Graduate School of Fundamental Science and Engineering
Waseda University

博 士 論 文 審 査 報 告 書
Doctoral Dissertation Review Report

論　文　題　目
Dissertation Title

Parameter estimation for stochastic differential equations with small Lévy noise

小分散レヴィノイズを伴う確率微分方程式におけるパラメータ推定

申　請　者
(Applicant Name)
Mitsuki KOBAYASHI
小林　光木

Department of Pure and Applied Mathematics　Research on Stochastic and Statistical Analysis

July, 2023

ブラウン運動によって駆動される確率微分方程式の解として定まる連続時間確率過程の中でも，特に拡散型過程（diffusion-type processes）と呼ばれる確率過程は物理学を始めとして，経済学，地質学，人口学などに至るまで幅広い応用を持つ．連続観測（サンプルパスを時間連続的に観測できるという仮定）の尤度公式に基づく最尤推定理論については，1980 年代には Kutoyants, Prakasa Rao らの先駆的仕事によって明らかになっていた．一方，1973 年の Black-Scholes-Merton らの仕事を契機に数理ファイナンスが興隆してきていたが，1980 年代の拡散型過程の統計学の研究成果を受け，1990 年代に入り金融工学やファイナンス統計といった実務的分野において離散観測（時間離散的な観測）に基づく推測論（いわゆるサンプリング問題）の必要性が一気に高まり，2000 年ごろまで盛んに研究された．

拡散過程のサンプリング問題における難点は，離散観測に対する尤度が陽に書けないことであり，このため連続観測のように厳密な最尤法が展開できない．そこで，連続観測尤度を離散化した擬似尤度や，マルチンゲール推定関数などさまざまな推定関数の構成が議論されたが，最終的には，微小時間における観測の推移確率をブラウン運動による離散増分とみなして正規分布を用いて近似するような「局所ガウス近似」に基づく推定関数が，エルゴード性の下で漸近有効な推定量を与えるという決定的な結果が Kessler (1997) によって示され，今日ではそのような推定関数を用いることが標準的なものとして確立された．ところが，漸近的には有効な推定量であっても，有限サンプル下における推定量のパフォーマンスの良し悪しはモデル依存であり，これを改善する手段が求められている．近年では数値的な改善手法を提案する研究がいくつか見られるが，まだその方法論は確立されているとは言えない．

また，モデルのエルゴード性のような理論的に良い条件が応用上の障壁になる場合があるが，非エルゴード的なモデルに対する統計推測論では推定量が漸近混合正規するなど扱いにくい点があり，その克服は実用上の重要な課題となっている．

本学位論文は，確率微分方程式の中でもレヴィ過程によって駆動されるより一般的な確率過程のパラメトリックモデルに焦点を当て，上記に述べた有限サンプル問題と非エルゴード的モデルの漸近推測論について論じたものである．論文は全３章からなるが，第１章は序章であり，主要部は第２，３章である．以下にそれらの主結果とその意義について述べる．

第２章では，無限個の飛躍を許すレヴィ過程 $L = (L_t)_{t\in[0,1]}$ によって駆動される以下のような d 次元確率微分方程式を扱っている：

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t, \mu)\,\mathrm{d}t + \epsilon \cdot \mathrm{d}L_t, \quad t \in [0, 1]$$

ここで，$\epsilon > 0$，μ は未知母数，b は適当な関数である．本章では，$X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ からの離散観測 $(X_{t_k})_{k=0,1,\dots,n}$ に基づいて未知パラメータ μ を推定することを目標として，$n \to \infty$ と同時に $\epsilon \to 0$ とする小分散理論 (small noise asymptotics) の下での漸近理論が展開される．このようなドリフト推定の基本的な考え方は，$\epsilon \to 0$ としたときの極限に現れる常微分方程式 $\mathrm{d}x_t = b(x_t, \mu)\,\mathrm{d}t$ の解と，データの増分 $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ とを “フィッティング”す

るようにパラメータ μ を決めることであり，標準的には最小２乗法が用いられる．常微分方程式の解が陽に得られないときには解の数値近似が用いられるが，従来法としてはオイラー法による差分近似 $b(X_{t_{k-1}},\mu)(t_k-t_{k-1})$ を用いるのが一般的で，これによる最小２乗推定量は漸近最適な収束率を持つことが以前から知られていた．このオイラー法を介する推定量は有限標本下において悪いパフォーマンスを示すことがあるが，統計学的には漸近有効な結果を与えうるため，統計の文脈ではこれ以上の理論的改善方法はあまり議論されてこなかった．本学位論文は，この解の近似に微分方程式の分野でよく知られる Adams-Bashforth 法，及び Adams-Multon 法を適用することにより，t_k 時点での解 x_{t_k} の近似にデータ $X_{t_{k-1}},\dots,X_{t_{k-\ell}}$ $(\ell\geq 1)$ を用いることで（Multon 法では X_{t_k} も用いる），有限標本下でのパフォーマンスを向上させることに成功した．特に，Bashforth 法における $\ell=1$ の場合はオイラー法に相当するため，これらは従来の方法論の一般化になっている．また，n,ϵ と ℓ の適当な漸近関係の下で，最小２乗型推定量の一致性と漸近分布を導出し，従来のオイラー法と漸近的に同等な推定量であることを証明している．

データ増分の近似に多くの過去データを用いるアイデアは Kessler (1997) にも見られ，尤度の局所ガウス近似において，$\mathbb{E}[X_{t_k}|\sigma(X_u;u\leq t_{k-1})]$ を Itô-Taylor 展開するものである．その方法はデータのサンプリング頻度を減らすための工夫であるのに対して，本学位論文の方法は実際の推定量のパフォーマンスを向上させる目的であるという違いがあるが，Kessler と同様な議論に発展できる可能性があるという点で，今後の進展が興味深い．

本学位論文では，これらを数値実験によって検証しており，n や ϵ の大きさに応じて推定量の誤差を小さくする ℓ の値には最適な選択が有り得ることが示唆される．この事実は n,ϵ,ℓ の漸近的な関係式から予想はできるが，ℓ を一意に決定する理論的方法は不明であり，この点について更なる研究が求められる．また，ノイズのレヴィ性は本質的なものでなく，もっと広いノイズのクラスにまで一般化は可能であろう．ℓ の選択法と合わせて今後の更なる発展が期待される．

第３章では，ノイズの部分を状態依存させた以下のような確率微分方程式のパラメータ推定について議論している：

$$\mathrm{d}X_t=b(X_t,\mu)\,\mathrm{d}t+\epsilon\left[a(X_{t-},\sigma)\,\mathrm{d}W_t+c(X_{t-},\alpha)\,\mathrm{d}Z_t^\alpha\right],\quad t\in[0,1]$$

ただし，μ,σ,α は未知パラメータで，a,b,c は適当な関数，W は標準ブラウン運動，Z^α は，ジャンプ強度 λ，ジャンプ分布の密度 f_α を持つような複合ポアソン過程である．このモデルでは有限時間内での観測しか得られないためエルゴード的な極限定理が利用できない．しかも，複合ポアソン過程から観測されうるジャンプの数は確率１で有限個となるため，そのままでは α の一致推定は不可能である．そこで，$\lambda\to\infty$ とする新しい漸近理論を提案することで，エルゴード性を仮定することなくパラメータ (μ,σ,α) の同時推定とその漸近理論を構築したことが本章の新規性の一つである．つまり，$n\to\infty,\ \epsilon\to 0$ なる小分散理論に加え，$\lambda\to\infty$ なる高頻度ジャンプの仮定の下で推定量の漸近的な妥当性を議論しているが，これは視点を変えると長期観測モデルとみなすことができ，この漸近スキームの設定は自然なものと見ることができる．もちろん，λ に対しては，ある意味で

漸近一致的な推定量を構成できる（Lemma 3.4.8）ので，$\lambda \to \infty$ という設定は実務的にも問題はない．

このような飛躍型（特にポアソン型）過程の離散観測推定では，観測の増分がブラウン運動によるものかジャンプによるものかの判別が困難になるため，ジャンプ判別のためのフィルターを用いることが一般的であり，Shimizu and Yoshida (2006) の飛躍判別フィルターによる擬似尤度の構成が知られている．しかしながら，エルゴード的な設定の下では，この擬似尤度の構成には複雑な切断 (truncation) 関数によって利用するデータを制限する必要があり，実務的には扱いづらい推定関数になってしまう．本学位論文の小分散理論を用いると，極限に現れる常微分方程式の解の滑らかさを仮定することで，これらの複雑な手続きを排除するだけでなく，従来では扱うことができなかったジャンプ密度のクラスにまで推定の対象を広げることが可能になり，よりシンプルな推定関数によって推定量の自然な漸近挙動を証明することができる．

第３章の主結果は，構成された擬似最尤推定量の一致性，及び，漸近正規性の導出である．得られた推定量の収束率については，ドリフト項と拡散項については，それぞれ ϵ^{-1} と $\sqrt{n}$ となり，ジャンプ項に由来するパラメータ α に関する収束率は $\sqrt{\lambda}$ の形で得られるが，このことは，複合ポアソン過程のジャンプの頻度の期待値が λ であることと整合的であり，統計的には自然な収束率である．このようにして示された推定量の収束率は，従来知られていた漸近有効推定量とある意味で同等であるという点で，申請者が提案した「小分散-高頻度ジャンプ」の漸近スキームは強力な漸近論的枠組みであると言える．このような技術的な改善も本学位論文の重要な新規性である．これらに関する最適性についてはまだ議論の余地があるものの，本学位論文の成果によって，新しい漸近的枠組みにおける漸近最適性への理論が接近可能なものとして切り開かれたといえるであろう．

以上のように，本学位論文の成果は確率微分方程式の推測論における理論的側面だけでなく，実用上の観点からもその発展に大きく貢献するものであり，博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める．

2023 年 6 月

主査　早稲田大学理工学術院　教授　博士（数理科学）東京大学　清水　泰隆

副査　早稲田大学国際学術院　教授　Ph.D. ユトレヒト大学　西山　陽一

副査　早稲田大学理工学術院　教授　博士（工学）早稲田大学　豊泉　洋