_{i=1}^n v_i^c - \sum_{i\neq j}^n v_i^d \neq 0$ であるから、$v_i^d (i \neq j)$ と $v_j^c (j = 1, 2, \ldots, n)$ の少なくとも 1 つは 0 でない。したがって複記行列 M には少なくとも 2 つの 0 でない成分が存在する。$v_j^c \neq 0$ と仮定しても同様である。(証明終わり)

上記命題より、ある仕訳を表す複記行列には必ず 2 つ以上の 0 でない成分を持つため、複数の成分に記入がなされるという意味で、この行列を複記行列と称している。

複記行列は仕訳の貸借を 2 つの列に対応させ、各列の合計額が一致することをもって貸借平均の原理を表現している。一方、同じく仕訳の数学的表現として行列を用いる行列簿記は、行列の第 1 成分と第 2 成分によって借方貸方を表わしている。行列簿記は各成分に非負数を割り当てており、1 つのスカラーに対して行成分で表される借方勘定と列成分で表される貸方勘定とを対応付けることで、貸借平均の原理が表現されている。また、バランスベクトルは成分和が 0 であることをもって貸借平均の原理を表している。行列簿記およびバランスベクトルと比較すると、複記行列の方が実際の複式簿記に近い形式で貸借対照の原理を表現しているといえよう。

バランス加群モデルにおいて仕訳の集合を Bal(A, R) という代数系で表したのと同様に、複記行列の集合もまた仕訳の集合を代数学的にモデル化したものであるといえる。この集合について以下の命題が成り立つ。

命題 3　複記行列の集合を

$$\mathrm{DM}(A, R) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} v_1^d & v_1^c \\ v_2^d & v_2^c \\ \vdots & \vdots \\ v_n^d & v_n^c \end{pmatrix} \right| v_i^d, v_i^c \in R (i = 1, 2, \ldots, n), \sum_{i=1}^n v_i^d = \sum_{i=1}^n v_i^c \right\}$$

とし、DM(A, R) 上での加法を成分ごとの和、スカラー倍を成分ごとのスカラー倍で定める。このとき DM(A, R) は R 加群となる。

証明　DM(A, R) がアーベル群であること、すなわち加法の結合法則と交換法則が成り立ち、加法の単位元と逆元の存在がいえることは、DM(A, R) 上の加法とスカラー倍から簡単に確かめられる。DM(A, R) が R 加群であることをいうためには上記に加え、ベクトルの分配法則、スカラーの分配法則、スカラーの結合法則、そして乗法の単位元について確かめればよい。

複記行列 $M = \begin{pmatrix} v_1^d & v_1^c \\ v_2^d & v_2^c \\ \vdots & \vdots \\ v_n^d & v_n^c \end{pmatrix}$ を $(v_i^d \ v_i^c)$ のように略記すると、任意の $M_1 = (u_i^d \ \ u_i^c)$, $M_2 = (v_i^d \ \ v_i^c) \in$

DM(A, R) と $r, s \in R$ に対して、$r\,(M_1 + M_2) = r\,(u_i^d + v_i^d \;\; u_i^c + v_i^c) = (ru_i^d + rv_i^d \;\; ru_i^c + rv_i^c) = (ru_i^d \;\; ru_i^c) + (rv_i^d \;\; rv_i^c) = r\,(u_i^d \;\; u_i^c) + r\,(v_i^d \;\; v_i^c) = rM_1 + rM_2$ なので、ベクトルの分配法則が成り立つ。また $(r + \mathrm{s})\, M_1 = (r + s)\,(u_i^d \;\; u_i^c) = (ru_i^d + su_i^d \;\; ru_i^c + su_i^c) = r\,(u_i^d \;\; u_i^c) + s\,(u_i^d \;\; u_i^c) = rM_1 + sM_1$ なので、スカラーの分配法則が成り立つ。さらに $(rs)\,M_1 = (rs)\,(u_i^d \;\; u_i^c) = ((rs)\,u_i^d \;\; (rs)\,u_i^c) = (r\,(su_i^d) \;\; r\,(su_i^c)) = r\,(su_i^d \;\; su_i^c) = r\,(sM_1)$ なので、スカラーの結合法則が成り立つ。最後に R における乗法の単位元を 1_R とすると $1_R M_1 = (1_R u_i^d \;\; 1_R u_i^c) = (u_i^d \;\; u_i^c) = M_1$ が成り立つ。以上より DM(A, R) は R 加群である。（証明終わり）

定義 4　DM(A, R) を複記加群という。

合計試算表と仕訳の集合を複記加群によって表した簿記代数モデルを複記加群モデルと呼ぶ。複記加群においても、バランス加群における命題 1 と類似の以下の命題が成り立つ。

命題 4　複記加群 DM(A, R) はランク $2n - 1$ の自由加群である。

証明　$2n - 1$ 個の基底の存在を示せばよい。例えば以下の $2n - 1$ 個の DM(A, R) の元

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\\vdots&\vdots\\1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\\vdots&\vdots\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

は 1 次独立であり、任意の DM(A, R) の元は以下のような線形結合で一意に表される。

$$\begin{pmatrix}v_1^d & v_1^c\\ v_2^d & v_2^c\\ \vdots & \vdots\\ v_{n-1}^d & v_{n-1}^c\\ v_n^d & v_n^c\end{pmatrix} = v_1^d\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\0&1\end{pmatrix} + v_2^d\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\0&1\end{pmatrix} + \ldots + v_{n-1}^d\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\\vdots&\vdots\\1&0\\0&1\end{pmatrix} + \left(v_n^d + v_n^c - \sum_{i=1}^{n} v_i^d\right)\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$+v_1^c\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\1&0\end{pmatrix} + v_2^c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\\vdots&\vdots\\0&0\\1&0\end{pmatrix} + \ldots + v_{n-1}^c\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

ここで $(n, 1)$ 成分は $v_n^d + v_n^c - \sum_{i=1}^{n} v_i^d + v_1^c + v_2^c + \ldots + v_{n-1}^c = v_n^d$ であり、$(n, 2)$ 成分は $v_1^d + v_2^d + \ldots + v_{n-1}^d + v_n^d + v_n^c - \sum_{i=1}^{n} v_i^d = v_n^c$ である。（証明終わり）

複記行列は合計試算表と仕訳の代数学的表現であるが、負数の忌避を前提とせずに定義される概念である。実際、定義 3 において複記行列の成分は順序整域 R の元であることを要請しており、正であることは仮定していない。負数の忌避を前提としないことで、複記行列の集合は命題 4 によって自由 R 加群となる。

他方、各成分がすべて非負であるような複記行列も考えることができる(2)。そのような複

記行列は、負数の忌避を前提とした簿記代数モデルと解釈できる。非負制約のある複記行列全体の集合を $\mathrm{DM}^+(A, R)$ ($\subset \mathrm{DM}(A, R)$) と書くと、$\mathrm{DM}^+(A, R)$ の元は一般に逆元を持たないので群にならない。第 5 節で Rambaud et al.（2010）のバランス加群と複記加群の関係について考察する際、加群準同型[3]が重要な役割を果たすが、負数の忌避を取り入れた複記行列全体の集合 $\mathrm{DM}^+(A, R)$ は第 5 節で展開する議論の前提を満たさないことに注意が必要である。その意味で負数の忌避は複式簿記の数学的構造に制限を与えるものと考えることができる。

4. バランス加群モデルの問題を克服する複記加群モデル

バランス加群モデルでは、借方貸方という概念を明示せず、借方金額は正値で表し貸方金額を負値で表すことで、複式簿記を単純化している。それゆえ借方貸方と金額の正負とが概念的に区別不能なものとなる。実務的には、貸借に同じ勘定が現れる場合にバランスベクトルでは貸借金額の純額しか把握されないという問題がある。この問題によりバランス加群モデルでは例えば資産の交換取引が適切に表現できない。また、逆仕訳とマイナス仕訳が区別できないという問題もある。第 1.2 項で述べた通り逆仕訳とマイナス仕訳は、伝票の取消と金額の修正という異なる目的で使い分けられる場合がある。バランスベクトルではこれらは同一視されるため、使い分けができない。

本稿が提示した複記加群モデルは上記の問題は生じない。バランスベクトルでは一通りにしか表せない仕訳であっても、複記加群モデルにおいては複数の複記行列によって表せるからである。以下では勘定科目集合 $A = \{\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots\}$ を固定し、複記加群モデルがバランス加群モデルの 2 つの問題を克服するモデルであることを示す。

4.1 貸借に同じ勘定科目が現れる仕訳

1 つ目の問題に関して、第 i 勘定 a_i が借方に v_i、貸方に v_i' 計上され、第 j 勘定 a_j が貸方に v_j 計上されるような仕訳

（借）	a_i	v_i	（貸）	a_i	v_i'
			（貸）	a_j	v_j

を考える。ここで変数 v はいずれも仕訳金額を表す R の元である。この仕訳をバランスベ

---

(2) Ellerman（2014）のパチョーリ群は負数の忌避を前提としている。しかし T 勘定の借方と貸方の金額ペアを意味する順序対の集合が群をなすように同値類を定義しており、その結果仕訳の貸借と金額の正負が同一視されてしまうので、第 1 節で指摘したバランス加群モデルと同様の問題を生じさせている。

(3) 準同型とは「代数系において、その代数系の演算を保つ写像」をいう（青木ほか，2005 p. 273)。簿記代数モデルにおける準同型は、異なる簿記代数モデルの間で、仕訳の加減やスカラー倍という演算が整合的に定義されていることを確かめる道具として働く。

クトルで表現すると以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ v_i - v_i' \\ \vdots \\ -v_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

このバランスベクトルは第 i 勘定 a_i が借方に $v_i - v_i'$ 計上され、第 j 勘定 a_j が貸方に v_j 計上されるような仕訳

（借）a_i　　$v_i - v_i'$　　（貸）a_j　　v_i'

のベクトル表現でもある。つまり上記バランスベクトルからは上記のいずれの仕訳を意味するものなのか判断することはできない。特に $v_j = 0$ のときこのバランスベクトルは零ベクトルとなり「仕訳なし」であることと区別がつかなくなる。一方、複記行列では次のように表現され、勘定科目 a_i の貸借金額は明示される。

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ v_i & v_i' \\ \vdots & \vdots \\ 0 & v_j \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

このように、バランス加群モデルでは貸借の純額しか把握されないところ、複記加群モデルでは貸借複記によって仕訳を表現できるため、貸借に同じ勘定科目が現れる仕訳をより適切に表すことのできるモデルであるといえる。

4.2　逆仕訳とマイナス仕訳

2 つ目の問題に関して、ある仕訳の取消あるいは修正を行う場合に、もとの仕訳の貸借を逆転させた仕訳（逆仕訳）を行うのか、もとの仕訳の金額の符号を逆転させた仕訳（マイナス仕訳）を行うのかという 2 つの実務的方法が想定される。その前提のもと、第 i 勘定が借方に v_i、第 j 勘定が貸方に v_j 計上されるような仕訳を考える。

（借）a_i　　v_i　　（貸）a_j　　v_j

この仕訳をバランスベクトルと複記行列で表すと、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ -v_j \\ \vdots \end{pmatrix} = b \in \mathrm{Bal}(A, R), \qquad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ v_i & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & v_j \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = M \in \mathrm{DM}(A, R)$$

上記仕訳に対して、逆仕訳とマイナス仕訳はそれぞれ次のような仕訳である。

逆仕訳：	（借）	a_j	v_j	（貸）	a_i	v_i
マイナス仕訳：	（借）	a_i	$-v_i$	（貸）	a_j	$-v_j$

これらをバランスベクトルで表すと、いずれも b の逆元

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ -v_i \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \end{pmatrix} = -b$$

で表され、逆仕訳とマイナス仕訳とが区別できなくなる。したがって 2 つの仕訳を使い分ける実務とバランス加群モデルとは相性が悪い。一方、複記加群モデルでは、逆仕訳とマイナス仕訳は区別でき、それぞれ次のような複記行列によって表現される。

$$\text{逆仕訳}:\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ 0 & v_i \\ \vdots & \vdots \\ v_j & 0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix},\quad \text{マイナス仕訳}:\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ -v_i & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & -v_j \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

このように、複記行列であれば逆仕訳とマイナス仕訳とを区別して表現することが可能である。いずれの複記行列も、第 1 列ベクトルから第 2 列ベクトルを差し引くことでバランスベクトル $-b$ を得ることができ、複記行列からバランスベクトルに変換することが可能である。このように、バランス加群モデルでは逆仕訳とマイナス仕訳が区別できない一方、複記加群モデルではそれらを区別でき、かつ必要に応じてバランスベクトルに変換できるため、複記加群モデルはバランス加群モデルに比して現実的で発展的なモデルであるといえる。

5. 複記加群モデルとバランス加群モデルの関係

複記加群モデルとバランス加群モデルの関係について、ベクトルから行列へと単に形式的に発展させたモデルにすぎないのか、あるいは複記加群モデルがバランス加群モデルの数学的特徴を受け継いだ実質的な発展形であるのかは、これまでの議論からは明らかでない。そこで本節では、複記加群モデルの数学的性質をバランス加群モデルと比較して考察し、複記行列はバランスベクトルとして表現できる仕訳をすべて表現可能なうえ、必要に応じてバランスベクトルに変換可能であるという意味で、複記加群モデルがバランス加群モデルの実質的発展形であることを示す。

バランス加群モデルと複記加群モデルの関係は、複記行列における 2 つの列の差をとる

（貸借をネットする）ことで１つの列ベクトルを得るという操作と密接に関係している。この操作は以下の対応を与える写像 κ: DM(A, R) $\to R^n$ として表せる。

$$\mathrm{DM}(A,R) \ni \begin{pmatrix} v_1^d & v_1^c \\ v_2^d & v_2^c \\ \vdots & \vdots \\ v_n^d & v_n^c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1^d - v_1^c \\ v_2^d - v_2^c \\ \vdots \\ v_n^d - v_n^c \end{pmatrix} \in R^n$$

この写像を簡約写像と呼ぶ。κ の終域 R^n は自由 R 加群であり、次の命題が成り立つ。

命題 5　κ は自由 R 加群の準同型である。

証明　任意の $M_1 = (u_i^d \;\; u_i^c)$, $M_2 = (v_i^d \;\; v_i^c) \in \mathrm{DM}(A, R)$ と $r \in R$ に対して $\kappa(M_1 + M_2) = \kappa(M_1) + \kappa(M_2)$ および $r\kappa(M_1) = \kappa(rM_1)$ が成り立つことを示せばよい。$\kappa(M_1 + M_2) = \kappa\,[(u_i^d + v_i^d \;\; u_i^c + v_i^c)] = (u_i^d - u_i^c + v_i^d - v_i^c) = (u_i^d - u_i^c) + (v_i^d - v_i^c) = \kappa(M_1) + \kappa(M_2)$ であり、また $r\kappa(M_1) = r(u_i^d - u_i^c) = (ru_i^d - ru_i^c) = \kappa(rM_1)$ であるから κ は自由 R 加群の準同型である。（証明終わり）

任意の $M \in \mathrm{DM}(A, R)$ に対して $\kappa(M) \in \mathrm{Bal}(A, R)$ となることは、複記行列の定義から明らかであるから、簡約写像 κ は複記行列をバランスベクトルに変換する規則であると解釈できる。κ が準同型であることから、2 つの複記行列の和を計算し、それをバランスベクトルに変換したものは、2 つの複記行列をそれぞれバランスベクトルに変換した後に和をとった結果に等しい。つまり、複記行列で成り立つ加法の演算が、バランス加群に変換した後でも保存されることを意味する。この性質が成り立つことで、複記行列で演算を行ってからバランスベクトルに変換した結果と、複記行列をバランスベクトルに変換してから演算を行った結果とが一致し、変換と演算の整合性が保たれる。これは数学的に扱いやすいだけでなく、会計システム上で複記行列をバランスベクトルに変換する際に、演算と変換の前後関係に配慮しなくて済むという技術的メリットがあることを意味する。

簡約写像 κ に関する次の命題は、複記行列がバランスベクトルを発展させたモデルであることを主張する根拠となるものである。

命題 6　κ は全射である。

証明　任意のバランスベクトル $b = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^{\mathrm{t}} \in \mathrm{Bal}(A, R)$ に対して

$$M = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ v_2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ v_n & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。M の第 1 列の成分和 $\sum_{i=1}^n v_i$ は b がバランスベクトルであるという条件より 0 に等しく、したがって M の第 2 列の成分和と等しい。よって M は複記行列であり、$b = \kappa(M)$ が成り立つ。任意の $\mathrm{Bal}(A, R)$ の元 b に対して $b = \kappa(M)$ となる $\mathrm{DM}(A, R)$ の元 M が存在するので κ は全射である。（証明終わり）

この命題は、バランスベクトルで表せる仕訳はすべて複記行列で表せることを意味する。

一方、κ は単射とは限らない。なぜなら複記行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ はいずれも $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ というバランスベクトルに対応付けられるからである。あるバランスベクトルが与えられたとき複記行列を一意に定めることはできないので、複記行列からバランスベクトルへの変換は不可逆的であるといえる。κ の全射性から任意のバランスベクトルは何らかの複記行列として表現可能であり、かつ κ の非単射性から 1 つのバランスベクトルに変換される複数の複記行列が存在しうるので、複記行列はバランスベクトルよりも豊かな表現力を持つといえる。その意味で複記加群モデルはバランス加群モデルの発展形であるといってよい。バランスベクトルでは同じベクトルで表現されてしまうような取引であっても、複記行列では異なる表現で表すことができる可能性があるという点が、第 1.2 項で指摘したバランス加群モデルの問題解決につながっている。

簡約写像 κ によって同じバランスベクトルに対応付けられる複記行列を同一視するような DM(A, R) 上の同値関係 ~ を定義することで、複記加群とバランス加群の関係が一層明確になる。

定義 5　以下で定まる DM(A, R) 上の同値関係 ~ を簡約同値という。

$$\begin{pmatrix} u_1^d & u_1^c \\ u_2^d & u_2^c \\ \vdots & \vdots \\ u_n^d & u_n^c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v_1^d & v_1^c \\ v_2^d & v_2^c \\ \vdots & \vdots \\ v_n^d & v_n^c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1^d - u_1^c \\ u_2^d - u_2^c \\ \vdots \\ u_n^d - u_n^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^d - v_1^c \\ v_2^d - v_2^c \\ \vdots \\ v_n^d - v_n^c \end{pmatrix}$$

すなわち $M_1, M_2 \in$ DM(A, R) が簡約同値であるとは $\kappa(M_1) = \kappa(M_2)$ が成り立つことをいう。

簡約同値関係 ~ は第 1 列と第 2 列の差が等しい複記行列を同一視するという規約と解釈できる。ある複記行列 M の同一行における第 1 列と第 2 列に同じ数を加減した複記行列 M' は M と簡約同値であり、簡約写像によってバランスベクトルに変換されると 2 つの像 $\kappa(M)$, $\kappa(M')$ は一致する。複記行列は合計試算表の数学的表現であり、バランスベクトルは残高試算表の数学的表現であるから、簡約同値とは同じ残高試算表に変換される合計試算表を同一視するような同値関係であるといえる。

簡約同値な複記行列をグルーピングすることによって、複記加群の構造を保つ新たな代数系が得られる。

命題 7　複記行列加群 DM(A, R) から簡約同値関係 ~ による商加群 DM(A, R)/~ への自然な全射準同型 $\bar{\kappa}$: DM$(A, R) \to$ DM(A, R)/~ が存在する。

証明　任意の $M_1, M_2 \in$ DM(A, R) の同値類を $[M_1], [M_2] \in$ DM(A, R)/~ とし、DM(A, R)/~ に

おける加法と $r \in R$ によるスカラー倍を

$$[M_1] + [M_2] = [M_1 + M_2], \quad r\,[M_1] = [rM_1]$$

によって定めると、DM$(A, R)/\sim$ は R 上の加群となる。DM$(A, R)/\sim$ の任意の同値類 $[M]$ ($M \in$ DM(A, R)) に対して $\tilde{\kappa}(M) = [M]$ となるような M が存在するから $\tilde{\kappa}$ は全射である。同値類 $\tilde{\kappa}(M_1) + \tilde{\kappa}(M_2) = [M_1] + [M_2] = [M_1 + M_2] = \tilde{\kappa}(M_1 + M_2)$ および $r\tilde{\kappa}(M_1) = r\,[M_1] = [rM_1] = \tilde{\kappa}(rM_1)$ であるから $\tilde{\kappa}$ は R 加群の準同型である。（証明終わり）

上記命題は加群 DM$(A, R)/\sim$ がいくつかの異なる複記行列をグループ化して得られる加群であることを意味している。

定義 6　R 加群 DM$(A, R)/\sim$ を簡約複記加群とよび、CD(A, R) と表す。

以下の命題は、この簡約複記加群の代数的構造がバランス加群のそれと同一であることを主張するものである。

命題 8　簡約複記加群 CD(A, R) はバランス加群 Bal(A, R) に同型である。すなわち

$$\mathrm{CD}(A, R) \simeq \mathrm{Bal}(A, R)$$

証明　DM(A, R) における M の同値類を $[M]$ と表すと、CD$(A, R) = \{[M] | M \in \mathrm{DM}(A, R)\}$ である。簡約同値の定義と簡約写像 κ の準同型性から $[M] = \{M' \in \mathrm{DM}(A, R) | \kappa(M') = \kappa(M)\} = \{M' \in \mathrm{DM}(A, R) | \kappa(M' - M) = 0\} = \{M' \in \mathrm{DM}(A, R) | M' - M \in \mathrm{Ker}\,\kappa\} = M + \mathrm{Ker}\,\kappa$ である。DM$(A, R)/\mathrm{Ker}\,\kappa = \{M + \mathrm{Ker}\,\kappa | M \in \mathrm{DM}(A, R)\}$ であるから、CD$(A, R) = \mathrm{DM}(A, R)/\mathrm{Ker}\,\kappa$ となる。加群の準同型定理により DM$(A, R)/\mathrm{Ker}\,\kappa = \kappa(\mathrm{DM}(A, R))$ が成り立つ。さらに命題 6 より、κ は全射なので $\kappa(\mathrm{DM}(A, R)) = \mathrm{Bal}(A, R)$。ゆえに CD$(A, R) \simeq \mathrm{Bal}(A, R)$。（証明終わり）

この命題は、簡約写像 κ によって複記加群上の同値関係 ~ を定義することにより、バランス加群と同型な簡約複記加群を構成することができることを述べている。同型であるということは代数的構造が同一で集合として同一視してよいということを意味するから、複記加群と簡約写像からバランス加群の構造を導き出せるということである。

6. 結　論

Rambaud et al.（2010）のバランス加群モデルは、貸借に同じ勘定科目が現れる仕訳を表現できず、逆仕訳およびマイナス仕訳を区別できないという問題がある。これらの問題は、バランス加群モデルにおいて借方貸方と金額の正負を同一視するという、複式簿記のモデル化プロセスに起因している。本研究の貢献は、借方貸方という貸借複記と金額の正負を区別して扱えるような、行列形式の簿記代数モデルである複記加群モデルを提示し、上記の問題を克服できることを示したことである。それに加えて、複記加群モデルの数学的性質を考察し、代数的構造を保つ写像である準同型写像によって必要に応じてバランス加群モデルに変

換できる柔軟性も兼ね備えていることを明らかにした。今後に残された課題は、複記加群モデルに基づいて Rambaud et al.（2010）で展開されたような会計システムのアルゴリズムの検討や、ブロックチェーン技術に基づく会計システムの開発である。

参考文献

Babad, Y. M., and B. V. Balachandran, 1989. Operational Matrix Accounting. *Contemporary Accounting Research*, 5(2), pp. 775-792.

Botafogo, F., 2019. The Syntax of the Accounting Language: A First Step. *Accounting Education*, 28(6), pp. 582-596.

Ellerman, D., 1982. *Economics, Accounting, and Property Theory*. Lexington Books.

Ellerman, D., 1985. The Mathematics of Double Entry Bookkeeping. *Mathematics Magazine*, 58, pp. 226-233.

Ellerman, D., 1986. Double Entry Multidimensional Accounting. *Omega*, 14, pp. 13-22.

Ellerman, D., 2014. On Double-Entry Bookkeeping: The Mathematical Treatment. *Accounting Education*, 23(5), pp. 483-501.

Liu, T., 2017. Cashlet Theory: Discovering the Nature of Accounting. *Open Journal of Accounting*, 6(2), pp. 11-32.

Mattessich, R., 1957. Towards a General and Axiomatic Foundation of Accountancy with an Introduction to the Matrix Formulation of Accounting Systems. *Journal of Accounting Research*, 8(4), pp. 328-355.

Rambaud, S. C., J. G. Pérez, R. A. Nehmer and D. J. S. Robinson., 2010. *Algebraic Models for Accounting Systems*. World Scientific.

Renes, S., 2020. When Debit=Credit, The Balance Constraint in Bookkeeping, Its Causes and Consequences for Accounting. https://ssrn.com/aBStract=3624726（2023 年 8 月 29 日閲覧）.

Warsono, S., 2015. The Rationality of Rules of Debit and Credit. https://ssrn.com/abstract=2699053（2023 年 8 月 29 日閲覧）.

青本和彦・上野健爾・加藤和也・神保道夫・砂田利一・高橋陽一郎・深谷賢治・俣野博・室田一雄編，2005『岩波数学入門辞典』岩波書店。

岡本修，2016「マイナス金利と金融商品会計」，https://shinjuku-keizai.com/wp-content/uploads/2016/08/20160502negativeyield.pdf（2023 年 8 月 29 日閲覧）。

小澤圭都，2023「複式簿記の代数学的モデルに基づくキャッシュ・フロー計算書の作成方法」『商学研究科紀要』第 96 号，pp. 85-109。

シンシステムデザイン，2022「『仕訳の修正』について」，https://www.ssdesign.co.jp/kaikei/shiwakesyuusei.pdf（2023 年 8 月 29 日閲覧）。

CIA フォーラム研究会 No.e17（リスク管理モニタリング研究会），2017「ICT の有効活用による継続的モニタリングについて―CAAT の実践的研究―」『月刊監査研究』第 43 巻 11 号，pp. 37-77。