

早稲田大学大学院 先進理工学研究科

博士論文概要

論文題目

1次元時空パターン形成に対する連続及び離散モデルの解析

Analysis of continuous and discrete models for
one-dimensional spatio-temporal pattern formation

申請者

多賀 圭理
Keisuke TAGA

物理学及応用物理学専攻 非平衡系物理学研究

2022年12月

私たちの身のまわりで起こる種々の現象は多様な要素が複雑に結びついて生じるために、それ自身を直接考察することは容易ではない。そこで人類は現象に強く関わる一部の性質だけに着目したり、あるいは理想的な状況を考えたりすることで現実を切り取り、単純化した「モデル」を考察することで現象を理解する手がかりとしてきた。

とくに数学の言葉を用いて記述された「数理モデル」は、現象に対する数理工学的な視点をもたらす。たとえば時間発展的な現象に対しては差分方程式や微分方程式を用いた数理モデル化がなされ、解析されてきた。空間的広がりをもった系に対しても、動物の体表面や化学反応系などに現れるさまざまなパターン形成現象が数理モデルの定式化とその解析を通して議論されてきている。本学位論文ではこのようなパターン形成系のうち空間 1 次元系とみなされる系、実世界では貝の模様やテープの剥がし跡などに対応する (1+1) 次元時空パターン形成現象と、それに関わる数理モデルについて考察する。

空間パターンは、連続空間の対称性が破れたマクロな構造として現れる。このようなマクロな構造を示すパターン形成現象の数理モデル化には、偏微分方程式のような連続空間の系としてや、系やパターンの特徴的なスケールを単位構造とした空間差分系、さらに時間変数や状態変数までも離散化した超離散系(ここでは超離散系を主に離散系とよぶこととする)などのモデル化の方向が考えられる。たとえば連続系としてモデル化する場合は反応拡散方程式などの微分方程式によって、離散系としてモデル化する場合はエレメンタリーセルオートマトン (ECA) をはじめとしたセルオートマトンによって数理モデルが定式化される。

連続と離散という 2 つの視点から考察することにより、現象をより深く理解できることが期待されるが、その 2 つをどのように対応させるかについては Wolfram の 9 番目の問題ともよばれる課題となっている。

本学位論文は、1 次元時空パターン形成に関わる数理モデルを連続系、離散系という 2 つの視点から議論した 2 部 8 章から構成される。以下、概要を述べる。

第 I 部

自然界において連続系に自己相似構造が現れる例として、私たちの日常生活でも身近なテープの剥がし跡を考察する。剥離先端のダイナミクスを記述する運動方程式として、先行研究とは異なるメカニズムの剥がし跡の形成モデルを提案し、剥がし跡に現れる自己相似パターン形成の機構について考察する。

第 1 章

本章では背景として、粘着テープを剥がす際の剥離先端の挙動や剥がし跡の形成に関する先行研究を紹介するとともに、研究の動機づけを述べる。

まず、粘着テープについて簡単に導入する。つぎに、テープの剥がし跡の形成には剥離先端のダイナミクスが関与することから、剥離先端のダイナミクスや構造、剥がし跡についての先行研究を紹介する。剥がし跡はテープを引っ張る速度

などによって変化し、とくに適当な速度領域でシェルピンスキーガスケットに似た自己相似パターンが現れることなどの実験結果を紹介する。さらに、状態ダイナミクスの記述から剥がし跡のパターン形成を再現する先行モデルを紹介し、それらのモデルでは非対称な空間相互作用の存在が剥がし跡の再現に際して重要であることを述べる。

一方で、非対称な相互作用は剥離先端の力学的ダイナミクスの記述には適していない。これにより、対称な空間相互作用のもとで時間発展する機構を再考察し、新たな力学モデルを定式化する動機づけとする。

第 2 章

Newton の運動方程式としてテープの剥がしのパターン形成を再現する力学モデルの定式化を行い、定式化されたモデルが先行研究の実験で確認された物理的性質をよく再現することを示す。先行実験において、テープはばねを介して引っ張られていることから、最初に硬い系(ばねを無視できる場合)のモデル化を行う。テープの剥離先端に推測されるダイナミクスの性質を述べ、それを再現できる数理モデルの定式化を行う。定式化された数理モデルの数値計算を行い、先行実験で確認された剥がし跡のパターンやスケーリング的性質をモデルがよく再現することを示す。また、テープの剥がし跡の形成が有向パーコレーション普遍クラスに含まれる可能性を示唆する。

つぎに硬い系に対して定式化したモデルに線形ばねの運動方程式を付け加えることで、やわらかい系(ばねを無視できない場合)のモデルを定式化する。数値計算を行い、先行実験で確認されたパターンをモデルが再現できることを示す。そして、引っ張り速度とばね定数を変えた際に得られるパターンについての相図や、テープの引っ張り荷重と引っ張り速度の関係についての先行実験の結果をモデルが再現できることを示す。以上の結果から、定式化されたモデルがテープの剥がし跡を再現するミニマルな力学モデルとして妥当であることが確認される。

第 3 章

第 2 章で定式化されたモデルの数理的性質を解析する。また、剥がし跡の自己相似パターン形成の機構について考察する。最初にモデルの各点ダイナミクスについての相空間を示し、第 2 章で推測した剥離先端のダイナミクスの性質がモデルに実現されていることを示す。さらに、分岐現象やその構造について述べる。

つぎに、定式化したモデルの示すカオス的な自己相似パターンがノイズなしに実現できることを示す。さらに定式化されたモデルを Liénard 系に帰着することで、先行研究でシェルピンスキーガスケットパターンを示すことが報告されている Bonhoffer-van der Pol 型反応拡散方程式(BvdP 型方程式)との関連を示す。そして、BvdP 型方程式が示すパターン形成に対する先行研究からパターン形成機構のセルオートマトンの理解を紹介し、剥がし跡のシェルピンスキーガスケットに似た自己相似パターンが形成される機構について考察する。

第 4 章

第 I 部のまとめと展望を述べる。

第 II 部

テープの剥がし跡や貝の模様、交通流のモデルとしても扱われるエレメンタリーセルオートマトン(ECA)の性質を考察する。とくにここでは、その観測量の時間発展に着目した Koopman 作用素の枠組みから解析を行う。

第 5 章

本章では背景として、Koopman 作用素と ECA を導入する。まず、Koopman 作用素と関連研究について導入する。Koopman 作用素は力学系の観測量の時間発展を議論するものであり、これを用いることで力学系の時間発展における特徴的な性質を作用素のスペクトル的な性質や固有関数から見出せることを述べる。

つぎに、最もシンプルな空間 1 次元の 3 近傍セルオートマトンである ECA を導入する。有限サイズの ECA は状態数が有限な系であることから Koopman 作用素は有限次元行列となる。つまり、Koopman 作用素の行列表現を直接数値解析することで、そのスペクトル的な性質を明らかにすることができる。また、ECA はカオスを含む豊かな挙動を示すことから Koopman 解析や関連する解析手法のよいテストベッドとなることが期待される。ここでは ECA の時間発展ルールを紹介し、ECA のルールは全体で 256 種類存在することを述べる。また、この全ルールに対する Wolfram によって提案された分類を紹介する。さらに、ECA の力学系としての簡単な性質や、その状態遷移ネットワークについて述べ、次章での解析の準備をする。

第 6 章

ECA に対して Koopman 解析を行う。まず、ECA に対して Koopman 作用素を導入する。つぎに、状態遷移ネットワークの隣接行列から Koopman 作用素の行列表現を構成する。そして、その行列表現を用いた具体例の解析を行う。

続いて一般の ECA の Koopman 固有値 λ が $\lambda=0$ もしくは $|\lambda|=1$ となることを示す。各固有値に対応する Koopman 固有関数を具体的に構成し、スペクトル的な性質に系のダイナミクスの特徴が現れることを示す。さらに、13セルの ECA の独立な全ルールに対する Koopman 行列を数値的に解析する。そして、その固有値分布に現れるダイナミクスの性質と Wolfram の分類を比較する。

最後に固有値分布とシステムサイズの関係から ECA のルールを分類する手法、そして動的モード分解や系のスパース性を利用したデータ科学的アプローチによる ECA の Koopman 解析についての考察を述べる。

第 7 章

第 II 部のまとめと展望を述べる。

第 8 章

第 I 部と第 II 部の全体を通してのまとめと、今後の展望を述べる。

早稲田大学 博士（理学） 学位申請 研究業績書

氏名： 多賀 圭理

印

(2023年 5月 現在)

種類別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者（申請者含む）
論文 (査読付・学術誌)	○1. <u>Keisuke Taga</u> and Yoshihiro Yamazaki, "A tape-peeling model for spatiotemporal pattern formation by deformed adhesives", J. Phys. Soc. Jpn. 92(4) 043001 (2023). (4 pages)
	○2. <u>Keisuke Taga</u> , Yuzuru Kato, Yoshinobu Kawahara, Yoshihiro Yamazaki and Hiroya Nakao, "Koopman spectral analysis of elementary cellular automata", Chaos 31(10), 103121 (2021). (16 pages)
論文 (査読付・国際学会)	3. <u>Keisuke Taga</u> and Hiroya Nakao, "Dynamic Mode Decomposition for Elementary Cellular Automata", Proceedings of the 2022 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA2022), 117-120 (2022). (10 pages)
講演 (国際会議)	4. <u>Keisuke Taga</u> , "Nonlinear dynamics of the tape peeling trace", Stat&QuantPhys Autumn School 2022 (SQP2022), B7, (online), 2022/09/26.
	5. <u>Keisuke Taga</u> , Hiroya Nakao, Yoshihiro Yamazaki, "Nonlinear dynamics of the tape peeling trace", Dynamic Days Europe 2022 (DDEU2022), PS53, (Univ. of Aberdeen), UK, 2022/08/22-26.
	6. <u>Keisuke Taga</u> , Yoshihiro Yamazaki, "Peeling tape as a reaction-diffusion system", APS March Meeting, S11, (online), 2022/3/17.
	7. <u>Keisuke Taga</u> , Hiroya Nakao, "Koopman Spectral Analysis of Elementary Cellular Automata", SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems (DS2021), MS164, (online), 2021/5/25.
講演 (国内会議)	8. 多賀圭理, 「反応拡散系としての粘着テープ剥離ダイナミクス」, 非平衡・多階層・複雑系研究会, 21, (秋田・オンライン), 2022/9/17.
	9. 多賀圭理, 加藤譲, 河原吉伸, 山崎義弘, 中尾裕也, 「エレメンタリーセルオートマトンのKoopmanスペクトル解析」, 日本物理学会第77回年次大会, 17aB20-13, (オンライン), 2022/3/17.
	10. 多賀圭理, 加藤譲, 河原吉伸, 山崎義弘, 中尾裕也, 「エレメンタリーセルオートマトンのKoopmanスペクトル解析」, 日本応用数理学会 2021年度年会, F1-1-1 [正会員主催 OS]応用力学系(1), (オンライン), 2021/9/7.
	11. 多賀圭理, 山崎義弘, 「反応拡散系としての粘着テープ剥離ダイナミクス」, 日本物理学会2020年秋季大会, 9aM1-2, (オンライン), 2020/9/9.
	12. 多賀圭理, 山崎義弘, 「反応拡散系としての粘着テープ剥離ダイナミクス」, 非平衡オンライン若手の会2020, (オンライン), 2020/8/18.
講演 (セミナー)	13. 多賀圭理, Koopman spectral analysis for the elementary cellular automata, 羽田野研究室セミナー, (東大柏の葉キャンパス), 2022/10/26.
	14. <u>Keisuke Taga</u> , Peeling tape as a reaction-diffusion system, iTHEMS Coffee Meeting, (オンライン), 2020/8/7.
その他 (講演)	15. 多賀圭理, 山崎義弘, 「距離に依存した時間遅れを伴う蔵本モデルのダイナミクスII」, 日本物理学会2019年秋季大会, 10aK28-7, (岐阜大学), 2019/9/10.
	16. 多賀圭理, 山崎義弘, 「蔵本モデルと時間遅れ」, 第64回物性若手夏の学校, D-6 (岐阜), 2019/8/7.

早稲田大学 博士（理学） 学位申請 研究業績書

氏名： 多賀 圭理 印

(2023年 5月 現在)

種類別	題名、 発表・発行掲載誌名、 発表・発行年月、 連名者（申請者含む）
	<p>17. 多賀圭理,「多様な集団がみせる緩和応答」, 第64回物性若手夏の学校, PS-43, (岐阜), 2019/8/7.</p> <p>18. 多賀圭理, 山崎義弘,「距離に依存した時間遅れを伴う蔵本モデルのダイナミクス」, 日本物理学会第74回年次大会, 15aG109-4, (九州大学), 2019/3/15.</p> <p>19. Keisuke Taga, Yoshihiro Yamazaki, "Mean-field analysis for Kuramoto model with general time delay", International conference on Advances in Physics of Emergent orders in Fluctuations (APEF2018), B17, (Univ. of Tokyo), Japan, 2018/11/14.</p> <p>20. 多賀圭理, 山崎義弘,「一般的な時間遅れを伴う蔵本モデルの平均場解析」, 日本物理学会2018年秋季大会, 9aM202-4, (同志社大学), 2018/9/9.</p> <p>21. 多賀圭理, 山崎義弘,「一般的な時間遅れを伴う蔵本モデルの平均場解析」, 第63回物性若手夏の学校, E-3, (愛知), 2018/7/27.</p>