

電動機駆動システムにおける電磁界数値解析の
実用化に関する研究

Enhancement of Electromagnetic Field Analysis
for Practical Motor Drive Systems

2024年2月

貝森 弘行
Hiroyuki KAIMORI

電動機駆動システムにおける電磁界数値解析の
実用化に関する研究

Enhancement of Electromagnetic Field Analysis
for Practical Motor Drive Systems

2024年2月

早稲田大学大学院 先進理工学研究科
電気・情報生命専攻 コンピュータ援用電磁工学研究

貝森 弘行
Hiroyuki KAIMORI

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究背景	1
1.2	駆動システムにおける電化の動き	5
1.3	電磁界解析の必要性	8
1.4	CAE に関連する課題	10
1.5	研究の目的	11
1.6	本論文の構成	12
	参考文献	13
第 2 章	電動機駆動システムの数値解析の困難性	14
2.1	電動機駆動システムの数値解析の特徴	14
2.1.1	モータの数値解析の現状と課題	14
2.1.2	パワーエレクトロニクス素子の数値解析の現状と課題	16
2.2	電磁界解析の定式化	17
2.2.1	静磁界および準静磁界	18
2.2.2	静電界（直流電流場合む）および準静電界	19
2.2.3	電磁波（Full wave）	21
2.2.4	準静電磁界（Darwin model）	21
2.3	まとめ	22
	参考文献	23
第 3 章	モータの高速解析手法	24
3.1	モータの高速解析手法の必要性	24
3.2	従来の高速定常解析手法	24
3.3	dq-TP-EEC 法の開発	29
3.3.1	dq 軸座標系での TP-EEC 法の導出	29
3.3.2	簡易モデルによる dq-TP-EEC 法の補正効果の検証	31
3.4	PM モータを用いた開発手法による検証解析	35
3.4.1	集中巻 IPM モータ（D1 モデル）を用いた検証解析	35
3.4.2	分布巻 IPM モータ（D モデル）を用いた検証解析	35
3.5	オープン巻線モータを想定した直流重畳三相交流への dq-TP-EEC 法の適用	39
3.5.1	零相成分を考慮した dq-TP-EEC 法	39
3.5.2	簡易リニアモータモデルによる検証解析	42

3.5.3	集中巻 IPM モータ (D1 モデル) を用いた検証解析.....	44
3.6	まとめ.....	46
	参考文献.....	47
第 4 章	パワーエレクトロニクス素子への新しい電磁界解析手法.....	49
4.1	寄生容量・寄生インダクタンス・表皮効果を考慮した電磁界解析の必要性..	49
4.2	従来の解析手法.....	51
4.3	低周波安定化 Darwin model の開発.....	55
4.3.1	Darwin model の問題点.....	55
4.3.2	クーロンタイプゲージを用いた提案法による低周波安定化.....	56
4.3.3	冗長変数も加えた提案法による収束特性の改善.....	60
4.4	提案手法による検証解析.....	63
4.4.1	円柱導体モデル (収束特性検証モデル).....	63
4.4.2	円筒平板コンデンサモデル.....	68
4.4.3	積層コンデンサモデル.....	72
4.4.4	LC 並列接続モデル.....	74
4.4.5	PCB 基板のダブルレイヤースパイラルインダクタモデル.....	78
4.5	まとめ.....	81
	参考文献.....	82
第 5 章	デジタルトランスフォーメーションにおける電動機駆動システムの展開.....	84
5.1	デジタルトランスフォーメーションの現状と展開.....	84
5.2	Model Based Design の現状と課題.....	87
5.3	プラントモデルの現状と課題.....	88
5.3.1	1D モータモデルの必要性和課題.....	89
5.3.2	パワーエレクトロニクス素子の 1D モデル化への展開.....	90
5.4	まとめ.....	91
	参考文献.....	92
第 6 章	結論.....	93
6.1	本研究の成果.....	93
6.2	今後の課題と展望.....	95
謝辞	96
研究業績	97

第 1 章 序論

1.1 研究背景

18 世紀半ばから 19 世紀にかけて蒸気機関が開発され、それを動力とした第一次産業革命に始まり、19 世紀後半から 20 世紀にかけて鉄道や蒸気船、重化学工業での技術革新が進んだ第二次産業革命、20 世紀半ばから 21 世紀初頭の原子力エネルギーの活用やコンピュータの発達が進んだ第三次産業革命（デジタル革命とも呼ばれる）を経て、21 世紀は第 4 次産業革命（一般的にはインダストリー4.0 と認知されている）が来るといわれており、ロボット工学、AI、仮想通貨、IoT などの多岐にわたる分野での技術革新が今まさに起こっている[1]。これらの技術革新は人々の生活スタイルを劇的に変化させ、人力、馬力が蒸気機関の機械動力や電動機（モータ）などの電動力に置き換わり、広範囲なエネルギー利活用に基づくインフラが完成した。さらにはパーソナルコンピューター、インターネットに代表される情報インフラも飛躍的に進歩し、人・モノだけでなく情報の流通網の出現など、第一次産業革命以前とは比べ物にならないほど人々を取り巻く環境は変わった。その影では環境資源問題が顕在化し、人類が地球に与える悪影響の結果として地球温暖化（global warming）が深刻化した。温室効果ガスの主要因といわれる空気中の CO₂ の量が増加し、京都議定書を契機に先進国での CO₂ 排出量の規制がなされている。イギリス気象庁（Met Office）ではそれを裏付ける資料[2]として、第一次産業革命以前の 1700 年の空気中の CO₂ 量に対して 2021 年では実に 50% も増加していると説明されている。ほかにも日々の CO₂ 排出量をモニタリングしているウェブサイトもあり[3],[4]、人々に警告を与え続けている。Enerdata では、CO₂ 排出量だけでなく、国別、地域別の電力消費量について情報が公開されている[5]。これより、アジアの電力消費量が非常に増加しており、その主要因は中国とインドの急速な経済発展によるものであると考えられ、CO₂ 排出量の増大とは無関係ではないことが指摘されている。このような背景もあり、我が国では 2021 年 10 月 22 日に「パリ協定に基づく成長戦略としての長期戦略」が閣議決定された。これは 2050 年のカーボンニュートラル（温暖化ガスの排出量実質ゼロ）に向けた基本的な考え方、ビジョン等を示すものであり、国際的にも 2050 年等の年限付きのカーボンニュートラルの実現を表明している国・地域は合計で 150 以上であり、これらの国・地域における GDP は世界全体の約 94% を占めている[6]。カーボンニュートラルを実現するには、クリーンエネルギーを使用した発電はもちろん、エネルギー輸送、エネルギー利用技術、エネルギー変換など多岐に渡った検討が必要である。

資源エネルギー庁のデータを基に作成した 2019 年度の国内のエネルギー消費の構成比を図 1.1 に、そのうちの運輸部門のエネルギー消費の構成比を図 1.2 に示す[7]。60% 以上のエネルギーが企業・事業所等部門で使用されており、近年の脱炭素による傾向もあり、そのうちの

50%以上が電力として消費されている。電力消費の内訳として、企業（工場）では 50%以上が工作機械などの運転に使用され、事業所（オフィス）では空調、照明、IT 機器で 60%程度が消費されていると言われている。家庭部門では全体の 14%が消費され、企業・事業所等部門と同様、そのうちの 50%が電気として使用されている。電力消費の内訳は、空調、冷蔵庫、照明で 60%程度消費されていると言われている。運輸部門は旅客部門、運輸部門、貨物部門に分かれているが、エネルギー消費の多くは化石燃料であるガソリンと軽油、ジェット燃料油などが占めており、図中にて赤字で示した電力は数%に留まっている。図 1.3 に旅客自動車の車種別保有台数の推移を示す[7]。1997年にトヨタ自動車より最初のハイブリッド自動車「PRIUS」が販売されているが、本データでは 2003 年度から「ハイブリッド」と「その他」の定義が変更されているため、それ以降ハイブリッド車が順調に販売台数を伸ばしている。しかしながら運輸部門全体で見ると、まだまだハイブリッド車、EV 車の割合は低いと言える。以上のことから、世の中の動向として、運輸部門、特に旅客自動車において電化、電動化へシフトする動きが世界的に活発化している。我が国でも 2050 年のカーボンニュートラルの達成に向け、自動車業界を中心に EV シフトの必要性が叫ばれ、国を挙げて取り組まれている。欧米でも同様の取り組みは当然行われており、EU では温室効果ガス削減政策パッケージ「Fit for 55」を採択し、日本よりも進んだ厳しい政策が決定されている[8]。

最終エネルギー消費の構成比（2019年度）

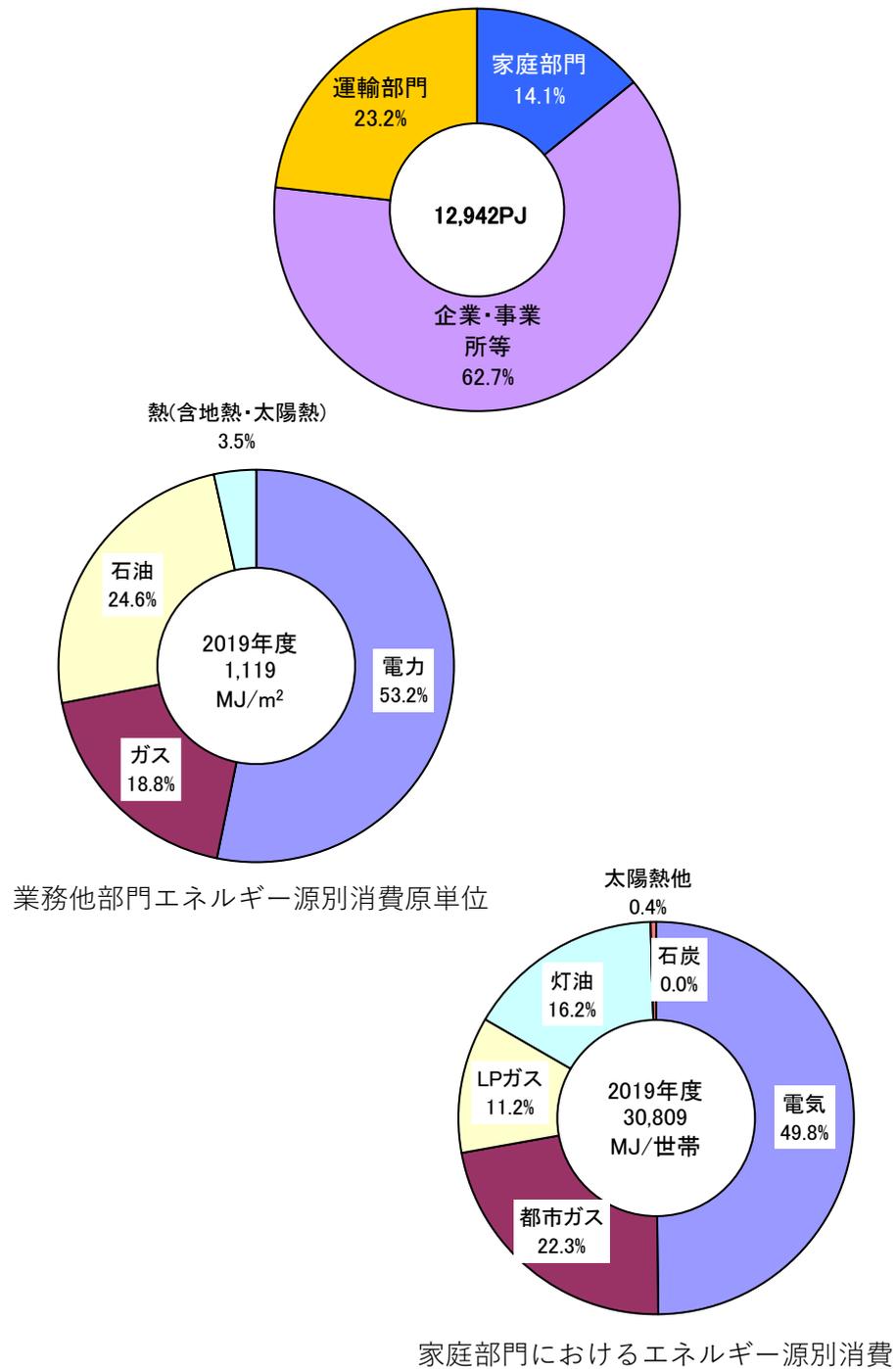


図 1.1 2019 年度のエネルギー消費の構成比
 (出典：部門別エネルギー消費の動向 ([資源エネルギー庁](#)[7]) を基に作成)
 Fig. 1.1. Composition of energy consumption in 2019.
 (reference: created based on [Agency for Natural Resources and Energy](#))

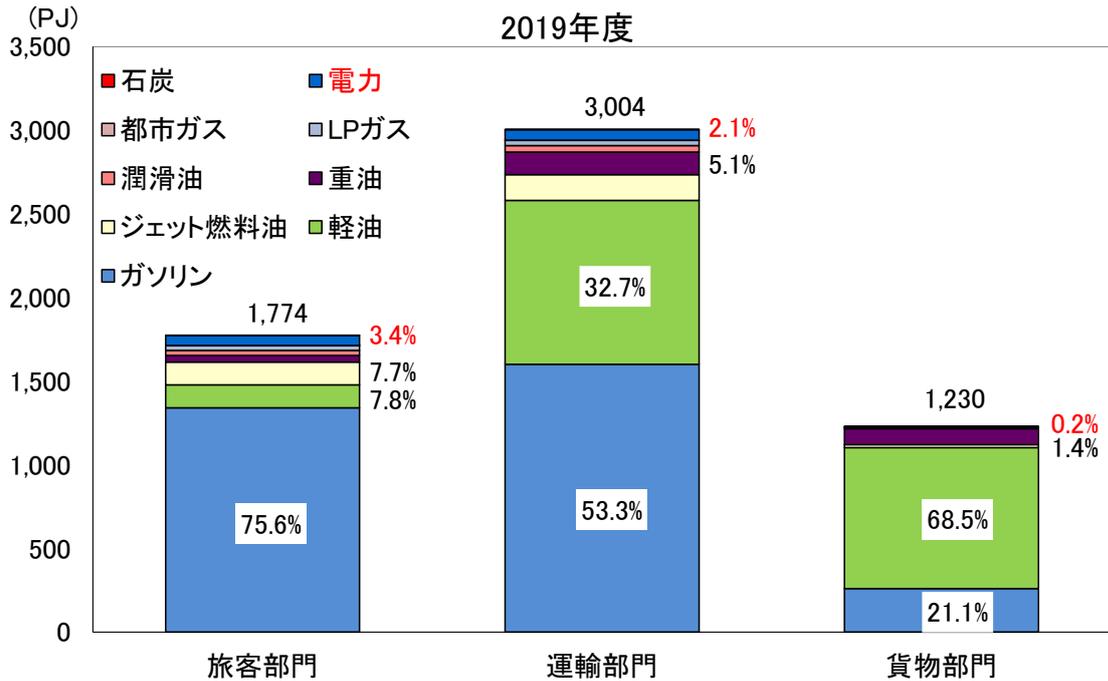


図 1.2 2019年度の運輸部門のエネルギー消費の構成比
 (出典：部門別エネルギー消費の動向 (資源エネルギー庁[7]) を基に作成)
 Fig. 1.2. Composition of energy consumption in 2019.
 (reference: created based on [Agency for Natural Resources and Energy](#))

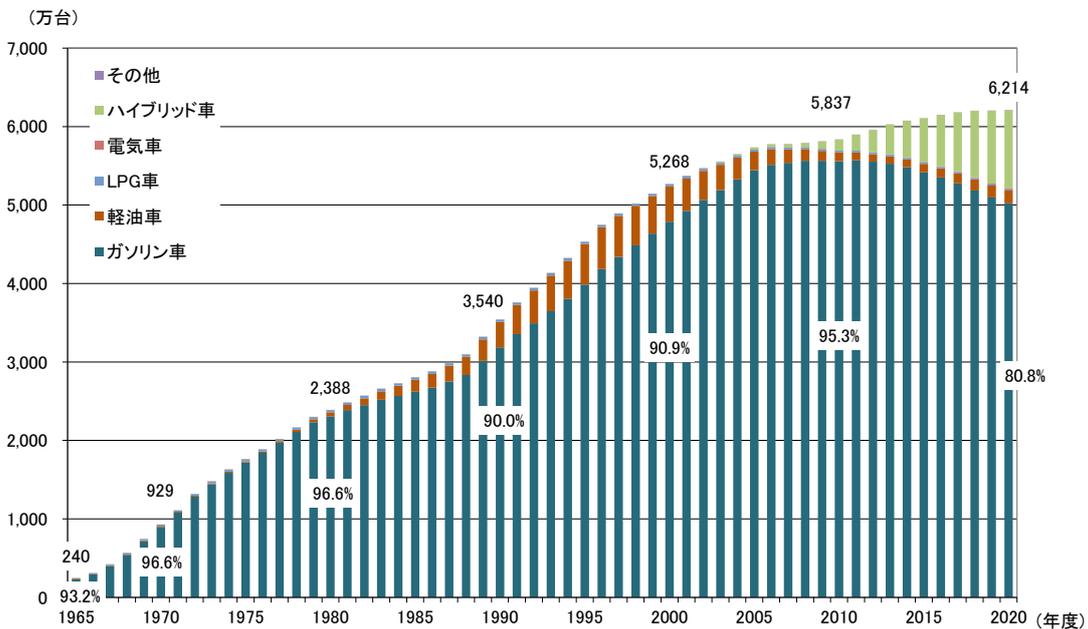


図 1.3 旅客自動車の車種別保有台数の推移
 (出典：部門別エネルギー消費の動向 (資源エネルギー庁[7]) を基に作成)
 Fig. 1.3. Number of Passenger Vehicles Owned by Type.
 (reference: created based on [Agency for Natural Resources and Energy](#))

1.2 駆動システムにおける電化の動き

1.1 節で述べたように、運輸部門のエネルギー消費のほとんどは化石燃料に頼っており、2050年のカーボンニュートラルの達成には運輸部門の電化が大きな課題であり、ここでは運輸部門の電化に着目する。運輸部門の構成の中で、精力的に電化に取り組んでいるのは、自動車（貨物用トラック含む）、鉄道、航空機（空飛ぶ車含む）と言われている。よく知られているように、トヨタ自動車ではEVやPHV、FCV（燃料電池車）への展開が示されており[9]、三菱電機は高出力を実現できる昇圧コンバータ付き2モータ駆動制御装置を提案している[10]。図1.4に自動車におけるエネルギー変換システムの例を示す（エンジン等は省略している）。モータはインバータと制御回路により駆動され、インバータにコンバータを介して直流電源が接続されている（コンバータを使用しない場合もある）。蓄電池（バッテリー）への充電は、充電器から充電ケーブル（通常充電はAC、急速充電はDCが用いられる）を経由し、もしくはワイヤレス充電でコンバータを介してAC/DC変換により蓄電池に充電される。鉄道分野でも、図1.5に例として示すエネルギー変換システムを用いたJR九州BEC819系電車（DENCHA）[11]のように、これまで非電化路線においてディーゼル気動車などを運用していたが、蓄電池電車（電化路線では架線から引き入れた電力で運行、非電化路線ではバッテリー電力で走行）する車両が開発され運行されている。またハイブリッド気動車（自動車と同様、ディーゼルエンジンとモータを併用して走行）も運行されるなど、電化が進んでいる。これから電化が期待される航空分野においては、国内ではECLAIR[12]が主体となり、飛行機の電動化の実現に向けた航空機電動化における重要技術課題の抽出がなされ、大学や研究所、メーカーの協力を呼びかけ電動化の実現に向けて活動を行っている。それぞれターゲットがやや異なるものの、これらの基本的なコンセプトとしては、原動機をエンジンからモータ（電動機）に置き換え、燃料としてガソリン等から蓄電池（バッテリー）や燃料電池を使用するというものである（油圧系から電気系への置き換えも進んでおり、100%電化の実現も視野に入っている）。これらを用いてシステムを構築する際のポイントとなるのが、モータを駆動する（制御も含めた）インバータシステムと外部電源から蓄電池を充電するコンバータなども含めた“エネルギー変換システム”である。

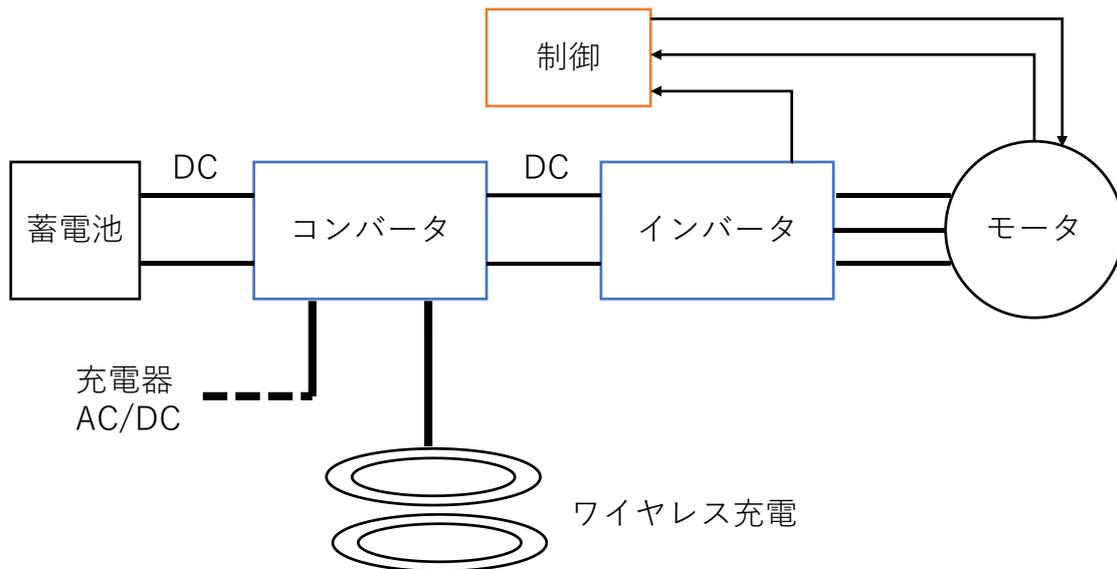


図 1.4 自動車のエネルギー変換システム例
 Fig. 1.4. Example of power conversion system for automobile

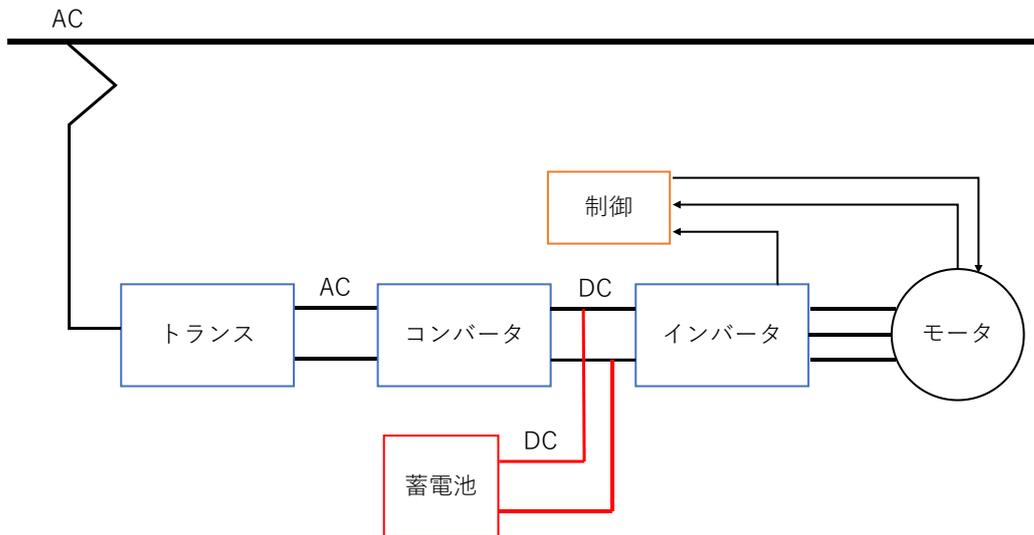


図 1.5 鉄道（電車）でのエネルギー変換システム例
 Fig. 1.5. Example of power conversion system in a railroad (train)

“エネルギー変換システム”は家電・民生・産業用途で培われてきた技術でもあり、パワーエレクトロニクスを基礎としたインバータとコンバータの飛躍的な進歩に支えられている。電動機駆動システムを高効率化するには主機モータ自体の高効率化はもちろん、パワーエレクトロニクスであるコンバータとインバータの進歩が大きく貢献している。

エネルギー変換システムのパワーエレクトロニクスで使用されている素子に焦点を当てると、コンバータではスイッチング素子による昇圧や降圧により交流電圧が直流電圧に変換されるが、その際には平滑コンデンサや平滑リアクトルが使用される。スイッチングだけでは直流に近い電圧波形を作成することは難しいため、インダクタンス成分もしくはキャパシタンス成分を使用して平滑化、すなわち直流波形に近い波形になるように調整している。非絶縁型のリアクトルは鉄心を使用する場合、その構造上コンデンサに比べ小型化が難しいといわれている。特にSiCやGaNのような低スイッチング損失で高速スイッチングが可能な半導体素子を利用した場合、スイッチング周波数も高くなるが、それに伴いリアクトルに使用される鉄心の磁気特性が悪化し、損失も増加してしまうことが知られている。これは大きな課題として捉えられており、高周波でも低損失で高透磁率を持つ磁性材料の開発が期待されている。さらに、スイッチングに伴う立ち上がり・立ち下り時間も短くなり、インダクティブな機器においても寄生容量が影響してリングング電流（LC共振による振動電流）が発生し、余分な銅損を発生させてしまうことが懸念されている。

また、駆動対象である電動モータも、希土類磁石（rare earth permanent magnet）の開発によりフェライト磁石やコバルト磁石に比べて格段に界磁のエネルギー密度を高めることができるようになり、1990年代後半以降、希土類磁石を用いた磁石モータ（permanent magnet: PM synchronous motor）の開発が進んでいる。PMモータは同期機であるため、可変速運転を行うには電源周波数を変える必要があるが、上述したインバータシステムにより印加する基本波周波数を自由に変更できるようになった。これにより二次銅損が発生してしまう誘導電動機に代わり、特に自動車分野ではPMモータが主流になっている。例えば、トヨタPRIUSの埋込磁石（interior permanent magnet synchronous motor: IPM）モータは、磁石配置を最適化していくことで、磁石使用量を減らしながらリラクタンストルクを有効活用していることがよく知られている。また第4世代ではステータコイル素線を従来の丸線から平角線に変えたことでコイル占積率を向上することができている。モータの進化と同時期にモータ、インバータ、ギアボックスを一体化したシステム（機電一体、トランスアクスル）が開発され、今や主流となっている。上述のような様々な工夫により、電動機駆動システムは進化し、さらなる小型化、高効率化のための研究開発が行われている。

1.3 電磁界解析の必要性

モータやインダクタのような磁性コアを持つ構造を対象として、低周波領域の電磁界解析（準静磁界解析と呼ばれる）は、1980年代から世界的に研究が始まり、1990年代には高周波領域でも問題となっていたスプリアス解とゲージ問題は解決され、また非線形性を持つ鉄を主とした材料特性、BHカーブやヒステリシスを考慮した解析手法の開発も積極的に行われてきた。1990年代には商用ソフトウェアが販売されはじめ、特に試作や試験の難しい大形機を中心に研究開発分野に適用されてきたのち、産業用機器や小型機の研究開発や設計分野での使用も盛んとなり、近年では自動車が電動化したことと、希土類磁石の開発によりPMモータの採用が増加したことを受け、その使用頻度は著しく増加している。このような背景には、電磁鋼板のような鉄を主体とした材料をコアに使用するため、非線形磁化特性を考慮した磁界解析の有効性が示されたことと、研究開発、設計段階にて試作回数や試験回数を少なくするという費用削減効果への要望と、磁束密度は熱流体の流れのように実験で可視化できないということが挙げられ、磁束の流れや磁気飽和の程度を確認する手段として電磁界数値解析が普及したと考えられる。電磁界解析対象の代表的なものとして、磁石を内部に埋め込む構造であるため形状自由度が高いIPMモータのロータが挙げられる。例えば図1.6に示す電気学会ベンチマークモータ「Gモデル」[13]では、永久磁石周りのフラックスバリアだけでなくロータ表面のへこみ（ノッチング）を施すことで、低トルクリプル化が実現されている。この検討は電磁界解析を用いて行われたものであり、さらに近年ではIPMモータの磁石配置やフラックスバリア形状、ノッチング等を対象とした形状最適化やトポロジー最適化が研究されているが、これは電磁界解析と最適化計算の組み合わせで実現される。以上のことから、電磁界解析は電気機器の研究開発・設計分野での使用は今や必須であり、それなしには高効率モータの開発は不可能であるといっても過言ではない。

また、パワーエレクトロニクス機器で磁性素子を利用したインダクタなどに関しても電磁界解析を用いて磁気飽和の影響を考慮できるため、試作レスで特性を検討することが可能である。例として図1.7に示すリアクトルの解析事例のように、小型リアクトルやトランスではコアの磁気飽和を回避するためにコア間にギャップをあえて設けて磁気抵抗を増加させ、磁気飽和を防いで鉄損を減少させるのが通常である。しかしながらギャップ部では磁束が回り込む経路をとるため漏れ磁束が発生してしまう。この漏れ磁束はコア外にあるコイルやケースに渦電流を誘起させるため渦電流損が発生し、その損失が温度上昇を引き起こす。この渦電流損を見積もるためには電磁界解析が有効な手段である。

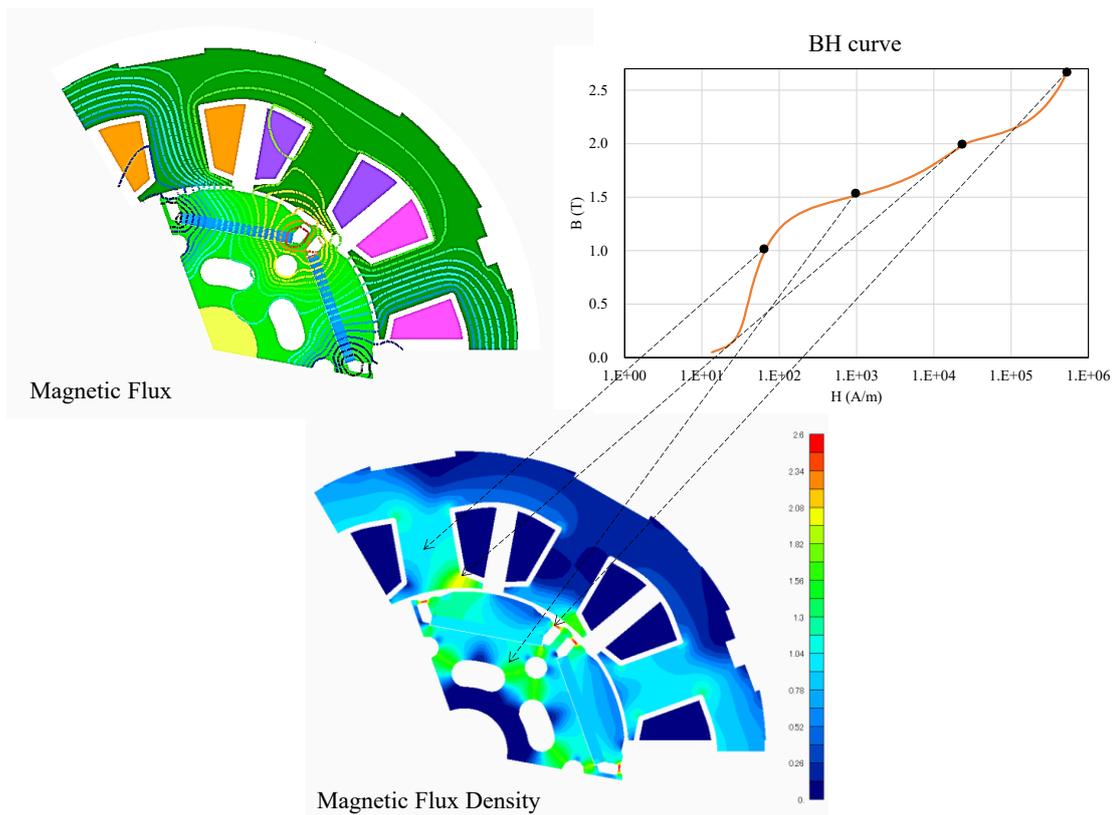


図 1.6 電気学会ベンチマークモータモデル「Gモデル」解析事例（二次元）
 Fig. 1.6. IEEJ Benchmark Motor Model "G-Model" Analysis Example (2D).

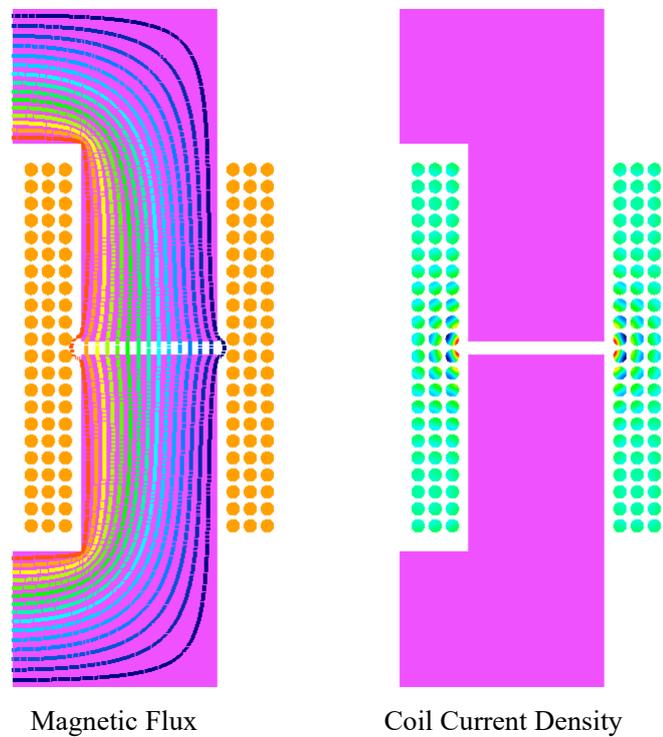


図 1.7 リアクトル解析事例（二次元）
 Fig. 1.7. Example of reactor analysis (2D).

1.4 CAEに関連する課題

電磁界解析を取り巻く CAE (Computer Aided Engineering) 分野も著しく発展している。特に自動車業界や航空業界では構造・振動解析や熱流体解析を研究開発・設計分野で使用する事は、電磁界解析よりも古くから行われている。これら振動解析や熱流体解析、電磁界解析にはそれぞれ専門の解析者が割り当てられ、個別の対象、環境にて最適化や効率化が検討されることが多い。

CAE の大きな潮流として、異なる物理現象の解析ソフト間の連携を強化するマルチフィジックスへの適用がある。近年、大手 CAE ソフトウェアベンダーにより CAE ソフトウェアの買収が頻繁にあり、構造/振動・熱流体・電磁気・モーションダイナミクスなどの CAE ソフトウェア間の連携・連成解析の強化が進んでいる。これにより解析対象もユーザも異なる CAE ソフトウェア間のデータの受け渡しが問題となり、独自フォーマットを使用した共通化や FMI[14]といった共通のフォーマットを使用したデータ連携が進んでいる。

モータの電磁界解析の視点では、非線形磁化特性を考慮しなければならないため時間領域計算が必須であり、一般に後処理により鉄損を評価するためには少なくとも定常状態の電気角一周期の磁束密度の波形データが必要となる。初期値ゼロから計算する場合、計算初期に数値的な過渡現象が発生してしまうため、素早く定常解を得る方法が切望され、これまで parallel-in-time 法[15]や TP-EEC 法[16]が提案され、TP-EEC 法は国内の電磁界解析ソフトウェアに実装されている。しかしながら TP-EEC 法は時間周期性を利用した手法であるため、時間周期性が成り立つ場合のみに適用が限定され、また時間周期性がある区間を複数回計算して補正を行うため、定常周期解を得るためには数周期の計算ステップ数を要してしまう難点があり、改善されるべき課題といえる。

パワーエレクトロニクス磁気素子の視点では、鉄系のコアを持つインダクタやチョークコイルでは、コアは線形磁気特性もしくは周波数依存の複素透磁率としてモデル化がされることが多いが、近年の小型化の要望により磁気非線形性も含めた検討が望まれている。またパワー半導体の進歩により、これら磁気素子においても寄生容量の影響が顕在化しており、磁気非線形性と寄生容量の両方を考慮した電磁界解析による基礎検討が望まれているが、これまでそのようなニーズがなかったこともあり、確立された電磁界解析手法は存在していなかった。寄生容量の影響はスイッチングパターンに起因するスイッチングのオン・オフ時間も関係し、電圧波形は矩形波に近い台形波になることから低周波から高周波まで様々な周波数が混在することになる。すなわち直流に近い周波数から高周波まで幅広い周波数に対応可能な電磁界解析手法の検討も近年注目されているが、台形波電圧波形を印加した寄生容量も考慮可能な電磁界解析はないに等しく、解析事例もかなり限定的である。

1.5 研究の目的

本研究では、電動機駆動システムで中核となるモータの電磁界解析における新たな高速定常解手法と、パワーエレクトロニクス素子を対象とした、寄生抵抗、寄生インダクタンス、寄生容量を考慮可能な新しい解析手法の開発を目的とする。新たな高速定常解手法では、従来法よりもより少ない計算ステップ数、計算時間で定常解を得ることを目指す。寄生抵抗、寄生インダクタンス、寄生容量を考慮可能な新しい解析手法では、従来の準静磁界解析では無視されていた寄生容量を考慮可能にすること、準静電界では無視されていた寄生インダクタンスを考慮可能とすることを旨とする。

まず新たな高速定常解手法では、従来法である TP-EEC 法を発展させ、新たに dq 軸座標系で補正方程式を解いて補正量を算出することで、基本波成分に対して時間周期によらず補正可能であることを提案する。

次に寄生抵抗、寄生インダクタンス、寄生容量を考慮可能な新しい解析手法では、Darwin model を基礎としてクーロンタイプゲージを課すことにより、従来法で問題となっていた低周波領域の安定性を確保可能な方法を提案する。さらに、高周波領域の不安定性を除くために従来のゲージ関数に似た新たなスカラー冗長変数を提案し、クーロンタイプゲージを課した Darwin model 方程式に追加することで、高周波領域においても安定して収束解が得られる方法を提案する。

これらの開発解析手法により Model Based Design (MBD) におけるリードタイムの削減と高精度なプラントモデルによる総合評価を可能とする基礎技術の確立を目指す。

1.6 本論文の構成

以下に本論文の構成を示す。

第2章では、電動機駆動システムの数値解析の困難性について説明する。

第3章では、新たなモータの高速解析手法を提案する。提案方法の適用可能範囲についても理論的に考察したうえで、検証モデルを用いて従来法との比較を示すことで提案法の優位性を示す。

第4章では、パワーエレクトロニクスへの適用を目的として、低周波数から高周波まで幅広い周波数に対応可能な Darwin model を基礎とした新たな電磁界解析手法を提案する。提案手法の必要性和従来解析手法の課題について説明し、検証モデルを用いて提案手法の妥当性を示すと同時に、時間領域解析によりリング電流が表現可能であることを示す。

第5章では、電動機駆動システム設計におけるデジタルトランスフォーメーションからモデルベース開発に至る展望を行い、MBD でのプラントモデルとして、現状の解析技術でできること、足りないことを整理し、本研究の成果をさらに発展させていくための道筋について言及する。

第6章では、本研究で得られた成果をまとめ、今後の課題について述べる。

参考文献

- [1] “[Fourth Industrial Revolution - Wikipedia](#)” 「第四次産業革命」，Wikipedia，2023/8/13 accessed.
- [2] “[Met Office: Atmospheric CO2 now hitting 50% higher than pre-industrial levels](#)”，Carbon Brief 2023/8/13 accessed.
- [3] “[Earth's CO2 Home Page](#)”，2023/8/13 accessed.
- [4] “[Global Monitoring Laboratory - Carbon Cycle Greenhouse Gases \(noaa.gov\)](#)”，Global Monitoring Laboratory, 2023/8/13 accessed.
- [5] “[World Energy & Climate Statics](#)” – Yearbook 2023, 2023/08/16 accessed.
- [6] “[第 1 節 脱炭素社会への移行に向けた世界の動向](#)”，資源エネルギー庁，2023/8/26 accessed.
- [7] “[第 2 節 部門別エネルギー消費の動向](#)”，資源エネルギー庁，2023/8/26 accessed.
- [8] “[Fit for 55](#)”，European Council, 2023/09/24 accessed.
- [9] “[ハイブリッド技術を次世代エコカーへ](#)”，トヨタ自動車，2023/8/26 accessed.
- [10] “[昇圧コンバータ付き 2 モータ駆動制御装置](#)”，令和 3 年度近畿地方発明表彰（三菱電機），2023/8/26 accessed.
- [11] “[JR 九州 環境報告 2018](#)”，九州旅客鉄道株式会社，2023/8/26 accessed.
- [12] “[航空機電動化 \(ECLAIR\) コンソーシアム](#)”，JAXA 航空技術部門，2023/8/26 accessed.
- [13] 回転機電磁界解析の実用的総合評価技術調査専門委員会：「回転機電磁界解析の実用的総合評価」，電学技報，第 1476 号，2020
- [14] “[Functional Mock-up Interface](#)”，Modelica Association Project, 2023/09/29 accessed.
- [15] M. J. Gander, Y.-L. Jiang, B. Song, and H. Zhang, “Analysis of two parareal algorithms for time-periodic problems,” *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 35, no. 5, pp. A2393~A2415, 2013.
- [16] Y. Takahashi, T. Tokumasu, A. Kameari, H. Kaimori, M. Fujita, T. Iwashita, and S. Wakao, “Convergence acceleration of time-periodic electromagnetic field analysis by singularity decomposition-explicit error correction method,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 2947–2950, Aug. 2010.

第 2 章 電動機駆動システムの数値解析の困難性

2.1 電動機駆動システムの数値解析の特徴

第 1 章で説明したように、電動機駆動システムは駆動モータ、インバータシステムなどからなるエネルギー変換システムから構成される。多くの場合、それぞれ専任の技術者が開発、設計にあたるため、システムとして評価するには、従来は試作機を組み上げて測定する方法がとられていた。これは経済的にも時間的にもコストがかかりリードタイムが長くなってしまいうため、モデルベース開発のプラントモデルを組み合わせる方法が一般的になりつつある。しかしながら、あくまでもプラントモデルは等価回路や簡単な微分方程式で現象を表現する簡易モデルであるため、対象固有の評価項目や課題の多様性より汎用化は難しく、初期検討や詳細検討の段階では、それぞれに適したコンピュータシミュレーションが実施される。

以下にエネルギー変換システムにおけるパワーエレクトロニクス素子に対して適用されている数値解析の課題と現状について述べる。

2.1.1 モータの数値解析の現状と課題

“モータ”と一口に言っても表面磁石同期モータ (surface permanent magnet synchronous motor: SPM)、埋込磁石同期モータ (interior permanent magnet synchronous motor: IPM)、同期リラクタンスモータ (synchronous reluctance motor: SynRM)、スイッチトリラクタンスモータ (switched reluctance motor: SRM)、誘導電動機 (induction motor: IM)、ブラシ付き DC モータ、巻線界磁形同期電動機など多岐にわたる。一般に、回転磁界を鉄心 (コア) 内に閉じ込めるような閉磁路構造を持たせるために、磁気特性の良い電磁鋼板を積層した積層鉄心を使用される。積層鉄心は磁束進行方向に対して 0.1~0.5mm の板厚を積層した構造であるため、磁束の変化による渦電流損を低減する効果がある。一方、磁性体特有ともいえるヒステリシス損は磁束の変化、特に磁束密度の最大・最小値が大きいほど損失が大きくなる傾向がある。そのため、積層鉄心内には鉄損と言われる、渦電流損とヒステリシス損、異常渦電流損が発生するため、電磁界解析にて精度よく算出することが、試作前に効率を評価する方法として有用である。しかしながら電磁鋼板の鉄損を電磁界解析で実測と比較して精度よく評価する方法は確立されていると言えず、近似計算により算出するのが計算コスト的にも有効であるが、その精度については議論が継続されており、未解決の課題として残っている。

また IPM モータは永久磁石がロータ内部に埋め込まれた構造をとるため、コア内の磁束の流れが運転条件によって大きく変わる。逆にこれを利用して磁石磁束によるマグネットトルクだけでなくパーミアンスの差によるリラクタンストルクを発生することができるが、どの運転条件でどの程度のトルクとなるのかは机上検討では難しく、電磁界解析により検討するのが一般的である。PM モータは界磁が永久磁石であるため、一般的に回転数が高くなると電機子巻線（コイル）に誘起される誘起電圧も高くなり、ある速度に達すると電源電圧よりも高い誘起電圧となってしまい、モータを運転することができなくなってしまう。そこで磁石磁束を打ち消すように電機子巻線磁束を発生させ、誘起電圧を下げることでより高回転域まで運転することが可能となる。しかしながらこの方法は永久磁石の動作点が変わってしまうため減磁してしまう恐れがあり、温度依存性による熱減磁も発生する。この永久磁石の減磁についても電磁界解析による評価が行われるが、電磁鋼板の場合と同様、磁性体であるため精度を出すのは難しいとも言われている。

材料特性以外でモータ解析の課題として挙げられるのが、PWM（pulse width modulation）電圧波形を印加した時の計算時間である。PWM とはインバータ回路内で行われる制御法の一つで、基本波よりも十分高いキャリア周波数（現状は 5kHz~20kHz 程度が使用される）で作成される三角波を印加したい電圧波形（通常正弦波形）と比較し、スイッチングのタイミングをうまくコントロールすることで多様な振幅、位相の基本波周波数を模擬する多数の矩形波電圧波形を作成することができる。モータのコイルを含むインダクタンスは十分大きいため、この多数の矩形波電圧による電流波形はおおよそ正弦波形とすることができるが、キャリア周波数に応じた高調波リップルが重畳してしまう。そのため、高調波電流による鉄損も発生し、理想的な正弦波形の電流よりも鉄損が増加することが知られている。これを精度よく算出するには、PWM 電圧波形を与えたモータ電磁界解析を実行する必要があるが、多数の矩形波電圧を模擬できる十分細かい時間刻みを指定する必要があり、必然的に計算ステップ数が増加してしまう。さらに電圧印加でモータ解析を行う場合、計算初期に数値的な過渡状態が発生し、この過渡状態はコイルを含むモータの時定数に応じて徐々に減衰していく。これを定常状態が求まるまで継続して計算するのは非常に計算コストがかかり、深刻な課題となっている。

このように、モータの数値解析の実用化に向けて様々な課題が存在するが、本論文では、特に最後に述べた課題の解決に焦点を当て、定常周期解を高速に取得する新たな方法の開発に取り組んだ。

2.1.2 パワーエレクトロニクス素子の数値解析の現状と課題

一般的にパワーエレクトロニクスの数値解析と言えば、プリント基板を対象とした回路解析や EMI (electromagnetic interference) / EMC (electromagnetic susceptibility) 解析が思い起こされるが、本研究では磁気素子であるインダクタやチョークコイル、トランス等のパワーエレクトロニクス磁気素子の数値解析に焦点を当てる。エネルギー変換システム内のパワーエレクトロニクス部分は、パワー半導体はもちろん、インダクタやコンデンサなどの回路素子から構成される。AC-DC コンバータや DC-DC コンバータでは、交流から直流に変換する、直流を昇圧・降圧するために、スイッチング素子（ダイオード、サイリスタ、パワートランジスタや IGBT, MOSFET 等）が使用される。スイッチングによりおおよそ目指した DC 電圧波形が得られるが、リップルが残ってしまうため、平滑コンデンサや平滑インダクタを用いてリップル成分の除去が行われる。コンデンサは理論的に電極面積を大きくして電極間距離を狭くすることで大きな容量を得ることができる。インダクタは理論的にコイルターン数と磁気コアの透磁率により大きなインダクタンスを得ることができるが、コイルからの漏れ磁束によるコア表面やケースの渦電流損失の増加や周波数が高くなることでコアの鉄損が大きくなるのが課題である。さらに周波数が高くなると磁性体内に発生する渦電流損によりコア内に磁束が入りづらくなり、本来のコアとしての機能を果たせなくなることが問題となっており、複素透磁率においては実部が小さくなり虚部は大きくなることで損失が大きくなってしまふ。さらにインダクタの構造によっては、コイルの絶縁被膜やコイルをエポキシ樹脂などにより固めるモールドイング、プリント基板が誘電体であるため、コイルターン間に寄生容量が発生してしまう。これは従来の低周波でのインダクタンスの設計では無視されていたが、スイッチング素子の高周波数化に伴い磁気回路設計に寄生容量を考慮する必要が出てきた。これらは電磁界解析を用いた場合、周波数領域での評価がこれまで主であり、時間領域において電動機駆動システムで実際に印加される矩形波や台形波電圧での条件下で適切に評価可能な電磁界解析手法はいまだ確立されておらず、試作と測定による試行錯誤が行われているのが実情だと思われる。

このようなパワーエレクトロニクス素子の数値解析における課題に対し、本研究では、寄生容量、寄生インダクタンスを周波数領域に加え時間領域でも安定的に評価可能な新しい解析手法の開発に取り組んだ。

2.2 電磁界解析の定式化

モータ解析とパワーエレクトロニクス磁気素子の電磁界解析においては、解析対象と駆動周波数により Maxwell 方程式をベースにしたいくつかの定式化が提案されている。ここでは電磁ポテンシャルを使用した Maxwell 方程式に近似を施すことで導出される代表的な基礎方程式についてまとめる。詳細は専門書[1],[2]を参考にされたい。

Maxwell 方程式は次式で表される。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_s \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}_e + \partial_t \mathbf{D}) = 0 \quad \text{もしくは,} \quad \nabla \cdot \mathbf{J}_e = -\partial_t \rho_e \quad (2.5a), (2.5b)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad (2.6a), (2.6b), (2.6c)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi \quad (2.7a), (2.7b)$$

ここで、

\mathbf{H} : 磁界強度(A/m), \mathbf{B} : 磁束密度(T), \mathbf{E} : 電界強度(V/m), \mathbf{D} : 電束密度(C/m²),

\mathbf{J}_e : 渦電流密度(A/m²), \mathbf{J}_s : ソース電流密度(A/m²), ρ_e : 真電荷(C),

μ : 透磁率(H/m), σ : 導電率(S/m), ε : 誘電率(F/m), ν : 磁気抵抗率 (=1/ μ)

\mathbf{A} : 磁気ベクトルポテンシャル(Wb/m), ϕ : 電気スカラーポテンシャル(V), $\partial_t = d/dt$

である。

静磁界、静電界は時間変動がない条件であり、準静磁界とは電流の変化により磁界は発生するが電界の変動は無視する近似、準静電界とは電流の変化と電界の変化はあるが磁界の変化は無視するという近似である。

準静磁界の近似が成り立つためには、以下の条件が満たされる必要がある。

まず(2.1)式の右辺で、導体中において第一項の変位電流が第二項の渦電流よりも十分小さい必要がある ($\partial_t \mathbf{D} \ll \mathbf{J}_e$)。すなわち、

$$\omega \varepsilon \ll \sigma \quad (2.8)$$

である[1]。これは一般的な機器であれば十分成り立つが、例えば海中ケーブルのような非常に長い伝送線路ではこの近似は成り立たず、電磁波（分布定数回路）として扱う必要がある。

次に非導体領域について考える。(2.2)式の左辺の磁界が右辺第一項の変位電流よりも十分小さくなる条件は、系の代表長さ L が次式を満たす場合である。

$$L \ll \frac{1}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\omega} = \lambda \quad (2.9)$$

ここで、 c は光速、 λ は媒質中での角周波数での光の波長を表す[1]。すなわち、系の代表長さ L よりも波長が十分大きい場合、対象とする系では電磁波にならず、準静磁界および準静電磁界の近似が成り立つ。なお、準静電界近似はこれらの条件を陽には用いず、電流による磁界が無視できるような近似が成り立つことを仮定したもので、例えば高圧耐張がいしなどの解析で使用される。

2.2.1 静磁界および準静磁界

静磁界 (Magnetostatic: MS) , 準静磁界 (Magneto-quasistatic: MQS) の基本的な定式化を示す。Maxwell 方程式は以下のように記述できる。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_s \quad (2.1)'$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e = 0 \quad (2.5)'$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad (2.6a), (2.6c)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \phi \quad (2.7a), (2.7b)$$

静磁界は時間変動がないとするため、(2.1), (2.3), (2.7a)式より次式が得られる。

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \quad (2.10)$$

ソース電流は直流でも時間変動してもよく、その時刻の電流により静磁界が発生する。

準静磁界とは、電流の変化により磁界が発生、磁界の変化により渦電流が発生するが、電界の変動は無視するという近似である。(2.7a), (2.7b)式はベクトル公式より(2.2)式から導かれる。(2.1), (2.4), (2.5)', (2.6a), (2.6c), (2.7a), (2.7b)式より次式となる。

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) = \mathbf{J}_s \quad (2.11)$$

$$-\nabla \cdot \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) = 0 \quad (2.12)$$

これは A - ϕ 法と呼ばれる。(2.5)'と(2.12)式は電流の連続の式と呼ばれ、離散空間においてもこれを満たさないと反復計算が発散してしまうことが知られている。また、電気スカラー

ポテンシャル ϕ は導体領域のみに定義されるが、これを用いない定式化も可能である (\mathbf{A} 法と呼ばれる)。

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + \sigma (\partial_t \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \quad (2.11)'$$

ϕ を用いない場合の電流連続の式 $\nabla \cdot \sigma \partial_t \mathbf{A} = 0$ は(2.11)'式の両辺の発散をとると導けるため、(2.11)'式のみが解かれる。すなわち(2.11)'式は陰的に電流の連続の式が考慮されている。そのため、導電率が非常に小さい場合や周波数が非常に小さい場合は \mathbf{A} 法では正しい解を得ることができず、電流の連続の式を陽に解く \mathbf{A} - ϕ 法が必須となることが知られている。

時間微分項は周波数領域 ($\partial_t = j\omega$) と時間領域の両方で離散化が可能で、どちらもよく使用される。

2.2.2 静電界（直流電流場合含む）および準静電界

静電界 (Electrostatic: ES), 準静電界 (Electro-quasistatic: EQS) の基本的な定式化を示す。Maxwell 方程式は以下のように記述できる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.2)'$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}_e + \partial_t \mathbf{D}) = 0 \quad \text{もしくは,} \quad \nabla \cdot \mathbf{J}_e = -\partial_t \rho_e \quad (2.5a), (2.5b)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad (2.6b), (2.6c)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (2.7b)'$$

ここで、(2.7b)'式は磁気ベクトルポテンシャルを除いたもので、ベクトル公式から(2.2)式より定義される。

静電界は時間変動がないとするため、(2.2), (2.3), (2.6b), (2.8)式より次式のポアソン方程式となる。

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = \rho_e \quad (2.13)$$

真電荷 ρ_e がゼロの場合、ラプラス方程式となり、電位 ϕ が境界条件として与えられる。

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = 0 \quad (2.14)$$

直流電流場の場合、静電界とほぼ同じ導出ができる。(2.5)'式から時間微分項を除いた次式と、(2.6c), (2.8)式より次式を得る。電位 ϕ が境界条件として与えられる。

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0 \quad (2.15)$$

準静電界とは、渦電流を無視した電流場と静電場を解くものである。(2.6b)式に(2.3)式を代入して得られる(2.6a)式を使用する。

(2.6a)式に(2.6b), (2.6c), (2.8)式を代入する。

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi + \partial_t \varepsilon \nabla \phi) = 0 \quad (2.16)$$

周波数領域で表すと ($\partial_t = j\omega$) ,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi + j\omega \varepsilon \nabla \phi) &= 0 \\ \nabla \cdot (\sigma + j\omega \varepsilon) \nabla \phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

となるが、静電界の(2.9)式と同様に表現するために $j\omega$ で除算した、

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \nabla \phi = 0 \quad (2.18)$$

が一般的に用いられる。ここで $\left(\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right)$ は複素誘電率と呼ばれ、 j を含む虚部がいわゆる誘電損失項となる。準静電界解析は周波数領域で解かれることが一般的である。

2.2.3 電磁波 (Full wave)

電磁波解析は Full wave と呼ばれ, Maxwell 方程式すべてを使用して定式化する。渦電流を含む(2.1)式に(2.6a), (2.6b), (2.6c), (2.7a), (2.7b)式を, (2.5a)式に(2.6b), (2.7a), (2.7b)式を代入すると次式が得られる。

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + \partial_t \varepsilon (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) + \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) = \mathbf{J}_s \quad (2.19)$$

$$-\nabla \cdot \{ \partial_t \varepsilon (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) + \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) \} = 0 \quad (2.20)$$

磁気ベクトルポテンシャルに二階の時間微分項が出てくるため波動方程式と呼ばれる。電磁波も周波数領域で解かれることが一般的である。

2.2.4 準静電磁界 (Darwin model)

準静電磁界 (Electromagnetic-quasistatic: EMQS) は, 近年注目されている中周波領域を対象とした定式化で, Darwin model や Darwin 近似とも呼ばれる。オリジナルは C. G. Darwin により提案され, Larsson により準静電磁界に定式化された[3]。磁気ベクトルポテンシャルの変動による電場は無視するが電気スカラーポテンシャルによる電場は考慮するものと解釈することができる。電磁波解析の方程式から磁気ベクトルポテンシャルの二階の時間微分項を除いたものとして定式化される。

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + \partial_t \varepsilon \nabla \phi + \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) = \mathbf{J}_s \quad (2.21)$$

$$-\nabla \cdot \{ \partial_t \varepsilon \nabla \phi + \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) \} = 0 \quad (2.22)$$

具体的な導出・説明については第4章で述べる。

2.3 まとめ

本章では、電動機駆動システムにおける駆動モータとパワーエレクトロニクス磁気素子の数値解析の現状と課題について述べた。モータ解析では、鉄損算出は定常状態での電気角一周期の時間領域の解析が必要であり、PWM 電圧波形を印加した解析の場合に計算初期に現れる数値的な過渡状態を除いた定常状態を得るために多大な計算時間がかかってしまうという課題がある。パワーエレクトロニクス磁気素子の解析では、磁気コアを使用するインダクタやトランスでの非線形磁化特性を考慮した解析の必要性和、寄生容量を考慮した時間領域での過渡解析手法が課題となっていることについて述べた。

さらに、電磁界解析の定式化として、静磁界 (MS) , 準静磁界 (MQS) , 静電界 (ES) , 準静電界 (EQS) , 電磁波 (Full wave) の定式化について示し、第 4 章で述べる準静電磁界 (EMQS) の定式化の導入部を示した。以下にこれらの定式化の適用範囲などについてまとめる。

表 2.1 電磁界解析の適用範囲 (有限要素法)

Table 2.1. Scope of application of electromagnetic field analysis (finite element method)

	ES/EQS	MS/MQS	EMQS	Full wave
R 成分	○	○	○	△*1
L 成分	×	○	○	○
C 成分	○	×	○	○
表皮効果	×*2	◎	◎	△*1
EMC/EMI	×	×	△*3	◎
周波数領域	○	○	○	○
時間領域	○	○	○	×*4

*1 電磁波 (Full wave) では導体は完全導体近似されることが多い

*2 EQS で導体中の電流を解くが、磁界の変化による渦電流は考慮しない

*3 電磁波としての EMC/EMI は計算できないが、配線間の寄生インダクタンスや寄生容量は計算可能 (PEEC 法と同等)

*4 Full wave での有限要素法による時間領域解析は課題が多く研究段階と言え、実用化されていないと思われる。

参考文献

- [1] 五十嵐一・亀有昭久・加川幸雄・西口磯春・A.ボサビ：「新しい計算電磁気学」，培風館 (2003)
- [2] 五十嵐一：「電磁界解析による最適設計—トポロジー最適化の基礎から機械学習まで—」，森北出版 (2023)
- [3] J. Larsson, “Electromagnetics from a quasistatic perspective,” *Amer. J. Phys.*, vol. 75, no. 3, pp. 230–239, 2007.

第 3 章 モータの高速解析手法

3.1 モータの高速解析手法の必要性

モータの解析には静磁界解析 (MS) または準静磁界解析 (MQS) が適用される。2.1.1 節でも述べたように、PWM 電圧波形を印加する時間領域解析では、MS もしくは MQS に電気回路を連成させた解析が実行されるが、ゼロ初期値、すなわち磁界解析の未知変数である磁気ベクトルポテンシャルと電気スカラーポテンシャルはもちろん、コイル電流もゼロ初期値から計算を行うと、計算初期に数値的な過渡状態が現れ、主にコイルの時定数に応じて緩やかに減衰しながら定常に達する。その結果、計算時間が非常にかかってしまうことが課題となっている。また、誘導電動機においても正弦波電圧源解析を時間領域で実行すると同様の現象が現れ、特に誘導電動機はすべりがあるため二次導体の時定数が非常に長いことから、さらに膨大な計算時間がかかってしまうことが大きな課題となっている。そのため、特に、詳細設計の段階で空間高調波 (スロット高調波) の影響と PWM キャリア周波数による時間高調波の影響を考慮するためには、素早く定常解を得る手法が必要である。

3.2 従来的高速定常解析手法

計算初期に現れる数値的な過渡状態が発生してしまう課題に対し、古くから初期値として適当な値を設定する、例えば電圧源解析の初期値として適切なコイル電流値を設定する等の方法がとられていたが、汎用的ではなく効果が出なかったことが知られている。それに対し、これまでいくつかの効果的なアプローチが提案されている[1],[2],[3]が、ここでは効果がよく検証され、広く知られている以下の二つの手法を紹介する。

- Parallel-in-time (Parareal) method

Parallel-in-time (または Parareal method と呼ばれる) は時間並列計算手法の一種で、時間依存の微分方程式を数値解析で解く場合に適用する方法として様々な数値解析分野で使用されている。概要としては、時間方向に対して周期性のある場合において、複数の部分計算区間に分割して、それぞれの部分時間区間を時間ステップ計算として MPI などにより並列計算を行う。ただし、分割時間区間の境界で計算結果の不整合が発生するため、反復計算を用いて部分時間区間の境界間の不整合を修正し、全時間区間における本来計算したい時間区間の計算結果へと収束させる並列計算手法である。この方法は 21 世紀に入ったころに注目を集め、実問題に適用可能な手法が提案されたり、その改良版などが提案されたりと幅広く研究が行われている。電磁界解析への適用として、例えば文献[4],[5],[6]などがある。

- Time periodic explicit error correction (TP-EEC) method

TP-EEC 法は時間周期有限要素法[1]と同様の考え方を基礎とし、時間周期性より半周期もしくは一周期の区間においてその境界の計算値が周期性を持つことを利用して誤差を補正するための補正方程式を導出し、得られた補正量を用いて補正を行うことで誤差成分を除いて素早く定常解を得ることができる手法である[7],[8],[9]。補正方程式は SD-EEC (singularity decomposition-explicit error correction) 法により主行列方程式とは別に解き、時間周期性の境界ステップの値を補正することが可能であるため、Parareal 法のように並列計算を用いなくとも時間ステップ計算を進めていく途中で補正を行うことができるという特長を持つ。さらに領域分割や OpenMP による行列方程式の並列計算との組み合わせ[10]や、Parareal 法との比較も研究されている[11]。

最初に提案された TP-EEC 法は行列方程式である補正方程式を反復計算により解き、補正量を導出するものであるが、近似を行うことで簡易的な補正量を算出することもでき、簡易 TP-EEC 法と呼ばれている。本研究では簡易 TP-EEC 法を dq 軸座標系に適用したものであるため、以下に時間周期有限要素法 (Time periodic-finite element method : TP-FEM) から TP-EEC 法、簡易 TP-EEC 法までの導出過程を説明する。

準静磁界解析 (MQS) が対象とする機器では、通常、コイルにより励磁されることが多い。コイルは抵抗とインダクタンス成分を持つため、電圧入力解析を初期値ゼロから実行すると、図 3.1 に示すように計算初期に数値的な過渡状態が発生し、コイルなどの系の時定数によって減衰しながら徐々に定常状態に近づくことが知られている。そのため、TP-EEC 法により半周期ごとに補正を行うことで素早く定常解を得ることが有効な手段である。

一般化して、次の時間依存の非線形方程式を解くことを考える。

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) + C\partial_t \mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (3.1)$$

ここで、 \mathbf{S} , \mathbf{C} , \mathbf{f} はそれぞれ、非線形リアクタンス行列、コンダクタンス行列、ソース項を表し、時間微分 $\partial_t = d/dt$ である。上式の時間微分項を後退差分近似すると、次式が得られる。

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}^i) + \mathbf{C} \frac{\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i-1}}{\Delta t} = \mathbf{f}^i \quad (3.2)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}^i) - \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^{i-1}) = \tilde{\mathbf{f}}^i \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{S}(\mathbf{x}^i) + \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \mathbf{x}^i \\ \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{x}^i) = \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \mathbf{x}^i \\ \tilde{\mathbf{f}}^i = \mathbf{f}^i \end{cases} \quad (3.4)$$

ここで、 Δt は時間刻みを表す。電気角一周期もしくは半周期を n 時間ステップで分割して解く場合、定常解では次の時間周期性が成り立つとする。

$$\mathbf{x}^0 = \pm \mathbf{x}^n, \quad \mathbf{f}^0 = \pm \mathbf{f}^n \quad (3.5)$$

ここで、上付添え字は時間ステップ番号を表し、一周期（上符号）、または半周期（下符号）の周期性を表す。(3.2)式を n ステップ並べて書くと、図 3.2 左側のようになり、1 ステップ目で得られた解 \mathbf{x}_1 が 2 ステップ目の右辺で使用されることになる。それぞれのステップにおいて残差はゼロとなるように解かれるとすると、(3.5)式の時間周期条件より、1 ステップ目の残差 \mathbf{r}_1 は図 3.2 中の右側の式のように書ける。これが時間周期法[1]の考え方で、1 ステップ目から n ステップ目までを一つの行列方程式にして解くことになる。そのため、未知数が 1 ステップずつ解く通常的时间領域解析に比べて n ステップ倍になることから計算コストに難点があり、実用的ではない。

そこで、この時間周期法を改良したものとして、SD-EEC 法を時間周期法に適用し、時間的に収束が遅い誤差成分として直流成分を分離して抽出する（別方程式として表現する）。補正は次式で与えられるものとする。

$$\mathbf{x}^i \leftarrow \mathbf{x}^i + \mathbf{p} \quad (3.6)$$

ここで、SD-EEC 法による補正量 \mathbf{p} に対する補正方程式は次式となる[7]。

$$\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{S}^i + (1 \mp 1) \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \right) \mathbf{p} = \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} (-\mathbf{x}^0 \pm \mathbf{x}^n) \quad (3.7)$$

なお、表式を簡単にするため時間微分項を後退差分で近似しており、 \mathbf{C} は時刻によらない行列として表現している。補正量ベクトル \mathbf{p} の長さは未知数と同じであり、反復計算により \mathbf{p} を求めることができる。

TP-EEC 法の特長として、計算領域全域に対して補正を行うことができるため、渦電流領域に対しても補正を行うことが可能である。ただし、厳密な時間周期性を仮定して算出した手法であるため、インダクタや変圧器などの静止器や、回転機の場合は同期モータに適用可能な方法であり、準定常周期解である誘導電動機には適用できない。

(3.7)式を簡略化する簡易 TP-EEC (simplified TP-EEC) 法がある。時定数が大きい（時間微分項の影響が大きい: $\mathbf{S} \ll \mathbf{C}$ ）場合、 \mathbf{S} に関する項を無視した半周期補正に対する簡易式を導出できる。簡易 TP-EEC 法は、次式で表される。

$$\mathbf{p} = -\frac{1}{2} (\mathbf{x}^0 + \mathbf{x}^n) \quad (3.8)$$

上式は補正ベクトルの算出に係数行列は必要なく、時間周期境界の最初と最後のステップの計算値を用いて簡単に補正できるのが特長である。この利点により、補正領域を限定した補正を行うことが可能になる。この方法は通常 TP-EEC 法よりも厳密ではなく、例えばステータ領域のみなど補正領域を限定して補正することが可能である。

簡易 TP-EEC 法を発展させたものとして、文献[9]で提案されているように、多相交流周期境界条件を適用した多相交流簡易 TP-EEC (polyphase simplified TP-EEC) 法がある。簡易 TP-EEC 法と同様の考えのもと、(3.5)式の半周期 (下付符号) に相当する三相での多相交流周期境界条件は以下のように表される。

$$\mathbf{x}^0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1^0 \\ \mathbf{x}_2^0 \\ \mathbf{x}_3^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_2^n \\ \mathbf{x}_3^n \\ -\mathbf{x}_1^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I & O \\ O & O & I \\ -I & O & O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1^n \\ \mathbf{x}_2^n \\ \mathbf{x}_3^n \end{Bmatrix} = G\mathbf{x}^n \quad (3.9)$$

ここで、下付添え字は相順を表す。これは半周期境界条件を拡張したもので、半周期を 1/3 したステップ毎で補正され、半周期では 3 回補正できることになる。つまり、多相交流周期境界条件かつ半周期性が成り立つ場合、多相交流 TP-EEC 法が適用できることになる。この時、補正方程式は次式で表される。

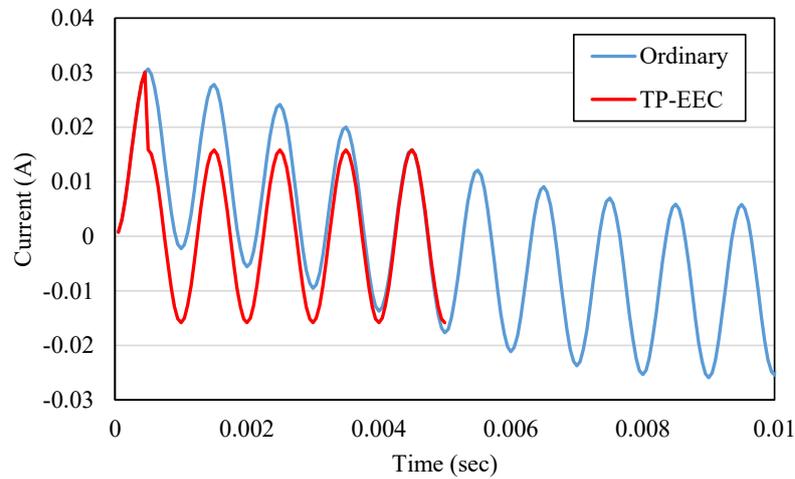


図 3.1 通常の時間領域解析と TP-EEC 法による誤差補正を行った場合の電流波形
Fig. 3.1. Current waveforms obtained by ordinary time-domain analysis and error correction using the TP-EEC method.

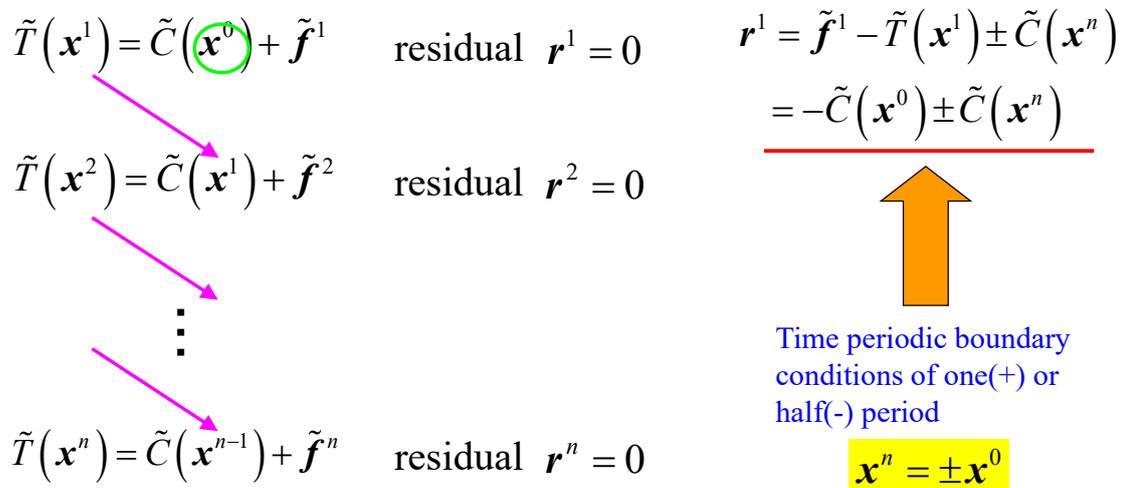


図 3.2 時間周期法の概要
Fig. 3.2. Overview of Time Periodic Method.

$$\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{S}^i + (\mathbf{I} - \mathbf{G}) \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \right) \mathbf{p} = \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} (-\mathbf{x}^0 + \mathbf{G}\mathbf{x}^n) \quad (3.10)$$

簡易版 TP-EEC 法と同様に、時定数が非常に長い場合 ($\mathbf{S} \ll \mathbf{C}$) を考えると、次式のように簡略化できる。

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G}) \mathbf{p} = -(\mathbf{x}^0 - \mathbf{G}\mathbf{x}^n) \quad (3.11)$$

これを三相交流で表すと次式となる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (\mathbf{x}_1^0 + \mathbf{x}_2^0 + \mathbf{x}_3^0) + (\mathbf{x}_1^n - \mathbf{x}_2^n - \mathbf{x}_3^n) \\ (-\mathbf{x}_1^0 + \mathbf{x}_2^0 + \mathbf{x}_3^0) + (\mathbf{x}_1^n + \mathbf{x}_2^n - \mathbf{x}_3^n) \\ (-\mathbf{x}_1^0 - \mathbf{x}_2^0 + \mathbf{x}_3^0) + (\mathbf{x}_1^n + \mathbf{x}_2^n + \mathbf{x}_3^n) \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbf{K}\mathbf{x}^0 + \mathbf{K}^T \mathbf{x}^n) \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

\mathbf{K} 行列の上付添え字 T は転置を表す。補正される三相交流は、図 3.3 のように 1/6 周期での三相交流の半周期性を持つ。

特長として、簡易 TP-EEC 法では自分自身の時間周期性を用いて補正量を算出しているのに対し、多相交流では他相の値も使用して補正量を算出するため、半周期よりも短い区間である多相交流周期境界条件で補正することが可能である。補正対象領域として例えば三相コイル領域のみを指定することで、補正することが可能となる。

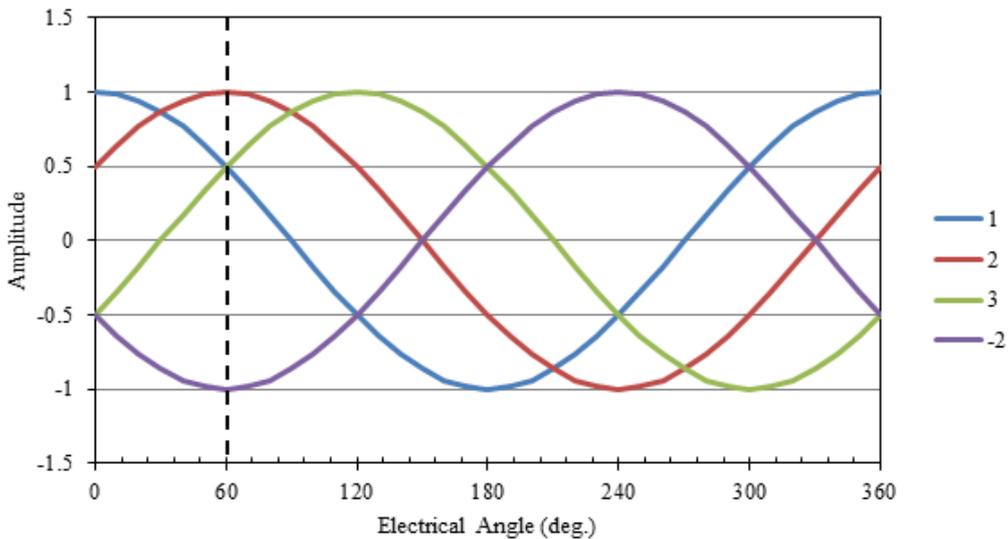


図 3.3 三相交流周期境界条件 (60 度で 1/6 周期)

Fig. 3.3. Three-phase AC periodic boundary condition (1/6 cycle at 60 degrees).

3.3 dq-TP-EEC 法の開発

3.3.1 dq 軸座標系での TP-EEC 法の導出

多相交流簡易 TP-EEC 法の補正方程式(3.12)式からわかるように、多相交流周期境界条件を用いれば自相の値を多相の値も用いて補正することが可能である。そこで三相以上の多相交流の場合に、同期回転座標系への dq 変換を施すことで新しい補正方程式が導出できることが推察される。ここでは、一般的に電気機器で使用される三相交流を対象として、dq 変換を施した新たな補正方法 (dq-TP-EEC 法) [12],[16]について説明する。

一般的に三相交流の物理量 \mathbf{x} 、例えば電流や電圧は、同期回転座標系への dq 変換により同期回転速度成分 (dq 軸成分) に変換できる。なお、三相平衡していると仮定し、零相 (z 相) は無視している。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_d \\ \mathbf{x}_q \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_c \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

ここで下付添え字は相 (dq 軸および三相 abc 相) を表す。dq 変換行列 \mathbf{D} は、次式で表される。なお、dq 変換は、三相の静止座標系から二相の直交静止座標系 (α - β 静止座標系) へ変換し、同期回転座標 (dq 同期回転座標系) へ変換するものである。

$$\mathbf{D} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) & -\sin\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

例として、図 3.4 に三相交流を dq 変換したものを示す。これより dq 変換により三相交流の基本波成分を直流成分に変換することができることがわかる。

dq 変換後の基本波成分の物理量は直流成分となるため、任意の時間区間に対して時間周期条件を適用することを考える。 n ステップの時間区間における一周周期性の時間周期境界条件は、次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_d^0 \\ \mathbf{x}_q^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_d^n \\ \mathbf{x}_q^n \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

ここで、上付添え字は時間ステップを表す。これは通常の TP-EEC 法の一周期性の時間周期条件と同じである。

簡単のため(3.1)式を線形方程式として同期回転座標系で表すと次式となる。

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{dd} & \mathbf{S}_{dq} \\ \mathbf{S}_{qd} & \mathbf{S}_{qq} \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C}_q \\ -\mathbf{C}_d & \mathbf{O} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d \\ \mathbf{x}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C}_q \end{bmatrix} \partial_t \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d \\ \mathbf{x}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_d \\ \mathbf{f}_q \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

ここで、 ω は角周波数を表す。なお、 \mathbf{C} 行列の非対角項 \mathbf{C}_{dq} , \mathbf{C}_{qd} は(3.16)式の導出時に省略している。補正方程式は(3.2)式に(3.3)式の dq 変換行列を用いることで導出できる。一周期時間周期条件として考えると、次の補正方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} n\mathbf{S}_{dd} & n\mathbf{S}_{dq} - n\omega\mathbf{C}_q \\ n\mathbf{S}_{qd} + n\omega\mathbf{C}_d & n\mathbf{S}_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_d \\ \mathbf{p}_q \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_d (-\mathbf{x}_d^0 + \mathbf{x}_d^n) \\ \mathbf{C}_q (-\mathbf{x}_q^0 + \mathbf{x}_q^n) \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

時定数が非常に長く ($\mathbf{C} \gg \mathbf{S}$)、 $\mathbf{C}_d = \mathbf{C}_q$ であると仮定し、 $\mathbf{p}_d = \alpha(\mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_q^0)$, $\mathbf{p}_q = -\alpha(\mathbf{x}_d^n - \mathbf{x}_d^0)$ で表されるとすると、簡易 TP-EEC 法と同じ導出手順で $\alpha = 1 / n\omega\Delta t$ となる。結果として、次式のように簡略化できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_d &= \frac{1}{n\omega\Delta t} (\mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_q^0) \\ \mathbf{p}_q &= -\frac{1}{n\omega\Delta t} (\mathbf{x}_d^n - \mathbf{x}_d^0) \end{aligned} \quad (3.18)$$

\mathbf{p}_d と \mathbf{p}_q は、誤差補正のために dq 軸座標系で補正量を算出したのち、静止座標系へ変換して三相補正とする必要がある。dq 軸座標系では直流成分が支配的であるため、誤差補正は時間周期境界条件に関係なく、任意の時間ステップ数の時間区間で行うことができる特長がある。この新しい TP-EEC (dq-TP-EEC) 法は簡易多相 TP-EEC 法(7)式と同様に、補助方程式を解く必要がないため計算コストが非常に小さく、コイル領域および導体領域のみに適用可能である。

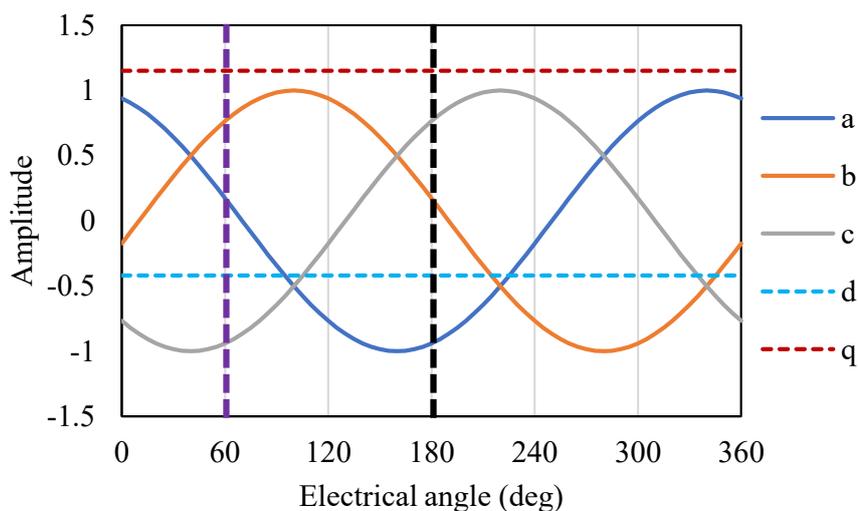


図 3.4 dq 回転座標系における三相値の成分(a,b,c)と変換された成分(d,q)
Fig. 3.4. The components of the three-phase value (a,b,c) and the transformed components (d,q) in the dq rotational frame..

3.3.2 簡易モデルによる dq-TP-EEC 法の補正効果の検証

3.3.1 項で dq-TP-EEC 法は任意の時間区間で補正が行えることを定式ベースで示した。本項では効果的な補正時間区間について検討を行う[12]。図 3.5 に検証に用いる簡易リニアモータモデルを示す。ステータは線形比透磁率 2,000 の磁性コアと三相コイルで、ロータは比透磁率 1 で導電率 5.0×10^6 S/m の導電性コアで構成されている。コイルに三相正弦波電圧を印加し、1 周期は 36 時間ステップに分割する。すべりは 1 (ロータ固定) とする。dq-TP-EEC 法の有効性を検証するため、(3.18)式に基づく誤差補正の時間区間を 1 周期の $1/2$, $1/3$, $1/6$, $1/9$ として計算を実行した。 $1/2$, $1/6$ 周期の時間区間は、それぞれ簡易 TP-EEC 法、三相 (簡易) 多相交流 TP-EEC (PTP-EEC) 法の補正時間区間に相当する。一方、 $1/9$ 周期の誤差補正の時間区間は、三相時間周期条件よりも短い。また、この問題では定常解に高次の時間高調波成分が含まれないため、1 ステップ補正区間についても検討した。

図 3.6 (a), (b), (c) はそれぞれ、補正時間間隔が $1/2$, $1/3$, $1/6$, $1/9$, および 1 ステップの場合の d 軸電流および q 軸電流の時間変化を示している。参考として TP-EEC 法の結果も併せて示す。定常解は図 3.4 に示したように、dq 軸座標系における直流成分のみとなる。注目すべき点として、 $1/2$ 周期と $1/3$ 周期の誤差補正による d 軸電流と q 軸電流は明らかに定常解に収束していない。それに対し、 $1/6$ 周期、 $1/9$ 周期、および 1 ステップの補正の結果は 6 回の補正を経て定常状態に素早く到達している。これより、 $1/6$ 周期とそれよりも小さい補正時間間隔とすることでより素早く定常解を得ることができるとわかる。速度向上率は、 $1/6$ ステップ補正では 6 ステップ \times 6 回 = 36 ステップ要したのに対し、1 ステップ補正でも 6 回の補正 = 6 ステップで素早く定常解を算出することが可能であることが示された。

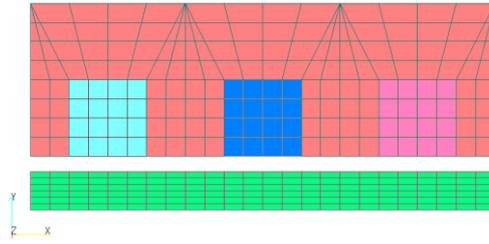
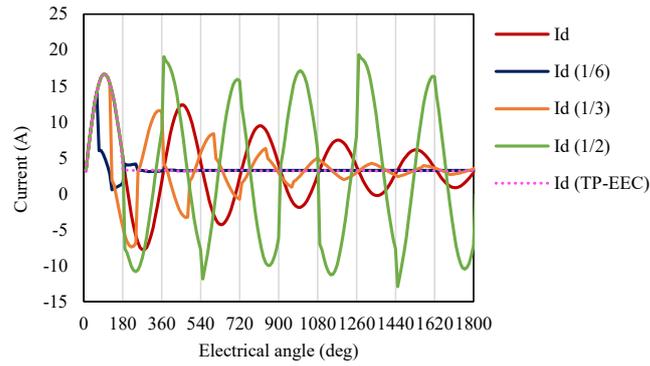
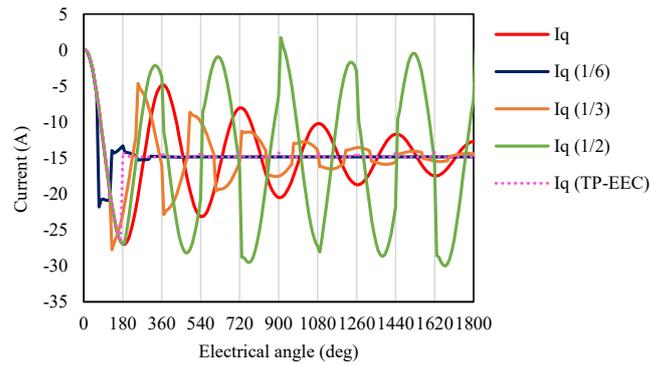


図 3.5 簡易リニアモータ検証モデル

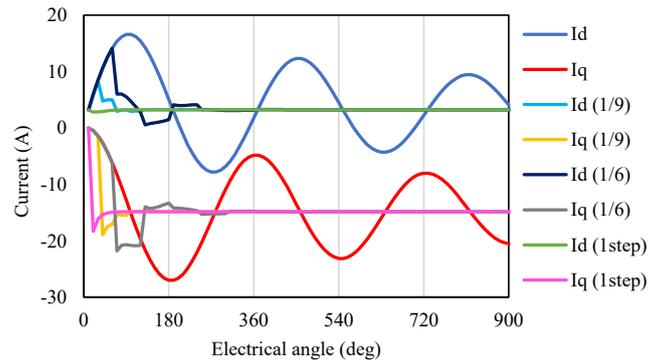
Fig. 3.5. Benchmark model for a linear motor model.



(a) variation of d-axis currents for large time intervals.



(b) variation of q-axis currents for large time intervals.



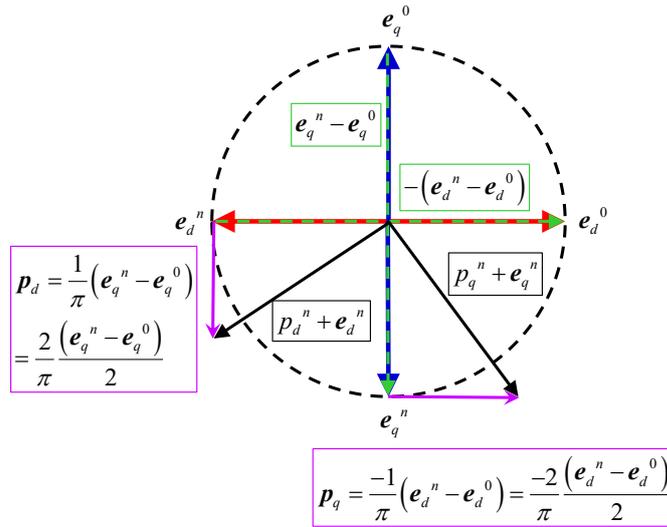
(c) variation of d- and q-axis currents for small time intervals.

図 3.6 簡易リニアモータ検証モデルの計算結果の比較
Fig. 3.6. Numerical results for the simplified linear motor model.

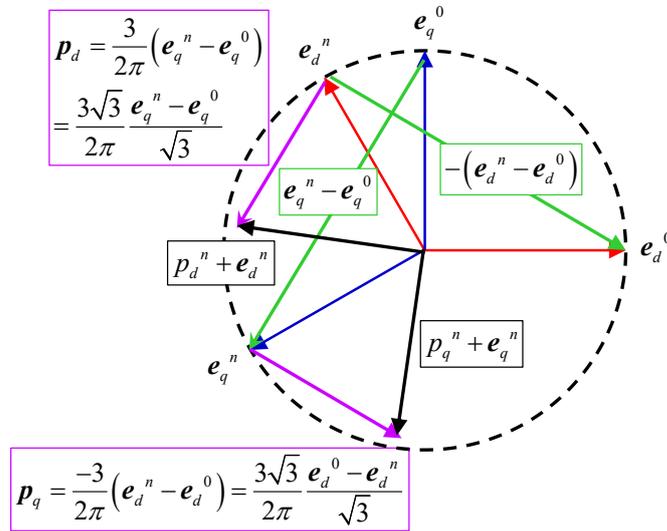
図 3.6 において、1/3 周期以上の補正時間区間で補正効果がなく、定常解が得られない原因について考察する。(3.18)式より、dq-TP-EEC 法では過渡解を d 軸補正ベクトル p_d と q 軸補正ベクトル p_q で補正している。図 3.7 は、 α - β 静止座標系における dq-TP-EEC 法による誤差ベクトル e_d と e_q の減少過程を示している。ここで、 e_d と e_q は暫定解と定常解の差であり、誤差ベクトルが小さくなる、すなわち誤差補正効果があるということを意味し、 e_d と e_q のなす角は常に 90 度である。図 3.7 では簡単のために e_d と e_q の長さを 1 に正規化している。 α - β 静止座標系では、 e_d と e_q は時間ステップごとに原点を中心とする円上を同期速度で回転する。時定数が非常に大きい場合、 e_d と e_q の長さは各時間ステップで減少せず、 p_d と p_q はそれぞれ $\alpha(e_q^n - e_q^0)$ と $-\alpha(e_d^n - e_d^0)$ で与えられる。図 3.7 (a) は 1/2 周期の誤差補正を用いた場合であり、180 度毎に誤差補正を行い、 $\alpha = 1/\pi$ である。 e_d は $e_q^n - e_q^0$ の方向に、 e_q は $-(e_d^n - e_d^0)$ の方向に補正されるため、 p_d と e_d^n 、 p_q と e_q^n のなす角は 90 度となる。図 3.7 (a) から明らかなように、 $e_q^n - e_q^0$ 、 $-(e_d^n - e_d^0)$ の方向は、 e_d 、 e_q の円軌道の接線方向である。また、これらのベクトルの長さは 2 であり、 p_d と p_q の長さは 2π である。したがって、 e_d^n と e_q^n の長さは 1/2 周期の誤差補正によって逆に増加してしまう。

図 3.7 (b) は 1/3 周期の誤差補正を用いた場合を示している。誤差補正は 120 度ごとに行われ、 $\alpha = 3/2\pi$ である。この場合、 p_d と e_d^n 、 p_q と e_q^n の角度は 60 度である。図 3.7 (b) に示すように $e_q^n - e_q^0$ と $-(e_d^n - e_d^0)$ の長さは $\sqrt{3}$ であるため、 p_d と p_q の長さは $\sqrt{3}\alpha \sim 0.83$ となる。その結果、 e_d と e_q は誤差補正によってほとんど減少しない。したがって、1/3 周期の誤差補正はほとんど補正効果がない。

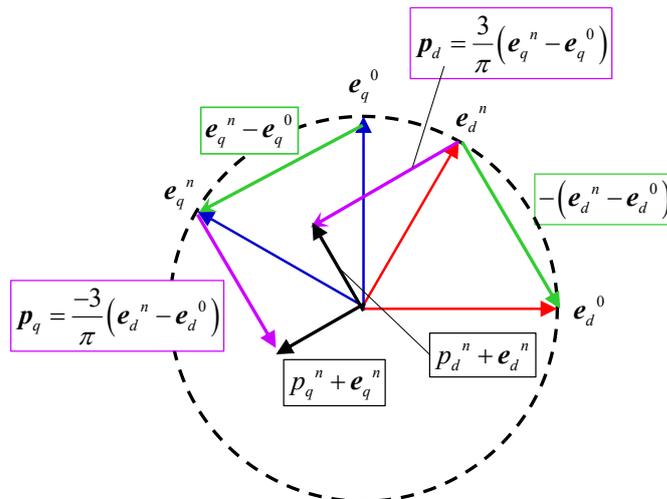
一方、図 3.7 (c) は 1/6 周期の誤差補正を用いた場合である。誤差補正は 60 度ごとに行われ、 $\alpha = 3/\pi$ である。この場合、 p_d と e_d^n 、 p_q と e_q^n の角度は 30 度である。図 3.7 (c) に示すように、誤差補正によって e_d と e_q の長さを短くする、すなわち補正効果があることが確認できる。同様の考えのもと、1/9 周期や 1 ステップといった小さい時間間隔を用いることで、効果的に誤差ベクトルを補正することが確認できる。以上の結果から、過渡解析の収束特性を大幅に改善するためには、dq-TP-EEC 法を 1/3 周期以下の補正時間間隔で実施することが望ましいと結論付けられる。



(a) 1/2-period error correction



(b) 1/3-period error correction



(c) 1/6-period error correction

図 3.7 α - β 静止座標系における dq-TP-EEC 法による誤差ベクトルの減少過程
 Fig. 3.7. Explanation of correction strategies of dq-TP-EEC method in the α - β stationary reference frame.

3.4 PM モータを用いた開発手法による検証解析

本節では、dq-TP-EEC 法によりどの程度まで短い時間区間で補正可能かどうか実機モデルを用いて検証する[12]。

3.4.1 集中巻 IPM モータ (D1 モデル) を用いた検証解析

集中巻の4極 IPM モータ “D1 モデル” [13]を解析対象モデルとする。モータのメッシュを図 3.8 に示す。コイルには定格条件，すなわち電機子電流 4.4Arms，電流位相角 20deg，回転速度 1,500min⁻¹ で三相正弦波電圧を印加する。一周期を 180 時間ステップに分割した。誤差補正の時間区間は一周期の 1/6，1/9，1/12，1/36，および 1 ステップ補正で行った。図 3.9 (a) に d 軸電流の時間変化を示す。時定数が大きいと、定常解をより早く得るためには、時間周期性を利用した誤差補正が必要であることは明らかである。d 軸電流と q 軸電流に固定子スロットによる 6 次の時間高調波成分が含まれていても、すべての誤差補正で定常解を正確に素早く求めることができることがわかる。速度向上率で言うと、すべての補正区間はおよそ 6 回の補正で定常解を得ることができたことから、多相交流 TP-EEC 法と同じ補正区間 1/6 で 180 ステップ要したのに対し、1 ステップ補正は 6 ステップで定常解を得られたことから 30 倍素早く定常解を得ることができた。

次に、上記と同じ電流制御条件を想定し、PWM 励磁時の dq-TP-EEC 法の有効性を検証する。同期キャリア周波数は 4,950Hz とし、一周期を 4,950 時間ステップに分割した。誤差補正の時間区間は、一周期の 1/6，1/18，1/66 とした。図 3.9 (b)に d 軸電流の時間変化を示す。1/6 周期の誤差補正で定常解を得ることができている。他の誤差補正でも定常解に近づくが、数回の誤差補正では定常解とのわずかな差が残ってしまう。このわずかな差の理由については次項で述べる。

3.4.2 分布巻 IPM モータ (D モデル) を用いた検証解析

分布巻の4極 IPM モータ “D モデル” [14]を解析対象モデルとする。モータのメッシュを図 3.10 に示す。電機子電流 3Arms，電流位相角 25deg，回転速度 1,500min⁻¹ という定格条件において、コイルに三相正弦波電圧を印加する。一周期を 180 時間ステップに分割した。誤差補正の時間区間は一周期の 1/6，1/9，1/12，1/36 および 1 ステップ補正で行った。図 3.11 (a)に d 軸電流の時間変化を示す。図から明らかなように、1 ステップの誤差補正を除けば、すべての誤差補正で定常解を得ることができるとわかる。速度向上率で言うと、本モデ

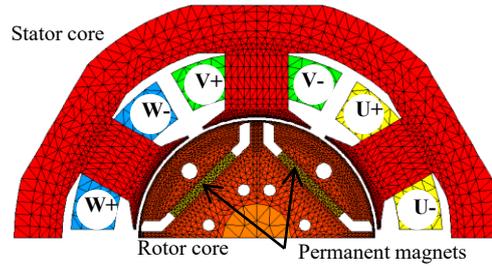
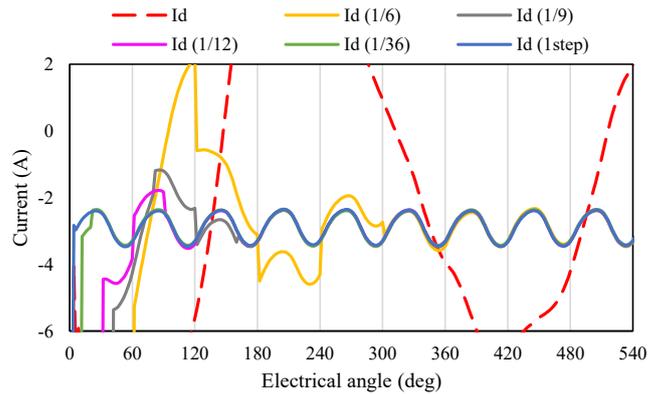
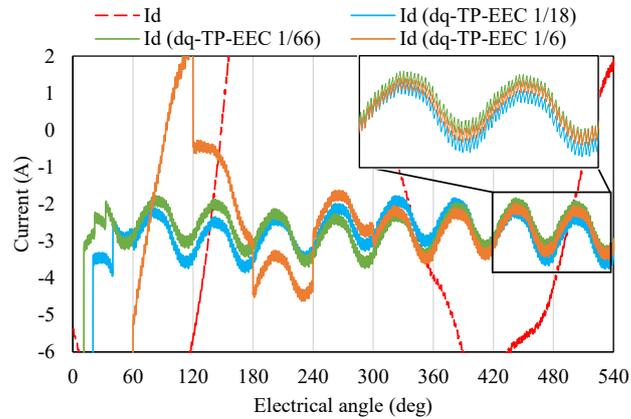


図 3.8 D1 モデル (2D)

Fig. 3.8. Two-dimensional mesh of the D1 model.



(a) sine wave voltage excitation



(b) PWM voltage excitation

図 3.9 d 軸電流波形 (D1 モデル)

Fig. 3.9. Variation of d-axis currents of the D1 model.

ルでも定常解を得るまでに 6 回の補正を要していることから、1/6 と 1/36 ステップでは 6 倍の速度向上率となる。

次に、同期キャリア周波数を 4,950Hz とし、上記と同じ電流制御条件を想定した PWM 励磁のもとで、提案手法の有効性を検証する。一周期を 4,950 時間ステップに分割した。誤差補正の時間区間は、一周期の 1/6、1/18、1/66 とした。比較のため、簡易多相交流 TP-EEC 法 (PTP-EEC 法) も実行した。図 3.11 (b)に d 軸電流の時間変化を示す。図を見てわかるように、ほとんどの誤差補正が 6 回程度の補正の後定常解に近づいていることがわかる。厳密に

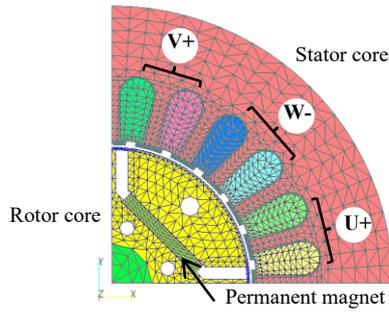


図 3.10 D モデル (2D)

Fig. 3.10. Two-dimensional mesh of the D model.

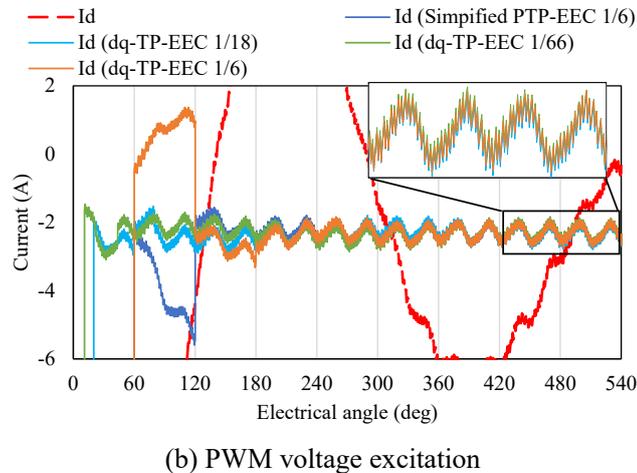
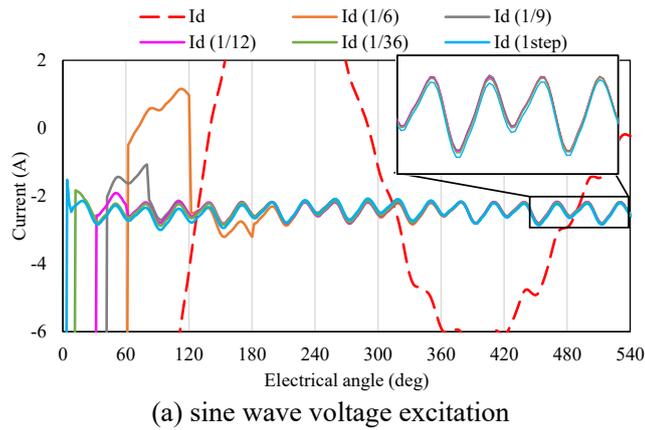


図 3.11 d 軸電流波形 (D モデル)

Fig. 3.11. Variation of d-axis currents of the D model.

は、dq-TP-EEC 法と簡易 PTP-EEC 法による 1/6 周期の誤差補正のみが定常解を得ることができている。

図 3.12 に、図 3.11 (b)に示した PWM 電圧励磁時の定常解に対する d 軸電流の相対誤差を示す。1/6 周期の誤差補正では定常解が得られているが、1/18 周期と 1/66 周期の誤差補正を適用した場合には、低次の時間高調波成分により無視できない誤差が残っている。dq-TP-EEC 法は、主に同期回転座標系における直流誤差成分を除去するため、電圧波形には多くの時間

高調波成分が含まれる，特に PWM 励磁の場合，dq-TP-EEC 法ではこのような小さな補正時間間隔を使用することは必ずしも効果的ではないことがわかる。そのため，dq-TP-EEC 法の時間間隔を PTP-EEC 法と同じ厳密な時間周期性のある 1/6 周期に設定するのが現実的な解決策の 1 つである。

dq-TP-EEC 法を最大限に活用し，過渡解の定常状態への収束をさらに加速するために，以下の手順を提案する。PWM 電圧励磁下で効率よく定常解を求める実用的な方法として，初期の時間ステップでは dq-TP-EEC 法の小さな時間区間を採用して大きな直流成分誤差を除去し，その後の時間区間として 1/6 周期の誤差補正を用いる方法が考えられる。図 3.12 の場合，簡易 PTP-EEC 法と比較して，提案手法の 1/66 ではほぼ同じ時刻で定常解を得ることができている。これは，インバータ駆動 IPM モータの解析においてキャリア高調波により dq-TP-EEC 法の仮定が必ずしも成立しないため，このような段階的な誤差補正が必要となるが，補正時間区間を任意に設定できるため，例えば計算条件の確認として許容される誤差となるような時間区間を選択して実行することができると思う。すなわち，PWM 電圧励磁下において今回は最も短い補正区間として 1/66 を用いて検討を行ったが，図 3.12 にも示したように，1/18 補正でも 1/66 補正でもほぼ同等の誤差が残存してしまうことから，より効果的な補正区間を検討するよりも短い補正区間で補正したのち，1/6 補正を実行する二段階での誤差補正が実用的だと考えられる。

なお，キャリア周波数の影響を考察するために，10kHz のキャリア周波数として同様の解析を実行したが，結果はほぼ同じであった。すなわち，キャリア周波数の周期が dq-TP-EEC 法に与える影響は非常に小さく，分布巻 IPM モータである D モデルのようなスロット高調波が集中巻よりも高い高次高調波を含む場合，dq-TP-EEC 法の補正効果はやや小さくなると結論付けられる。

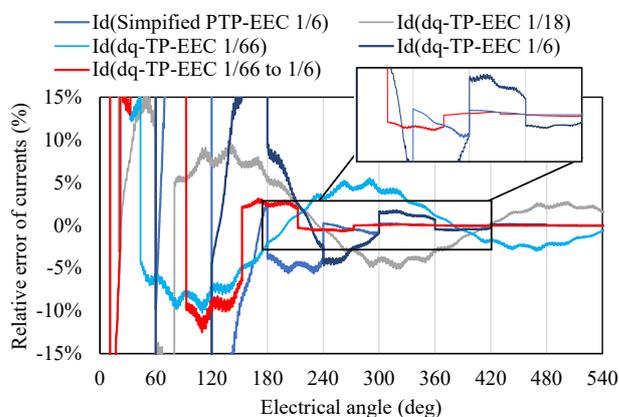


図 3.12 d 軸電流の相対誤差 (D モデル)

Fig. 3.12. Relative error of d-axis currents obtained from the PWM voltage excitation of the D model.

3.5 オープン巻線モータを想定した直流重畳三相交流への dq-TP-EEC 法の適用

前節で dq-TP-EEC 法は三相交流で有効な補正手法であることを示した。本節ではそれを拡張し、零相が重畳している三相交流への適用について検討する[12]。

3.5.1 零相成分を考慮した dq-TP-EEC 法

本項では、提案した dq-TP-EEC 法の適用範囲を直流重畳問題に拡大する。具体的には、オープンエンド巻線 PM モータを考える。一般的に、オープンエンド巻線 PM モータに給電するデュアルインバータは、通常のシングルインバータに比べて速度調整範囲が広いという利点がある[15]。図 3.13 に PM モータのオープンエンド巻線接続の例を示す。この方式は PM モータの固定子巻線の両端をインバータに接続して動作させるもので、通常のインバータ 1 台の場合と比較して、特殊な制御方法により PM モータに高電圧を印加することができるものである。図 3.13 の場合、マスターインバータ（左側）は直流電圧源に直接接続され、スレーブインバータ（右側）はコンデンサに接続され、コンデンサに充電されている電圧分を利用することを想定している。スレーブインバータを直流電圧源に接続する 2 電源タイプも適用可能である。

オープンエンド巻線 PM モータでは、電機子電流に三次高調波成分と z 相成分が重畳される。一般的に、オープンエンド巻線接続は図 3.14 に示すように独立した三相接続とみなすことができる。そのため三相電流は常に平衡となっているわけではない。z 相成分 x_z を考慮する場合、(3.13)式と(3.14)式は以下の式に置き換えられる：

$$\begin{Bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_z \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{D} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) & -\sin\left(\theta - \frac{4}{3}\pi\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$x_z = \frac{x_a + x_b + x_c}{\sqrt{3}} \quad (3.21)$$

dqz 同期回転座標系では、z 相成分 \mathbf{x}_z も直流成分である。定常状態では以下の時間周期条件を満たす。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_d^0 \\ \mathbf{x}_q^0 \\ \mathbf{x}_z^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_d^n \\ \mathbf{x}_q^n \\ \mathbf{x}_z^n \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

簡単のために d 軸、q 軸、z 相成分の相互結合部分行列を無視する場合、(3.17)式は以下の補正方程式で置き換えることができる。

$$\begin{bmatrix} n\mathbf{S}_{dd} & n\mathbf{S}_{dq} - n\omega\mathbf{C}_q & O \\ n\mathbf{S}_{qd} + n\omega\mathbf{C}_d & n\mathbf{S}_{qq} & O \\ O & O & n\mathbf{S}_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_d \\ \mathbf{p}_q \\ \mathbf{p}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\mathbf{C}_d}{\Delta t} (-\mathbf{x}_d^0 + \mathbf{x}_d^n) \\ \frac{\mathbf{C}_q}{\Delta t} (-\mathbf{x}_q^0 + \mathbf{x}_q^n) \\ \frac{\mathbf{C}_z}{\Delta t} (-\mathbf{x}_z^0 + \mathbf{x}_z^n) \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

$\mathbf{C} \gg \mathbf{S}$ と仮定すると、最終的に(3.18)式と全く同じ補正ベクトル \mathbf{p}_d と \mathbf{p}_q が得られ、この仮定によって z 相成分が除去されてしまう。そのため、dq-TP-EEC 法では z 相成分を補正することができない。

この問題に対処するため、三相電圧励磁の直流電圧を独立に考慮することで直流成分が得られると仮定する。直流成分は、磁性材料の特性が非線形であっても、直流成分が十分小さいためオープンエンド巻線 PM モータの挙動に劇的な影響を与えない。この仮定を用いて、直流重畳問題に対する以下の手順を提案する。まず、直流電圧励磁のみを考慮した PM モータの静磁界解析を行い、過渡解析の初期値を決定する。次に、PM モータに直流重畳三相電圧を印加し、あらかじめ求めた初期値から時間領域解析を行う。その際、定常状態への収束を早めるため、dq-TP-EEC 法を用いて過渡解の d 軸と q 軸の変数を補正する。なお、直流重畳問題の場合でも、一周期の時間周期条件が必要であることから、簡易 TP-EEC 法や簡易 PTP-EEC 法では、その導出過程より直流重畳問題に適用することができず、dq-TP-EEC 法に優位性がある。

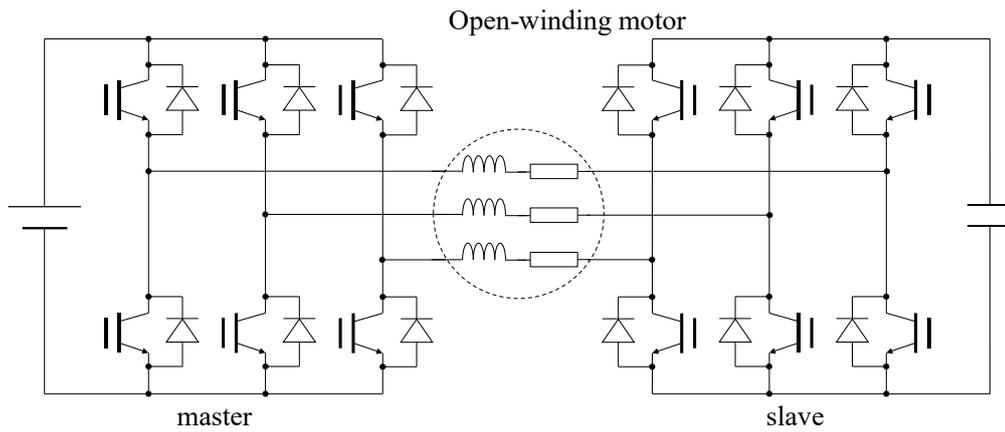


図 3.13 オープン巻線モータ駆動回路

Fig. 3.13. Open-winding motor drive circuit

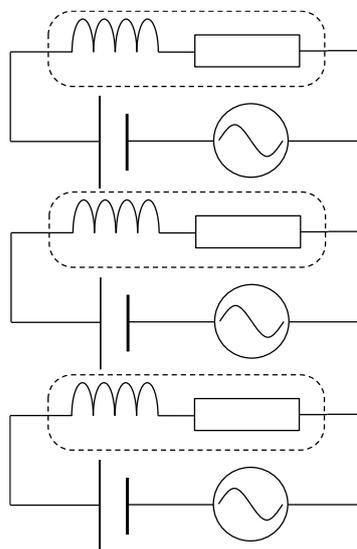
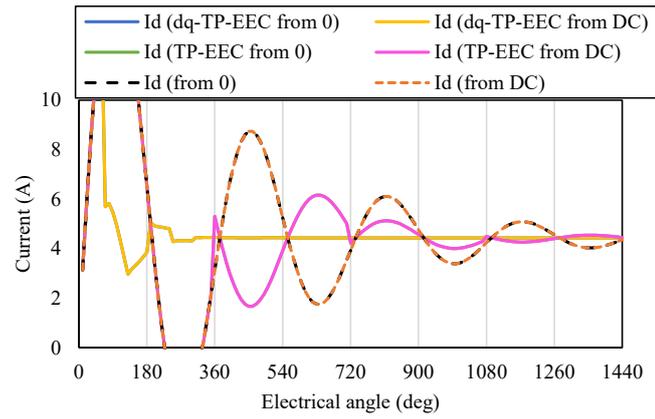


図 3.14 三相独立結線

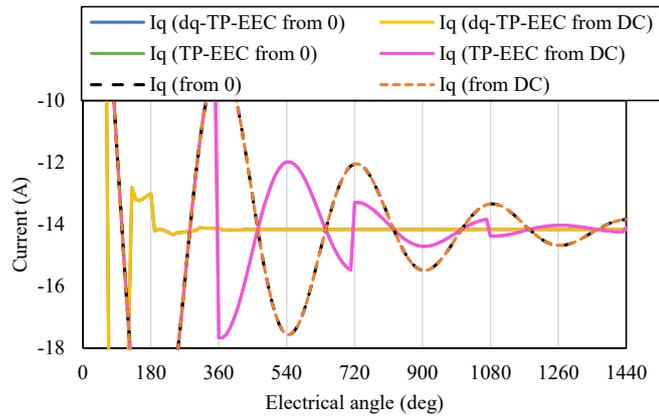
Fig. 3.14. 3-phase independent circuit

3.5.2 簡易リニアモータモデルによる検証解析

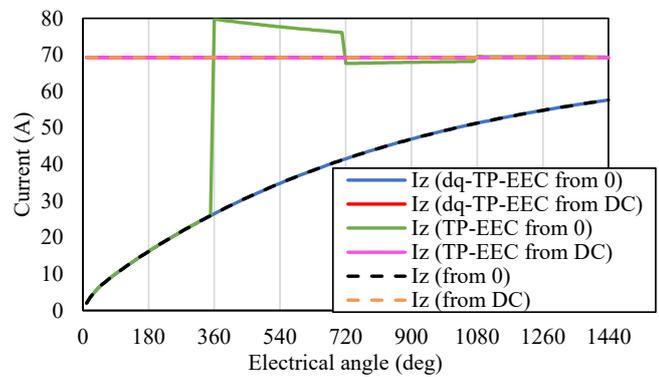
提案手法の有効性を検証するため、直流重畳三相電圧を入力とする図 3.5 の簡易リニアモータ検証モデルを解析する。直流成分は 2V、交流成分の振幅は 4V で、1 周期を 36 時間ステップに分割した。各コイルの抵抗値は 0.05Ω とした。図 3.15 (a), (b), (c) は、初期値をゼロとした場合と、直流電圧で励磁した静磁界解析に基づいて決定した場合の d 軸電流、q 軸電流、z 相電流の時間変化を示している。いずれの場合も過渡計算には、dq-TP-EEC 法または一周期の時間周期条件に基づく通常の TP-EEC 法を適用した。一周期補正の場合、直流重畳の場合でも補正可能である。dq-TP-EEC 法の補正時間区間は一周期の 1/6 とした。z 相電圧 V_z は、 $V_z = (2/\sqrt{3})3V_{dc}$ (3.21) 式を用いて計算した。TP-EEC 法と dq-TP-EEC 法による誤差補正は、どちらも定常解への収束を早めることができることが確認できる。ゼロから始まる過渡解析では、直流成分がその時定数に従って徐々に定常直流値に近づくことが明らかであり、なかなか定常解は得られない。一方、静磁界解析から求めた初期値から dq-TP-EEC 法による誤差補正を行った過渡解析では、より素早く定常解を得ることに成功している。これは、静磁界解析により予め直流成分を初期値として求めておき、dq-TP-EEC 法により交流成分の定常状態への収束を早めるためである。dq-TP-EEC 法では、通常の TP-EEC 法よりも頻繁に誤差補正を行うため、直流成分があらかじめ求められていれば定常解が早く得られることが確認できた。



(a) d-axis currents



(b) q-axis currents



(c) z-phase of the current

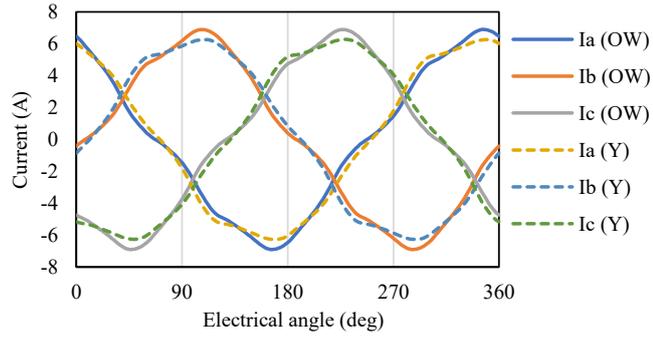
図 3.15 直流重畳三相電圧励磁による d 軸, q 軸, z 相電流の時間変化 (簡易リニアモータモデル)

Fig. 3.15. Variation of the d-, q-axis and z-phase currents by DC superimposed 3-phase voltage excitation (linear motor model).

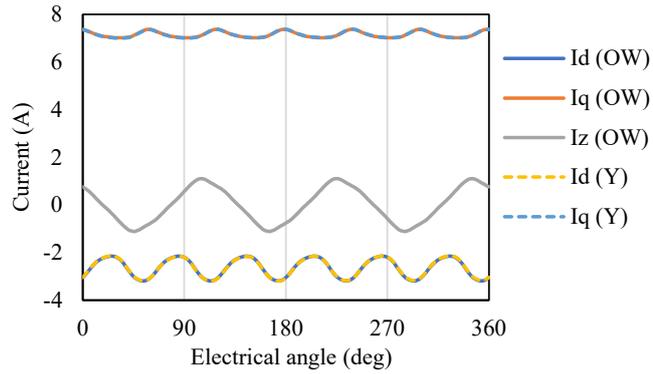
3.5.3 集中巻 IPM モータ (D1 モデル) を用いた検証解析

オープンエンド巻線接続の IPM モータの場合、三次時間高調波成分が z 相電流に重畳されることになる。検証解析モデルとして、図 3.8 に示した“D1 モデル”を用い、オープンエンド巻線のデュアルインバータを想定して解析を実施した。図 3.16 (a)と(b)は、それぞれ三相電流と d 軸, q 軸, z 相電流の時間変化を示している。ここで、OW はオープンエンド巻線 (open winding) , Y は通常の Y 結線の IPMSM の計算結果を表している。OW 接続の三相電流は、z 相電流に三次高調波成分が重畳しているため、わずかに凸状になっている。この凸形状は、ロータ内の永久磁石の起磁力と非線形磁気特性によるものであると考えられる。

次に、三相交流電圧に 1V の直流電圧を重畳して解析を実施した。図 3.17 は、直流電圧で励磁した静磁界解析で求めた初期値を用いてのリスタート解析による、d 軸, q 軸, z 相電流の時間変化である。なお、誤差補正の時間区間は 1/12 周期とした。図から明らかなように、dq-TP-EEC 法は、直流重畳三相電圧で給電される IPM モータにおいても定常解を素早く得ることができることが確認でき、実機相当のモータモデルにおいても補正効果が高いことが示された。



(a) 3-phase currents



(b) d- and q-axis and z-phase currents

図 3.16 三相電圧励磁による d 軸, q 軸, z 相電流の時間変化 (D1 モデル)

Fig. 3.16. Variation of 3-phase currents and d-, q-axis, and z-phase currents by 3-phase voltage excitation (D1 model).

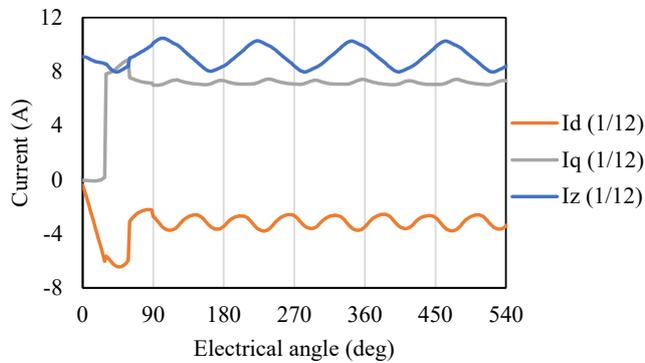


図 3.17 直流重畳三相電圧励磁による d 軸, q 軸, z 相電流の時間変化 (D1 モデル)

Fig. 3.17. Variation of the d-, q-axis, and z-phase currents by DC superimposed 3-phase voltage excitation (D1 model).

3.6 まとめ

本章では、同期機に特化した dq 同期回転座標系で定式化された TP-EEC 法である dq-TP-EEC 法を提案した。簡略化したリニアモータモデルと集中巻と分布巻の IPMSM の解析において、本手法の有効性を実証した。結果は以下のように要約される：

- (1) dq-TP-EEC 法は、dq 同期回転座標における基本成分の時間周期条件に基づいている。定常解に高次の時間高調波成分があまり含まれない場合、dq-TP-EEC 法は過渡解析の収束特性を大幅に改善する。
- (2) 高次の時間高調波成分が小さければ、1 ステップの誤差補正で収束特性を改善できる。高次の時間高調波成分が大きい場合、誤差補正の適切な時間間隔としては、1/6 周期が信頼できる。
- (3) 過渡解析の収束特性をさらに向上させるために、初期の時間ステップに対して、より小さな時間間隔に基づく誤差補正を数回行い、その後に時間間隔に対して 1/6 周期の誤差補正を採用し、定常解が得られるまで過渡計算を実行することで、定常解への収束をより効率的に加速することができる。
- (4) dq-TP-EEC 法は、オープンエンド巻線を持つ PMSM のような直流重畳問題にも適用できる。dq-TP-EEC 法では z 相成分を補正することはできないが、z 成分の直流成分が小さい場合、静磁界解析により求めた初期値から過渡計算を開始して dq-TP-EEC 法を適用することで、オープンエンド巻線を持つ実用的な IPMSM モデルにおいても収束特性を大幅に改善することができることを示した。

参考文献

- [1] S. Yamada, K. Bessho, and J. Lu, “Harmonic balance finite element method applied to nonlinear AC magnetic analysis,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 25, no. 4, pp. 2971–2973, Jul. 1989.
- [2] O. Bíró, G. Koczka, and K. Preis, “Finite element solution of nonlinear eddy current problems with periodic excitation and its industrial applications,” *Appl. Numer. Math.*, vol. 79, pp. 3–17, May 2014
- [3] K. Miyata, “Fast analysis method of time-periodic nonlinear fields,” *J. Math-for-Industry*, vol. 3, no. 7, pp. 131–140, 2011.
- [4] M. J. Gander, Y.-L. Jiang, B. Song, and H. Zhang, “Analysis of two parareal algorithms for time-periodic problems,” *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 35, no. 5, pp. A2393–A2415, 2013.
- [5] D. Bast, I. Kulchytska-Ruchka, S. Schöps, and O. Rain, “Accelerated Steady-State Torque Computation for Induction Machines Using Parallel-In-Time Algorithms,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 56, no. 2, 8100209, Feb. 2020.
- [6] S. Schöps, I. Niyonzima and M. Clemens, "Parallel-In-Time Simulation of Eddy Current Problems Using Parareal," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 54, no. 3, pp. 1-4, March 2018, Art no. 7200604, doi: 10.1109/TMAG.2017.2763090.
- [7] Y. Takahashi, T. Tokumasu, A. Kameari, H. Kaimori, M. Fujita, T. Iwashita, and S. Wakao, “Convergence acceleration of time-periodic electromagnetic field analysis by singularity decomposition-explicit error correction method,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 2947–2950, Aug. 2010.
- [8] Y. Takahashi, H. Kaimori, A. Kameari, T. Tokumasu, M. Fujita, S. Wakao, T. Iwashita, K. Fujiwara, and Y. Ishihara, “Convergence acceleration in steady state analysis of synchronous machines using time-periodic explicit error correction method,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 5, pp. 1422–1425, May 2011.
- [9] Y. Takahashi, T. Tokumasu, M. Fujita, S. Wakao, K. Fujiwara, and Y. Ishihara, “Comparison Between Fast Steady-State Analysis Methods for Time-Periodic Nonlinear Magnetic Field Problems,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, no. 2, pp. 235–238, Feb. 2012.
- [10] Y. Takahashi, K. Fujiwara, T. Iwashita and H. Nakashima, "Parallel Finite-Element Method Based on Space–Time Domain Decomposition for Magnetic Field Analysis of Electric Machines," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 55, no. 6, pp. 1-4, June 2019, Art no. 7000404, doi: 10.1109/TMAG.2019.2895590.
- [11] Y. Takahashi, K. Fujiwara, T. Iwashita and H. Nakashima, "Comparison of Parallel-in-Space-and-Time Finite-Element Methods for Magnetic Field Analysis of Electric Machines," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 57, no. 6, pp. 1-4, June 2021, Art no. 7401604, doi: 10.1109/TMAG.2021.3064320.
- [12] H. Kaimori, Y. Takahashi, S. Wakao, “Steady-State Analysis of Electric Machines Using the TP-EEC Method Based on Time-Periodic Conditions in a Rotational Reference Frame,” *IEEJ*

Journal of Industry Applications, Volume 11 Issue 3 Pages 458-466, 2022
<http://dx.doi.org/10.1541/ieejia.21008445>.

- [13] 回転機の三次元電磁界解析実用化技術調査専門委員会：「回転機の三次元電磁界解析実用化技術」，電学技報，第 1296 号 (2013)
- [14] 電磁界解析による回転機の実用的性能評価技術調査専門委員会：「電磁界解析による回転機の実用的性能評価技術」，電学技報，第 1244 号 (2012)
- [15] J. Loncarski, M. Leijon, M. Srdovic, C. Rossi, and G. Grandi, “Comparison of Output Current Ripple in Single and Dual Three-Phase Inverters for Electric Vehicle Motor Drives,” *Energies*, 8, pp. 3832-3848, 2015.
- [16] H. Kaimori, Y. Takahashi, “Steady-state Analysis of Electric Machines Using TP-EEC Method Based on Time-Periodic Condition in Rotational Reference Frame,” *2020 IEEE 19th Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, ID:567, Nov. 2020

第 4 章 パワーエレクトロニクス素子への新しい 電磁界解析手法

4.1 寄生容量・寄生インダクタンス・表皮効果を考慮した 電磁界解析の必要性

近年、SiC や GaN 等のスイッチング損失の低いパワー半導体エレクトロニクスを用いることで、インバータのスイッチング周波数を高くしてスイッチング損失およびスイッチングに伴う高周波リップルを低減し、PM モータの銅損や鉄損を減らすことが主流となりつつある。それに伴い、エネルギー変換システム全体の高周波設計の高度化が検討されている。インダクタやトランス、コンデンサ等はパワーエレクトロニクスにおいてフィルタとしても使用されるため、インバータキャリア周波数や駆動周波数の高周波化により、これまで重要視されていなかったインダクタにおける寄生容量、コンデンサにおける寄生インダクタンスの影響が出現することが懸念され、その影響が顕著な場合があることが測定結果より指摘されている。具体的には高周波による導体内部の表皮効果による等価抵抗の増加、特に平角コイルを用いる場合はその影響が大きくなることや、近接導体間の磁界による結合（寄生インダクタンス）、近接導体間の電位差による結合（浮遊容量、寄生容量）等がある。これらの影響は測定により把握することは可能だと思われるが、その対策には試作レスである電磁界解析を使用するのが MBD の観点からも望ましい。そのため、導体内の渦電流分布を考慮し、寄生インダクタンスと寄生容量の両方を考慮した電磁界解析が要望されている。しかしながら、周波数領域では電磁波解析（Full wave 解析）を実行することで周波数特性を把握することは現状可能であるが、磁気コアの磁気非線形性やヒステリシスを考慮することは一般的に難しい。また、図 4.1 に示すような台形波電圧の高周波スイッチングでは直流電圧と高次高調波成分の両方を含むことにより、幅広い周波数を含むこと、そして電流の振動（ダンピングやリングングと呼ばれる）が発生することが知られている。しかし、これは過渡現象であるため、どの周波数からどの程度リングング電流が発生するのかを周波数特性から予測する方法は未だ明らかにされていない。電磁波の時間領域解析手法として FDTD 法があるが、スタッガード格子メッシュを使用するため部材境界を適切に与えることが難しいこと、導体内部の渦電流を評価が難しいため、リングング現象を対象とした研究も見当たらない。有限要素法ベースの時間領域の電磁波解析は非常に困難であることが知られている。なぜなら支配方程式が波動方程式であることから二階の時間微分項を含むため、その時間差分として Newmark β 法などが適用されるが、二階微分特有の不安定性に加え、波長とメッシュサイズの間関係を満たす必要があると報告されている。また、電磁波解析で主流となっている電界ベクトルを未知数とする E 法では、低周波において周波数領域の解析でも正しい解が得られないことが

報告され、低周波不安定性 (low frequency instability) として知られている[1],[2]。そのため、 E 法を対象として様々なアプローチで低周波安定性 (low frequency stable) を得る方法が検討されている。低周波安定性が必要となる理由として、図 4.1 に示したように実際の高周波スイッチングでは直流に近い極低周波 ($\omega \rightarrow 0$) から MHz となる高周波までの幅広い周波数領域で解析が必要となるためである。

これらの問題を解決するアプローチとして、近年 Darwin 近似 (Darwin model) に注目が集まっている。Darwin model とは、元々は文献[3]などで提案された手法で、電磁ポテンシャル (A - ϕ 法) で表した Maxwell 方程式中の磁気ベクトルポテンシャル A の二階の時間微分項を無視するものである。すなわち、磁界変動による磁界 (radiation effect) を無視するが、クーロン電場を考慮するというものである。もし一階の時間微分項だけで表現することが可能であれば、二階の時間微分項による不安定性が解消できることが期待される。これまでいくつかの方法が提案されているものの、単純に磁気ベクトルポテンシャルの二階の時間微分項を無視した定式化そのままでは解けない課題がある。

Darwin model の対象は準静電磁界 (Electromagnetic-quasistatic: EMQS) と呼ばれ、準静電界 (Electro-quasistatic: EQS) と準静磁界 (Magneto-quasistatic: MQS) の仮定では対応できなかった周波数領域で発生する物理現象を考慮すること、電磁波解析 (full wave) で対応が難しい非線形磁化特性の考慮と時間領域解析を実行することが必要となる。これが実現されれば、例えば磁性コアを持つインダクタやトランスで、スイッチングによる台形波電圧印加に対し、リングング電流やそれによる磁気非線形性の影響などを解析にて算出可能となり、試作レスでの設計への有益なフィードバックができるようになることが期待されている。

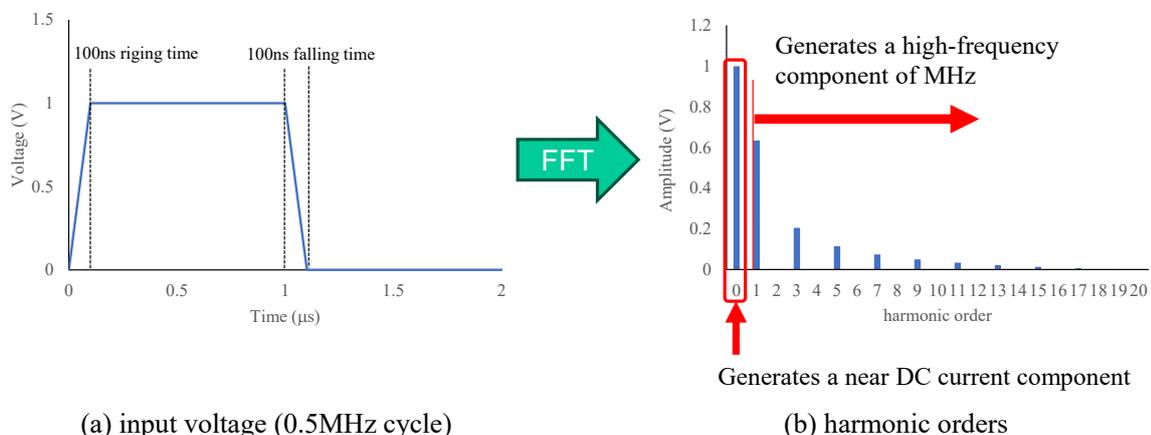


図 4.1 台形波電圧の高周波スイッチング例
Fig. 4.1. Example of high frequency switching of trapezoidal wave voltage.

4.2 従来の解析手法

高周波領域およびDarwin近似の時間領域解析について、これまで報告されている方法について概要を説明する。

高周波領域では大きく二つの手法がある。ひとつは***E***法や***H***法と呼ばれる電界***E***もしくは磁界***H***のみを未知変数として有限要素の辺に割り当て波動方程式を解く方法[1],[2]で、***A***法と等価である。文献を調査すると、歴史的に***E***法で解かれることが多く、***A***法や***A-φ***法を用いた論文は少ないようである。高周波電磁界解析の研究段階においては、節点要素でのスプリアス解が問題となっており、ゲージを課す方法やラグランジュの未定定数法を導入して解く方法などが検討されていた。その後、辺要素を用いることで安定して解けることが示されたが、ほぼ同時期に高周波解析ではゲージも必要なく安定して解ける***E***法の研究が進んでいたようである。***A***法の研究もされたようであるが、ゲージを課さなければ解けないと考えられていたため、高周波領域では研究はあまり進まなかったようである。その後、高周波解析手法を使用して導体を含んだ系（低周波では電磁波にならないため導体を含まない系（loss less）は計算対象とならなかった）で低周波から高周波まで適用する研究が進んだ際に、***E***法の低周波領域での不安定化が指摘された[1]。これは大きな問題として捉えられ、対処法について様々な研究が行われている。なお、***A***法の高周波解析でも***E***法と同様に低周波領域での不安定性が現れることを確認している。これはMQSの***A***法においても同様で、導電率を非常に小さくする、もしくは周波数を非常に低くすると、たとえ収束解が得られたとしても正しい解ではないことが知られている。この問題に対し、周波数領域ではあるが、***A-φ***法であれば安定して解けることを確認している。***A-φ***法と同様に***φ***も未知数として追加する***E-φ***法を用いると安定して解けるという報告もある[5]。なお、方程式は等価であるが、厳密には***E***法はゲージを課す必要がなく***φ***は補助変数、***A-φ***法はゲージ不定で***φ***は補助変数である。

もう一つはFDTD法と同様に***E***と***B***の両方を未知数とし、leap-frog法により交互に電界と磁界を解く方法（finite element time domain: FETD）[4]である。時間領域の波動方程式における時間刻み幅の決定法は、特に陽解法、陰解法ともによく知られているクーラン条件を満たさないと計算結果が正しくなかったり、時間ステップが進むと解が発散してしまったりすることが知られている。陽解法を用いるFETD法では非構造格子で様々なサイズのメッシュを作成することが可能であるが、直交格子を採用するFDTD法と異なり適切な時間刻み幅を概算することが難しく、正しく計算できる時間刻み幅を決定するには、例えば係数行列の固有値を計算し、それを基に決定する高コストな方法や、時間と空間で評価関数を用いて安定して解ける時間刻みであるかを判断する方法などが知られている[2],[4]。

A-φ法によるFull wave電磁界解析の定式化について、補助関数を用いた定式化が報告されている。例えば、Hiptmairら[6]がFull wave電磁界解析に対してクーロンゲージ条件を課した

周波数領域の定式化による数値計算例を示しており、低い周波数だと悪条件 (ill-conditioned) により電界が正しく計算できないため、安定化 (stationary limit) において補助スカラー変数 (extra electric scalar potential) を非導体領域に導入することを提案している。また Jochum ら [7] はゲージ関数を導入し、Full wave 電磁界解析の定式化を行っている。時間領域解析に関しては、Ostrowski and Hiptmair [15] による文献 [6] の方法では二階の時間微分項が含まれ、一般的な中心差分を用いて電磁波にならない時間領域 (slow process) で計算例が示されているが、本研究で対象とするパワーエレクトロニクス機器へ適用可能かは不明である (周波数領域において Full wave A - ϕ 法と比較して異なる解が得られることを確認している)。これらのアプローチは、周波数領域では Full wave A - ϕ 法を用いればゲージ不定で低周波でも安定して解けることを確認しているため、実用性は低いと思われるが、従来検討されていた tree-cotree ケージなどと異なる方法で A - ϕ 法にゲージを課す方法が提案されたため、ゲージ不定では解くことのできない Darwin model への研究に応用されたと言える。

準静電磁界 (EMQS) , すなわち Darwin model の定式化は Larsson [3] などが理論的な検討として、 A - ϕ 法で準静電界 (EQS), 準静磁界 (MQS), そして Darwin model (その後一般的に準静電磁界 (EMQS) と呼ばれる) の定式化について示している。電磁界解析への適用は、Larsson に近い Darwin model そのままの定式化を用いて Koch ら [13] が反復法による数値計算例を示しているが、当該の定式化では解けないため、導体および誘電体領域の係数行列に discrete gradient operator を乗じ、非導体領域に nonphysical artificial conductivity を与えて周波数領域で解いている。Zhao らのグループは複数の論文 [10],[11] で Darwin model と Full wave の両者の定式化と数値計算例を示している。まず論文 [10] では Koch らと同じく Darwin model そのままの定式化を用いて反復法の数値計算例としてインダクタを 5kHz で、キャパシタを 10kHz で計算した事例を示しており、一見解けているように見えるが、その後の論文 [11] では論文 [10] の方法は非常に収束が悪いとしており、Hiptmair らの方法を拡張し、ラグランジュの未定定数とクーロンゲージ条件を課した定式化を行うことで、行列方程式を対称化して収束性を改善できると提案している。本論文の 4.3 節で示す提案法と似た形式となっているが、補助変数は Darwin のアンペールの式のみを追加され、すべて一階の時間微分で表すことができているが、後ほど示すように時間領域解析は工夫が必要なようである。同様の定式化を Taha ら [12] も踏襲し、検討を行っている。全く異なる方法として、Badics and Pavo ら [14] は節点電荷を用いて Darwin 近似による定式化を提案しており、周波数領域において直接法では tree-cotree gauging を用いて、反復法ではそのまま解けることを示している。これらの方法は、Koch らの方法を除き補助変数を導入する方法であるため未知変数が増加してしまう。さらにクーロンゲージ条件を課す意味についてはあまり考察されておらず、数学的に解きにくい問題を解ける形に変換するために導入されているように思われるが、その根拠もはっきり

と説明されていない。Koch らの方法も nonphysical artificial conductivity を非導体領域に与えないと解けなく、Full wave A - ϕ 法と比較して異なる解が得られることを確認している。

時間領域解析に関しては、Zhao らのグループの論文[11]では周波数領域と時間領域の定式化が提案されているが、この方法でも本来は二階の時間微分項が出てくるところを一階の時間微分として定式化しているため、Rosenbrock scheme を適用しているが、パラメータの選定が難しく汎用性に乏しい。実際に試してみたが、モデルや条件により Rosenbrock parameter は変わるため汎用的に適用できない。別の手法として、Clemens ら[16]が2ステップ法を提案している。最初のステップとして Darwin 近似の電流の連続の式を電気スカラーポテンシャルのみの式で解き、得られた電気スカラーポテンシャルを入力（右辺項）として次のステップとして Darwin 近似のアンペールの式を解くというものである（繰り返し計算は行わない）。独立に方程式を解くため対称な行列方程式が得られ、計算コストも少なく済むのが特長である。安定化（stationary limit）には Koch ら[13]の非導体領域に nonphysical artificial conductivity を与えて解いている。しかしながら、Koch らの方法と同じ問題を抱えており、磁界による渦電流の影響が小さい周波数領域では正しい結果が得られるが、周波数が高くなると異なる結果が得られることを確認している。これは準静電界を最初に解き、その電流分布と電界分布による磁界を計算しているため、磁界変動による渦電流を適切に考慮できていないためだと考えている。

以上を整理すると、表 4.1 のように分類できる。

表 4.1 従来の EMQS, full wave 電磁界解析の手法の分類（有限要素法）

Table 4.1. Classification of conventional EMQS, full wave electromagnetic field analysis methods (finite element method)

手法	Full wave			EMQS
	FETD	E 法	A - ϕ 法	A - ϕ 法
低周波安定化	× ^{*1}	$\Delta(E$ - ϕ 法) ^{*2}	○ ^{*2}	× ^{*3}
ゲージ	×	×	Δ ^{*4}	Δ ^{*4}
補助変数	×	$\Delta(E$ - ϕ 法)	Δ ^{*5}	Δ ^{*5}
周波数領域	×	○	○	○
時間領域	○	×	×	× ^{*6}

*1 FETD は leap-flog 法で解くが時間刻みの決め方に問題があること、低周波で不安定となる

*2 E 法, A 法では低周波で不安定となるが、 ϕ を導入することで安定して解ける

*3 Darwin model は不安定なので、何かしらの対処が必要

*4 ゲージを課す方法としていくつか提案されている

- *5 補助変数（スカラーポテンシャル）やゲージタイプ関数を導入したり，非導体領域に `nonphysical artificial conductivity` を与えたりする方法が提案されている
- *6 実用性に乏しかったり，検証が不十分であったりするため

4.3 低周波安定化 Darwin model の開発

4.3.1 Darwin model の問題点

Darwin model の研究の一番の目的は，導体を含み（損失あり：lossy），電磁波とならない領域で変位電流を考慮した定式化として，二階の時間微分項を省略（Darwin 近似）した定式化ができるか，ということである。すなわち，磁界変動による誘導電界（radiation effect）を無視するが，クーロン電場を考慮するというものである（当然ながら電磁波を対象としない）[16]。本項では，Lasson[3]などによって理論的に提案された定式化を数値解析にそのまま適用するのは困難であることを説明する。

2.2 節で説明した， \mathbf{A} - ϕ 法での準静磁界解析と電磁波の方程式を再掲する。

< 準静磁界：MQS >

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) = \mathbf{J}_s \quad (2.11)$$

$$-\nabla \cdot \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) = 0 \quad (2.12)$$

< 電磁波：HF >

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + \partial_t \varepsilon (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) + \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) = \mathbf{J}_s \quad (2.19)$$

$$-\nabla \cdot \{ \partial_t \varepsilon (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) + \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) \} = 0 \quad (2.20)$$

第一式(2.11)と(2.19)式がアンペール・マクスウェルの式，第二式(2.12)と(2.20)式が電流の連続の式である。これらは不定な方程式であるが，ICCG 法などの反復法を用いると正しい解が得られることが広く知られている。

Darwin model の方程式の導出について説明する。2.2.4 節では，電磁波の式から磁気ベクトルポテンシャルの二階の時間微分項を省略したのものであると説明した。すなわち，Darwin 近似の方程式は，(2.21)，(2.22)式となる。方程式を再掲する。

< 準静電磁界：Darwin model (EMQS) >

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + \partial_t \varepsilon \nabla \phi + \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) = \mathbf{J}_s \quad (2.21)$$

$$-\nabla \cdot \{ \partial_t \varepsilon \nabla \phi + \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) \} = 0 \quad (2.22)$$

第一式(2.21)式が Darwin 近似のアンペール・マクスウェルの式，第二式(2.22)式が Darwin 近似の電流の連続の式と呼ばれている。これらの方程式も不定である。なお，上記方程式は極低周波 ($\omega \rightarrow 0$) は計算可能であるが，誘電率の項に時間微分項が含まれるため，直流 ($\omega = 0$) は計算できないが，図 4.1 で示した台形波電圧の高周波スイッチングは解析可能である。

しかしながら，Darwin 近似の(2.21), (2.22)式を，準静磁界の(2.11)と(2.12)式や，電磁波の(2.19)と(2.20)式と同様の手順を用いて有限要素法で離散化しても得られる解が正しくないことを確認している。その原因として，(2.22)式の Darwin 近似の電流の連続の式に問題があると考えられる。(2.21)式の発散をとると(2.22)式に一致することは準静磁界や電磁波解析と一見同じであるが，(2.22)式を部分的に解釈すると，準静磁界の電流の連続の式(2.12)式と，準静電界の式(2.16)式（以下に再掲）の両方が含まれているように見える。

$$-\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi + \partial_t \epsilon \nabla \phi) = 0 \quad (2.16)$$

導電率と誘電率に関する項は電気スカラーポテンシャル ϕ についてのみ含まれており，誘電率に関する磁気ベクトルポテンシャル A の項は含まれていない。この近似は電流の連続の式では成り立たず，極めて解きにくい方程式，すなわち悪条件（ill-conditioned）となっていると考えられる。

それを裏付けるように，先行研究において Koch ら[13]は(2.21), (2.22)式を解く際に，非導体領域に nonphysical artificial conductivity として小さな導電率（論文では 5 S/m）を与えて，非導体領域も導体領域の磁気ベクトルポテンシャル A の項を含むようにして反復法で解いている（ただし，収束解は得られるが正しい解ではないことを確認している）。Zhao ら[10]も同様に(2.21), (2.22)式を Gauss-Seidel smoother と Generalized Minimal RESidual method を用いて解いていると説明されているが，筆者が ICCG 法で試した場合は非常に収束が遅く，10 要素程度の非常に小さなモデルでは何とか収束したが，正しい解は得られなかったことを確認している。Zhao らはその後の論文[11]で(2.21), (2.22)式を解く場合は非常に収束が遅いと説明し，クーロンタイプゲージを課す方法に切り替えている。また，Taha ら[12]は Koch ら[13]と同じ定式を用い，非対称行列のまま BiCGSTAB と Split-Jacobi preconditioner を用いて解いていると説明がある。

4.3.2 クーロンタイプゲージを用いた提案法による低周波安定化

前項にて Darwin 近似の電流の連続の式(2.22)式に問題があることを説明した。本項では，安定的に正しく解を求められる方程式を検討する[9],[18],[23]。ヘルムホルツの定理によれば，ベクトル場は横方向成分（transverse component）と縦方向成分（longitudinal components）に分解できる。この定理を A - ϕ 法の定式化の電界 E に適用すると，横方向成分 $E_T = -\partial_t A$ を誘導電界，縦方向成分 $E_L = -\nabla \phi$ をクーロン電界として表すことができる。これらを用いた電束密度 D と渦電流 J_e は Darwin 近似の場合，

$$D = \epsilon E_L = -\epsilon \nabla \phi \quad (4.1)$$

$$\mathbf{J}_e = \sigma(\mathbf{E}_T + \mathbf{E}_L) = -\sigma(\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) \quad (4.2)$$

と定義している。これらを用いて方程式を導出すると、(2.21),(2.22)式と一致する。しかしながら電束密度の式には横方向成分（発散がゼロ）がないため解に一意性がなく、これが原因で正しい解が得られないと考えられる。

そこで解に一意性を持たせるために、電流の連続の式(2.5a)式（以下に再掲）中の電束密度 \mathbf{D} の項に着目する。

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}_e + \partial_t \mathbf{D}) = 0 \quad (2.5a)$$

電束密度の時間微分 $\partial_t \mathbf{D}$ の電磁波方程式の定義は次式である。

$$\partial_t \mathbf{D} = \partial_t \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon \partial_t^2 \mathbf{A} - \varepsilon \partial_t \nabla \phi \quad (4.3)$$

Darwin 近似でのそれは、(4.1)式を時間微分したものである。(4.3)式と(4.1)式を時間微分した式を比較すると、(4.3)式は横方向成分（発散がゼロ）と縦方向成分（回転がゼロ）の自由度を持つものに対して、Darwin 近似の(4.1)式は縦方向成分の自由度しか持たない。両者を一致させるためには、両者の発散が等しくなるとすればよいと考えられる。

$$\nabla \cdot (-\varepsilon \partial_t^2 \mathbf{A} - \varepsilon \partial_t \nabla \phi) = -\nabla \cdot \varepsilon \partial_t \nabla \phi \quad (4.4)$$

両者が等しくなるには、左辺第一項である磁気ベクトルポテンシャルの二階の時間微分がゼロとなる必要がある。

$$\nabla \cdot \varepsilon \partial_t^2 \mathbf{A} = 0 \quad (4.5)$$

上式は一般的なクーロンゲージ ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) の一種と考えられ、本研究ではこれをクーロンタイプゲージと称し、採用する。このクーロンタイプゲージを課すと電磁波の電流の式と等価とすることができるが、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ とする条件であること、Darwin 近似のアンペールの式には磁気ベクトルポテンシャルの二階の時間微分項が含まれないことから、Darwin 近似での電界は静電界近似されたものであり、電界は時間遅れなく瞬時に全領域に伝わるという近似をしていることになる。磁界に関しても同様である。以下に提案する改良されたクーロンタイプゲージを課した Darwin 近似の方程式をまとめて示す。

< 準静電磁界：改良版 Darwin model >

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + \partial_t \varepsilon \nabla \phi + \sigma(\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) = \mathbf{J}_s \quad (2.21)$$

$$-\nabla \cdot \{\partial_t \varepsilon \nabla \phi + \sigma(\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi)\} = 0 \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon \partial_t^2 \mathbf{A} = 0 \quad (4.5)$$

なお、境界条件は従来の準静電界解析と準静磁界解析の両方を与える形式となる。

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \\ \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

次に提案法の有限要素法による離散化方程式について説明する。

(2.21), (2.22)および(4.5)式にガラーキン法を適用し離散化する。導電率を含む項は導体領域のみ、全空間の磁界と電界を対象とするため、磁気抵抗率と誘電率を含む項は全領域で定義される。

$$\int_{\Omega} N \{ \nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A}' + \varepsilon (\partial_t \nabla \phi) - \mathbf{J}_s \} dV + \int_{\Omega_c} N \{ \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) \} dV = 0 \quad (4.7)$$

$$\int_{\Omega} W \{ \nabla \cdot \varepsilon (\partial_t \nabla \phi) \} dV + \int_{\Omega_c} W \{ \nabla \cdot \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \phi) \} dV = 0 \quad (4.8)$$

$$\int_{\Omega} W \{ \nabla \cdot \varepsilon (\partial_t^2 \mathbf{A}) \} dV = 0 \quad (4.9)$$

ここで、クーロンタイプゲージ(4.9)式は、その導出過程より Darwin の電流の連続の式(4.8)式とともに解かれる。

磁気ベクトルポテンシャル \mathbf{A} を辺要素、電気スカラーポテンシャル ϕ を節点要素として表現し、それぞれ辺形状関数と節点形状関数で展開する。ここで、 \mathbf{A} , ϕ は全領域で定義される。行列方程式として表すと、次式となる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee}^v + \partial_t \mathbf{C}_{ee}^\sigma & \mathbf{C}_{en}^\sigma + \partial_t \mathbf{C}_{en}^\varepsilon \\ \partial_t \mathbf{C}_{ne}^\sigma + \partial_t^2 \mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & \mathbf{C}_{nn}^\sigma + \partial_t \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

(4.10)式は対称行列ではないことに留意願いたい。

周波数領域は、 $\partial_t = j\omega$ と置き換えることで得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee}^v + j\omega \mathbf{C}_{ee}^\sigma & \mathbf{C}_{en}^\sigma + j\omega \mathbf{C}_{en}^\varepsilon \\ j\omega \mathbf{C}_{ne}^\sigma + (j\omega)^2 \mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & \mathbf{C}_{nn}^\sigma + j\omega \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

非対称行列のままでも非対称行列ソルバー、例えば BiCGSTABS 法などにより解くことが可能であるが、計算コスト削減のため対称化を行う。準静磁界解析でもよく用いられる一般的な対称化方法として、行列第二式に $1/j\omega$ を乗じると対称行列とすることができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee}^v + j\omega \mathbf{C}_{ee}^\sigma & \mathbf{C}_{en}^\sigma + j\omega \mathbf{C}_{en}^\varepsilon \\ \mathbf{C}_{ne}^\sigma + j\omega \mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & \frac{1}{j\omega} \mathbf{C}_{nn}^\sigma + \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

これにより複素対称行列ソルバー、例えば IC-COCG 法などで解くことができる。

時間領域の場合，(4.10)式に θ 法を適用して表すと，

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \theta \mathbf{K}_{ee}^v + \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{ee}^\sigma & \mathbf{C}_{en}^\sigma + \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{en}^\varepsilon \\ \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{ne}^\sigma + \frac{1}{\delta t^2} \mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & \mathbf{C}_{nn}^\sigma + \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e^k \\ \phi_n^k \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -(1-\theta) \mathbf{K}_{ee}^v + \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{ee}^\sigma & \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{en}^\varepsilon \\ \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{ne}^\sigma + \frac{2}{\delta t^2} \mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e^{k-1} \\ \phi_n^{k-1} \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\delta t^2} \mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e^{k-2} \\ \phi_n^{k-2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \theta F_e^k + (1-\theta) F_e^{k-1} \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

となる。ここで時間微分の差分近似は，一般的な後退差分および中央差分近似を用いている。なお， $\theta=1$ とすると後退差分になる。二階の時間差分近似を含む波動方程式となるのは行列第二式の連続の式であり，行列第一式は一階の差分近似となるのが特徴である。

行列第二式に δt を乗算すると対称化できる。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \theta \mathbf{K}_{ee}^v + \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{ee}^\sigma & \mathbf{C}_{en}^\sigma + \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{en}^\varepsilon \\ \mathbf{C}_{ne}^\sigma + \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & \delta t \mathbf{C}_{nn}^\sigma + \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e^k \\ \phi_n^k \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -(1-\theta) \mathbf{K}_{ee}^v + \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{ee}^\sigma & \frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{en}^\varepsilon \\ \mathbf{C}_{ne}^\sigma + \frac{2}{\delta t} \mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e^{k-1} \\ \phi_n^{k-1} \end{Bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\delta t} \mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e^{k-2} \\ \phi_n^{k-2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \theta F_e^k + (1-\theta) F_e^{k-1} \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

一階の時間微分の後退差分近似は常に安定であり，計算途中で解が発散することはなく，時間刻み幅を大きくできることがよく知られている。一方，二階の時間微分の差分近似である中央差分近似は後退差分のような安定性はなく，メッシュサイズと対象最大周波数に依存した条件付き安定性であると言われている[2],[4]。 \mathbf{E} 法で高周波時間領域解析を行う場合， \mathbf{E} を未知数とした波動方程式として表現されるため，二階の時間微分の差分近似が条件付き安定性を満たしているかの判断をする必要がある[2],[4]が，本定式化は一階微分と二階微分のハイブリッドであること，定式化として電磁波を考慮できない（対象としていない）ことから，電磁波を無視できる高周波領域においても安定して計算できる可能性があると考えられる。

4.3.3 冗長変数も加えた提案法による収束特性の改善

(4.12), (4.14)式により低周波安定化を実現したが, 反復法を用いると低周波は問題なく解けて解も一致するが, 高周波領域での収束特性の悪化が確認された。またクーロンタイプゲージを課しているため直接法で解くことも可能であり幅広い領域で正しい解が得られるが, 反復法に比べ計算コスト (使用メモリと計算時間) は非常に高く, 実用性の面で未だ課題が残っている。反復法において高周波領域で収束が悪化する要因としては, (4.12), (4.14)式が数値解析的に悪条件 (ill-conditioned) であるためだと考えられる。そこで, 次式に示すゲージ関数に似たスカラー冗長変数 χ を導入することで, (4.12), (4.14)式の定式化において, 反復法で不安定となる高周波領域, 直接法での低周波領域の数値解析的な安定性を得ることができる [9],[18]。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla X, \quad \phi = \phi' - \chi \quad (4.16)$$

ここで, $X = \int \chi dt$, 周波数領域の場合 $(j\omega)^{-1}$ である。 χ は ϕ と同じく全節点領域に定義される。

これらを(2.21), (2.22)および(4.5)式に代入すると, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N \{ \nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A}' + \varepsilon \partial_t \nabla (\phi' - \chi) - \mathbf{J}_s \} dV \\ + \int_{\Omega_c} N \{ \sigma (\partial_t \mathbf{A}' + \nabla \phi') \} dV = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\int_{\Omega} W \{ \nabla \cdot \varepsilon \partial_t \nabla (\phi' - \chi) \} dV + \int_{\Omega_c} W \{ \nabla \cdot \sigma (\partial_t \mathbf{A}' + \nabla \phi') \} dV = 0 \quad (4.18)$$

$$\int_{\Omega} W \{ \nabla \cdot \varepsilon (\partial_t^2 \mathbf{A}' + \chi) \} dV = 0 \quad (4.19)$$

(4.17), (4.18), (4.19)式を連立して解く。行列形式で表すと次式となる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee}^v + \partial_t \mathbf{C}_{ee}^\sigma & \mathbf{C}_{en}^\sigma + \partial_t \mathbf{C}_{en}^\varepsilon & -\partial_t \mathbf{C}_{en}^\varepsilon \\ \partial_t \mathbf{C}_{ne}^\sigma & \mathbf{C}_{nn}^\sigma + \partial_t \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon & -\partial_t \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \\ \partial_t^2 \mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & 0 & \partial_t \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_e \\ \phi'_n \\ \chi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

対称化するために行列第三行を第二式に足しこむ (第三式は符号が負になる) ことを行くと, 次式となる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee}^v + \partial_t \mathbf{C}_{ee}^\sigma & \mathbf{C}_{en}^\sigma + \partial_t \mathbf{C}_{en}^\varepsilon & -\partial_t \mathbf{C}_{en}^\varepsilon \\ \partial_t \mathbf{C}_{ne}^\sigma + \partial_t^2 \mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & \mathbf{C}_{nn}^\sigma + \partial_t \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon & 0 \\ -\partial_t^2 \mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & 0 & -\partial_t \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_e \\ \phi'_n \\ \chi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

周波数領域の場合、 $\partial_t = j\omega$ と置き換えることで得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee}^v + j\omega\mathbf{C}_{ee}^\sigma & \mathbf{C}_{en}^\sigma + j\omega\mathbf{C}_{en}^\varepsilon & -j\omega\mathbf{C}_{en}^\varepsilon \\ j\omega\mathbf{C}_{ne}^\sigma + (j\omega)^2\mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & \mathbf{C}_{nn}^\sigma + j\omega\mathbf{C}_{nn}^\varepsilon & 0 \\ -(j\omega)^2\mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & 0 & -j\omega\mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e' \\ \phi_n' \\ \chi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

行列第二式、第三式に $1/j\omega$ を乗じると対称行列とすることができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee}^v + j\omega\mathbf{C}_{ee}^\sigma & \mathbf{C}_{en}^\sigma + j\omega\mathbf{C}_{en}^\varepsilon & -j\omega\mathbf{C}_{en}^\varepsilon \\ \mathbf{C}_{ne}^\sigma + j\omega\mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & \frac{1}{j\omega}\mathbf{C}_{nn}^\sigma + \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon & 0 \\ -j\omega\mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & 0 & -\mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e' \\ \phi_n' \\ \chi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

時間領域の場合、(4.21)式の時間微分項を一階および二階の差分近似と θ 法を用いて表し、対称化のため行列第二式、第三式に δt を乗算すると、次式となる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \theta\mathbf{K}_{ee}^v + \frac{1}{\delta t}\mathbf{C}_{ee}^\sigma & \mathbf{C}_{en}^\sigma + \frac{1}{\delta t}\mathbf{C}_{en}^\varepsilon & -\frac{1}{\delta t}\mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \\ \mathbf{C}_{ne}^\sigma + \frac{1}{\delta t}\mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & \delta t\mathbf{C}_{nn}^\sigma + \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon & 0 \\ -\frac{1}{\delta t}\mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & 0 & -\mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e'^k \\ \phi_n'^k \\ \chi_n^k \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(1-\theta)\mathbf{K}_{ee}^v + \frac{1}{\delta t}\mathbf{C}_{ee}^\sigma & \frac{1}{\delta t}\mathbf{C}_{en}^\varepsilon & -\frac{1}{\delta t}\mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \\ \mathbf{C}_{ne}^\sigma + \frac{2}{\delta t}\mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & \mathbf{C}_{nn}^\varepsilon & 0 \\ -\frac{2}{\delta t}\mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & 0 & -\mathbf{C}_{nn}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e'^{k-1} \\ \phi_n'^{k-1} \\ \chi_n^{k-1} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\delta t}\mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & 0 & 0 \\ \frac{1}{\delta t}\mathbf{C}_{ne}^\varepsilon & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_e'^{k-2} \\ \phi_n'^{k-2} \\ \chi_n^{k-2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \theta F_e^k + (1-\theta)F_e^{k-1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.24) \end{aligned}$$

(4.22)式は(4.12)式に、(4.23)式は(4.13)式に χ に関する項と式が加わった形となる。

非線形磁化特性に関連する行列 \mathbf{K}_{ee}^v に着目すると、(4.13)、(4.23)式ともに一般的な準静磁界解析と同じ表現となっていることから、非線形磁化特性の考慮も準静磁界解析と同様の方法で考慮することが可能であると考えられる。

スカラー冗長変数 χ を導入することで収束改善が成される理由については、次のように考えることができる。準静電界解析 (MQS) や電磁波解析 (high frequency : HF) での導体を含む A 法において極低周波領域や極低抵抗の導電率を使用した場合、収束が悪化したり正し

い解が得られなくなったりすることが知られている。この要因として、電流の連続の式が陰的に考慮されているためだと報告されている[20],[21]。すなわち、 A 法の定式化(2.11)'式の中で電流の連続の式 $\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha}(\partial_t \mathbf{A}) = 0$ は一緒に解かれる、すなわち陰的に満たされるように解かれている。そのため、電流の連続の式を陽的に、すなわち別の方程式として解く A - ϕ 法とすることでより安定して解くことができることが示されている。これと同様に考えると、Darwin modelの冗長変数なしの定式化(2.21), (2.22)式およびクーロンタイプゲージの式(4.5)式は、Darwin近似の電流の連続の式と一緒に解かれることから、陰的に $\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha}(\partial_t^2 \mathbf{A}) = 0$ を満たすように解いている。そのため、より安定して解くためにはクーロンタイプゲージの式を陽的に解くことが考えられ、(4.19)式を加えて冗長変数を導入することでこれを実現している。

磁気ベクトルポテンシャルと電気スカラーポテンシャルの両方に冗長変数を導入する提案手法のように、補助変数を導入する方法はいくつか提案されている。導体内部にスカラーポテンシャルを導入する方法[6]、電界の回転成分に補助変数を導入する方法[7]、磁気ベクトルポテンシャルにゲージ関数を導入する方法[7]などがある。4.3.2項で説明したように、解の一意性を持たせるためにクーロンタイプゲージを課す必要があり、さらに本節で方程式の悪条件を改善するために冗長変数を導入することで、低周波数から高周波まで幅広い周波数に安定的に対応可能な Darwin modelを基礎とした新たな電磁界解析手法を実現できることを示した。数値解析での安定性を得るための冗長変数の与え方は上記したようにいくつか考えられるが、本研究で確認した限りでは本提案法が最も安定している。

4.4 提案手法による検証解析

本提案手法の妥当性の確認として、いくつかのモデル[9],[18]を用いて周波数領域の解析を行い、従来の渦電流解析と Full wave 解析との結果比較を行い、原理検証を実施する。

4.4.1 円柱導体モデル（収束特性検証モデル）

収束特性の検証モデルとして、Hiptmair らが提案した円柱導体モデル[6]を用いる。図 4.2 に解析モデルと境界条件を示す。モデル化領域は 180 度で、半径 0.01m の導体に導電率 $1.e-7$ S/m を与え、比透磁率、比誘電率はすべての領域で 1 とした。節点数は 74,661、要素数は 72,000 である。

まず周波数領域の結果を示す。導体端部に 1V の交流電圧を与え、周波数は 1Hz から 10MHz までとした。図 4.3 に抵抗成分とインダクタンス成分の周波数特性を示す。検証のため、解析解 (analytical) と準静磁界解析 (MQS)、電磁波解析 (HF) の結果も併せて示す。未知変数の個数 (DOF) は、(4.12)式が 275,571 (A は 205,332, ϕ は 70,239)、(4.23)式が 345,810 (χ は 70,239 追加) で、辺と節点の両方に一次要素を使用した。提案手法の結果は、EMQS1 が(4.12)式を用いた結果、EMQS2 が冗長変数を用いる(4.23)式の結果である。なお、EMQS1 は 1MHz 以上で収束がかなり悪化した。周波数が高くなると、抵抗成分が下がり逆にインダクタンス成分が上がる傾向が見て取れる。本モデルはインダクタンス成分が主のモデルであるため、どの計算結果も 10MHz まで解析解と非常に良い一致を示しており、提案手法にて低周波でも安定して解けていることが確認できる。図 4.4 に EMQS1 の計算結果の一例として、1Hz から 10kHz までの電位分布、電界強度分布、磁束密度分布を示す。また、極低周波の結果として 1mHz (0.001Hz) の結果も併せて示す。図 4.3 の周波数特性だと抵抗成分もインダクタンス成分もほぼ一定値であるが、分布としては周波数が高くなると大きく異なっていく様子が見て取れる。

寸法は多少異なるが、EMQS1 による同じ円柱導体モデルの 1MHz 時の行列解法による収束履歴を図 4.5 に示す。前処理はすべて IC 分解を使用し、行列解法として一般的な COCG 法、COCR 法と、安定化を図った QMR-COCG 法と QMR-COCR 法[12]でも計算を行った。COCG 法と COCR 法は反復初期に残差が非常に大きくなるが、その後減少していく。COCG 法は $1.e-5$ 程度で再び大きくなり発散するのに対し、COCR 法は $1.e-7$ 近くまで収束し、その後、振動して収束判定値まで収束する。QMR-COCG 法と QMR-COCR 法は、コストはほぼ COCG 法や COCR 法と同じで残差がそれほど大きく振動しないという特徴がある[19]。QMR-COCG 法では、反復初期は残差が COCG 法まで大きくはならなく収束していくが、COCG 法と同程度の残差で急激に収束が悪くなってしまう。一方、QMR-COCR 法は同じような振る舞いで

あるが、 $1.e-6$ くらいから判定値まで緩やかに収束していく。以上の結果より、周波数領域では COCR 法系の方が COCG 法系よりも収束解を得ることができ、QMR-COCR 法は残差が大きく振動することなく安定して解けると言える。この傾向は時間領域解析でも同じであると思われ、提案手法による解析で、ICCG 法で発散してしまう問題でも ICCR 法を使用すれば収束に時間がかかるが発散することなく収束解を得ることができることを確認した。なお、図 4.2 の円柱導体モデルでも同様で、MQS, EMQS2, HF すべての方法で、10MHz になると IC-COCG 法では途中で発散してしまうが、IC-COCR 法だと速やかに収束解を得られることを確認している。ただし、EMQS1 は 10MHz ではかなりの反復回数を要しても残差が減らないため、結果を示していない。

次に、(4.14)式を ICCR 法により解いた時間領域の結果を周波数領域の結果と比較して図 4.6 に示す。周波数領域 (frequency-domain: FD) と時間領域 (time-domain: TD) の相対誤差は 1Hz 時において振幅で 0.1%以下、電気角で 2.6%であった。これより提案した時間領域定式化が適切に計算できることが確認された。第 1 ステップ計算における(4.14)式と(4.24)式の収束特性を比較すると、1kHz では ICCR の繰り返し回数は 315 回と 358 回となり、ほぼ同じである。これに対し、1MHz では 4,180 回と 254 回となり、16 倍以上の回数が必要であった。周波数が大幅に高くなると、収束特性はさらに悪化する。このことから、(4.24)式 (言うまでもなく、(4.14)式と(4.24)式の結果は一致する) を用いると、高周波領域での収束特性が改善されることが確認できる。計算時間は、1kHz で 80 ステップ (2 サイクル) , (4.14)式が 28 分、(4.24)式が 46 分であった。

提案手法はクーロンタイプゲージを課しているため、直接法を用いて計算することが可能であることを示すために、Intel Math Kernel Library の PARDISO を用いて計算を実行した。モデルは図 4.5 で使用した円柱モデルを用いた。表 4.2 にインダクタンス成分を反復法で得られた結果と比較して示す。非常によく一致していることが確認できる。

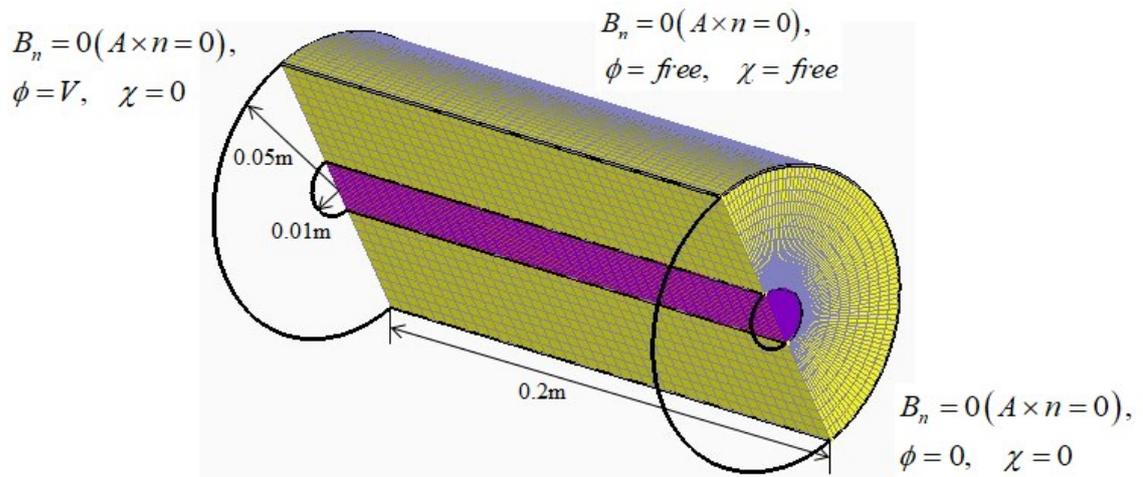


図 4.2 円柱導体モデル
 Fig. 4.2. Cylindrical conductor model.

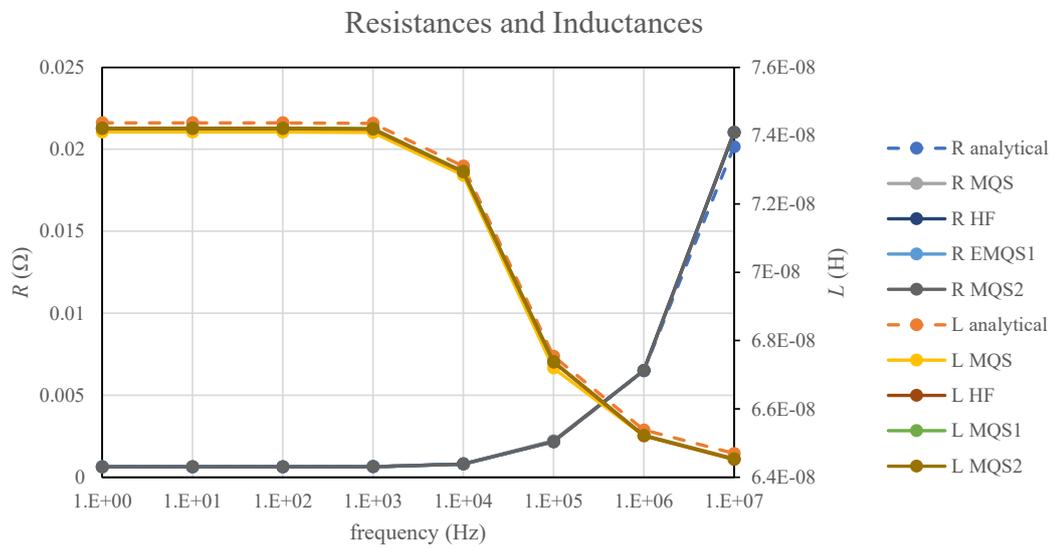


図 4.3 円柱導体モデル インピーダンス特性
 Fig. 4.3. Impedance dependences (cylindrical conductor)

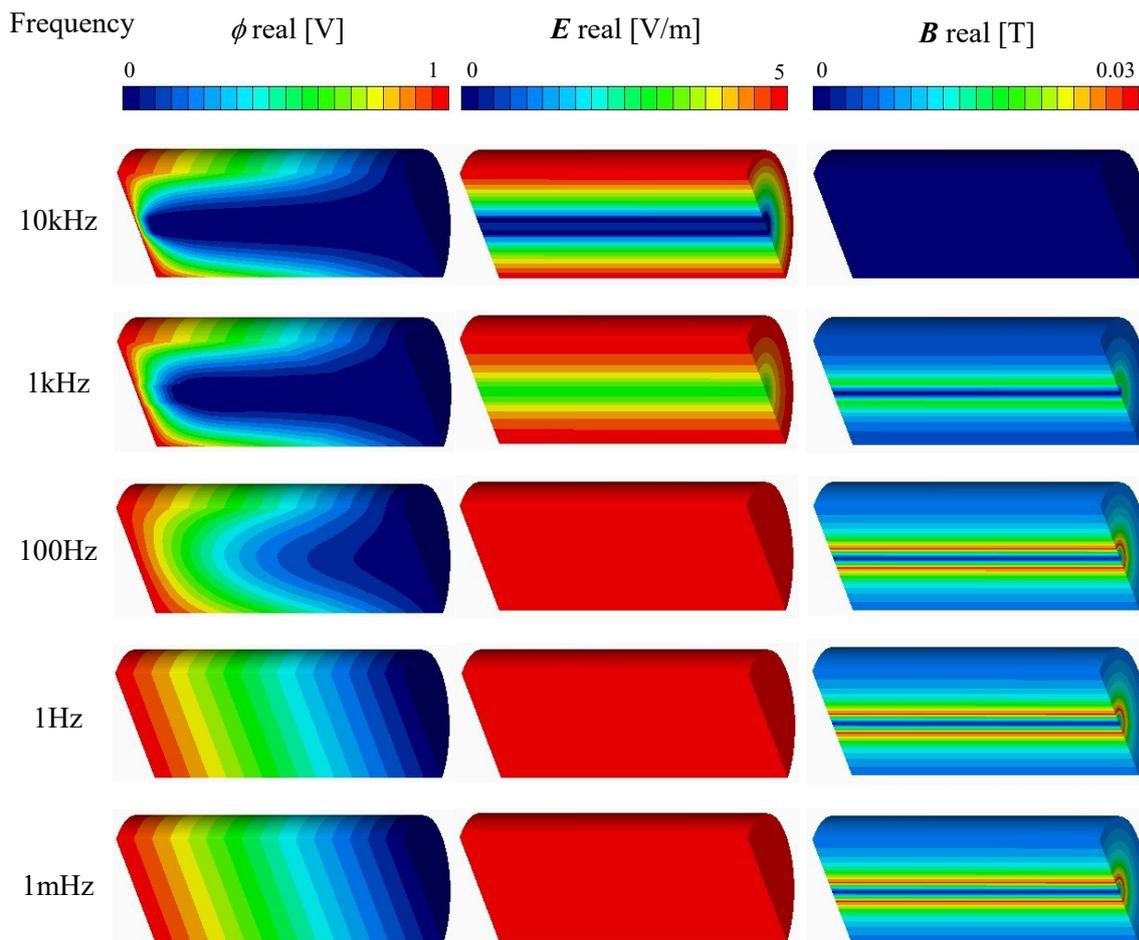


図 4.4 円柱導体モデル 周波数領域解析結果の電位，電界強度，磁束密度強度分布
 Fig. 4.4. Electric potential ϕ , electric field strength \mathbf{E} , and magnetic flux density \mathbf{B} distributions of time-domain and frequency-domain results. (Cylindrical conductor)

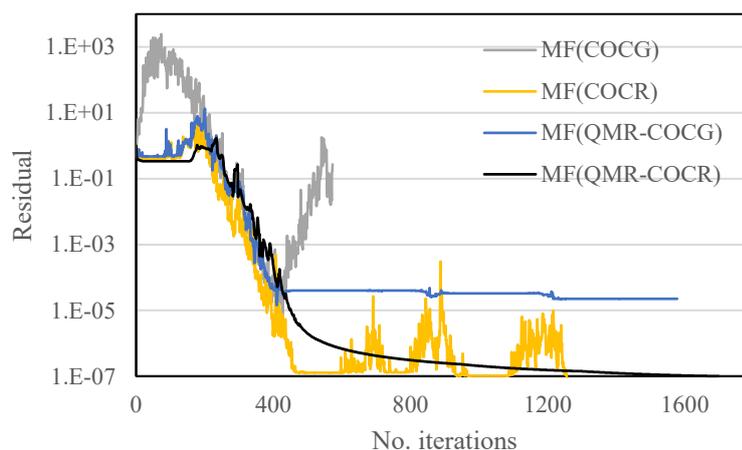


図 4.5 1MHz 時の各行列解法による収束履歴 (類似の円柱導体モデル)
 Fig. 4.5. Convergence histories of different iterative solvers (similar to the cylindrical conductor)

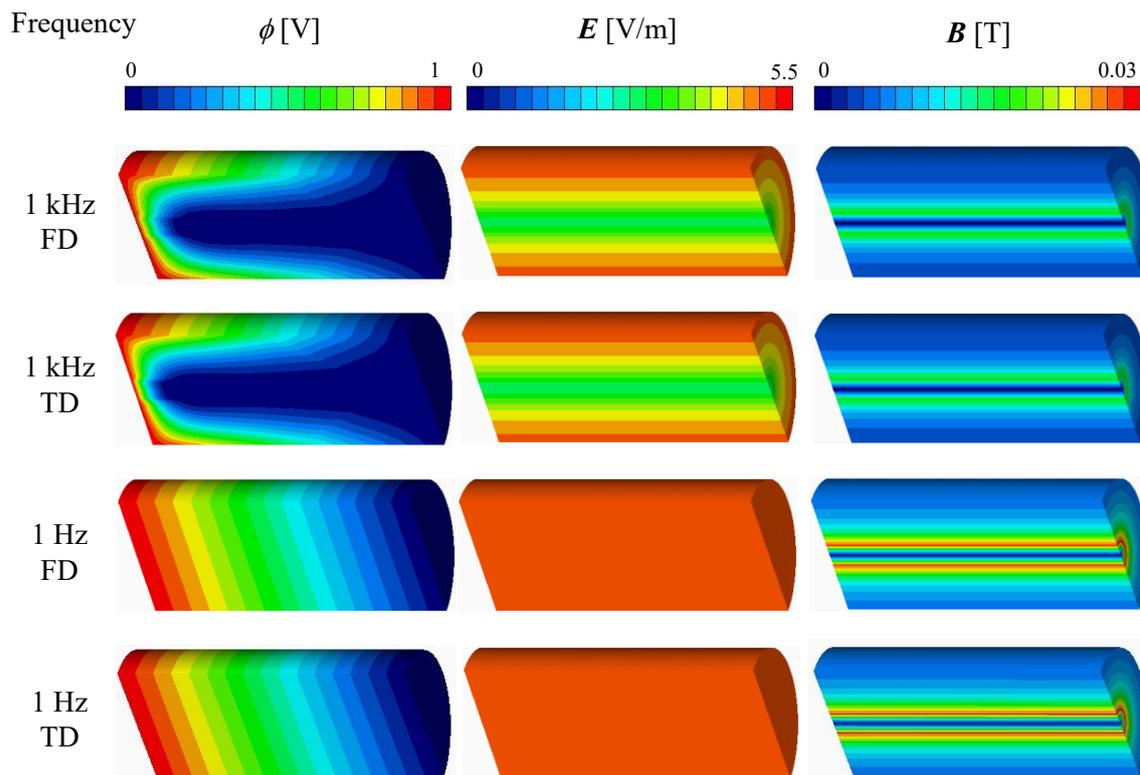


図 4.6 円柱導体モデル 時間領域解析結果の電位，電界強度，磁束密度強度分布
 Fig. 4.6. Electric potential ϕ , electric field strength \mathbf{E} , and magnetic flux density \mathbf{B} distributions of time-domain and time-domain results. (Cylindrical conductor)

表 4.2 周波数領域インダクタンス成分の反復法と直接法の比較
 (類似の円柱導体モデル)

Table 4.2. Comparison of iterative and direct methods for frequency domain inductance components (similar to the cylindrical conductor).

	IC-COCR	PARDISO
1Hz	3.95148e-08	3.95148e-08
1kHz	3.95147e-05	3.95147e-05
1MHz	3.71825e-02	3.71825e-02

4.4.2 円筒平板コンデンサモデル

Zhao らの文献[10]を参考に、図 4.7 に示す平板コンデンサモデルを用いて検証解析を行った。平板導体厚み 0.5mm、平板間誘電体厚さ 0.5mm、平板導体から延びる円柱導体径は 1mm で、導体の導電率を 1M S/m、平板間誘電体の比誘電率を 10,000、印加電圧 1,000V とした。メッシュは円柱導体と同様 45 度分をモデル化した。

ここで、よく知られている次式を用いて、形状からキャパシタンス C を算出した。

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} n \quad (4.25)$$

ここで、 ϵ_0 , ϵ_r は真空の誘電率と比誘電率、 S は電極面積、 d は電極間距離、 n は積層数である。電磁界解析では計算結果の電流と電圧より、次式を用いて C を算出した。

$$C = \frac{I}{j\omega V} \quad (4.26)$$

図 4.8 に(4.25)式から算出したキャパシタンス 0.0139 μF (図中の黒点線) と周波数領域にて計算した導体通過面電流を用いて(4.26)式より算出したキャパシタンスを比較して示す。準静電磁界である EMQS1 は冗長変数なしの(4.12)式を用いた結果で EMQS1 1 は印加面側、EMQS1 2 は下面の受動側導体境界面側の通過電流結果を用いた計算値を表す。EMQS2 が冗長変数を用いた(4.23)式の結果で EMQS2 1, EMQS2 2 も同様である。これより、平板間誘電体の比誘電率をかなり高くしたため漏れ電界がかなり小さく、低周波では形状より算出したキャパシタンス値と 0.1%以下で非常によく一致することが確認できた。1MHz でわずかに上昇しているのは表皮効果による影響である。図 4.9 に 1Hz 時の EMQS1 での電束密度分布と電流密度分布を示す。1Hz においても上下対称の分布が得られていることが確認できる。

表 4.3 に EMQS1 を用いて直接法である Intel Math Kernel Library の PARDISO により計算したキャパシタンス成分と反復法 IC-COCG 法 (1MHz は IC-COCR 法) により計算した結果を合わせて示す。なお、反復法の収束判定条件は 1.e-12 とした。先に説明したようにゲージを課しているため直接法により解くことも可能であることを示している。計算結果として両者はよく一致していることが確認できる。

同様の計算を時間領域でも行い、周波数領域と比較した周波数特性を図 4.10 に示す。ほぼ同じ値が得られていることが確認できる。

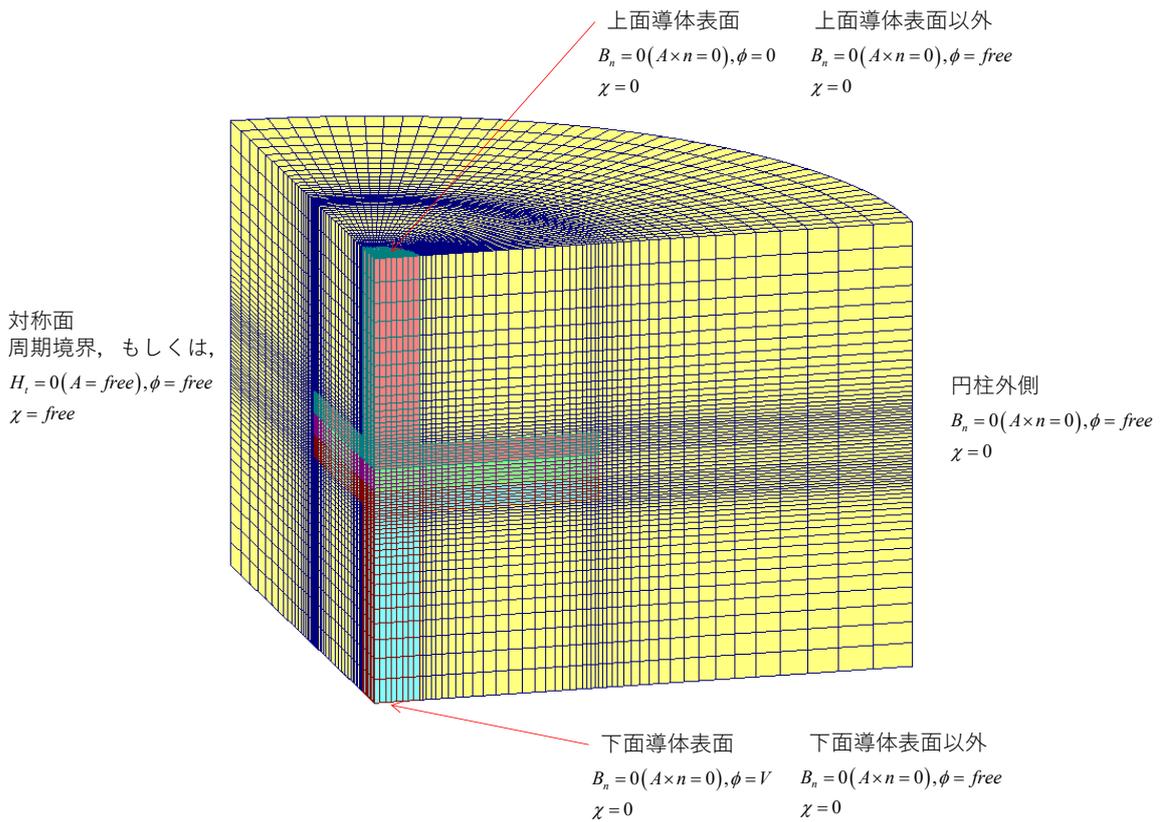


図 4.7 円筒平板コンデンサモデル
 Fig. 4.7. Cylindrical plate condenser model.

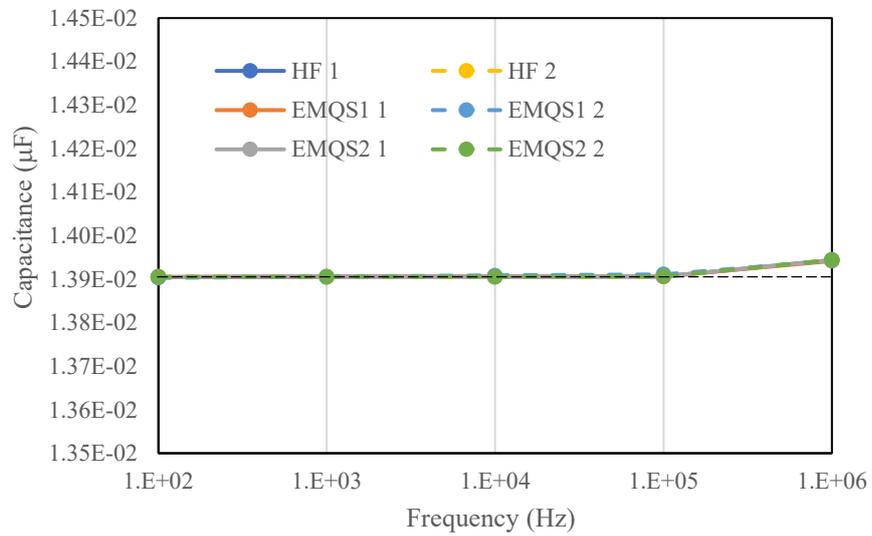
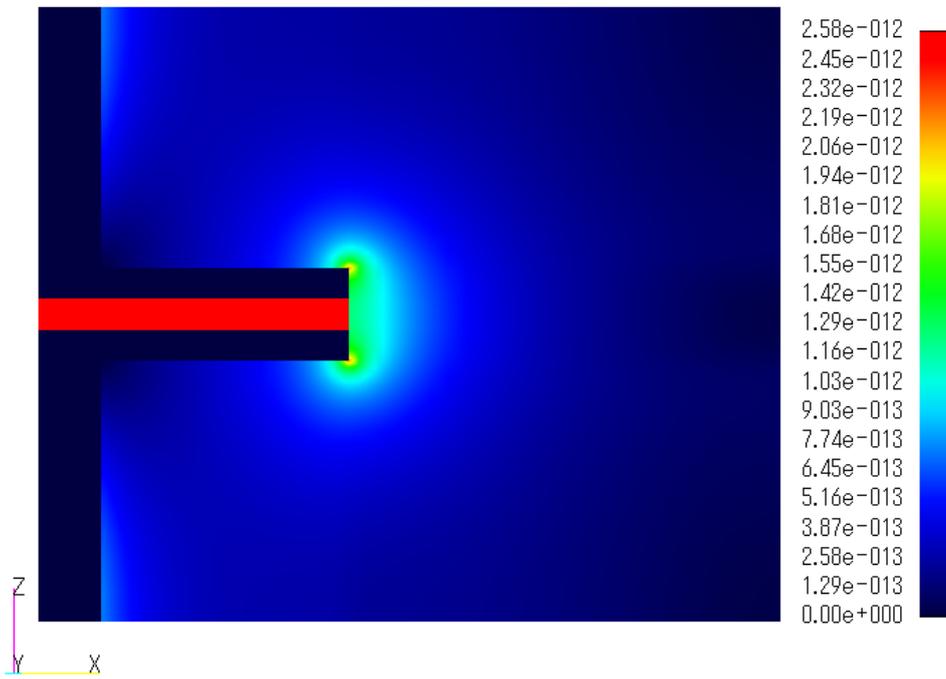


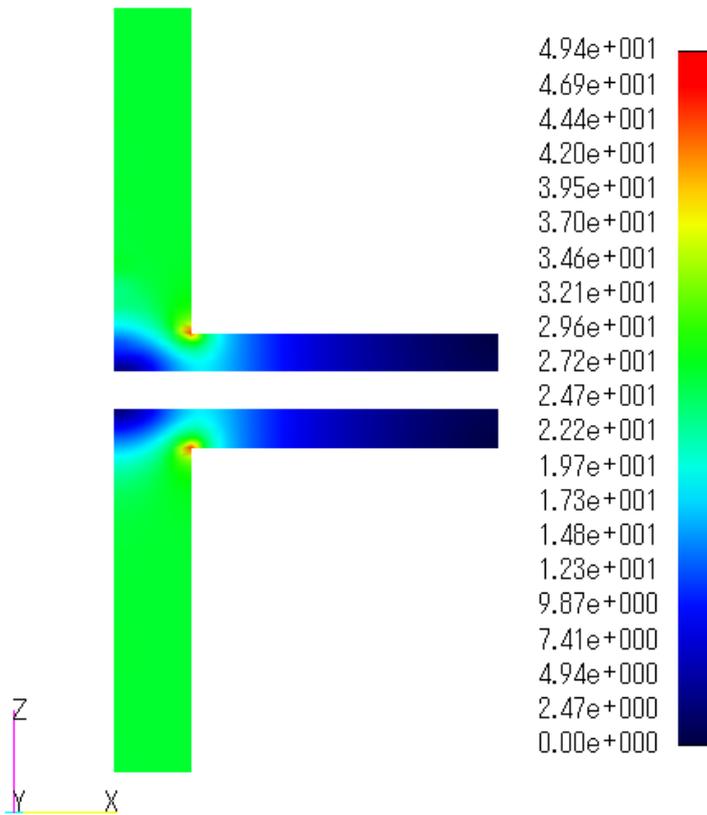
図 4.8 円筒平板コンデンサモデル 周波数領域 キャパシタンス成分特性
 Fig. 4.8. Impedance dependences by frequency-domain results (cylindrical plate capacitor)

STEP:4 Time: 2.50000e-01↑ < ELEC-elem-4 >



(a) 電束密度分布

STEP:4 Time: 2.50000e-01↑ < CURR-elem-4 >



(b) 電流密度分布

図 4.9 円筒平板コンデンサモデル 1Hz 時の解析結果 (EMQS1)

Fig. 4.9. Electric density distribution (laminated condenser)

表 4.3 周波数領域キャパシタンス成分の反復法と直接法の比較

Table 4.3. Comparison of iterative and direct methods for frequency domain capacitance components (cylindrical plate capacitor)

	IC-COCR	PARDISO
1Hz	2.18264e-05	2.18439e-05
1kHz	2.18431e-02	2.18436e-02
1MHz	2.18999e+01	2.19039e+01

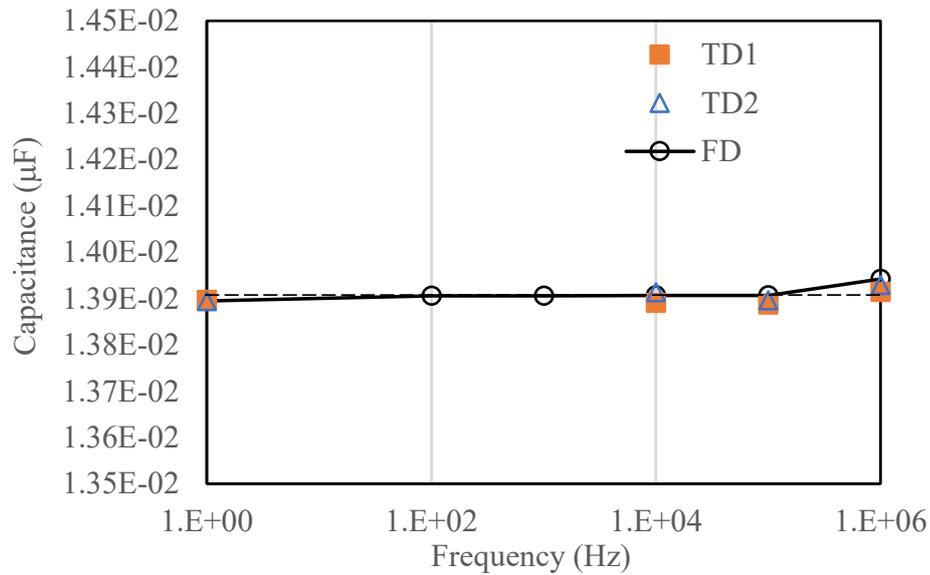


図 4.10 円筒平板コンデンサモデル 時間領域キャパシタンス成分特性

Fig. 4.10. Capacitance dependences by time-domain results (cylindrical plate capacitor)

4.4.3 積層コンデンサモデル

積層コンデンサを想定した二次元モデルを用いて、準静磁界解析 (MQS) では計算が不可能な静電容量の効果について、周波数領域にて検証解析を行う。図 4.11 に解析モデルを示す。積層された平板導体の両側が電極と接続され、左側電極に 200V (波高値) の正弦波電圧を印加する。平板導体の導電率は 10M S/m とし、その板厚と平板間距離はともに 50 μ m とした。導体間は比誘電率 3,000 の誘電体 (比透磁率は 1) とした。変位電流により電流が右側電極に流れることを確認する。

準静電界解析 (EMQS) の冗長変数なしの(4.12)式の EMQS1 と電磁波解析 (HF) で解析した。図 4.12 に EMQS1 の電界強度ベクトル分布の拡大図を示す。電極間に挟まれた誘電体 (緑色) の電界強度が大きく、電極間方向を向いていることから、左側電極の平板導体 (黄色) から右側電極の平板導体 (同じく黄色) の方向に電界が発生している、すなわちコンデンサとして動作していることが確認できる。(4.25)式を用いて形状からキャパシタンス C を算出し、解析結果の電流と電圧より、(4.26)式を用いて C を算出した。

積層コンデンサは端部の影響が出にくい積層構造であり、形状算出値 8.32E-02 μ F と解析結果の算出値 8.66E-02 μ F は 4%差と非常によく一致した。図 4.13 に 1kHz~100MHz でのインピーダンスの実部 (R 成分) と虚部 (C 成分) の周波数特性を示す[22]。ここで、虚部はキャパシタンス成分に換算している。なお、4.4.1 項で示したように、EMQS1 は 1MHz 以上で反復計算では収束しなくなるため、直接法である Intel Math Kernel Library の PARDISO を用いて計算した。抵抗成分は 1MHz あたりまで減少するが、それ以降は大きくなっている。キャパシタンス成分は寄生インダクタンスの影響で 10MHz を超えたあたりから急激に上昇し、35MHz あたりでピークを持つ共振現象が現れていることが確認できる。

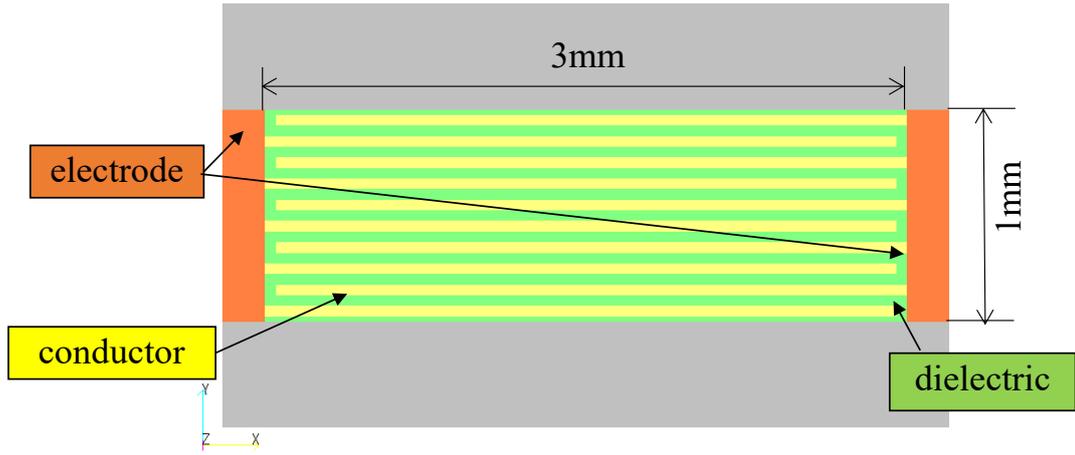


図 4.11 円筒平板コンデンサモデル
Fig. 4.11. Laminated condenser model

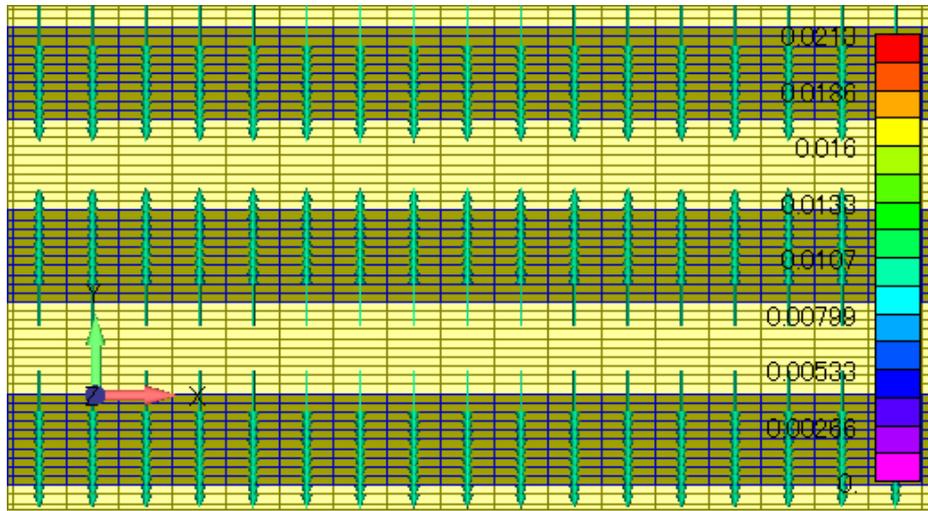


図 4.12 積層コンデンサモデル 電界強度ベクトル分布
Fig. 4.12. Electric density distribution (laminated condenser)

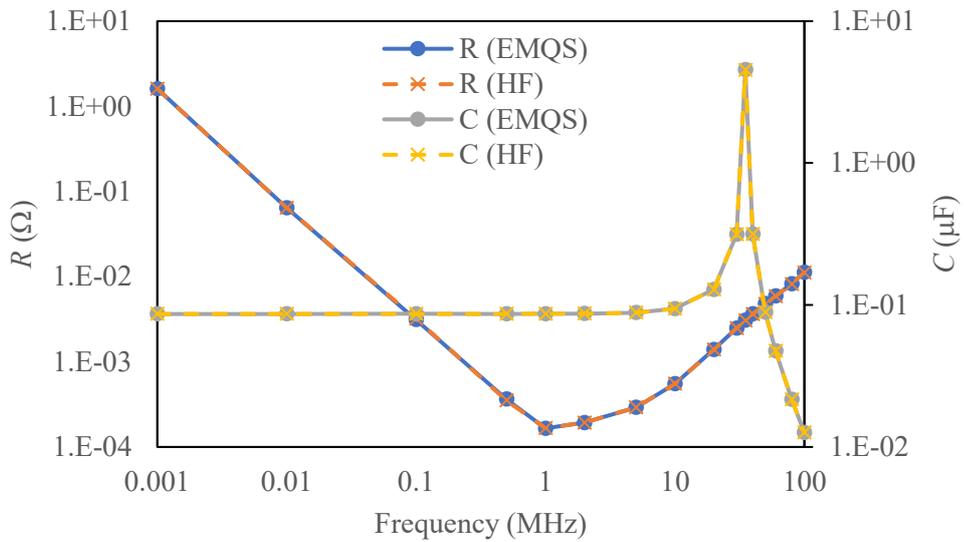


図 4.13 積層コンデンサモデル インピーダンス特性
Fig. 4.13. Impedance dependences (laminated condenser)

4.4.4 LC 並列接続モデル

これまでインダクタンス成分もしくはキャパシタンス成分のいずれかが主のモデルで検証解析を行った。ここではインダクタとコンデンサの並列接続モデルを解析として、低周波では誘導効果が支配的、高周波では容量効果が現れるようなモデルを選定する。解析モデルとパラメータを図 4.14 に示す。この場合、容量効果はコンデンサとフェライトの誘電体領域において現れる。境界条件は Y 方向の両側面について $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$, その他の境界面について $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ とした。底面の Y 方向に配置された端子に、10 倍刻みで 100~10MHz の周波数を 1V の交流電圧を印加した。出力電流は端子の底面を通過する電流から算出した。行列解法には IC-COCR 法を適用した。節点数は 77,647, 要素数は 459,657 である。自由度は 689,978 (A は 535,544, ϕ , χ は 77,217) 図 4.15 に、準静電界解析 (EMQS) の冗長変数なしの(4.12)式を EMQS1 と、冗長変数を用いた(4.23)式 EMQS2, および参考として従来の準静磁界解析 (MQS) と Full wave 解析 (HF) のインピーダンス特性の解析結果を示す。1MHz 以上では EMQS1 と EMQS2 の結果は同じであったが、容量効果による位相シフトのため容量効果を考慮できない MQS とは異なる結果となった。図 4.16 に示すように、平均反復回数は 10 kHz まで MQS, EMQS1, EMQS2 はほぼ同じで平均約 900 回であった。しかし、EMQS1 は 100kHz を超えると約 2,000 回まで増加した。したがって、冗長変数が収束特性を改善したことが明白である。図 4.17 に周波数領域において 10MHz 時の EMQS1, EMQS2, HF の電束密度分布を示す。すべての結果において非常によく一致した。

次に、時間領域解析において 10MHz の正弦波励振の解析を行った。(4.24)式を ICCR 法により時間領域で解いた結果 (time-domain : TD) と(4.22)式による周波数領域の結果 (frequency-domain : FD) の比較として、電束密度分布を図 4.18 に示す。(4.14)式による計算は 1MHz を超えると収束性が極端に悪くなった。時間領域解析においても、(4.24)式の ICCR 反復回数は 697 回であるが、(4.14)式は 3 万回で 1st ステップでも収束しない結果となった。計算時間は 400 ステップ (2 サイクル) で 8.3 時間であった。モデルの時定数が大きいので、FD の結果を初期値として TD で計算を行い、定常状態を得た。周波数領域と同様、コンデンサ周辺、フェライトコア周辺、コイルターン間に電束密度が現れており、分布としても非常によく一致している。FD と TD の相対誤差は電気角 90 度で 0.41% であり、両者の結果はよく一致している。

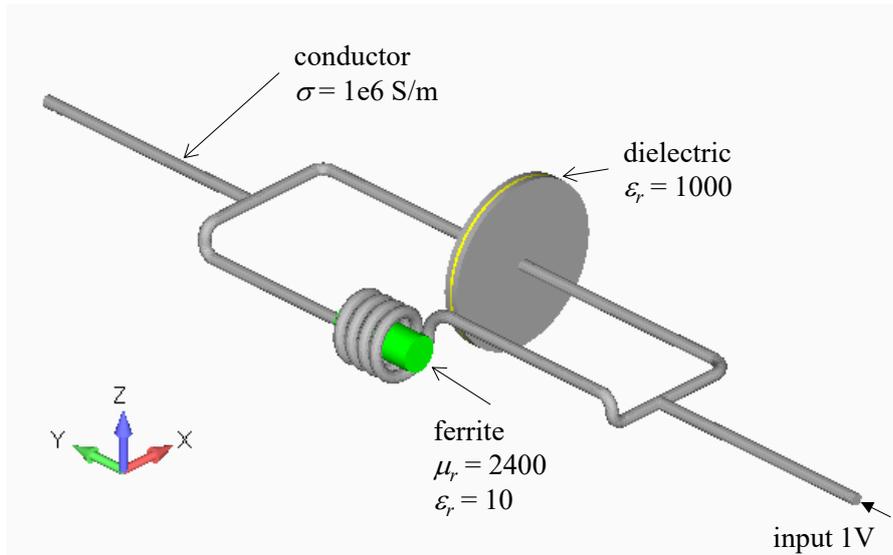


図 4.14 LC 並列接続モデル
Fig. 4.14. LC parallel connection model

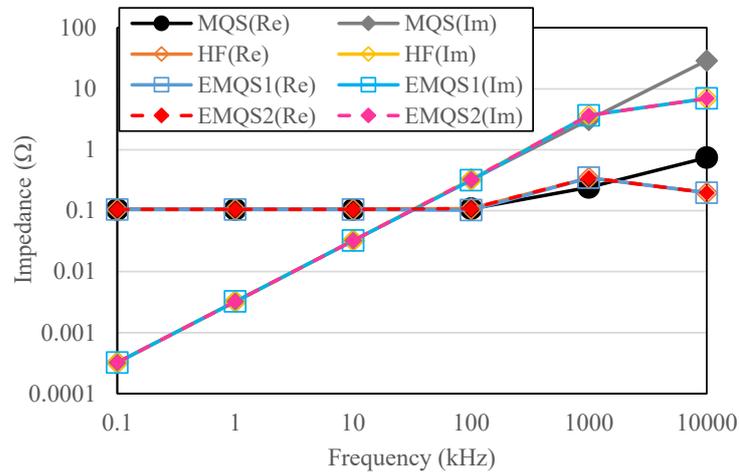


図 4.15 LC 並列接続モデル インピーダンス特性
Fig. 4.15. Impedance dependences (LC parallel connection model)

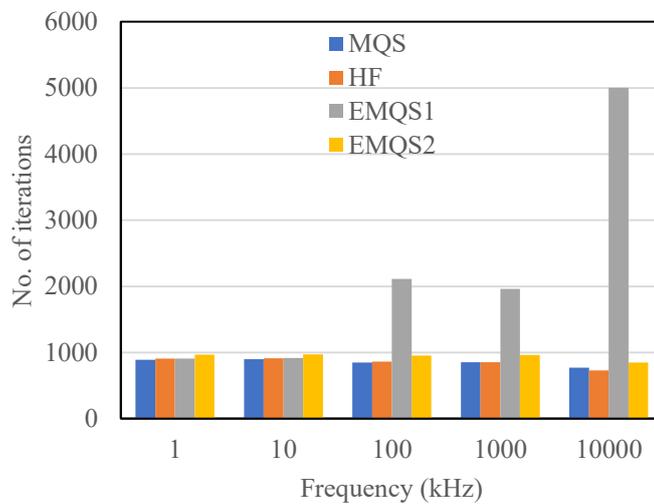
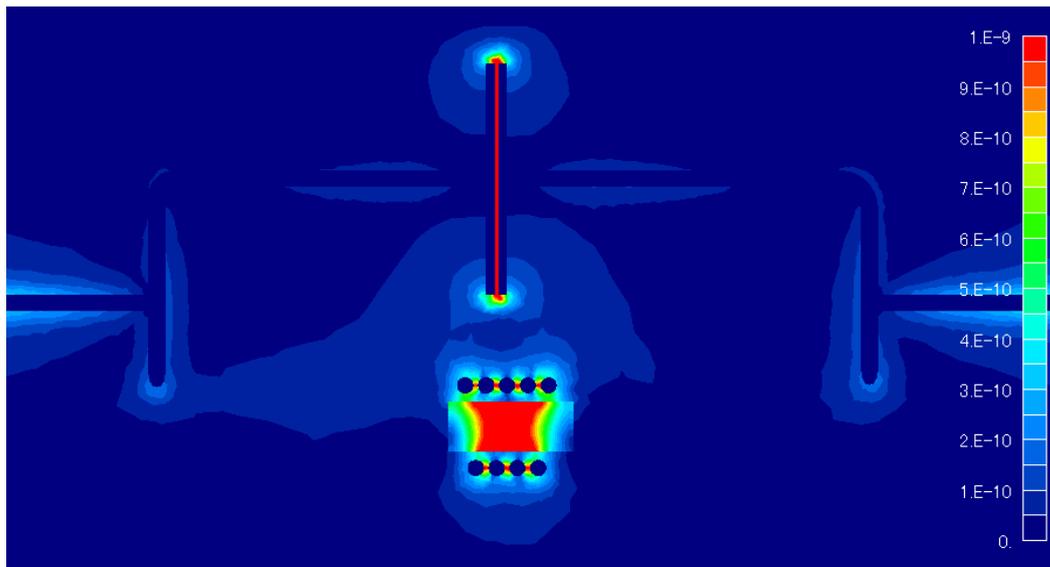
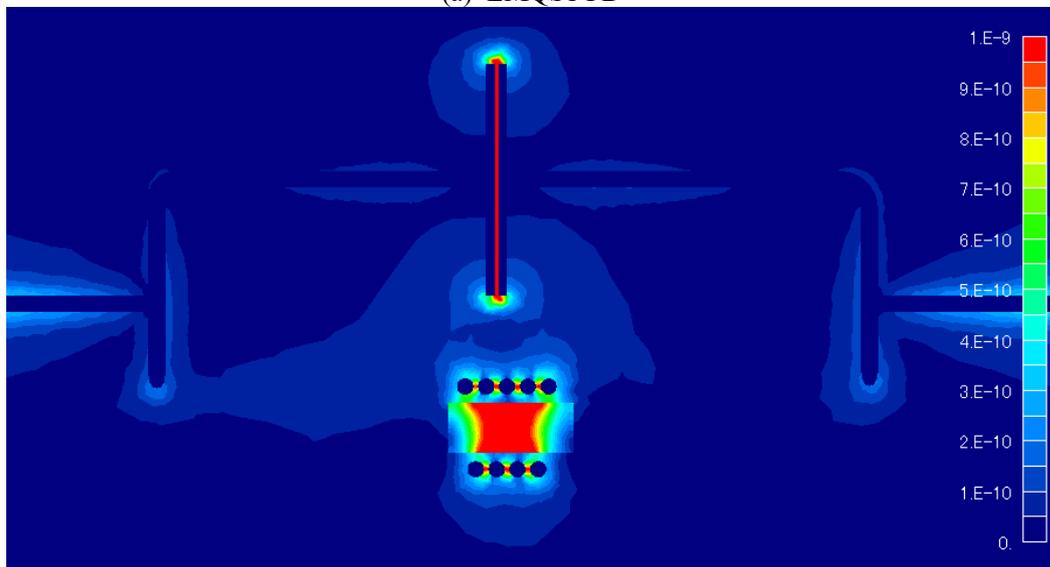


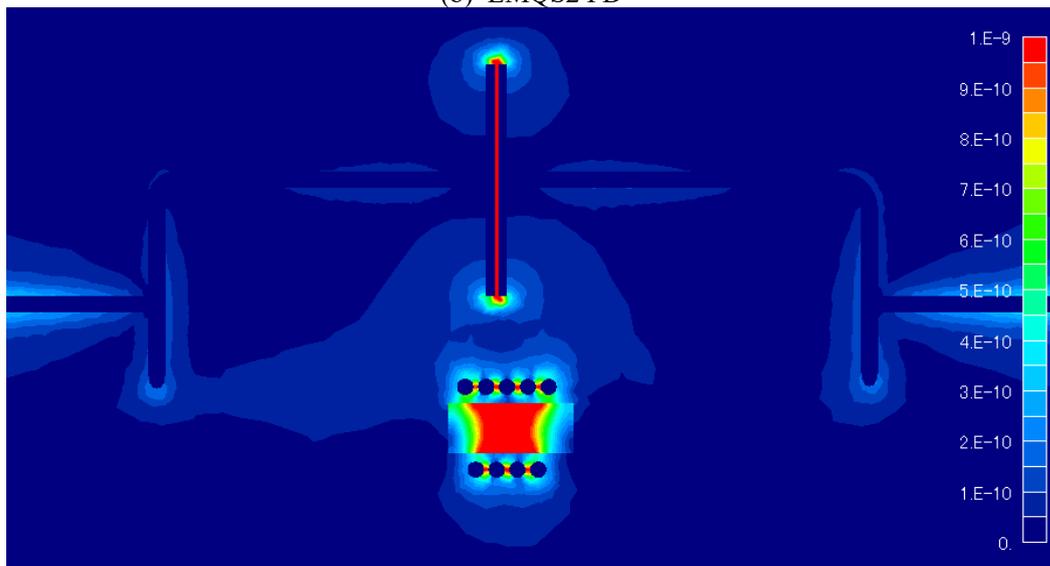
図 4.16 LC 並列接続モデル 各手法による反復回数の比較
Fig. 4.16. Comparison of the number of iterations by methods (LC parallel connection model)



(a) EMQS1 FD



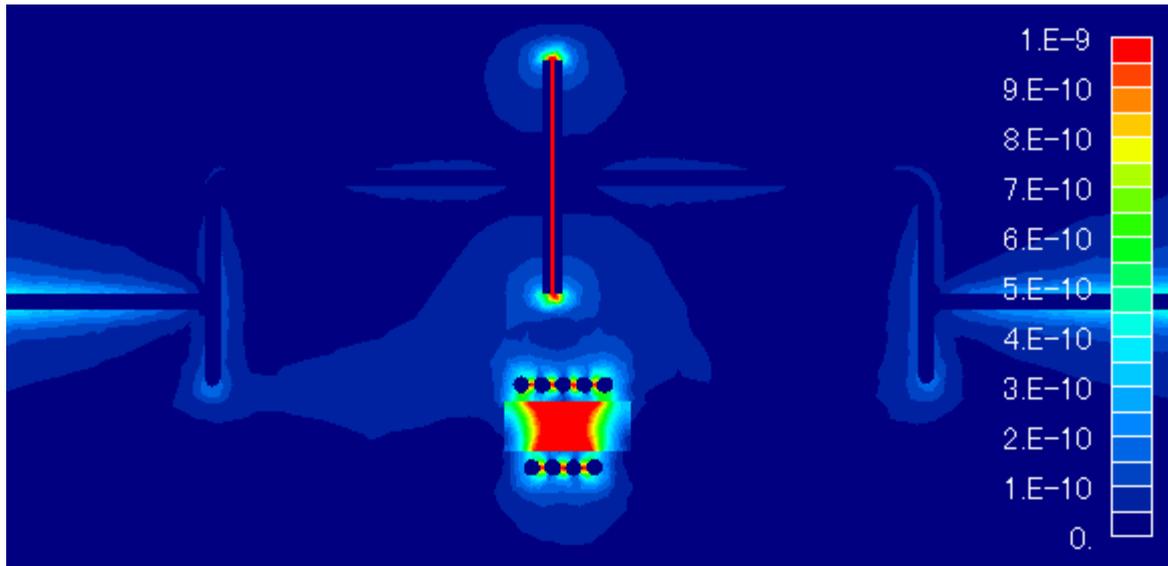
(b) EMQS2 FD



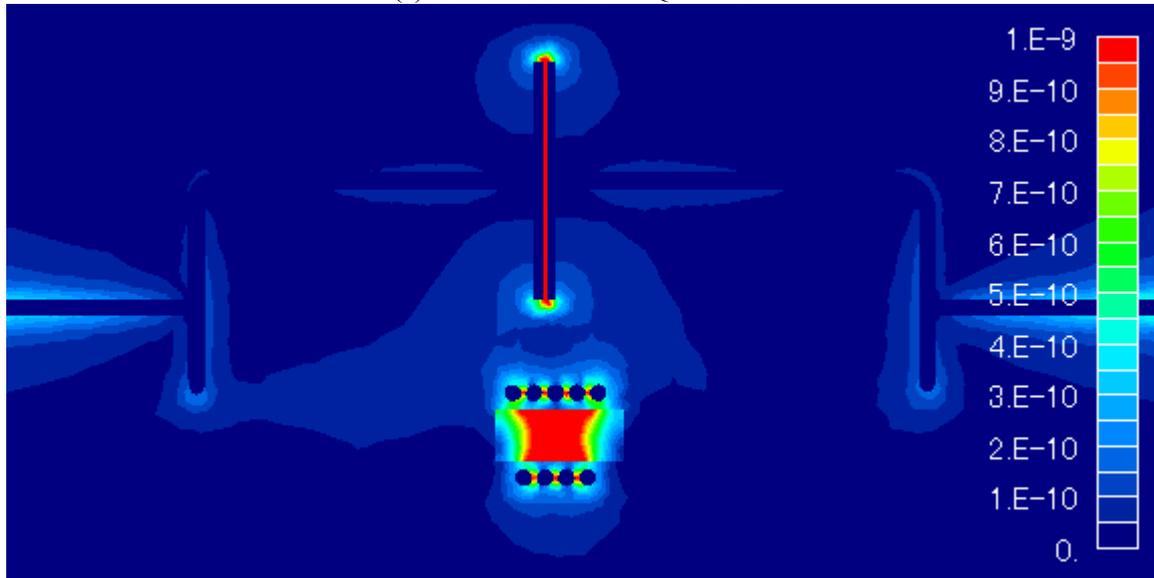
(b) HF FD

図 4.17 LC 並列接続モデル 電束密度分布 (10MHz)

Fig. 4.17. Electric density distribution at 10MHz (LC parallel connection model)



(a) 周波数領域 (EMQS2 FD)



(b) 時間領域 (EMQS2 TD)

図 4.18 LC 並列接続モデル 電束密度分布 FD と TD の比較 (10MHz)
 Fig. 4.18. Comparison between FD and TD of electric density distribution at 10MHz
 (LC parallel connection model)

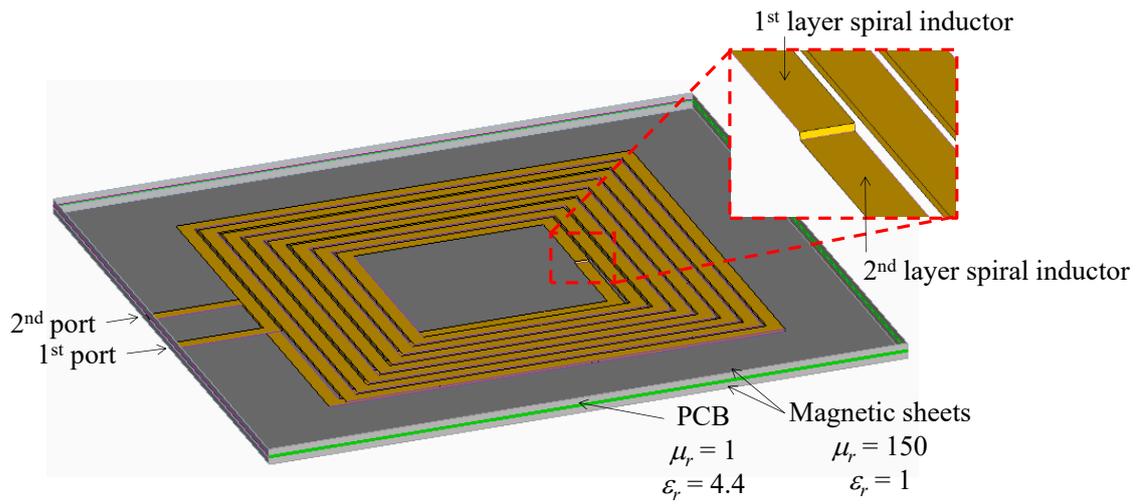
4.4.5 PCB 基板のダブルレイヤースパイラルインダクタモデル

実機相当のモデルを用い、パルス電圧を印加した場合の時間領域解析を行う。図 4.19(a)は PCB 基板 (printed circuit board: PCB) 上のダブルレイヤースパイラルインダクタの解析モデル, (b)はダブルレイヤースパイラルインダクタの接続レイアウト, (c)は印加電圧波形を示す[18]。モデルの形状は先行研究[17]を参考にして決定した。ただし、本モデルの形状は単純化のために矩形コイルとした。板状導体配線としてモデル化したダブルレイヤースパイラルインダクタ (導電率=1e7 S/m, 幅=1.3 mm, 厚さ=70 μm) は, PCB (厚さ=0.2 mm) の表裏に配置し, 磁性シート (厚さ=0.635 mm) で挟まれている構造となっている。この形状のダブルレイヤーインダクタは, インダクタ間に浮遊容量が発生することが知られており, 先行研究[17]でも測定結果より実証されている。

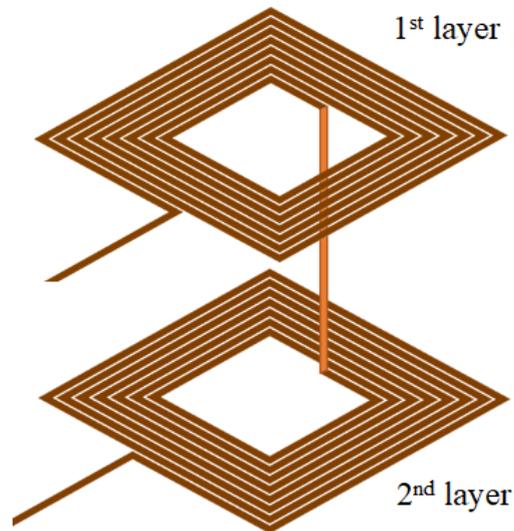
参考までに, (4.24)式の準静電磁界解析 (EMQS) と従来の準静磁界解析 (MQS) の周波数 10MHz におけるインピーダンスの絶対値は, それぞれ 1.286m Ω , 1.896m Ω であり, EMQS に寄生容量効果があることが確認できる。図 4.19(c)に示した立ち上がりおよび立ち下り時間が 100ns のパルス電圧波形を印加した時間領域解析を実行する。反復解法には ICCR 法を用いた。節点数は 672,204, 要素数は 650,940 である。未知変数の個数 (DOF) は MQS が 1,936,226, EMQS が 3,200,254 であり, 計算時間は 200 ステップで MQS が 74 時間, EMQS が 221 時間であった。図 4.20 は, 時間領域の EMQS における電流波形を MQS の結果と比較したものであり, 入力パルス電圧波形も示している。MQS の電流は時間とともに徐々に増加するが, EMQS の電流波形は容量効果により立ち上がりが急峻である。その後, 急激に減少して電流がダンピングする挙動, いわゆるリングング現象が表れている。リングングが減衰し誘導効果が支配的になると EMQS 電流と MQS 電流は同様の挙動を示す。EMQS 電流は立ち下り時間にも容量効果による挙動が観測され, 同様にリングング現象が現れた。パルス入力電圧を繰り返し印加すると, EMQS 電流波形は容量効果により連続的にリングング挙動を示すことが予想される。

立ち上がり時間付近の電束密度の挙動を調べるため, 図 4.21 に電圧が最大となる(a)100ns と, 電流がわずかに低下する(b)170ns における EMQS の電束密度分布を示す。立ち上がり時間が短いのは PCB が誘電体であるため, 静電容量の影響を受けていることによる。特に, 入出力ポートに近い部分 (図 4.21 左) とダブルレイヤースパイラルインダクタの一番外側の重なり部分は電圧差が大きいため電束密度に差が生じている。

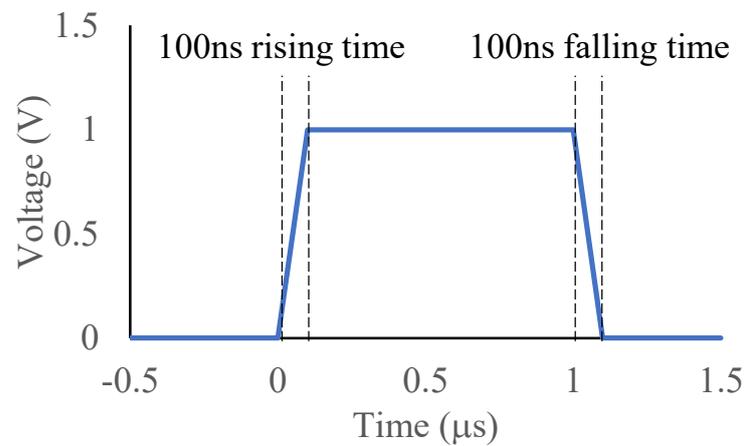
以上より, 提案した Darwin model の時間領域解析を行うことで, リングングのような寄生容量による特有の影響が現れる過渡現象を EMQS 解析で評価できることを示せた。



(a) 解析モデル



(b) ダブルレイヤースパイラルインダクタの接続レイアウト



(c) 印加電圧波形

図 4.19 プリント基板(PCB)上のダブルレイヤースパイラルインダクタ
Fig. 4.19. PCB-based double-layer spiral inductor.

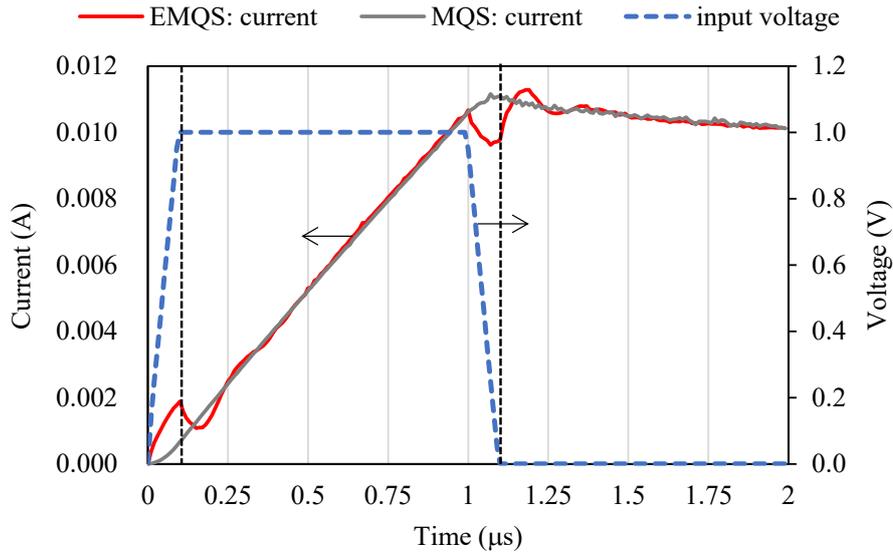


図 4.20 プリント基板(PCB)上のダブルレイヤースパイラルインダクタ
EMQS と MQS の電流波形と入力パルス電圧波形。
(黒い点線は立ち上がりと立ち下りの終了時間を示す)。

Fig. 4.20. Current waveform of EMQS and MQS, and input pulse voltage waveform. (Black dot lines indicate the end of the rising and the falling times).

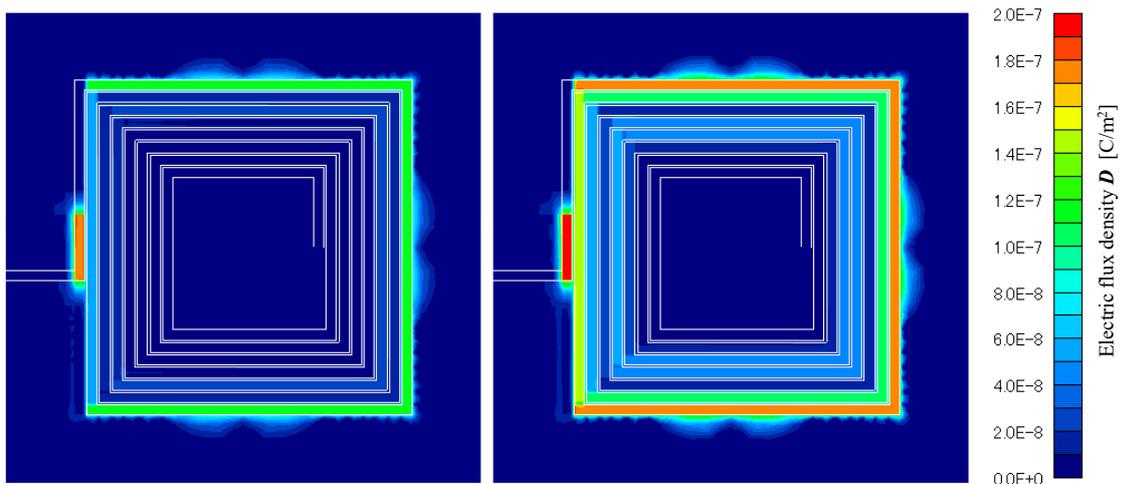


図 4.21 プリント基板(PCB)上のダブルレイヤースパイラルインダクタ
(a)電圧が最大になる 100 ナノ秒と、
(b)電流がわずかに低下する 170 ナノ秒における EMQS の電束密度分布

Fig. 4.21. Electric flux density distributions of EMQS at (a) 100 ns, when the voltage is at maximum, and (b) 170 ns, when the current drops slightly.

4.5 まとめ

本章では、Darwin model による有限要素解析において、低周波安定性を実現するためにクーロンタイプゲージを施した新たな定式化を提案した。さらに高周波領域の収束特性を改善するために、冗長変数を導入した手法も提案し、検証解析を行った。結果は以下のように要約される：

- (1) Darwin model として知られている磁気ベクトルポテンシャルの二階の時間微分（縦方向成分）を省略する定式化では、解が一意でないこともあり、正しく解けない。提案手法において、クーロンタイプゲージを課すことで解が一意に決まり、低周波安定化を実現でき、周波数領域および時間領域において反復法により解けることを示した。
- (2) クーロンタイプゲージを課した定式化では、高周波領域での反復回数の増大が課題となったが、冗長変数を導入することで改善できることを示した。これは周波数領域および時間領域ともに有用な方法である。
- (3) 提案手法を用いてインダクティブな円柱導体モデル、キャパシティブな平板コンデンサモデルを解析し、解析解や準静磁界解析（MQS）、電磁波解析（HF）の結果と比較することで、周波数領域解析および時間領域解析のいずれにおいても本手法の有効性を実証した。
- (4) 積層コンデンサモデルでは直接法でも計算できることを示し、共振周波数まで計算可能であることを示した。
- (5) LC 並列接続モデルを用いて、インダクタンスおよびキャパシタンスの両方が影響する系でも周波数領域および時間領域解析が良い一致であることから正しく計算できることを示した。
- (6) PCB 基板のダブルレイヤースパイラルインダクタモデルで台形波電圧を印加した時間領域解析を行い、リングング電流が計算可能であることを示した。

参考文献

- [1] J. Zhu and D. Jiao, “A Rigorous Solution to the Low-Frequency Breakdown in Full-Wave Finite-Element-Based Analysis of General Problems Involving Inhomogeneous Lossless/Lossy Dielectrics and Nonideal Conductors,” *IEEE Trans Microw Theory Tech.*, vol. 59, no. 12, pp. 3294–3306, Dec. 2011, doi: 10.1109/TMTT.2011.2171707.
- [2] A. A. Althuwayb, “The Dilemma of Resolving the Low-Frequency Breakdown Problem in Microwave Components via Traditional and Improved Finite-Element Time-Domain Techniques,” *IEEE Access*, vol. 10, pp.42171-42180, 2022.
- [3] J. Larsson, “Electromagnetics from a quasistatic perspective,” *Amer. J. Phys.*, vol. 75, no. 3, pp. 230–239, 2007.
- [4] Q. Qi, X. Cao, M. Chen et al., “An Improved Fast Finite Element Time-Domain Method Based on Compressive Sensing for Cavity Problems,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 30, no. 4, pp. 331–334, 2020.
- [5] C. Schwarzbach, “Stability of Finite Element Solutions to Maxwell’s Equations in Frequency Domain,” Unpublished doctoral dissertation, *TU Bergakademie Freiberg*, 2009.
- [6] R. Hiptmair, F. Kramer, and J. Ostrowski, “A Robust Maxwell Formulation for All Frequencies,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 6, June 2008.
- [7] M. Jochum, O. Farle, and R. Dyczij-Edlinger, “A New Low-Frequency Stable Potential Formulation for the Finite-Element Simulation of Electromagnetic Fields,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, no. 3, 7400504, Mar. 2016.
- [8] M. Eller, S. Reitzinger, S. Schops, and S. Zaglmayr, “A symmetric low-frequency stable broadband Maxwell formulation for industrial applications,” *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 39, no. 4, pp. B703–B731, 2017.
- [9] H. Kaimori, T. Mifune, and A. Kameari, “Investigation of Darwin Model with Two Types of Coulomb Gauge Condition in Frequency-Domain Electromagnetic Finite-Element Method,” *Ehrhardt, M., Günther, M. (eds) Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2021. ECMI 2021. Mathematics in Industry*, vol 39. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11818-0_60, 2022.
- [10] W. N. Fu, Y. Zhao, S. L. Ho and P. Zhou, “An Electromagnetic Field and Electric Circuit Coupled Method for Solid Conductors in 3-D Finite-Element Method,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, no. 3, pp. 1–4, March 2016, Art no. 7401704, doi: 10.1109/TMAG.2015.2487362.
- [11] Y. Zhao, and Z. Tang, “A Novel Gauged Potential Formulation for 3-D Electromagnetic Field Analysis Including Both Inductive and Capacitive Effects,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 55, no. 6, 7200905, June 2019.
- [12] H. Taha, Z. Tang, T. Henneron, Y. Le Menach, F. Salomez, J.-P. Ducreux, “Numerical Simulation-Based Investigation of the Limits of Different Quasistatic Models,” *Appl. Sci.*, 2021; 11(23):11218. <https://doi.org/10.3390/app112311218>

- [13] S. Koch, H. Schneider, and T. Weiland, "A low-frequency approximation to the Maxwell equations simultaneously considering inductive and capacitive phenomena," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, no. 2, pp. 511–514, Feb. 2012.
- [14] Z. Badics, J. Pavo, S. Bilicz, and S. Gyimothy, "Subdomain Perturbation Finite-Element Method for Quasi-static Darwin Approximation," *IEEE Trans. Magn.*, 56, 1, June, 7503304, 2020.
- [15] J. Ostrowski, R. Hiptmair, F. Krämer, J. Smajic, and T. Steinmetz, "Transient Full Maxwell Computation of Slow Processes," *Scientific Computing in Electrical Engineering SCEE 2010. Mathematics in Industry*. vol 16. Berlin, Germany: Springer, pp. 87–95, 2012.
- [16] M. Clemens, M.-L. Henkel, F. Kasolis, M. Gunther, H. De Gersem, and S. Schops, "Quasistatic Darwin model field formulations in time domain," *ICS Newslett.*, vol. 29, no. 1, pp. 3–9, 2022.
- [17] C. K. Lee, Y. P. Su, and S. Y. Ron Hui, "Printed Spiral Winding Inductor With Wide Frequency BandWidth," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 26, no. 10, pp. 2936–2945, Oct. 2011.
- [18] H. Kaimori, T. Mifune, A. Kameari and S. Wakao, "Low-Frequency Stabilized Formulations of Darwin Model in Time-Domain Electromagnetic Finite-Element Method," *IEEE Trans. Magn.*, (Early Access), 2023, doi: 10.1109/TMAG.2023.3304998.
- [19] X. Gu, T. Huang, L. Li, H. Li, T. Sogabe, and M. Clemens, "Quasi-Minimal Residual Variants of the COCG and COCR Methods for Complex Symmetric Linear Systems in Electromagnetic Simulations," *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. 62, no. 12, Dec. 2014.
- [20] H. Igarashi and T. Honma, "On convergence of ICCG applied to finite-element equation for quasi-static fields," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 2, pp. 565-568, March 2002, doi: 10.1109/20.996148.
- [21] T. Iwashita, T. Mifune, S. Moriguchi and M. Shimasaki, "Physical Meaning of the Advantage of A-phi Method in Convergence," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 3, pp. 1424-1427, March 2009, doi: 10.1109/TMAG.2009.2012658.
- [22] H. Kaimori, T. Mifune, A. Kameari, "Novel Application of Coulomb Gauge Condition in Electromagnetic FEM Computations for Darwin Approximation," *2020 IEEE 19th Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, ID:989, Nov. 2020
- [23] H. Kaimori, T. Mifune, A. Kameari, S. Wakao, "Low-Frequency Stabilized Formulations of Darwin Model in Time-Domain Electromagnetic Finite-Element Method," *IEEE the 24th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG)*, ID:133, May 2023

第5章 デジタルトランスフォーメーションにおける電動機駆動システムの展開

ここまで、CAE 技術として電磁界解析に特化した課題とその解決策になりうる研究成果について述べてきた。これら研究成果を受けて、ここでは今後の展開として注目されているデジタルトランスフォーメーションからモデルベース開発に至る電磁界解析技術の展開と課題点について述べる。

5.1 デジタルトランスフォーメーションの現状と展開

1.1 節でも触れたように、21 世紀に入ってからドイツの“インダストリー4.0 (Industry 4.0)”を始めとしたデジタルトランスフォーメーションの技術革新の流れにフランス、中国など主要各国も同調し、日本も産業が目指すべき姿として“Society 5.0”を提唱している[1]。経済産業省[1]によると、「“Connected Industries (コネクテッドインダストリーズ)”とは、データを介して、機械、技術、人など様々なものがつながることで、新たな付加価値創出と社会課題の解決を目指す産業の在り方である。」と定義され、デジタル技術、特に IoT や AI の活用を前提としている。このデジタルトランスフォーメーションにおいては、図 5.1 に示すように製造業におけるあらゆる工程をデジタルツールで連携することを目指し、図下側の研究開発から構成設計、生産までの流れ（連鎖：チェーン）はエンジニアリングチェーン、上側の受発注から生産管理、生産、流通・販売、保守などの連鎖はサプライチェーンとして、デジタルツールを用いたデータ利活用の拡大・迅速化を行うことで付加価値の向上を目指している。このデジタルトランスフォーメーションを実現することで、優れたソリューションを提供し、エンジニアリングチェーンでは開発期間の短縮はもちろん、顧客からのフィードバックを次の製品企画に受け入れやすくすることができ、サプライチェーンでもフィードバックを基に生産指標の決定が可能になると考えられる。このような二つのチェーンの各所において、データの利活用を行うにはデジタル化が必須であることは言うまでもない。

エンジニアリングチェーンにおいては、CAE 技術や AI・機械学習を研究開発・製品設計に活用する「R&D 支援」、モデルベース開発による「設計支援」、顧客データを分析し、商品の改善策を見つける「企画支援」などが対象となる[1]。

サプライチェーンにおいては、工場のアイドル期間を削減する「共同受注」やデジタル化による可視化、サプライチェーンとのデジタル情報を素早く共有することなどによる「物流最適化」、顧客の使用データや地域別のニーズなどを AI・機械学習などを用いて分析することによる「販売予測」、設備・機器のデジタルデータを IoT によりリアルタイムで取得し、健全状態との差分を算出することなどによる「予知保全」「遠隔保守」などがある[1]。

これらをデジタル化によりシームレスに連携することが可能となると「生産最適化」などが実現できると期待されている。今後の課題として、エンジニアリングチェーンとサプライチェーンの連携が挙げられる。

ここでは、CAE 技術が強く関連するエンジニアリングチェーンのデジタル化に焦点を当てる。図 5.2 に示すように設計変更の自由度と品質・コストの確定度の 8 割は設計段階で決まるため、エンジニアリングチェーンの重要性が指摘されてきた。そのため、他との連携時に発覚するような設計変更の要請が後々になって発生するほどコストが高くなり、いわゆる出戻り設計の負担が大きくなることが懸念される。そこでできるだけ開発の初期段階であるエンジニアリングチェーンに資源を集中する、すなわち「フロントローディング」において問題の早期発見と品質向上を行うことで、後工程での出戻りによるムダを少なくすることが重要となってくる[1] (図 5.3)。

電動機駆動システムで言えば、ハードの電磁気的なモータ設計のみならず冷却設計、振動・騒音設計や制御回路設計などトータルな設計検討を早い段階で行い、問題の発見や仕様変更に対する対応などが早期にできるようになることが望ましい。このような背景のもと、解決策の一つとして、モデルベース開発が近年注目されている。

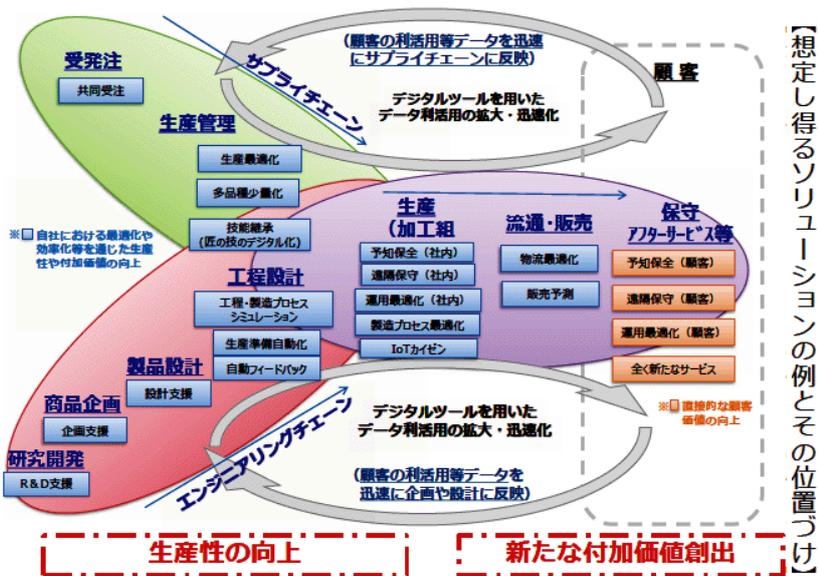


図 5.1 想定し得るソリューションの例とその位置づけ
(出典: [経済産業省ウェブサイト](#) [1])

Fig. 5.1. Examples of possible solutions and their positioning.
(reference: [Ministry of Economy, Trade and Industry](#))

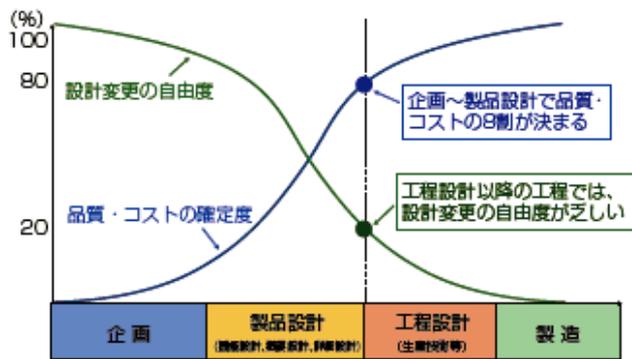


図 5.2 仕様変更の自由度と品質・コストの確定度
(出典: [経済産業省ウェブサイト](#) [2])

Fig. 5.2. Freedom to change specifications and definiteness of quality and cost.
(reference: [Ministry of Economy, Trade and Industry](#))

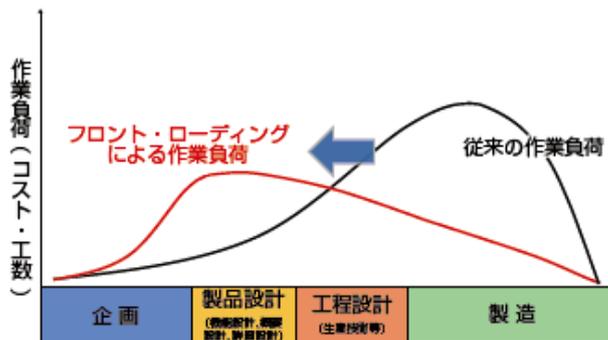


図 5.3 フロントローディングによる作業負荷の軽減
(出典: [経済産業省ウェブサイト](#) [1])

Fig. 5.3. Reduced workload due to front loading.
(reference: [Ministry of Economy, Trade and Industry](#))

5.2 Model Based Design の現状と課題

Model Based Design (MBD) は、自動車業界から普及が始まったとされている。そのきっかけとして1990年代の排出ガス規制があり、さらなる電子制御化が進む過程で、試作品を作って実験を繰り返す実機ベースのトライアンドエラーを繰り返す開発プロセスではリードタイムがどうしても長くなり開発効率も悪くなることが問題となっていた。そこでモデルを作ってコンピュータシミュレーションを行い、成果が出たものから実装したりモデル同士での連携を評価したりできるシステムを構築し、システム全体の開発の効率化・短時間化を図る手段として MBD が開発された[2] (図 5.4)。この考え方は図 5.3 のフロントローディングに適合し、主要な手法となっている。もともとはCAEとは別の観点、すなわちモデルを活用して制御や動作、製品の妥当性の検証に焦点を当てた、モデル基盤での開発・検証システムのことを意味している。2010 年前後からこれに拍車がかかり、制御対象となるプラントモデル、すなわちエンジンやモータなども制御や動作と連携可能な MATLAB/Simulink や Modelica などと親和性がある 1D モデルが要望され、等価回路モデルや解析結果を流用するビヘイビアモデルの開発が進み、主に図 5.4 の High Level Design で使用されている。これは MILS (Model-in-the-loop Simulation) と呼ばれる。他にも Software integration で行われる SILS (Software-in-the-loop Simulation) や System integration で行われる HILS (Hardware-in-the-loop Simulation) などがあるが、近年出戻りを少なくするために MILS での検討項目の増加、精度向上が期待されている。

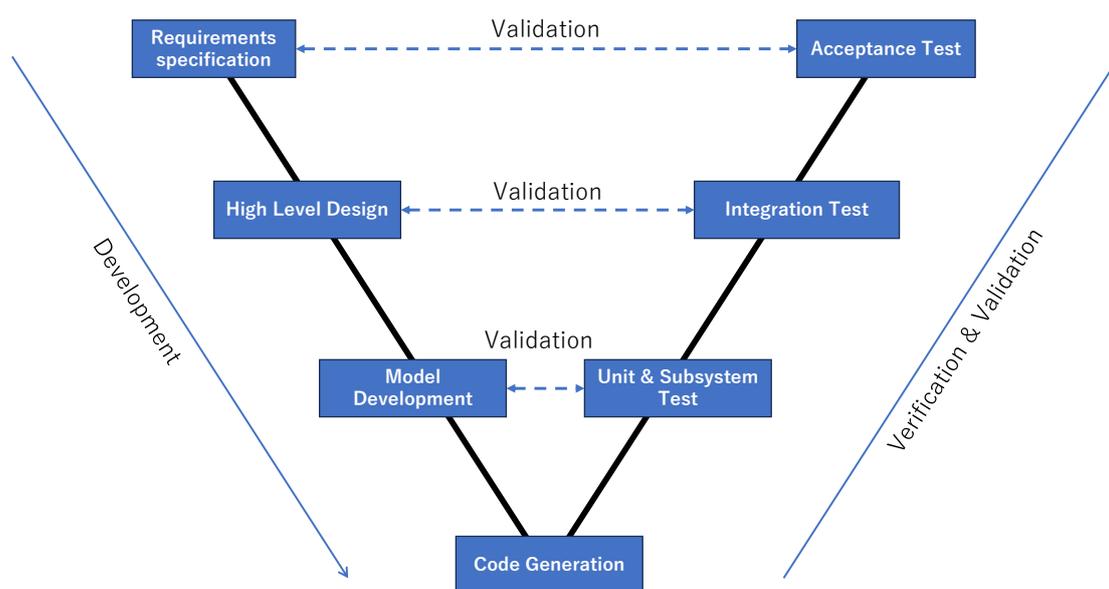


図 5.4 モデルベース開発
Fig. 5.4. Model-Based Development.

5.3 プラントモデルの現状と課題

プラントモデルは主に MILS で使用されるもので、図 5.5 に示すように一般的にはコントロールモデルで制御される制御対象をモデル化したものである。MILS は設計段階で行われ、例えばモータ制御システムで言えば、コントロールモデルが制御とインバータシステム、プラントモデルがモータであり、操作量として電圧が渡され、状態量として電流と回転角度、トルクなどがフィードバックされる。従来は別々に設計され、実機ベースで動作確認してフィードバックを行っていたが、手間も出戻りも多いため、事前にモデルベースでの検討を行うことで出戻りを少なくすることが目的となる。これを拡大して一般化しようとする試みが、国内では MBD 推進センター (Japan Automotive Model-Based Engineering center : JAMBE) [3] によって行われている。JAMBE では、経済産業省「次世代自動車等の開発加速化に係るシミュレーション基盤構築事業 (2018 年-2020 年)」および MBD 推進センターにおいて作成されたモデルインターフェースガイドライン、ガイドライン準拠モデル、解説書を公開している[3]。対象を車両とシステム、その下に燃費やトランスミッション、電動化などの対象に細分し、ガイドラインや準拠モデルを公開している。このように対象を決めてコントロールモデルとプラントモデルを切り分けて考えることができる場合は、非常に有効なアプローチであると言える。しかしながら、対象を広げて一般的に利用しようとする課題も見えてくる。例えば、動力伝達システムは共通の操作量を使用してシステムをくみ上げることが可能であるのに対し、熱性能モデルでのモータは一定の発熱源として取り扱われることが多い。モータ自身の電磁気的な損失は熱の時定数からすると極めて短いため、このような近似を仮定していると思われるが、加速時や減速時などは過渡的に発熱量が変わるため、モータ内の熱抵抗や熱容量によって温度上昇が起こると思われる。これはモータ内部を熱等価回路としてモデル化されることが多いが、プラントモデルとして他の熱性能モデルと連携して評価される事例はまだ少なく、今後の課題といえる。

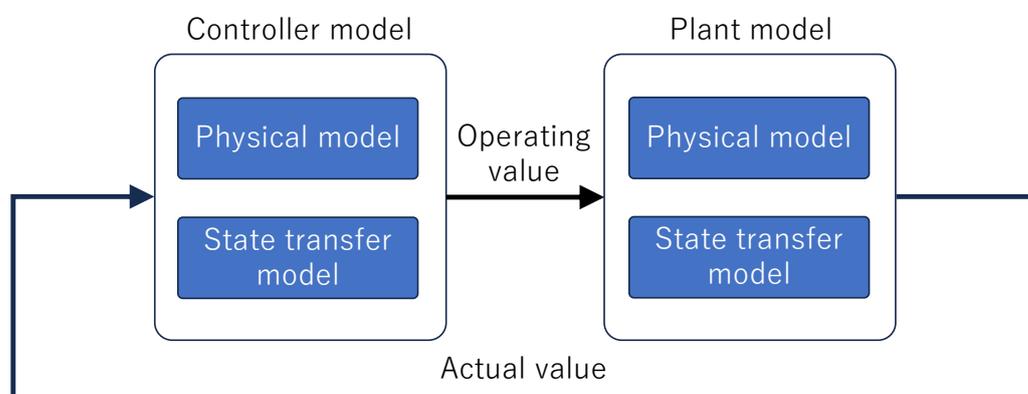


図 5.5 コントロールモデルとプラントモデル
Fig. 5.5. Controller model and plant model.

5.3.1 1D モータモデルの必要性と課題

インバータ駆動によりモータの可変速運転が可能になったことから、PM モータの制御の重要性が高まり、制御設計を行う際に簡易な線形モータモデルでは制御パラメータの合わせこみが実機と乖離するため、磁気非線形性を考慮した PM モータモデルの要望が強くなっている。当初、電磁界解析と制御回路を直接連携解析する手法が検討されたが、電磁界解析の計算負荷が高すぎるため、制御回路の設計に使用することは難しいことが示された。そのため、磁気非線形性だけでなく空間高調波（スロット高調波）も考慮可能な高精度 PM モータモデル（ビヘイビアモデル、1D モータモデル）が提案され、MBD におけるプラントモデルとして使用されてきている[4]。ビヘイビアモデルは電磁界解析結果のインダクタンスと磁石磁束、もしくはコイル鎖交磁束をテーブルデータとして使用し、モータの電圧方程式中のインダクタンスもしくはコイル鎖交磁束を電流や回転角度の依存した非線形素子として扱うことで、電磁界解析結果と同等の精度を確保しようとするものである。すなわち、電磁界解析において実機相当の計算精度が担保できている場合、プラントモデルとして十分精度の高いモータモデルを使用することができることになる。これにより、モータ設計とモータ制御を同時進行することができ、MILS での評価も可能となる。

ビヘイビアモデルは計算負荷の小ささから、モータの特性として重要な効率マップの作成にも用いられる。効率マップにはコイル銅損はもちろん鉄損も考慮しなければならないため、簡易的にはスタインメッツの実験式を基にした手法[5]を使用し、鉄損係数を用いて運転時の周波数に基づき算出されることが多い。しかしながら、高周波になると表皮効果などの影響により、渦電流損が周波数の二乗に比例した値よりも小さくなることが知られており、電磁界解析では後処理一次元解析などにより解析精度を担保するなどの工夫がなされている。また、これを簡易的にビヘイビアモデルに組み込む方法も提案されている[6],[7]。通常の電磁界解析は計算負荷の小さい二次元解析が行われることが多いが、コイル端部の漏れ磁束の考慮や磁石渦電流損の考慮などが難しいとされていた。近年、これらを簡易的に考慮する方法が提案され、高精度化が可能となってきている[8]。しかしながらまだ検討余地はあり、さらなる検討に期待したい。

このようにモータ単体の性能評価としてビヘイビアモデルは使用されているが、例えば騒音・振動のプラントモデルとしての評価例はまだ見当たらない。筆者らは文献[9]にてビヘイビアモデルにティースのラジアル力も出力できることを示しているが、これを用いた制御による騒音・振動低減対策はまだ取り組めておらず今後の課題である。また、コイル銅損や鉄損、磁石渦電流損などを発熱源として熱等価回路との連成解析も検討されつつある。近年ではサーマルマネージメントシステムとして、モータだけでなく、インバータやバッテリー、ラジエータなどの発熱源と冷却装置を丸ごと考慮した熱の有効利用が提案されつつあるが、

熱のような物理量をプラントモデルに落とし込むには従来の電気ベースとは時定数が大きく異なるため、熱連携によるサーマルマネジメントシステムを検討したい場合、モータの時間平均発熱を受け渡し熱抵抗と熱容量の等価回路表現として連携解析されることが多い。モータの加速時のような過渡状態をモデル化しようとする、モータの磁界解析を時々刻々に行い、回転角度ごとに発生する発熱量を受け渡し、その時間ステップで熱等価回路を解くことが精度向上に必要だと考えられるが、計算負荷が高くなることもあり、そこまで検討されている事例はなく、今後の展開に期待したい。

本研究の成果の適用先として考えられるのが、上記で述べた損失、もしくは騒音・振動を考慮したビヘイビアモデルの考慮方法において、通常の有限要素解析との検証解析として dq-TP-EEC 法を使用することが考えられる。また、ビヘイビアモデルで算出した運転ポイントにおいてより高精度に損失を評価したい場合に dq-TP-EEC 法により高速に定常解を求めることもできると思われる。

5.3.2 パワーエレクトロニクス素子の 1D モデル化への展開

パワーエレクトロニクスシステムに使用される素子の多くは RLC などにより集中定数化して表現され、電気回路シミュレータにより評価される。PCB (printed circuit board) などの基板上の配線などによる EMI (electromagnetic interference) や EMC (electromagnetic susceptibility) を対象として、高周波シミュレータなどにより評価されることも一般的になっている。これらの多くは素子が線形であることを仮定しており、磁気素子でない場合は実測値ともよく一致すると言われている。一方、磁気コアなどを使用する磁気素子においては、コアの損失や多数巻線、多数配線からなるコイルの損失とそれからの漏れ磁束による損失などが実際には発生し、発熱量が大きくなることから近年問題視されている。理由としてスイッチング周波数の飛躍的な上昇に対し、高周波に対応した磁気コアの設計対応が遅れていることが指摘されている。さらに磁気コアの磁気非線形性を考慮したモデル化や、主に渦電流による交流抵抗、寄生容量などを、より実機に近い特性で表現可能なプラントモデルが望まれているが、未だ研究段階であると言える。また近年、実測値との合わせこみとして、ラダー回路ベースの等価回路が提案されており、周波数領域において実測結果との比較が行われ始めている[10]。プラントモデルとしての等価回路モデルにて、RLC のラダー回路を構築し、RLC 直列・並列共振を模擬する試みであるが、未だ研究段階である。

これらの課題に対し、本論文の成果である改善 Darwin model による準静電磁界解析を適用することで、渦電流による表皮効果や寄生容量の効果を含めた様々な条件下での計算が可能になり、その結果を基にしたプラントモデルの考案に展開できると考えられる。

5.4 まとめ

本章では、近年提案されているデジタルトランスフォーメーションからモデルベース開発に至る展開と課題、電動機駆動システムのモデルベース開発への展望と課題、本研究の成果の適用先についてまとめた。電磁界解析を用いて最適化設計されたモータが、他の物理現象との連携、例えば騒音・振動や熱性能（冷却性能）でも開発の早い段階で仕様を満たし、さらには仕様変更に対応していくには、1Dモデル化が必須と思われる。PMモータについては制御設計で使用可能な1Dモータモデルが提案され使用されているが、電動機駆動システムとして捉えた場合、すなわち騒音・振動や熱性能（冷却性能）との連携を考えた場合、まだ不十分であることを示した。本研究の成果の適用先として、損失、あるいは騒音・振動を考慮したビヘイビアモデルの検証解析として有限要素解析の高速定常解析へのdq-TP-EEC法の活用が考えられる。

また、パワーエレクトロニクスの磁気素子の1Dモデル化により精度向上とコスト削減ができる可能性を示した。この課題に対して本研究の成果である改善 Darwin model による準静電磁界解析を適用することで、渦電流による表皮効果や寄生容量の効果を含めた様々な条件下での計算が可能となり、その結果を基にしたプラントモデルの作成に展開できると考えられる。

参考文献

- [1] “[第 3 節 製造業の企業変革力を強化するデジタルトランスフォーメーション \(DX\) の推進](#)”, 経済産業省, 2023/09/30 accessed.
- [2] “[MBDとは?](#)”, IDAJ, 2023/09/30 accessed.
- [3] “[MBD 推進センター](#)”, 2023/09/30 accessed.
- [4] H. Kaimori, K. Akatsu, “Behavior Modeling of Permanent Magnet Synchronous Motors Using Flux Linkages for Coupling with Circuit Simulation,” *IEEJ Journal of Industry Applications* 7(1):55-63, January 2018, DOI: 10.1541/ieejia.7.56
- [5] 回転機の三次元電磁界解析高度化調査専門委員会：「回転機の電磁界解析高度化技術」, 電学技報, 第 942 号 (2004)
- [6] 習田祐作・高橋康人・藤原耕二：「キャリア高調波を考慮した永久磁石同期モータのビヘイビアモデル」, 電学論 D, vol. 139-D, no. 11, pp. 939-946 (2019)
- [7] 辻川昌太郎・高橋康人・藤原耕二：「高調波損失を考慮した永久磁石同期モータのビヘイビアモデルにおける鉄損算出精度向上」, 電学論 D, vol. 142-D, no. 4, pp. 299-308 (2022)
- [8] 首藤大輔・高橋康人・藤原耕二：「高調波鉄損および永久磁石渦電流損を考慮した永久磁石同期モータのビヘイビアモデルに関する検討」, 電学静止器・回転機合同研資, SA-19-87/RM-19-107 (2019)
- [9] 貝森弘行, 酒井祐樹, 二重三相永久磁石同期モータビヘイビアモデルを使用したティースのラジアル力評価方法に関する検討, 電学静止器・回転機合同研資, SA-21-015, RM-21-015 (2021)
- [10] Y. Sato, D. Ishii, H. Matsumoto, H. Igarashi, “Homogenized Finite Element Analysis for Multi-Turn Coils Considering Parasitic Capacitances,” *IEEE Trans. Magn.*, (Early Access), 2023, doi: 10.1109/TMAG.2023.3312070.

第 6 章 結論

6.1 本研究の成果

CAE 技術の一つである電磁界解析の電動機駆動システムへのさらなる活用と実用化に向けて、本研究ではモータの高速定常解析の新たな手法の開発と、主にパワーエレクトロニクスにおける磁気素子の解析に焦点を当てた Darwin model を基礎として安定化改善を図った新たな手法の開発を行い、それらの有用性について示した。

第 2 章では、電動機駆動システムにおける数値解析の困難性について説明したのち、第 4 章で説明する Darwin model の導入部として、様々な近似の仮定の下での有限要素解析で使用する定式化について説明した。

第 3 章では、モータの高速定常解析の新たな手法として回転同期座標系での TP-EEC 法 (dq-TP-EEC 法) を開発し、その有効性と適用方法について簡易モデルを用いて実証した。有用性としては実機レベルの PM モータモデルを用いて、正弦波電圧源解析では 1 ステップの補正で定常解を素早く求めることができることを示した。提案手法を適用する際の留意点として、補正区間については 1/3 や 1/2 周期補正では有効性がないことを理論的に説明し、多相交流簡易 TP-EEC 法 (PTP-EEC 法) と同等の補正周期 (三相交流の場合 1/6 周期)、もしくはそれ以下の補正周期で効果的な補正が可能であることを示した。さらには直流重畳して運転される PM モータを対象に、従来の簡易 TP-EEC 法では補正が不可能な条件について、直流成分以外の補正は dq-TP-EEC 法にて補正可能であること、直流成分が十分小さい場合は初期値を求めておきリスタート計算にて素早く定常解を求めることが可能であることを示した。

第 4 章では、主にパワーエレクトロニクスにおける磁気素子を解析対象として、従来の Darwin model の定式化においてクーロンタイプゲージの必要性について明らかにし、 Darwin model の新たな方程式を導出した。さらに、従来のゲージ関数に似た冗長変数を導入した方程式を提案し、周波数領域および時間領域で離散化した定式化を示した。検証解析としてインダクティブが主なモデル、キャパシティブが主なモデルを用いて、手法の妥当性を解析解と Full wave 解析の結果と比較することで実証した。また、補助変数なしの定式化において高周波領域で反復法の反復回数が増大してしまう問題が指摘されていたが、冗長変数を導入することで改善できることを示した。LC が並列に接続されたモデルでは、インダクタンスおよびキャパシタンスの両方が影響する系でも周波数領域解析と時間領域解析いずれの結果も良い一致を見せ、提案手法の妥当性を実証した。最後に PCB ベースのダブルレイヤースパイラルインダクタモデルを用い、時間領域において台形波電圧を印加した解析を行い、リング電流が計算可能であること、台形波電圧波形の立ち上がり、立ち下り時間の違いによる

リング電流への影響評価を行い、Darwin model の実機モデル、実機条件への適用可能性を明らかにした。

第 5 章では、今後の展開として、デジタルトランスフォーメーションからモデルベース開発における電動機駆動システムにおける CAE に期待されていることと課題についてまとめた。モデルベース開発におけるプラントモデルの重要性について説明し、電磁界解析による高精度プラントモデルの作成がモデルベース開発をさらに加速させる可能性があることについて示した。その中でも 1D モータモデルの高精度化は期待が大きく、特に損失の考慮方法は未だ様々な手法が提案・検討されているため、有限要素解析による検証解析として dq-TP-EEC 法による高速定常解析が適用でき、貢献できると考えられる。またパワーエレクトロニクス素子の 1D モデル化も期待されており、改善 Darwin model による準静電磁界解析を用いることで、様々な条件下での計算が可能となり、その結果を基にしたプラントモデルの考案に寄与できる可能性があることを示した。

6.2 今後の課題と展望

本研究によりモータの高速定常解析を可能とする dq-TP-EEC 法、および Darwin model を基礎として抵抗、インダクタンス、キャパシタンスを考慮可能な解析手法を提案したが、より実用的に使用できる手法に向けて、以下に示す展開が考えられる。

(1) dq-TP-EEC 法の誘導電動機への適用

dq-TP-EEC 法は補正周期を任意に設定できるため、準定常周期解を持つ誘導電動機への効果的な適用が考えられる。

(2) 磁気コアを持つトランス、インダクタへの Darwin model の適用

Darwin model による磁気非線形性を考慮した解析が考えられる。また容量効果を評価するには従来の静磁界解析よりも高い周波数領域を対象としなくてはならず、導体中の表皮効果を考慮するためには多大な要素分割が必要となってくる課題が見えてきた。均質化法などによる要素数削減方法との組み合わせによる計算コストの削減が考えられる。

また、本研究の成果も踏まえた電磁界解析を基礎としたモデルベース開発への展開も、以下のような項目が考えられる。

(3) 誘導電動機の 1D モータモデル化

1D モータモデルでは、有限要素解析による定常解析結果をテーブルデータ化するため、dq-TP-EEC 法の誘導電動機への効果的な適用により、誘導電動機の 1D モータモデルの実現に大きく貢献できる可能性がある。

(4) 磁気コアを持つトランス、インダクタの 1D モデル化

Darwin model により磁気コアを持つトランス、インダクタを実用的な計算時間で解析可能となれば、計算結果を等価回路化でき、パワエレ回路設計やモデルベース開発への貢献が期待される。

謝辞

本論文をまとめるにあたり、主査として懇切丁寧なご指導頂いた早稲田大学 理工学術院 先進理工学部 電気・情報生命工学科 若尾真治教授に心から感謝し、お礼申し上げます。学位審査をしていただき、有益なご助言をいただいた早稲田大学 理工学術院 先進理工学部 電気・情報生命工学科 石山敦士教授、林泰弘教授、近藤圭一郎教授にも心から感謝し、お礼申し上げます。

学位取得にあたり、研究活動や論文発表などに関して、格別のご理解とご協力をいただきましたサイエンスソリューションズ株式会社に心より感謝と御礼を申し上げます。特に長年にわたり電磁界数値解析のみならず、研究の取り組み方、心構えなど多くのことをご指導賜りましたサイエンスソリューションズ株式会社 亀有昭久氏に心から深く御礼申し上げます。

本研究の遂行にあたり多大なるご助言、ご協力を頂きました同志社大学 理工学部 電気工学科 高橋康人教授、京都大学 工学研究科 電気工学専攻 美船健講師に深く感謝致します。

また電気学会 産業応用部門 回転機技術委員会ならびにその傘下の回転機電磁界解析に関する調査専門委員会では長年、著者の研究活動の中心として参加させて頂き、非常に多くのことを学ばせて頂きました。心より御礼申し上げます。

最後に、これまでの研究生活を私生活から支え、支援して頂いた妻 みどり、長女 あんな、長男 彪悟に心から感謝致します。

研究業績

種類別	題名, 発表・発行掲載誌名, 発表・発行年月, 連名者 (申請者含む)
○論文	<u>Hiroyuki Kaimori</u> , Takeshi Mifune, Akihisa Kameari, Shinji Wakao, Low-Frequency Stabilized Formulations of Darwin Model in Time-Domain Electromagnetic Finite-Element Method, in IEEE Transactions on Magnetics, (Early Access) doi: 10.1109/TMAG.2023.3304998.
○論文	<u>Hiroyuki Kaimori</u> , Yasuhito Takahashi, Shinji Wakao, Steady-State Analysis of Electric Machines Using the TP-EEC Method Based on Time-Periodic Conditions in a Rotational Reference Frame, IEEJ Journal of Industry Applications 11(3), May 2022, DOI: 10.1541/ieejia.21008445
○論文	<u>Hiroyuki Kaimori</u> , Takeshi Mifune, Akihisa Kameari, Investigation of Darwin Model with Two Types of Coulomb Gauge Condition in Frequency-Domain Electromagnetic Finite-Element Method. In: Ehrhardt, M., Günther, M. (eds) Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2021. ECMI 2021. Mathematics in Industry, vol 39. Springer, Cham. (2022) https://doi.org/10.1007/978-3-031-11818-0_60
○国際会議 (査読あり)	<u>Hiroyuki Kaimori</u> , Takeshi Mifune, Akihisa Kameari, Shinji Wakao, Low-Frequency Stabilized Formulations of Darwin Model in Time-Domain Electromagnetic Finite-Element Method, IEEE the 24th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG), ID:133, May 2023
○国際会議 (査読あり)	<u>Hiroyuki Kaimori</u> , Yasuhito Takahashi, Steady-state Analysis of Electric Machines Using TP-EEC Method Based on Time-Periodic Condition in Rotational Reference Frame, 2020 IEEE 19th Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC), ID:567, Nov. 2020
○国際会議 (査読あり)	<u>Hiroyuki Kaimori</u> , Takeshi Mifune, Akihisa Kameari, Novel Application of Coulomb Gauge Condition in Electromagnetic FEM Computations for Darwin Approximation, 2020 IEEE 19th Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC), ID:989, Nov. 2020
国際会議 (査読なし)	<u>Hiroyuki Kaimori</u> , Takeshi Mifune, Akihisa Kameari, Darwin Model with Coulomb Gauge in Frequency-Domain Electromagnetic FEM Computation, 21st ECMI Conference on Industrial and Applied Mathematics, ID:378, Minisymposium Talks, April 2021
国内会議	<u>Hiroyuki Kaimori</u> , Quasi-static electromagnetic eddy current analysis based on Darwin model considering both inductance and capacitance effects, 第47回日本磁気学会学術講演会, S-4, 2023
国内会議	具森弘行, 美舩健, 亀有昭久, 若尾真治, 低周波安定化 Darwin 近似による時間領域有限要素解析の検討, 電気学会静止器回転機合同研究会資料, SA-23-002, RM-23-002, (2023)
国内会議	具森弘行, 若尾真治, 中山貴登, 準静電界解析による高周波対応複合誘電性材料の複素誘電率の算出に関する検討, 電気学会静止器回転機合同研究会資料, SA-22-059, RM-22-062, (2022)

種類別	題名, 発表・発行掲載誌名, 発表・発行年月, 連名者(申請者含む)
国内会議	貝森弘行, パワエレ用磁気素子のコイル寄生容量の電磁界解析に関する研究, 電気学会全国大会, S13-7, (2022)
国内会議	貝森弘行, 美舩健, 亀有昭久, Darwin 近似のための補助変数を使用したクーロンゲージによる有限要素電磁界解析の検討, 電気学会静止器回転機合同研究会資料, SA-21-007, RM-21-007, (2021)
国内会議	貝森弘行, 高橋康人, 同期回転座標系での時間周期条件に基づく TP-EEC 法を用いた周期定常解析の高速化, 電気学会静止器回転機合同研究会資料, SA-20-025, RM-20-025, (2020)
国内会議	貝森弘行, 亀有昭久, Darwin 近似によるキャパシタンス・インダクタンス効果を考慮した電磁界解析, 電気学会静止器回転機合同研究会資料, SA-20-047, RM-20-071, (2020)