非線形放物型方程式系と関連する
楕円型方程式系の研究

(研究課題番号 09640228)

平成9・10・11年度科学研究費補助金　基盤研究 (C)(2)
研究成果報告書

平成１２年３月

研究代表者　山田　義雄
(早稲田大学理工学部教授)

はしがき

本報告書は平成９・１０・１１年度科学研究費補助金　基盤研究　（C）（2）
「非線形放物型方程式系と関連する楕円型方程式系の研究」
(研究課題番号 09640228)
の研究成果報告書である。本研究の研究組織および研究経費は次の通りである。

研究組織

研究代表者　山田　義雄　(早稲田大学理工学部教授)

研究分担者　堤　正義　(早稲田大学理工学部教授)
大谷　光春　(早稲田大学理工学部教授)
田中　和永　(早稲田大学理工学部教授)
垣田　高夫　(早稲田大学理工学部名誉教授)
小島　清史　(早稲田大学理工学部教授)
草間　時武　(早稲田大学理工学部教授)
鈴木　武　(早稲田大学理工学部教授)
西原　健二　(早稲田大学政経学部教授)
四ツ谷　晶二　(龍谷大学理工学部教授)
伊藤　正幸　(徳島大学総合科学部教授)
伊藤　達夫　(東海大学理学部助教授)
菱田　俊明　(新潟大学工学部講師)
廣瀬　宗光　(東京大学大学院数理科学研究科学振研究員)
中島　主恵　(早稲田大学理工学部助手)
竹内　慎吾　(早稲田大学大学院理工学研究科学振研究員)

ただし、上記分担者のうち垣田高夫(平成９年度)、伊藤達夫(平成９・１０年度)、菱田俊明(平成１０・１１年度)、竹内慎吾(平成１１年度）は括弧内年度の研究分担者である。

研究経費

平成９年度	１，４００ 千円
平成１０年度	１，０００ 千円
平成１１年度	１，１００ 千円
計	３，５００ 千円

研究発表

本研究の成果の一部は Nonlinear Analysis Theory, Funkcialaj Ekvacioj, Advances in Mathematical Sciences and Applications などの論文誌に出版または出版予定となっている。また，日本数学会、国内の研究集会や国際会議における講演によっても研究成果の公表がなされている。

最後に本研究を遂行するにあたって、各方面からいただいた多大な援助に対して深く感謝の意を表したい。

目次

総括

早稲田大学・理工学部・教授　　山田　義雄

研究代表者　山田義雄は研究課題

「非線形放物型方程式系と関連する楕円型方程式系の研究」

について研究分担者と協力して、以下の３っつのテーマについて集中的に研究を行った。

- （１）cross-diffusion 項を含む反応拡散方程式系の解析
- （２）p ラプラシアン項と反応項からなる準線形放物型方程式の解析
- （３）sublinear term を含む半線形放物型方程式

（１）反応拡散方程式は数理生態学，化学反応論などの分野で見られる、興味深い非線形ダイナミクスを提供する題材である。ここで扱う問題は Lotka-Volterra 型の競合関係をモデルとする反応項と cross-diffusion 項と呼ばれる準線形拡散項からなる方程式系

$$\begin{cases} u_t = \mu\Delta\{(1+\alpha_{11}u+\alpha_{12}v)u\} + u(1-u-cv) & \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ v_t = \nu\Delta\{(1+\beta_{11}u+\beta_{12}v)v\} + v(1-du-v) & \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ u = v = 0 \qquad (\text{または} \quad \partial u/\partial n = \partial v/\partial n = 0) & \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0(\geq 0), v(\cdot,0) = v_0(\geq 0) & \text{in} \quad \Omega, \end{cases}$$

(ただし Ω は R^N の有界領域で $\partial\Omega$ はその境界、$\alpha_{ij}, \beta_{ij}, c, d$ は正定数）に対する非定常問題、および対応する定常問題である。上の非定常問題については時間大域解を構成することが重要なテーマであるが，まだ十分満足がいく結果は得られていない。そのなかで、空間次元が２以下の場合において時間大域解が存在するための新しい十分条件を導くことができた（論文 [4])。また Dancer によって開発されてきた、 positive cone の上の完全連続作用素に対する写像度理論を用いて、正値定常解が存在するための十分条件を導くことができた。さらにいかなる場合に正値解が複数個存在するかについても、写像度理論と分岐理論を組み合わせることにより、従来知られていなかった結果を示すことができた（論文 [1],[5])。なお、定常問題の研究で展開されたアイデア・技法の本質的部分は本書中

"Multiple Coexistence States for Lotka-Volterra Competition Model with Diffusion"

において解説した。

（2） ここで扱われた問題は

$$\begin{cases} u_t = \lambda\Delta_p u + |u|^{q-2}u(1-|u|^r) & \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega, \end{cases}$$

($\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p \geq 2, q \geq 2, r > 0$) である。特に $p=2$ のケースは Chafee-Infante 問題と呼ばれ，詳しく研究されている。本研究は $N=1, p>2$ の場合においては、非定常問題のみならず定常問題の解集合の構造について非常に詳細な情報が得られ、線形拡散の場合の結果との顕著な相違が見られることから研究が始まった。たとえば、p と q の大小関係に応じて、定常解集合の構造が大きく変化し、λ をパラメータとみたときの分岐構造は線形拡散のときとはまるで違った様相となること、個々の定常解のプロファイルにフラットハットと呼ばれる部分が現われ、これが解集合の構造を劇的に変える要因の一つであることなどである。空間次元が１の場合の結果は論文 [2] に詳しく述べられている。高次元のケースの解析は現在研究中であり、特に正値定常解に議論を限定するとかなり詳しい結果が示される。関連する成果などは研究分担者　竹内慎吾により

「ロジスティック項をもつ退化型反応拡散方程式の研究」

として本書で概説されている。

（3） このテーマは平成１１年度から研究を始めた課題である。対象とする方程式は

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{q-1}u + f(u) & \text{in} \quad \Omega\times(0,\infty), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(\cdot,0) = u_0(\geq 0), v(\cdot,0) = v_0(\geq 0) & \text{in} \quad \Omega, \end{cases}$$

である。ここで F は滑らかな関数、 $0<q<1$ である。q に対する仮定により、一般には対応する初期値問題に一意性が成立しなくなる。そこで初期値を非負値に限定したときにはどうなるか？調べることには意味がある。実際、非負値関数の範囲では一意性が成立することが示される（講演（国内）[7])。この結果は定常解集合の安定性の考察に威力を発揮すると予想される。

論文発表

[1] Y. Yamada; Coexistence states for some population models with nonlinear cross-diffusion, Forma **12**(1997), 153-166.

[2] S. Takeuchi and Y. Yamada; Asymptotic properties of a reaction-diffusion equation with degenerate p-Laplacian, to appear in Nonlinear Anal. TMA.
[3] A. Yoshida and Y.Yamada; Global attractivity of coexistence states for a certain class of reaction diffusion systems with 3×3 cooperative matrices, Adv. Math. Sci. Appl. **9** (1999), 695-706.
[4] T. Ichikawa and Y. Yamada; Some remarks on global solutions to quasilinear parabolic system with cross-diffusion, to appear in Funkcial. Ekvac.
[5] Y. Yamada; Coexistence states of Lotka-Volterra systems with cross-diffusion, to appear in "Operator Theory and Its Applications", The Fields Institute Communications **25**, the Proceedings of the International Conference of Operator Theory and Its Applications to Scientific and Industrial Mathamatical Problems, held in 1998 October, Winnipeg, Canada.

口頭発表 (国際会議)

[1] Yoshio Yamada; "Asymptotic properties of a reaction-diffusion equation with p-Laplacian", Seminar on applied Mathematics, University of Paderborn. (Oberseminars Angewandte Mathematik, Universität-Paderborn), Paderborn, Germany, July 1998.
[2] Yoshio Yamada; "Asymptotic behavior of a reaction-diffusion equation with a p-Laplacian", Groupe de Travail, Équations Elliptiques et Paraboliques non Linèaires, Laboratoire d'Analyse Numérique et Équations aux Dérivées Partielles, Université Paris-Sud, Paris, France, July 1998.
[3] Yoshio Yamada; "Coexistence states for Lotka-Volterra systems with cross-diffusion", International Conference on Operator Theory and Its Applications to Scientific and Industrial Mathematical Problems, Winnipeg, Canada, October 1998.
[4] Yoshio Yamada; "Lotka-Volterra competition models with cross-diffusion effects", Hiroshima Workshop '99 "Nonlinear Diffusion Equations and Related Topics", Hiroshima, January 1999.

口頭発表 (国内会議)

[1] 竹内慎吾，山田義雄；p-Laplacian を拡散項にもつ Chafee-Infante 問題，日本数学会年会，信州大，１９９７年４月
[2] 山田義雄; 非線形拡散モデルに対する定常問題の解析，蛯原幸義教授追悼研究集会，福岡大セミナーハウス，１９９７年７月．

[3] 吉田敦，山田義雄；Global attractivity of coexistence states for a certain class of reaction diffusion systems with 3×3 cooperative matrices, 第２３回発展方程式研究会, 千葉大学, １９９７年１２月.
[4] 大城英暉，山田義雄；Multiple coexistence states for Lotka-Volterra competition systems with diffusion, 第２４回発展方程式研究会，千葉大学，１９９８年１２月.
[5] 山田義雄；反応拡散方程式系の正値定常解の一意性と非一意性について，広島大学談話会，広島大学，１９９９年７月.
[6] 久藤衡介，山田義雄；Sublinear-superlinear type の非線形項を伴う楕円型および放物型方程式について，宮崎における夏の偏微分方程式セミナー，宮崎，１９９９年８月.
[7] 山田義雄；Sublinear term をもつ放物型方程式の解の一意性について,「非線形発展方程式とその応用」研究集会，京大数理解析研究所，１９９９年１０月.

MULTIPLE COEXISTENCE STATES FOR LOTKA-VOLTERRA COMPETITION MODEL WITH DIFFUSION

YOSHIO YAMADA

1. Introduction

This article is concerned with the following quasilinear parabolic system

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} u_t = k_1 \Delta u + u(a - u - cv) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ v_t = k_2 \Delta v + v(b - du - v) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0 & \text{in } \Omega, \end{cases}
$$

where Ω is a bounded domain in R^N with smooth boundary $\partial\Omega$, u_0, v_0 are given nonnegative functions in Ω and k_1, k_2, a, b, c, d are positive constants. This system is referred to the Lotka-volterra competition model with diffusion. In (1.1) u and v denote population densities of two competing species.

We are interested in positive stationary solutions for (1.1), that is a time-independent solution $\{u, v\}$ of (1.1) such that both u and v are positive in Ω. Such a solution is usually called a coexistence state. The existence, uniqueness and non-uniueness problem of coexistence states for (1.1) has been studied by many authors (see, [2],[3],[4],[8], [9],[10],[11],[12],[13], [14] [15],[16],[18] and the references therein). However, the results are still far from complete.

The main purpose of the present paper is to give some results on the multiple existence of coexistence states. After rescaling of u and v we are led to the following steady-state problem:

$$
(\mathrm{SP}) \qquad \begin{cases} \mu \Delta u + u(1 - u - cv) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \nu \Delta v + v(1 - du - v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u \geq 0, \quad v \geq 0 & \text{in } \Omega, \end{cases}
$$

where μ and ν are positive constants. Although non-uniqueness of coexistence states has been discussed in a pretty number of works such as [10], [11], [14], [12], [13], we do not have enough information about explicit conditions which assure multiple coexistence states. We will give some sufficient conditions on μ, ν, c, d for the multiple existence of coexistence states. Our method is based on the combination of the bifurcation theory and the theory of fixed point index for compact mappings in a positive cone.

Date: March 11, 2000.

Partially supported by the Grant-in-Aid for Science Research (No. 09640228), the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Japan.

The content of the present paper is as follows. In section 2 we will give some preliminary results on trivial and semi-trivial solutions of (SP), degree theory and sufficient conditions for the existence of coexistence states. Section 3 is devoted to the study of multiple coexistence states. Some numerical results are also given there.

2. Preliminary results

In this section we will collect some preliminary results which are fundamental to the study of coexistence states for (SP).

2.1. **Trivial solutions for (SP).** We begin with the following auxiliary problem for a semilinear elliptic equation:

$$\begin{cases} \mu\Delta w + w(1-w) = 0 & \text{in } \Omega, \\ w \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Let λ_1 be the least eigenvalue of

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

and let φ^* be the corresponding eigenfunction such that $\varphi^* > 0$ in Ω and $\|\varphi^*\| = 1$, where $\|\cdot\|$ denotes $L^2(\Omega)$-norm. In what follows, we use

$$\sigma^* = \frac{1}{\lambda_1}.$$

We have the following result for the existence of positive solutions for (2.1).

Lemma 2.1. (i) *If $\mu \geq \sigma^*$, then (2.1) has no nontrivial solutions.*
(ii) *If $0 < \mu < \sigma^*$, then there exists a unique positive solution φ_μ such that $\varphi_\mu(x)$ is strictly decreasing with respect to μ for every $x \in \Omega$.*
(iii) *$\mu \to \varphi_\mu$ is a C^1-mapping from $(0, \sigma^*)$ to $C_0(\overline{\Omega})$, where $C_0(\overline{\Omega})$ denotes the space of all continuous functions u in $\overline{\Omega}$ such that u vanishes on $\partial\Omega$.*
(iv) $\lim_{\mu\to\sigma^*} \varphi_\mu = 0$ *uniformly in Ω. More precisely,*

$$\varphi_\mu = \frac{\lambda_1(\sigma^* - \mu)}{m_0}\varphi^* + o(\sigma^* - \mu) \qquad \text{as} \quad \sigma^* - \mu \to 0, \tag{2.2}$$

where $m_0 = \int_\Omega \varphi^*(x)^3 dx$.
(v) *For any compact subset F in Ω,* $\lim_{\mu\to 0} \varphi_\mu = 1$ *uniformly in F.*

Proof. Assertions of (i), (ii), (iv) and (v) come from [8, Lemma 1] or [14, Propositions 6.1-6.4]. The continuity of $\mu \to \varphi_\mu$ can be proved in the same way as the proof of [2, Lemma 3.1]. In order to show the C^1-dependence, it is sufficient to observe

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\mu} = -\frac{1}{\mu}[-\mu\Delta + (2\varphi_\mu - 1)I]^{-1}\{\varphi_\mu(1-\varphi_\mu)\}, \tag{2.3}$$

where $[-\mu\Delta+(2\varphi_\mu-1)I]^{-1}$ denotes the inverse of $-\mu\Delta+(2\varphi_\mu-1)I$ with zero Dirichlet boundary condition and is a strictly order-preserving mapping; so that (2.3) also implies $\partial\varphi_\mu/\partial\mu < 0$ in Ω. □

It follows from Lemma 2.1 that (SP) admits, in addition to the trivial solution $T_0 := \{0, 0\}$, two semi-trivial solutions

$$T_1 := \{\varphi_\mu, 0\} \quad \text{for} \quad 0 < \mu < \sigma^* \quad \text{and} \quad T_2 := \{0, \varphi_\nu\} \quad \text{for} \quad 0 < \nu < \sigma^*.$$

Moreover, it is well known that (SP) has no positive solutions for $\mu \geq \sigma^*$ or $\nu \geq \sigma^*$.

2.2. **Degree theory.** In this subsection we will summarize the index theory on a positive cone, which has been developed by Amann [1] and Dancer [7], [8] to study positive solutions for nonlinear elliptic equations.

Let K be a positive cone in $C_0(\overline{\Omega})$ defined by $K = \{w \in C_0(\overline{\Omega}); w \geq 0 \text{ in } \Omega\}$. We set

$$E = C_0(\overline{\Omega}) \times C_0(\overline{\Omega}) \quad \text{and} \quad C = K \times K.$$

We will look for non-trivial solutions of (SP) in C. For this purpose, it should be noted that any positive solution $\{u, v\}$ of (SP) satisfies

$$0 < u \leq 1 \quad \text{and} \quad 0 < v \leq 1 \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{2.4}$$

For any given $m > 0$, it is well known that $(-\mu\Delta + mI)^{-1} : C_0(\overline{\Omega}) \to C_0(\overline{\Omega})$ is a compact and order-preserving operator. By (2.4) any solution of (SP) lies in

$$D = \{\{u, v\} \in E; u < 2, v < 2 \quad \text{in} \quad \Omega\} \cap C$$

and not on the boundary ∂D (with respect to the relative topology in C). We define a mapping $A : D \to E$ by

$$A(u, v) = \{(-\mu\Delta + mI)^{-1}[(m + 1 - u - cv)u], (-\nu\Delta + mI)^{-1}[(m + 1 - du - v)v)]\},$$

where m is a positive number satisfying $m \geq \max\{2c+1, 2d+1\}$. It is easy to see that A is a compact operator of class C^1 and maps D into C. Moreover, $\{u, v\}$ is a solution of (SP) if and only if it is a fixed point of A in C. Since A has no fixed points on ∂D, one can define the index of A for each fixed point in D and $\deg_C(I - A, D, 0)$ (see [1] and [7]). We have the following important relation provided that any fixed point of A in D is isolated:

$$\deg_C(I - A, D, 0) = \sum_{\{U,V\} \in S} \operatorname{index}_C(A, \{U, V\}), \tag{2.5}$$

where S denotes the set of all fixed points of A in D. If μ and ν are regarded as positive parameters, then $\deg_C(I - A, D, 0)$ has the property of homotopy invariance with respect to μ and ν because A has no fixed fixed points on ∂D.

Lemma 2.2. *For each $\mu, \nu > 0, \deg_C(I - A, D, 0) = 1$.*

Proof. Observe that (SP) has no solutions other than $T_0 = (0, 0)$ for $\mu, \nu \geq \sigma^*$. So it is sufficient to see $\operatorname{index}_C(A, T_0) = 1$ for such μ, ν from the index formula due to Dancer [7]. The homotopy invariance yields the assertion. □

We can also show the following results for indices of trivial and semi-trivial solutions of (SP).

Lemma 2.3. *Let $0 < \mu, \nu < \sigma^*$. Then the following properties hold true.*
(i) $\mathrm{index}_C(A, T_0) = 0$.

(ii)
$$\mathrm{index}_C(A, T_1) = \begin{cases} 1 & \text{if } \nu > f(\mu), \\ 0 & \text{if } \nu < f(\mu), \end{cases}$$

where

$$f(\mu) = \sup\left\{ \int_\Omega (1 - d\varphi_\mu) w^2 dx \Big/ \int_\Omega |\nabla w|^2 dx; \;\; w \in H_0^1(\Omega), w \neq 0 \right\}. \tag{2.6}$$

(iii)
$$\mathrm{index}_C(A, T_2) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu > g(\nu), \\ 0 & \text{if } \mu < g(\nu), \end{cases}$$

where

$$g(\nu) = \sup\left\{ \int_\Omega (1 - c\varphi_\nu) w^2 dx \Big/ \int_\Omega |\nabla w|^2 dx; \;\; w \in H_0^1(\Omega), w \neq 0 \right\}. \tag{2.7}$$

Proof. The idea of the proof is the same as that for [17, Lemma 5] and based on the index formula [7] (see also [15]).

□

2.3. **Existence of coexistence states.** We are now ready to state an existence result of coexistence states for (SP).

Theorem 2.1. *Define*

$$\Gamma^+ = \{(\mu, \nu) \in (0, \sigma^*) \times (0, \sigma^*); \nu < f(\mu) \;\; \text{and} \;\; \mu < g(\nu)\},$$
$$\Gamma^- = \{(\mu, \nu) \in (0, \sigma^*) \times (0, \sigma^*); \nu > f(\mu) \;\; \text{and} \;\; \mu > g(\nu)\},$$

and set $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$. If $(\mu, \nu) \in \Gamma$, then (SP) *has at least one coexistence state.*

Remark 2.1. Theorem 2.1 is essentially due to Dancer [8],[9]. Related existence results are found in the works of Blat-Brown [2], Li-Logan [15] and Eilbeck-Furter-López-Gómez [12]. The proof of the above result can be done by contradiction. Indeed, if (SP) has no coexistence states for $(\mu, \nu) \in \Gamma^+$, then it follows from (2.5) and Lemma 2.3 that

$$\deg_C(I - A, D, 0) = \mathrm{index}_C(A, T_0) + \mathrm{index}_C(A, T_1) + \mathrm{index}_C(A, T_2) = 0,$$

which contradicts to Lemma 2.2. The other case can be discussed in a similar manner.

We will indicate Γ explicitly in $\mu\nu$-plane. For this purpose, some properties of f and g are needed.

Lemma 2.4. *If f is defined by* (2.6), *then it has the following properties.*
(i) *f is a strictly increasing function of class C^1 in $(0, \sigma^*)$.*
(ii) $\lim_{\mu \to \sigma^*} f(\mu) = \sigma^*$ *and* $\lim_{\mu \to \sigma^*} f'(\mu) = d$.
(iii) $\lim_{\mu \to 0} f(\mu) = (1 - d)^+ \sigma^*$.

Proof. In order to prove (i) we will employ the argument in the proof of [19, Lemma 3.4]. We first observe that the supremum in (2.6) is attained by a positive function $w_\mu \in H_0^1(\Omega)$, which is normalized by $\|\nabla w_\mu\| = 1$. It follows from the definition that

$$
\begin{aligned}
f(\mu+h) &= \int_\Omega (1 - d\varphi_{\mu+h}) w_{\mu+h}^2 dx \geq \int_\Omega (1 - d\varphi_{\mu+h}) w_\mu^2 dx \\
&= \int_\Omega (1 - d\varphi_\mu) w_\mu^2 dx + d \int_\Omega (\varphi_\mu - \varphi_{\mu+h}) w_\mu^2 dx \qquad (2.8)\\
&= f(\mu) + d \int_\Omega (\varphi_\mu - \varphi_{\mu+h}) w_\mu^2 dx.
\end{aligned}
$$

Since a similar inequality to (2.8) holds true if μ and $\mu + h$ are exchanged, one can derive

$$
|f(\mu+h) - f(\mu)| \leq C \|\varphi_{\mu+h} - \varphi_\mu\|_\infty \tag{2.9}
$$

for some $C > 0$, where $\| \cdot \|_\infty$ denotes the supremum norm. Thus (2.9), together with Lemma 2.1, implies the Lipschitz continuity of f with respect to μ. It is easy to see $\lim_{\mu \to \sigma^*} f(\mu) = \sigma^*$ from (2.2) because $w_\mu \to w^*$ in $H_0^1(\Omega)$, where w^* satisfies $\mu^* \Delta w^* + w^* = 0$ in Ω and $\|\nabla w^*\| = 1$.

The Lipschitz continuity also means that $f(\mu)$ is differentiable for almost every $\mu \in (0, \sigma^*)$. Hence, making use of (2.8) we divide $f(\mu+h) - f(\mu)$ by $h > 0$ ($h < 0$) and let $h \to 0$. Then

$$
f'(\mu) = -d \int_\Omega \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \mu} w_\mu^2 dx \tag{2.10}
$$

for almost every $\mu \in (0, \sigma^*)$. By Lemma 2.1 the right-hand side of (2.10) is continuous in $\mu \in (0, \sigma^*]$; so that (2.10) is valid for every $\mu \in (0, \sigma^*]$. Clearly, (2.10) together with Lemma 2.1 yields $f'(\mu) > 0$ and

$$
\lim_{\mu \to \sigma^*} f'(\mu) = \frac{\lambda_1 d}{m_0} \int_\Omega \frac{(\varphi^*)^3}{\|\nabla \varphi^*\|^2} dx = d,
$$

where we have used $w^* = \varphi^* / \|\nabla \varphi^*\|$ and $\|\nabla \varphi^*\|^2 = \lambda_1$.

It remains to show (iii). From the monotonicity in (i) there exists a limit of $f(\mu)$ as $\mu \to 0$; so we put

$$
\lim_{\mu \to 0} f(\mu) = \nu^*.
$$

Since $\varphi_\mu \leq 1$ in Ω, it is easy to see $f(\mu) \geq (1-d)\|w\|^2 / \|\nabla w\|^2$ for all $w \in H_0^1(\Omega)$ and $\mu \in (0, \sigma^*)$; so that, in view of $\sup\{\|w\|^2/\|\nabla w\|^2; w \in H_0^1(\Omega)\} = \sigma^*$, we get

$$
\nu^* \geq (1-d)\sigma^*.
$$

Moreover, even if the set $\{x \in \Omega; d\varphi_\mu(x) > 1\}$ is non-empty, we can choose a suitable function $w \in H_0^1(\Omega)$ such that $\int_\Omega (1 - d\varphi_\mu) w^2 dx > 0$. This fact means $f(\mu) > 0$ for every $\mu > 0$. Therefore,

$$
\nu^* \geq \max\{(1-d)\sigma^*, 0\}. \tag{2.11}
$$

To prove the reverse inequality, we use a family $\{w_\mu\}$ again. Since $\|\nabla w_\mu\| = 1$, it follows from Rellich's theorem that there exists a sequence $\{\mu_n\} \downarrow 0$ such that $w_n =$

$w_{\mu_n}(n = 1, 2, 3, \cdots)$ satisfy

$$\begin{array}{lll} \lim_{n\to\infty} w_n = w_\infty & \text{strongly in} & L^2(\Omega), \\ \lim_{n\to\infty} \nabla w_n = \nabla w_\infty & \text{weakly in} & L^2(\Omega), \end{array}$$

for some $w_\infty \in H_0^1(\Omega)$. Note that $\|\nabla w_\infty\|^2 \le 1$. As in the proof of [17, Lemma A.1], one can prove

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (1 - d\varphi_{\mu_n}) w_n^2 dx = (1-d) \int_\Omega w_\infty^2 dx$$

by Lemma 2.1 and Lebesgue's dominated convergence theorem. Therefore,

$$\nu^* = (1-d)\|w_\infty\|^2. \tag{2.12}$$

If $0 < d < 1$, then (2.11) and (2.12) imply $w_\infty \neq 0$; so that it follows from (2.12) that

$$\nu^* \le \frac{(1-d)\|w_\infty\|^2}{\|\nabla w_\infty\|^2} \le (1-d)\sigma^*,$$

which, together with (2.11), yields the assertion. In case $d > 1$, (2.11) and (2.12) imply $w_\infty = 0$, which shows $\nu^* = 0$. Thus we complete the proof. □

Clearly, an analogous result holds for g.

Lemma 2.5. *If g is defined by (2.7), then it possesses the following properties.*
(i) *g is a strictly increasing function of class C^1 in $(0, \sigma^*)$.*
(ii) $\lim_{\nu\to\sigma^*} g(\nu) = \sigma^*$ *and* $\lim_{\nu\to\sigma^*} g'(\nu) = c$.
(iii) $\lim_{\nu\to 0} g(\nu) = (1-c)^+\sigma^*$.

In $\mu\nu$-plane we draw two curves s_1 and s_2 by

$$s_1 : \nu = f(\mu) \qquad \text{and} \qquad s_2 : \mu = g(\nu);$$

so that Γ is a region surrounded by s_1 and s_2. By virtue of Lemmas 2.4 and 2.5, Γ^+ is non-empty if $cd \le 1, (c,d) \neq (1,1)$ and Γ^- is non-empty if $cd > 1$. Moreover, if $cd > 1$ and $(c-1)(d-1) < 0$, then both Γ^+ and Γ^- are non-empty; that is, there exists at least one intersection point of s_1 and s_2 (see, Fig).

Remark 2.2. Although Theorem 2.1 gives a sufficient condition for the existence of coexistence states, Γ is not necessarily an optimal coexistence region. We can give an example such that (CP) has a coexistence state for (μ, ν) outside Γ . See Remark 3.3.

3. Multiplicity of coexistence states

Although it is an important problem to study the uniqueness and non-uniqueness of coexistence states of (SP), the problem has a very delicate and difficult aspect as is stated in the works of Dancer [9],[10] (see also Blat-Brown [2] and Eilbeck-Furter-López-Gómez [12]). For the special case $\mu = \nu$, Cosner-Lazer [4] have proved that, if $c < 1$ and $d < 1$, then (SP) admits a unique coexistence state and that, if $c = d = 1$, then there exists a continuum of coexistence states for (SP). Moreover, Gui-Lou [14] have shown that, if $c > 1$ and $d > 1$, then the situation becomes more complicated and the uniqueness and non-uniqueness results depend on $\mu = \nu$. For unequal diffusion case, we have a little information about the non-uniqueness of coexistence states.

In this section we will exhibit some conditions under which (SP) has at least two coexistence states. For this purpose, we employ the local bifurcation theory due to Crandall and Rabinowitz [5] which will help us to get some important information. Especially, information about the direction of bifurcation will give us better understanding of multiple coexistence states. (As to the approach for (SP) by bifurcation theory, we refer to [2], [11] and [12]).

It is interesting to reconsider the preceding coexistence results from the view-point of bifurcation theory. Let $\mu \in (0, \sigma^*)$ be fixed and set $\nu^* = f(\mu)$. We will construct bifurcating solutions, which emerge from $\{\varphi_\mu, 0\}$ at $\nu = \nu^*$, by regarding ν as a bifurcation parameter. According to the local bifurcation theory [5], we first define a positive function Ψ_μ by

$$\begin{cases} \nu^* \Delta \Psi_\mu + (1 - d\varphi_\mu)\Psi_\mu = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Psi_\mu = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

and determine Φ_μ by

$$\begin{cases} \mu \Delta \Phi_\mu + (1 - 2\varphi_\mu)\Phi_\mu = c\varphi_\mu \Psi_\mu & \text{in } \Omega, \\ \Phi_\mu = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Since $(-\mu\Delta + (2\varphi_\mu - 1)I)^{-1}$ is a strongly order-preserving operator and Ψ_μ is positive in Ω, one can see $\Phi_\mu < 0$ in Ω from (3.2). We normalize Φ_μ and Ψ_μ so that they satisfy $||\Phi_\mu||^2 + ||\Psi_\mu||^2 = 1$. Let $p > N$ be fixed and set

$$X = \{W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\} \times \{W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\} \quad \text{and} \quad Y = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega).$$

By Sobolev's embedding theorem, $X \subset E = C_0(\overline{\Omega}) \times C_0(\overline{\Omega})$. We define a complement Z to linear space $\{\alpha\{\Phi_\mu, \Psi_\mu\}; \alpha \in \mathbf{R}\}$ in X by

$$Z = \{\{U, V\} \in X; \int_\Omega V \Psi_\mu dx = 0\}.$$

Using a new parameter ϵ we will construct positive solutions $(u, v, \nu) = (u(\epsilon), v(\epsilon), \nu(\epsilon))$, which bifurcate from $\{\varphi_\mu, 0\}$ at $\nu = \nu^*$, in the following form

$$\begin{cases} u(\epsilon) = \varphi_\mu + \epsilon(\Phi_\mu + U(\epsilon)), \\ v(\epsilon) = \epsilon(\Psi_\mu + V(\epsilon)), \\ \nu(\epsilon) = \nu^* + \alpha(\epsilon), \end{cases} \tag{3.3}$$

with $\{U(\epsilon), V(\epsilon)\} \in Z$. Substitution of (3.3) into (SP) yields the following system

$$\begin{cases} \mu \Delta U + (1 - 2\varphi_\mu)U - c\varphi_\mu V \\ \qquad - \epsilon(\Phi_\mu + U)\{\Phi_\mu + U + c(\Psi_\mu + V)\} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \nu^* \Delta V + (1 - d\varphi_\mu)V + \alpha\Delta(\Psi_\mu + V) \\ \qquad - \epsilon(\Psi_\mu + V)\{d(\Phi_\mu + U) + \Psi_\mu + V\} = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

with $U = V = 0$ on $\partial\Omega$. Denote the left-hand side of (3.4) by $F(U, V, \alpha; \epsilon)$ as a mapping from $Z \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ to Y. It is possible to show that the Fréchet derivative of F with respect to U, V, α at $(U, V, \alpha, \epsilon) = (0, 0, 0, 0)$ is an isomorphism from $Z \times \mathbf{R}$ to Y. Therefore, it follows from the implicit function theorem that there exists a unique function $(U(\epsilon), V(\epsilon), \alpha(\epsilon)) : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \to Z \times \mathbf{R}$ of class C^1 with some $\epsilon_0 > 0$ such that it satisfies (3.4) and $(U(0), V(0), \alpha(0)) = (0,0,0)$. Thus, recalling $\Phi_\mu < 0$ and $\Psi_\mu > 0$ in Ω we can obtain a family of positive solutions of (SP) for $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$:

$$\begin{cases} u(\epsilon) = \varphi_\mu + \epsilon\Phi_\mu + o(\epsilon), \\ v(\epsilon) = \epsilon\Psi_\mu + o(\epsilon), \\ \nu(\epsilon) = \nu^* + \nu_1(\mu)\epsilon + o(\epsilon). \end{cases} \tag{3.5}$$

The direction of bifurcation can be shown by the following lemma.

Lemma 3.1. *Let μ be fixed and let $\{u(\epsilon), v(\epsilon)\}$ be a family of positive solutions of* (SP) *with $\nu = \nu(\epsilon)$ of the form* (3.5). *Then it holds that*

$$\nu_1(\mu)\|\nabla\Psi_\mu\|^2 = -\int_\Omega \Psi_\mu^2(d\Phi_\mu + \Psi_\mu)dx.$$

Proof. With use of (3.5) it follows from the second equation of (3.4) that

$$\nu^*\Delta V(\epsilon) + (1 - d\varphi_\mu V(\epsilon) + \epsilon\nu_1\Delta\Psi_\mu - \epsilon\Psi_\mu(d\Phi_\mu + \Psi_\mu) = o(\epsilon) \quad \text{in} \quad \Omega \tag{3.6}$$

as $\epsilon \to 0$. Taking L^2-inner product of (3.6) with Ψ_μ leads us to

$$\epsilon\nu_1\|\nabla\Psi_\mu\|^2 + \epsilon\int_\Omega \Psi_\mu^2(d\Phi_\mu + \Psi_\mu)dx = o(\epsilon)$$

as $\epsilon \to 0$ (use (3.1)). Hence dividing the above identity by ϵ and letting $\epsilon \to 0$ we get the conclusion. □

Remark 3.1. Generally it is difficult to know the sign of $\nu_1 = \nu_1(\mu)$ in Lemma 3.1. However, we can get the direction of bifurcation in a special case where μ is sufficiently close to σ^*. Indeed, by studying the μ–dependence of φ_μ, Φ_μ and Ψ_μ, it is possible to show

$$\{\Phi_\mu, \Psi_\mu\} = \{-m_0 c\varphi^*, m_0\varphi^*\} + o(\sigma^* - \mu) \qquad \text{with some} \quad m_0 > 0 \qquad \text{as} \quad \mu \to \sigma^*.$$

Thus Lemma 3.1 implies

$$\lim_{\mu\to\sigma^*} \nu_1(\mu) = (cd - 1)m_1 \qquad \text{for some} \quad m_1 > 0.$$

Therefore, the direction of bifurcation of positive solutions from s_1 curve is supercritical (resp. subcritical) if $cd > 1$ (resp. $cd < 1$). Near $(\mu, \nu) = (\sigma^*, \sigma^*)$, the bifurcation direction is consistent with Γ in Theorem 2.1 because a similar result holds for bifurcating positive solutions from s_2 curve. So it seems impossible that non-uniqueness of coexistence states of (SP) holds for such (μ, ν). Eilbeck, Furter and López-Gómez [12] obtained the same result by the local bifurcation analysis near $(\mu, \nu) = (\sigma^*, \sigma^*)$ in a different manner from ours.

In order to study the non-uniqueness of coexistence states of (SP), we will show the following important result.

Lemma 3.2. *Let μ be fixed. Let $\{u(\epsilon), v(\epsilon)\}$ be a family of positive solutions of* (SP) *with $\nu = \nu(\epsilon)$. If $\nu_1(\mu) \neq 0$, then*

$$\text{index}_C(A, \{u(\epsilon), v(\epsilon)\}) = -\text{sgn}\ \nu_1(\mu)$$

for sufficiently small $\epsilon > 0$.

Proof. In order to calculate the $\mathrm{index}_C(A, \{u(\epsilon), v(\epsilon)\})$, we will consider the spectral radius of the Fréchet derivative of $A(u,v)$ at $\{u,v\} = \{u(\epsilon), v(\epsilon)\}$ (for the calculation of index, see Dancer [7] or Amann [1]). The Fréchet derivative is given by

$$
\begin{aligned}
&A'(u(\epsilon), v(\epsilon)) \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-\mu\Delta + mI)^{-1}[(m+1-2u(\epsilon) - cv(\epsilon))\hat{u} - cu(\epsilon)\hat{v}] \\ (-\nu(\epsilon)\Delta + mI)^{-1}[-dv(\epsilon)\hat{u} + (m+1-2d(\epsilon) - 2v(\epsilon))\hat{v}] \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Denote the spectral radius of $A'(u(\epsilon), v(\epsilon))$ by $r(\epsilon)$. We can easily see $r(0) = 1.$ and that $A'(u(0), v(0))\{\Phi_\mu, \Psi_\mu\} = \{\Phi_\mu, \Psi_\mu\}$. We consider the eigenvalue problem

$$
A'(u(\epsilon), v(\epsilon)) \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = r(\epsilon) \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}
\tag{3.8}
$$

to get the ϵ-dependence of $r(\epsilon)$. We will solve (3.8) in the form

$$
\hat{u} = \Phi_\mu + \widehat{U}(\epsilon) \qquad \text{and} \qquad \hat{v} = \Psi_\mu + \widehat{V}(\epsilon),
$$

with $\int_\Omega \Psi_\mu \widehat{V}(\epsilon)dx = 0$ as in the preceding argument in this section. By putting $r(\epsilon) = 1/(1+\beta(\epsilon)$, (3.8) is reduced to the following system

$$
\begin{cases}
\mu\Delta\widehat{U} + (1-2\varphi_\mu)\widehat{U} + c\varphi_\mu\widehat{V} \\
\quad -\epsilon(2\Phi_\mu + c\Psi_\mu + o(1))(\Phi_\mu + \widehat{U}) - \epsilon(c\Phi_\mu + o(1))(\Psi_\mu + \widehat{V}) \\
\quad\quad +\beta\{(m+1-2\varphi_\mu + o(1))(\Phi_\mu + \widehat{U}) \\
\quad\quad\quad -(c\varphi_\mu + o(1))(\Psi_\mu + \widehat{V})\} = 0 & \text{in } \Omega, \\
\nu^*\Delta\widehat{V} + (1 - d\varphi_\mu\widehat{V} + (\nu(\epsilon) - \nu^*)\Delta(\Psi_\mu + \widehat{V}) \\
\quad -\epsilon(d\Phi_\mu + 2\Psi_\mu + o(1))(\Psi_\mu + \widehat{V}) - \epsilon(d\Psi_\mu + o(1))(\Phi_\mu + \widehat{U}) \\
\quad\quad +\beta(m+1-d\varphi_\mu + o(1))(\Psi_\mu + \widehat{V}) = 0 & \text{in } \Omega,
\end{cases}
\tag{3.9}
$$

with $\widehat{U} = \widehat{V} = 0$ on $\partial\Omega$. Similarly to (3.4), one can prove that the Fréchet derivative of the left-hand side of (3.9) with respect to $\widehat{U}, \widehat{V}, \beta$ at $(\widehat{U}, \widehat{V}, \beta, \epsilon) = (0,0,0,0)$ is an isomorphism from $Z \times \mathbf{R}$ to Y. Therefore, the implicit function theorem assures that there exists a family of continuously differentiable functions $(\widehat{U}(\epsilon), \widehat{V}(\epsilon), \beta(\epsilon))$ such that they satisfy (3.9) and $(\widehat{U}(0), \widehat{V}(0), \beta(0) = (0,0,0)$. Especially, taking L^2-inner product of the second equation of (3.9) with Ψ_μ leads to

$$
(\nu(\epsilon) - \nu^*)\|\nabla\Psi_\mu\|^2 = -2\epsilon\int_\Omega (d\Phi_\mu + \Psi_\mu)\Psi_\mu^2 dx + \beta(\epsilon)\int_\Omega (m+1-d\varphi_\mu)\Psi_\mu^2 dx + o(\epsilon)
\tag{3.10}
$$

as $\epsilon \to 0$. Dividing (3.10) by ϵ and letting $\epsilon \downarrow 0$ we have

$$
\nu_1\|\nabla\Psi_\mu\|^2 = -2\epsilon\int_\Omega (d\Phi_\mu + \Psi_\mu)\Psi_\mu^2 dx + \beta'(0)\int_\Omega (m+1-d\varphi_\mu)\Psi_\mu^2 dx,
$$

which, together with Lemma 3.1, gives

$$
\beta'(0)\int_\Omega (m+1-d\varphi_\mu)\Psi_\mu^2 dx = -\nu_1\|\nabla\Psi_\mu\|^2.
\tag{3.11}
$$

If ν_1 is positive, then (3.11) implies that $r(\epsilon) = 1/(1+\beta(\epsilon)) > 1$ for sufficiently small $\epsilon > 0$. Clearly, for small $\epsilon > 0$, $r(\epsilon)$ is the only eigenvalue of $A'(u(\epsilon), v(\epsilon))$ which is greater than one. Therefore, $\mathrm{index}_C(A, \{u(\epsilon), v(\epsilon)\}) = -1$ for such ϵ because it follows from [1] or [7] that $\mathrm{index}_C(A, \{u(\epsilon), v(\epsilon)\}) = (-1)^{\kappa}$, where κ is the sum of multiplicities of all eigenvalues of $A'(u(\epsilon), v(\epsilon))$ greater than one. On the contrary, if ν_1 is negative, the above reasoning yields $\mathrm{index}_C(A, \{u(\epsilon), v(\epsilon)\}) = 1$ because $r(\epsilon) = 1/(1+\beta(\epsilon)) < 1$ and $A'(u(\epsilon), v(\epsilon))$ has no eigenvalues greater than one. Thus the proof is complete. □

Remark 3.2. We can also study the linearized stability of positive solutions of the form (3.5) as in the proof of Lemma 3.2. Indeed, the spectral problem associated with $\{u(\epsilon), v(\epsilon)\}$ is given by

$$\begin{cases} \mu\Delta\hat{u} + (1 - 2u(\epsilon) - cv(\epsilon))\hat{u} - cu(\epsilon)\hat{v} = \lambda\hat{u} & \text{in } \Omega, \\ \nu(\epsilon)\Delta\hat{v} + (1 - du(\epsilon) - 2v(\epsilon))\hat{v} - dv(\epsilon)\hat{u} = \lambda\hat{v} & \text{in } \Omega, \\ \hat{u} = \hat{v} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

which is similar to (3.9). At $\epsilon = 0$, the above problem has zero eigenvalue with eigenfunction $\{\Phi_\mu, \Psi_\mu\}$ and all other eigenvalues are negative. If $\lambda(\epsilon)$ denotes the eigenvalue of the above problem satisfying $\lambda(0) = 0$, then the sign of $\lambda(\epsilon)$ determines the stability property of $\{u(\epsilon), v(\epsilon)\}$. We can study ϵ-dependence of $\lambda(\epsilon)$ by the method used in Lemma 3.2 (see also the paper of Crandall and Rabinowitz [6], where the linearized stability of bifurcating solutions are discussed.) As a result it can be proved that $\{u(\epsilon), v(\epsilon)\}$ is asymptotically stable (resp. unstable) if $\nu_1 < 0$ (resp.$\nu_1 > 0$).

By Lemmas 3.1 and 3.2, the non-uniqueness of coexistence states for (SP) will be shown in case where s_1 is located above (resp. below) s_2 and ν_1 in Lemma 3.1 is positive (resp. negative). Such a situation will happen when s_1 and s_2 meet each other. In this connection, Eilbeck, Furter and López-Gómez [12] have discussed the existence of at least two positive solutions for (SP) when s_1 and s_2 curves intersect each other (see also [13]).

In what follows, we assume

$$(3.12) \qquad cd > 1 \quad \text{and} \quad (c-1)(d-1) < 0,$$

which, together with Lemmas 2.4 and 2.5, assures that there exists at least one intersection point (μ_0, ν_0) (with $0 < \mu_0 < \sigma^*$) of s_1 and s_2. We will study such a case in more detail and show that (SP) admits at least two coexistence states for (μ, ν) in a set near (μ_0, ν_0).

Theorem 3.1. *Let* (3.12) *be satisfied and let* (μ_0, ν_0) *be an intersection point of* s_1 *and* s_2. *If* $\nu_1(\mu_0) \neq 0$, *then* (SP) *admits at least two coexistence states for* (μ, ν) *in an open set* Λ *near* (μ_0, ν_0).

Proof. We will give the proof in the case where s_2-curve is located above s_1-curve for $\mu_0 < \mu < \mu_0 + \delta$ and located below s_1-curve for $\mu_0 - \delta < \mu < \mu_0$ with some $\delta > 0$. Assume $\nu_1(\mu_0) > 0$. Since $\nu_1(\mu)$ is continuous in μ by its expression in Lemma 3.1,

$\nu_1(\mu)$ is positive for $\mu \in (\mu_0 - \delta_0, \mu_0 + \delta_0)$ with some $0 < \delta_0 < \delta$. If $\mu_0 - \delta_0 < \mu < \mu_0$ and $\nu > f(\mu)$, then it follows from Lemma 2.3 that

$$\text{index}_C(A, T_0) + \text{index}_C(A, T_1) + \text{index}_C(A, T_2) = 1. \tag{3.13}$$

Moreover, taking account of (3.5) we see that there exists a bifurcating coexistence state $T_{\mu,\nu}$ for $\nu \in (f(\mu), f(\mu) + \delta_1)$ with some positive δ_1. Lemma 3.2 assures

$$\text{index}_C(A, T_{\mu,\nu}) = -1. \tag{3.14}$$

Since the sum of indices of A of all fixed points in C must be one, it follows from (3.13) and (3.14) that there must be a coexistence state other than $T_{\mu,\nu}$ for (CP) when (μ, ν) satisfies $\mu_0 - \delta_0 < \mu < \mu_0$ and $f(\mu) < \nu < f(\mu) + \delta_1$. The proof in case $\nu_1(\mu_0) < 0$ is almost the same. □

Remark 3.3. The above proof shows that Γ is not an optimal region for coexistence states because we can find an open set $\Lambda \subset \Gamma^c$ such that (SP) admits coexistence states for $(\mu, \nu) \in \Lambda$. Here Γ^c denotes the compliment of Γ.

We will review Theorem 3.1 from the view-point of global bifurcation theory. In [2] Blat and Brown have shown that, for fixed $\mu \in (0, \sigma^*)$, there exists a branch of coexistence states for (SP) such that the branch bifurcating from s_1 curve at $\nu = f(\mu)$ connects with s_2 curve at ν satisfying $g(\nu) = \mu$ (see also [11] or [13]).

Now let (μ_0, ν_0) be an intersection point of s_1 and s_2 and assume $\nu_1(\mu_0) \neq 0$. Theorem 3.1 means that each branch of coexistence states has a bending point in the bifurcation diagram provided that μ lies in a suitable range $I(\mu_0)$ near $\mu = \mu_0$. For each $\mu \in I(\mu_0)$, let the branch possess a bending point at $\nu = \overline{\nu}(\mu)$ (resp. $\underline{\nu}(\mu)$) in the case of supercritical bifurcation $\nu_1(\mu) > 0$ (resp. subcritical bifurcation $\nu_1(\mu) < 0$). Suppose $\nu_1(\mu) > 0$ for $\mu \in I(\nu_0)$. Then (SP) has at least two coexistence states if $\nu \in (f(\mu), \overline{\nu}(\mu))$. Moreover, one of coexistence states will be unstable by Remark 3.2. Analogous results also hold for $\nu_1(\mu) < 0$.

In case $\nu_1(\mu_0) = 0$, Lemmas 3.1 and 3.2 give us no information. According to Li and Logan [15], (SP) admits a continuum of coexistence states or a coexistence state for $(\mu, \nu) = (\mu_0, \nu_0)$. In the former case, the set Λ in Theorem 3.1, where non-uniqueness result holds true, may be identical with a single point $\{(\mu_0, \nu_0)\}$.

Finally we consider the sign of $\nu_1(\mu)$ when μ is sufficiently small. Suppose $d < 1$. Since $\lim_{\mu \to 0} \nu^*(\mu) = (1 - d)\sigma^*$ by Lemma 2.4 and $\{\Psi_\mu\}$ is bounded in $L^2(\Omega)$, one can see by the bootstrapping argument for elliptic equations that that $\{\Psi_\mu\}$ is also bounded in $W^{2,q}(\Omega)$ for any $q \geq 2$. Therefore, $\{\Psi_\mu\}$ is relatively compact in $C_0^{1,\alpha}(\Omega)$ for some $\alpha > 0$ by Sobolev's embedding theorem. Moreover, $\{\Phi_\mu\}$ is also relatively compact with respect to the weak topology of $L^2(\Omega)$. Hence one can take a sequence $\{\mu_n\} \downarrow 0$ such that $\{\Phi_n, \Psi_n\} = \{\Phi_{\mu_n}, \Psi_{\mu_n}\}$ satisfy

$$\begin{aligned} &\Phi_n \to \Phi^* && \text{weakly in } L^2(\Omega), \\ &\Psi_n \to \Psi^* && \text{in } C_0^{1,\alpha}(\Omega), \end{aligned}$$

with some $\Phi^* \in L^2(\Omega)$ and $\Psi^* \in C_0^{1,\alpha}(\Omega)$. For every $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ we have from (3.1)

$$-\nu^*(\mu_n) \int_\Omega \nabla\Psi_n \nabla\psi dx + \int_\Omega (1 - d\varphi_{\mu_n})\Psi_n \psi dx = 0;$$

so that letting $\mu_n \to 0$ in the above identity enables us to see that $\sigma^* \Delta\Psi^* + \Psi^* = 0$ in the sense of distributions. Hence $\Psi^* = k\varphi^*$ with some $k \geq 0$. Moreover, it follows from (3.2) that

$$\mu_n \int_\Omega \Phi_n \Delta\psi dx + \int_\Omega (1 - 2\varphi_{\mu_n})\Phi_n \psi dx = c \int_\Omega \varphi_{\mu_n} \Psi_n \psi dx$$

for every $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Letting $\mu_n \to 0$ in the above identity we get $\Phi^* = -c\Psi^*$. Hence it follows from Lemma 3.1 that

$$\lim_{n\to\infty} \nu_1(\mu_n) \|\nabla\Psi_n\|^2 = (cd - 1) \int_\Omega (\Psi^*)^3 dx. \tag{3.15}$$

If $\Psi^* = k\psi^*$ with $k > 0$ and $cd > 1$, then (3.15) will imply that the direction of bifurcation from s_1 curve is supercritical for sufficiently small $\mu > 0$ and that multiplicity of coexistence states holds in such a situation. However, we do not know whether k is positive or not.

References

[1] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Review **18** (1976), 620-709.

[2] J. Blat and K. J. Brown, *Bifurcation of steady-state solutions in predator-prey and competition systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **97A** (1984), 21-34.

[3] R. S .Cantrell and C. Cosner, *On the steady-state problem for the Lotka-Volterra competition model with diffusion*, Houston J. Math. **13** (1987), 337-352.

[4] C. Cosner and A. C. Lazer, *Stable coexistence states in the Volterra-Lotka competition model with diffusion*, SIAM J. Appl. Math. **44** (1984), 1112-1132.

[5] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Functional Anal. **8**(1971), 321-340.

[6] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability*, Arch. Rational Mech. Anal. **52** (1973), 161-180.

[7] E. N. Dancer, *On the indices of fixed points of mappings in cones and applications*, J. Math. Anal. Appl. **91**(1983), 131-151.

[8] E. N. Dancer, *On positive solutions of some pairs of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **284**(1984), 729-743.

[9] E. N. Dancer, *On positive solutions of some pairs of differential equations,II*, J. Differential Equations **60** (1985), 236-258.

[10] E. N. Dancer, *On the existence and uniqueness of positive solutions for competing species models with diffusion*, Trans. Amer. Math. Soc. **326** (1991), 829-859.

[11] Y. Du and K. J. Brown, *Bifurcation and monotonicity in competition reaction-diffusion systems*, Nonlinear Anal. **23** (1994), 1-13.

[12] J. C. Eilbeck, J. E. Furter and J. López-Gómez, *Coexistence in the competition model with diffusion*, J. Differential Equations **107** (1994), 96-139.

[13] J. E. Furter and J. López-Gómez, *Diffusion-mediated permanence problem for a heterogeneous Lotka-Volterra competition model*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **127A** (1997), 281-336.

[14] C. Gui and Y. Lou, *Uniqueness and nonuniqueness of coexistence states in the Lotka-Volterra competition model*, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), 1571-1594.

[15] L. Li and R. Logan, *Positive solutions to general elliptic competition models*, Differential Integral Equations **4** (1991), 817-834.
[16] J. López-Gómez and R. Pardo, *Coexistence regions in Lotka-Volterra models with diffusion*, Nonlinear Anal. **19** (1992), 11-28.
[17] K. Nakashima and Y. Yamada, *Positive steady states for prey-predator models with cross-diffusion*, Advances Differential Equations **1** (1996), 1099-1122.
[18] W. H. Ruan and C. V. Pao, *Positive steady-state solutions of a competing reaction-diffusion system*, J. Differential Equations **117** (1995), 411-427.
[19] Y. Yamada, *Stability of steady states for prey-predator diffusion equations with homogeneous Dirichlet conditions*, SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), 327-345.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, WASEDA UNIVERSITY, 3-4-1 OHKUBO, SHINJUKU-KU, TOKYO 169-8555, JAPAN

退化拡散とロジスティック反応を伴う反応拡散方程式

竹内 慎吾（日本学術振興会・特別研究員）

1　はじめに

反応拡散方程式は反応と拡散とを併せ持った物質の変化を記述した方程式である．物質や媒質の性質によって拡散や反応のしかたが異なるので，さまざまなタイプの拡散と反応との組み合わせのもとで古くから多くの研究がなされている．その解の性質は物質の変化を捉える指針になることはもちろんだが，数学的側面だけから見ても放物型偏微分方程式や楕円型方程式の解としての構造の豊かさ・美しさを垣間見ることが出来て興味深い．

本論説では，退化する拡散とロジスティック型の反応との反応拡散方程式：

$$\begin{cases} u_t = \lambda\,\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{q-2}u(1-|u|^r), & (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

に関する筆者の最近の研究の概説を述べる．ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ のなめらかな境界を持つ有界領域，$p > 2$，$q \geq 2$，$r > 0$ で $\lambda > 0$ はパラメータである．拡散項 $\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ は p-Laplacian とよばれる非線型拡散として代表的な作用素で，たとえば磁場における膨張性の流体の拡散のしかたを記述する際に用いられる．Δ_p は $p = 2$ のときは通常の Laplacian Δ と一致することから Δ のひとつの拡張になっていること，また形式的に展開すると

$$\Delta_p u = |\nabla u|^{p-2} \sum_{i,j=1}^{N} \left\{ \delta_{ij} + (p-2)\frac{u_{x_i}u_{x_j}}{|\nabla u|^2} \right\} u_{x_i x_j}$$

（δ_{ij} は Kronecker のデルタ）となるので，$|\nabla u| = 0$ となるときに退化性を持つことに注意する．反応項 $f(u) := |u|^{q-2}u(1-|u|^r)$ は数理生態学において個体密度の増加・減少のダイナミクスを記述する際に用いられているもので，$0 < u < 1$ ならば正の，$u > 1$ ならば負の反応を与えていることから，たとえば熱力学の言葉を援用すれば，熱量を一定に保とうとするサーモスタット（thermostat）のような役割を果たしている．

(1.1) において $p = q = 2$ としたものは Fisher 方程式，（実）Ginzburg-Landau 方程式，Allen-Cahn 方程式などとよばれ，それぞれ数理生態学，超伝導理論，界面ダイナミクスの理論において重要な方程式であり，近年盛んに研究されている．(1.1) はこれらの方程式を

より数学的に一般化したもので，空間方向に平衡化を施す作用素 Δ_p と時間方向に衰退と爆発を抑える作用素 f によって解がどのように制御されるのか，またよく知られた $p=2$（線型拡散）の場合とはどのような違いが生じるのかなどといったことに興味がある．以下 (1.1) に関して，論文 [10, 11, 12, 13] を通じて得られた結果を紹介する．

2 空間 1 次元における解析

この章では，筆者と山田義雄教授（早稲田大学）との共同研究 [13] について述べる．[13] では，次のような反応拡散方程式に関して解の存在，定常解の集合の構造，および各定常解の安定性を議論している：

$$\begin{cases} u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1-|u|^r), & (x,t) \in (0,1)\times(0,+\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1). \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで $p>2$, $q \geq 2$, $r>0$ であり，$\lambda > 0$ はパラメータである．

N. Chafee と E. F. Infante [1] は $p=q=2$ の場合に (2.1) を研究しており，その後も多くの数学者によってその豊富な数学的構造が明らかにされている（例えば D. Henry [5] を参照されたい）．M. Guedda と L. Véron [4] は (2.1) に対する定常問題：

$$\begin{cases} \lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{q-2}\phi(1-|\phi|^r) = 0, & x \in (0,1), \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

を $p=q>1$ の場合に考え，λ に関する定常解の分岐構造を解明した．特に $p=q>2$ のときには p-Laplacian の退化性から十分小さい $\lambda>0$ に対して定常解が平らになる領域 $\mathcal{O}_\lambda = \{x \in (0,1); |\phi(x)| = 1\}$ が現れることを発見し，これを "flat core" と呼んだ（図 1）．線型拡散のときには任意の λ に対して $\mathcal{O}_\lambda = \emptyset$ となることはよく知られているので，線型拡散と非線型拡散との相違が具体的に現われており興味深い．

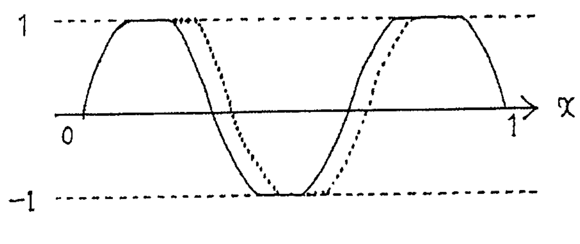

図 1: flat core をもつ定常解

本論文において我々は (2.1) をより一般の場合 $p>2$, $q\geq 2$, $r>0$ において考え，解の存在や漸近挙動，定常解の形状やそれ全体からなる集合の構造，および（部分的ではあるが）各定常解の安定性を決定した．なお，p-Laplacian の拡散とロジスティック型の反応との組み合わせによる方程式については先に述べたように Guedda らが定常問題 (2.2) を研究しているが，時間発展を伴う (2.1) は [13] によって最初に研究された．これによって Guedda らの解に (2.1) の "定常解" としての特徴づけがなされ，安定性の議論も意味をもつこととなった．

<u>**Theorem**</u> **2.1.** 任意の $u_0\in L^2$ に対して (2.1) の解 $u=u(t;u_0)$ が一意に存在し，$u\in C((0,+\infty);W_0^{1,p})$, $t^{1/2}u_t\in L^2(0,T;L^2)$ （$T>0$ は任意）を満たす．また，u_0 に対する L^2 における ω-極限集合 $\omega(u_0)$ は，空でない不変なコンパクト連結集合で $\mathrm{dist}(u(t;u_0);\omega(u_0))\to 0$ $(t\to+\infty)$．さらに $\omega(u_0)\subset E_\lambda:=\{\phi\in W_0^{1,p};\phi$ は (2.2) の解$\}$.

Theorem 2.1 の存在証明は (2.1) の方程式の右辺を「拡散項と反応の抑制項」と「反応の増殖項」とに分けて見ることで大谷 [7] による抽象論を援用し，加えて非線型発展方程式の理論を積極的に用いることで示される．

<u>**Theorem**</u> **2.2.** E_λ の構造，および各定常解の安定性は図 2 の分岐ダイヤグラムで示される．ただし s, a, as, u はそれぞれ安定，吸収的，漸近安定，不安定を，太い枝は定常解が flat core をもつことを，各枝の数字は定常解の区間 $(0,1)$ 内の零点の個数を表す．

分岐構造の証明は phase-plane analysis による．(2.2) の境界条件の代わりに $\phi(0)=0$, $\phi_x(0)=\alpha$ （α はパラメータ）とした補助的な初期値問題を考え，その解 $\phi(x;\alpha)$ に対して time-map $T(\alpha):=\inf\{x>0;\phi(x;\alpha)=0\}$ を定義し $T(\alpha)=1$ となる α の存在やその個数を調べる．T の様相は p, q の大小関係によって大きく異なり，特に $p<q$ の場合は極値の一意性を示すための工夫を要する．安定性は各定常解の近傍にその遷移層を摂動させてつくった関数との比較で示す．

定常問題について Guedda らは拡散項と反応の増殖項とが同次の場合 $p=q$ を扱っている．Theorem 2.2 により，自明解からの分岐は拡散項と反応の増殖項とが同次となるときのみに起こり得る稀な現象であるが改めてわかる．

退化拡散の場合は線型化方程式も退化し線型化安定性原理が成り立つかどうかも知られていない．そこで [13] では (2.1) に解に対する比較定理を証明し，time-map の性質を最大限に生かして各定常解の近傍に適当な比較関数を構成し，線型化方程式を介さずにそれらの安定性を決定した．この time-map による安定性の決定法は（1 次元の問題に限るが）非常に広範囲にわたって利用可能である．

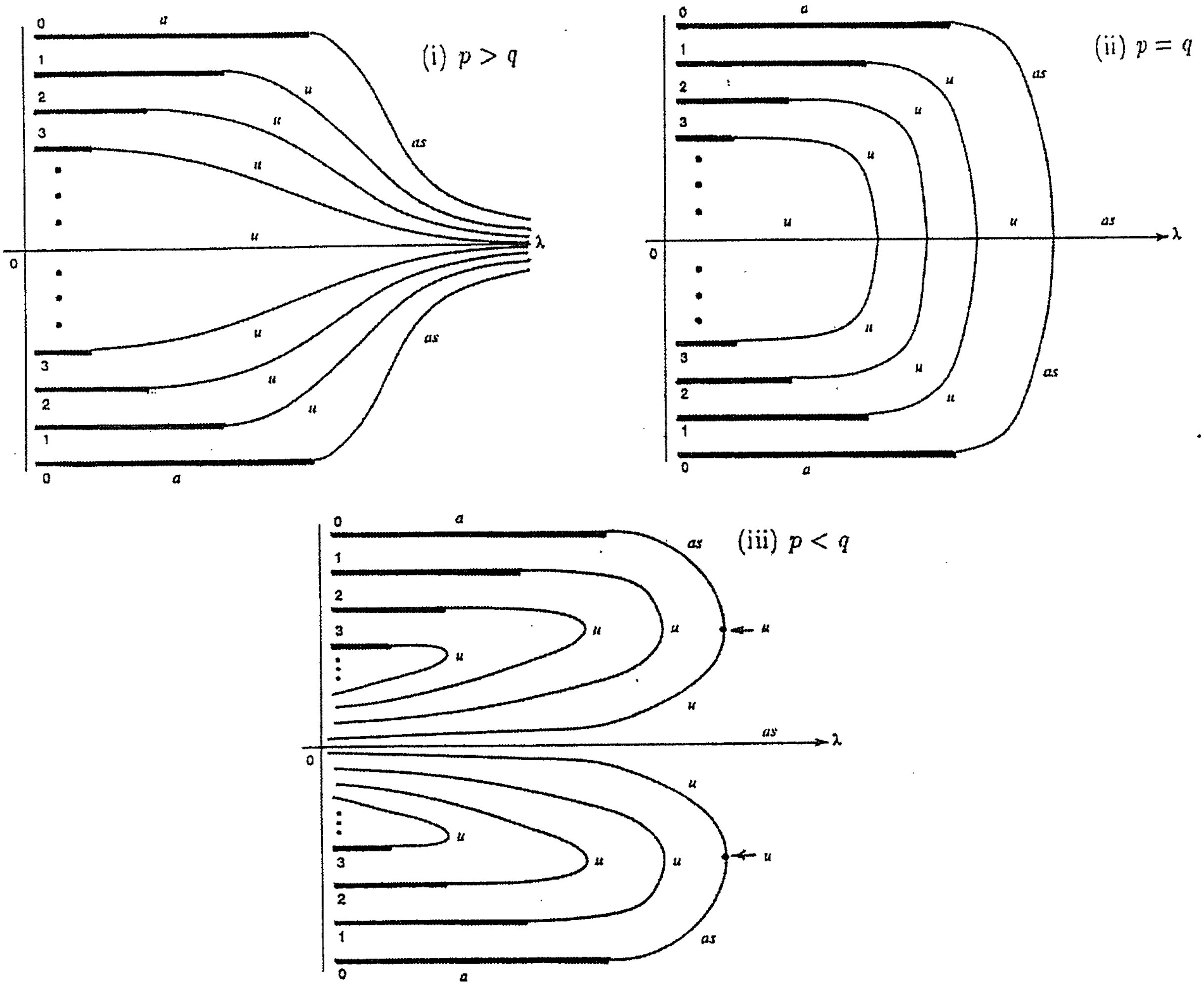

図 2: 分岐ダイヤグラム

3 非定常解の空間局所的な挙動の考察

前章で紹介した論文 [13] によれば，$\lambda > 0$ が十分小さければ初期値を適当に取ることによって，(2.1) の解が時間発展とともに flat core をもつ定常解（あるいはその集合）に近づいていくことがわかっている．そこで，定常解の flat core が (2.1) の解の極限状態としてのものなのか，それとも有限時間で実現されるものなのかという "過程" に興味が生ずる．この問いは，定常解が時間発展の末の解の姿であるという観点からきわめて本質的と思われる．[10] では (2.1) に現われる，flat core をもつ定常解の近傍から出発したときの解の空間局所的な挙動を考察し，安定性に関する情報を提供した（Theorem 3.2 では，これらの定常解の安定・不安定性は決定されていなかった）．以下，[10] の内容について述べる．

結果を述べる前に記号を準備する．ϕ を flat core $\mathcal{O}_\lambda$ をもつ (2.1) の定常解とする．このとき $\mathcal{O}_\lambda$ のコンパクト集合 I，I の（$\mathcal{O}_\lambda$ 内の）近傍 J に対して

$$U_0(I,J) := \{u_0 \in C([0,1]); u_0(x) = \phi(x) \text{ if } x \in I,\ u_0(x) \neq \phi(x) \text{ if } J \setminus I\}.$$

とする．またグラフ $\{(x, \phi(x)); x \in \mathcal{O}_\lambda\}$ を ϕ の flat hat とよぶことにする．

さて，ある点で (2.1) の解 u と ϕ の flat hat とが交わっているとしよう．この点では $u = 1$ なので u には反応効果がかからず係数 $\lambda(p-1)|u_x|^{p-2}$ の拡散効果のみがかかっている．これよりもし u_0 が ϕ の flat hat に接していれば，反応効果がないため $u(t; u_0)$ も同じところにおいて接し続け，かつ拡散効果もなくなるためその接している部分は拡がらないことが予想される．次の定理はこの予想が，u_0 が ϕ の flat hat に $\frac{p}{p-2}$ 次のオーダーで接していれば正しいことを示している．

Theorem 3.1. ϕ を flat core $\mathcal{O}_\lambda$ をもつ (2.1) の定常解とする．任意の $\varepsilon \in (0, r)$，連結コンパクト集合 $I = [a, b] \subset \mathcal{O}_\lambda$ に対して，I, a, b の近傍 J, $N(a)$, $N(b)$ をそれぞれ $J \subset \mathcal{O}_\lambda$, $N(a) \subset J$, $N(b) \subset J$ となるようにとる．このときある $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, I, J, N(a), N(b)) > 0$ が存在して次を満たす：

任意の $\delta \in (0, \delta_0)$ に対してある I の近傍 $J_\delta \subset J$ が存在して，もし $u_0 \in U_0(I,J)$, $\|u_0 - \phi\|_\infty < \delta$ かつ $z = a$, b に対して

$$|u_0 - \phi(x)| \leq \left(\frac{p-2}{p}\right)^{p/(p-2)} \left\{\frac{p(r-\varepsilon)}{2\lambda(p-1)}\right\}^{1/(p-2)} |x - z|^{p/(p-2)}, \quad x \in N(z)$$

ならば $u(t; u_0) \in U_0(I, J_\delta)$ $(t \geq 0)$ かつ $|J \setminus J_\delta| \to 0$ $(\delta \to 0)$.

次に u_0 が ϕ の flat hat と $x = x_0$ で横断的に交わっているとしよう．このときは拡散効果により交点 $x(t)$ $(x(0) = x_0)$ は t の（集合値）関数として変化するだろう．次の定理は，u_0 が ϕ と離れているところでは時間発展しても離れたままであり，その結果 $x(t)$ が区間 $(0,1)$ の t に無関係なコンパクト集合の中でのみ変化することを示している．

Theorem 3.2. ϕ を flat core $\mathcal{O}_\lambda$ をもつ (2.1) の定常解とする．任意の $x_0 \in \mathcal{O}_\lambda$，$x_0$ の近傍 $J \subset \mathcal{O}_\lambda$ をとる．このときある $\delta_0 = \delta_0(x_0, J) > 0$ が存在して次を満たす：

> 任意の $\delta \in (0, \delta_0)$ に対してある開集合 P_δ，J_δ $(x_0 \in P_\delta \subset \overline{P_\delta} \subset J_\delta \subset J)$ が存在して，もし $u_0 \in U_0(\{x_0\}, J)$，$\|u_0 - \phi\|_\infty < \delta$ ならば
>
> $$u(x, t; u_0) \neq \phi(x), \quad (x, t) \in (J_\delta \setminus P_\delta) \times [0, +\infty)$$
>
> かつ $|P_\delta|$，$|J \setminus J_\delta| \to 0$ $(\delta \to 0)$.

Theorem 3.1, 3.2 は比較定理によって得られる．その際，比較関数の作り方に工夫を要する．Theorem 3.1 では定常解 ϕ の遷移層を flat core の伸縮によって平行移動させてつくった関数を比較関数として採用する．Theorem 3.2 ではさらにその関数に適当な t の関数を加えることで，時間発展とともに flat hat に上から近づく lower solution，下から近づく upper solution を構成する．

また，通常のものよりも弱い条件で成立する弱比較定理を準備・活用することで，折れ線関数との比較が可能になり，次の安定性の結果を得る：

Theorem 3.3. flat core をもつ正値定常解は漸近安定である．またどの二つの遷移層の間にも flat core が存在するような定常解に対しては図 3 のような安定領域が構成できる：図 3 の斜線部に属する初期値から出発した解は斜線部にとどまる．

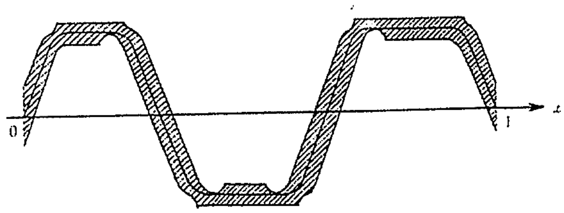

図 3: どの二つの遷移層の間にも flat core が存在するような定常解の安定領域

Theorem 3.3 の安定領域に属する関数の特徴は定常解の内部遷移層に‘まとわりついている’ことであり，遷移層が不安定要因をもつ可能性を示唆している点で重要である．

4 最大定常解の形状の解析

この章では [11] について説明する．[11] では，次のような多次元における退化楕円型方程式を考えている：Ω は $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ のなめらかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし

$$\begin{cases} \lambda\Delta_p u + f(u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u \geq 0, \not\equiv 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

ここで $\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $f(u) = u^{q-1}(1-u^r)$, $2 < p < q$, $r > 0$ であり $\lambda > 0$ はパラメータである．(4.1) は (1.1) の定常問題であり，特に非負値解を考えていることに注意しておく．

(4.1) は $p = q$ のときにはいくつか研究がなされている．λ_0 を $-\Delta_p$ の Dirichlet 条件下での第一固有値とする．(4.1) は $\lambda \geq 1/\lambda_0$ のときは解をもたず，$\lambda < 1/\lambda_0$ のときは解 u_λ を唯一つもつ．$N = 1$ のときは，M. Guedda と L. Véron [4] が u_λ の形状や遷移層の評価を精密に調べており，特に十分小さい λ に対しては解 u_λ について flat core とよばれる集合 $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}(u_\lambda) = \{x \in \Omega; u_\lambda(x) = 1\}$ は空でないという結果を得ている．また S. Kamin と L. Véron [6] は Guedda らの結果を拡張し，一般の $N \geq 2$ においても λ が十分小さければ $\mathcal{O}_\lambda$ は空でないこと，およびある定数 $C > 0$ が存在して（境界）遷移層は $\mathrm{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \leq C\lambda^{1/p}$ と評価されることを示した．その結果を受けて J. García-Melián と J. Sabina de Lis は Ω が凸の場合 [2]，そして一般の Ω の場合 [3] について $\mathrm{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \sim \lambda^{1/p}$ であることを示して Kamin らの結果をより精密にした．

次に $p > q$ の場合は $p = q$ の場合とほとんど同様の考察により，任意の $\lambda > 0$ に対して解 u_λ が一意に存在し，十分 λ が小さいならば $\mathcal{O}_\lambda$ は空でないこと，および $\mathrm{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \sim \lambda^{1/p}$ であることが一般の N に対して示すことができる．

以下 $p < q$ の場合を考える．この場合は $N = 1$ の結果 [13] からも推測されるように解の一意性は一般に成り立たず，他の場合とは事情が異なる．[11] ではまず，(4.1) について最大解の存在と形状に関する次の結果を得た．（ここで u が (4.1) の最大解であるとは，(4.1) の任意の解 v に対して $u \geq v$ を満たすことである．）

Theorem 4.1. $2 < p < q$, $r > 0$ とする．このときある $\Lambda > 0$ が存在し次を満たす：

(i) $\lambda > \Lambda$ ならば (4.1) は解を持たない；
(ii) $\lambda \leq \Lambda$ ならば (4.1) は最大解 $\overline{u}_\lambda$ をもつ；
(iii) $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \Lambda$ ならば $\overline{u}_{\lambda_2} \leq \overline{u}_{\lambda_1}$；
(iv) 写像 $\lambda \mapsto \overline{u}_\lambda$ は区間 $(0, \Lambda]$ 上で $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$-値左連続である．ここで $\beta \in (0,1)$ はある定数．

Theorem 4.2. $2 < p < q$, $r > 0$ とする．このときある $\lambda^* \in (0, \Lambda]$ が存在し次を満たす：

(i) $\lambda \le \lambda^*$ ならば $\mathcal{O}_\lambda = \mathcal{O}_\lambda(\overline{u}_\lambda)$ は空でない；
(ii) $\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda^*$ ならば $\mathcal{O}_{\lambda_2} \subset \mathcal{O}_{\lambda_1}$；
(iii) 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対してある $\lambda \le \lambda^*$ が存在して，$\{x \in \Omega; \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \ge \varepsilon\} \subset \mathcal{O}_\lambda$.

さらに $\mathcal{O}_\lambda$ は $\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1/p}\,\mathrm{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p} \int_0^1 (F(1) - F(s))^{-1/p} ds$ を満たす．ここで $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

証明は $N = 1$ の場合に [13] で得られた解を利用して，J. García-Melián と J. Sabina de Lis [2, 3] のアイデアをもとに比較関数を構成し barrier method を使う．Theorem 4.1 では解の存在範囲が有界でありかつ端点 $\lambda = \Lambda$ においても最大解（$\not\equiv 0$）が存在することに注意されたい．Theorem 4.2 の最後の主張は flat core の成長の速さに評価を与えているもので，比較関数の λ に関する詳しい挙動を調べることにより得られる．

また (4.1) に対応する汎関数に対する変分的考察により，解の多重性に関する次の結果も得ている．これは $p \ge q$ の場合に解が（存在する限り）一意であることと対照的である．

Theorem 4.3. $2 < p < q$, $r > 0$ とする．このときある $\Lambda^* \in (0, \Lambda]$ が存在して，$\lambda < \Lambda^*$ ならば (4.1) は $\overline{u}_\lambda$ とは異なる解 $u_\lambda \le \overline{u}_\lambda$ をもつ．

Theorem 4.3 では解の多重存在を示すのに通常の mountain pass theorem を用いるが，その際に十分小さい $\lambda > 0$ に対しては最大解 $\overline{u}_\lambda$ のエネルギーが負になるという性質を用いている．この性質は「flat core が拡がるほど $\overline{u}_\lambda$ のエネルギーは減少する」ことを意味する不等式を導き，Theorem 4.2 とを組み合わせること見出された．この一連の論法は関数の幾何的性質とエネルギーとの関係を利用しており，flat core の性質を生かした退化拡散に独特なものである．

5 最大解とは異なる解の存在

解の多重性について [11] では十分小さい $\lambda > 0$ に対してのみ 2 つめの解の存在が得られていたが，$N = 1$ の場合 [13] や P. H. Rabinowitz による $p = 2$ の場合 [9] からの類推によれば，最大解と異なる解は任意の $\lambda < \Lambda$ に対して存在すると思われる．[12] ではこれを証明している；すなわち

Theorem 5.1. $2 < p < q$, $r > 0$ とする．このとき任意の $\lambda \in (0, \Lambda)$ に対して (4.1) は $\overline{u}_\lambda$ とは異なる解 $u_\lambda \le \overline{u}_\lambda$ をもつ．ここで $\Lambda > 0$ は Theorem 4.1 のものと同一である．

P. H. Rabinowitz [9] は線型拡散の場合について 2 つめの解を写像度の理論を用いて得ている．これに対して [12] では 2 つめの解を捕らえるのに変分的アプローチをとっており，この証明は $p = 2$ の場合にも適用できる．

以下，Theorem 5.1 の証明の概略を述べる．(4.1) に対応する汎関数

$$\Phi(u) = \frac{\lambda}{p}\|\nabla u\|_p^p - \int_\Omega \overline{F}(u)dx,$$

を定義する．ここで $\overline{F}(u) = \int_0^u \overline{f}(s)ds$ かつ

$$\overline{f}(s) = \begin{cases} 0, & s \in (-\infty, 0), \\ f(s), & s \in [0, \xi], \\ f(\xi), & s \in (\xi, +\infty) \end{cases}$$

($\xi > 1$ は勝手な定数）とする．Φ の $u \equiv 0$ を除いた critical point 全体の集合と (4.1) の解集合とは一致していること，および（$p < q$ であるから）自明解 0 は任意の $\lambda > 0$ に対して Φ の local minimizer になっていることに注意しておく．したがってもし (4.1) の最大解 $\overline{u}_\lambda$ が Φ の local minimizer であることがわかれば，P. Pucci と J. Serrin [8] によって拡張された mountain pass theorem により 3 つめの cririical point，すなわち 2 つめの (4.1) の解が得られることになる．

前章で述べたように，最大解 $\overline{u}_\lambda$ は barrier method によって得られている．一般に barrier method で見つけられた解は定常解として安定なので，対応する汎関数の local minimizer として特徴付けられると考えられる．[12] では，$\overline{u}_\lambda$ が集合 $\mathcal{A} := \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}); \psi \leq u \leq \phi\}$ の内点となるような upper solution ϕ と lower solution ψ とを構成したのち，$\mathcal{A}$ 上での Φ の挙動を考察している．このような $\mathcal{A}$ を作る際，$p = 2$ と $p > 2$ のときとではちと勝手が異なる．$p = 2$ の場合は拡散係数 λ を前後に少しだけずらした方程式の解を ϕ, ψ として採用すればよい．それに対して $p > 2$ の場合，(4.1) の最大解は十分小さい $\lambda > 0$ に関しては常に解が flat core をもつことから，$p = 2$ のときと同様にすると $\mathcal{A}$ が "つぶれて" しまい $\overline{u}_\lambda$ は内点ではなくなってしまう．そこで [12] では，これらの関数に対して新たなパラメータを導入するすることにより，比較関数としての性質を保ったまま $\mathcal{A}$ に "ふくらみ" を与えている．

さて，$\mathcal{A}$ 内に $\overline{u}_\lambda$ 以外の解が存在する場合は証明すべきことはないので，以下そうでないとする．このとき $\overline{u}_\lambda$ が $\mathcal{A}$ 上での global minimizer，したがって C^1 における local minimizer であることが示される．さらに p-Laplacian を含む方程式に関する正則性の結果により，$W^{1,p}$ においても local minimizer になっていること，したがって Theorem 5.1 が証明される．

なお，$\mathcal{A}$ を構成する際に用いた比較関数により，論文 [10] の正値定常解の漸近安定性 (Theorem 3.3) をより容易に示すことが可能となった．

参考文献

[1] N. Chafee and E. F. Infante, A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type, *Appl. Anal.* 4 (1974), 17–37.

[2] J. García-Melián and J. Sabina de Lis, The behaviour of stationary solutions to some nonlinear diffusion problems, *Nonlinear Anal.* (Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysts) **30:8** (1997), 5499–5504.

[3] J. García-Melián and J. Sabina de Lis, Stationary profiles of degenerate problems when a parameter is large, to appear in *Differential Integral Equations.*

[4] M. Guedda and L. Véron, Bifurcation phenomena associated to the p-Laplace operator, *Trans. Amer. Math. Soc.* **310** (1988), 419–431.

[5] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1981.

[6] S. Kamin and L. Véron, Flat core properties associated to the p-Laplace operator, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), 1079–1085.

[7] M. Ôtani, On existence of strong solutions for $\frac{du}{dt}(t) + \partial\psi^1(u(t)) - \partial\psi^2(u(t)) \ni f(t)$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA*, **24** (1977), 575–605.

[8] P. Pucci and J. Serrin, Extensions of the mountain pass theorem, *J. Funct. Anal.* **59** (1984), 185–210.

[9] P. H. Rabinowitz, Pairs of positive solutions of nonlinear elliptic partial differential equations, *Indiana Math. J.* **23** (1973), 172–185.

[10] S. Takeuchi, Behavior of solutions near the flat hats of stationary solutions for a degenerate parabolic equation, to appear in *SIAM J. Math. Anal.*

[11] S. Takeuchi, Positive solutions of a degenerate elliptic equation with logistic reaction, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*

[12] S. Takeuchi, Multiplicity result for a degenerate elliptic equation with logistic reaction, preprint.

[13] S. Takeuchi and Y. Yamada, Asymptotic properties of a reaction-diffusion equation with degenerate p-Laplacian, to appear in *Nonlinear Anal.*

Sublinear term をもつ放物型方程式の解の一意性

早稲田大学 理工学部　　山田義雄 (Yoshio Yamada)

1 問題

Ω は $\mathbf{R}^N$ の有界領域、その境界 $\partial\Omega$ は十分に滑らかとする。次のような半線形放物型方程式に関する初期値境界値問題を考える：

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda |u|^{q-1}u + g(u) & \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

ここで λ, q は $\lambda \in \mathbf{R}, 0 < q < 1$ をみたす実数、g に次の仮定をおく：

(A)　　g は $g(0) = 0, g(u) \geq 0 (u \geq 0)$ をみたす C^1級の凸関数.

仮定 (A) をみたす代表的な関数は $g(u) = |u|^{p-1}u$ $(p > 1)$ である。上の初期値境界値問題 (P) について、後述するように（局所）解の存在については示すことができる。しかし、(P) の解の一意性については $\lambda > 0$ ならば、一般には成立しないことが知られている（Fujita-Watanabe [4]）。実際、$f(u) = \lambda|u|^{q-1}u + g(u)$ とおいたとき、ある正定数 M に対して f が $[0, M]$ 上で単調非減少かつ凹関数で

$$\int_0^M \frac{1}{f(u)} du < \infty$$

をみたすならば、$u_0 = 0$ としたとき、(P) に関して $u(x,t) \equiv 0$ に加え、$u(x,t) > 0$ for $(x,t) \in \Omega \times (0, t_0)$ となる解を構成することができる ([4, Theorem 1.5])。

上の Fujita-Watanabe の結果から sublinear term が存在することにより解の一意性が保証されなくことがわかる。この事情は、常微分方程式に対する初期値問題 $u_t = \lambda u^q$ $(0 < q < 1, \lambda > 0), u(0) = 0$ の解が一意でなくなることと同じである。しかし、(P) において初期関数 u_0 が非負かつ恒等的にゼロでなければどうであろうか？そこで、我々は初期関数 u_0 に

$$u_0 \geq 0, \quad u_0 \not\equiv 0 \qquad \text{in} \quad \Omega$$

を仮定し、(P) の非負解の一意性定理、より一般に比較定理を確立することをめざす。主要定理を述べるために以下の準備をする。固有値問題

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu w & \text{in} \quad \Omega, \\ w = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

の最小固有値を μ_1、 対応する固有関数を φ_1 とする。以後 φ_1 は

$$\varphi_1 > 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \sup_{x\in\Omega} \varphi_1(x) = 1$$

をみたすように正規化しておく。主要定理の一つとして次の比較定理が示される。

定理 $\lambda > 0, 1 - \frac{2}{N} < q < 1$ および初期関数 u_0, v_0 は

$$u_0 \geq v_0, \qquad u_0 \geq c_0\varphi_1 \quad \text{in} \quad \Omega$$

(c_0 は正数) をみたすとする。このとき u_0, v_0 に対する (P) の非負解 を u, v が $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ で存在すれば

$$u(x,t) \geq v(x,t) \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty)$$

が成立する。

この比較定理によって (P) の非負解の一意性が示されるほか、非負定常解の安定性や不安定性を議論することができる。(P) に対応する定常問題は

$$\text{(SP)} \qquad \begin{cases} \Delta u + \lambda|u|^{q-1}u + g(u) = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

で与えられ, その正値解については Ambrosetti-Brezis-Cerami [2] らにより、十分小さな $\lambda > 0$ に対する最小正値解の存在が示されて以来、解集合の構造についていろいろな結果が得られている (e.g., [7])。とくに $N = 1$ のときには Kuto [6] によって正値解のみならず、解集合の様相は完全に決定されている。我々は比較定理の応用として非負定常解の安定性を調べる。

2 非定常問題と比較定理

非定常問題 (P) において $f(u) = \lambda|u|^{q-1}u + g(u)$ とおくと $u \to f(u)$ は $\mathbf{R}$ 上で局所 Lipschitz 連続ではないが、その可解性については半線形発展方程式に対する一般論を適用して議論することができる。実数 r を $r > \max\{1, N/2\}$ をみたすようにとり、 (P) を関数空間 $L^r(\Omega)$ における積分方程式として考える。$L^r(\Omega)$ における閉作用素 A を

$$Au = -\Delta u \qquad \text{for} \quad u \in D(A) := W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$$

によって定義し、$-A$ が生成する解析半群を $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ とする。このとき (P) は積分方程式

$$\text{(2.1)} \qquad u(t) = e^{-tA}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s))ds$$

の形となる。そこで、実数 $\alpha \in (0,1)$ を $\alpha > N/2r$ をみたすようにとれば、$X := D(A^{\alpha}) \subset C(\overline{\Omega})$ と成ることに注意する ([5])。初期関数 u_0 は適当な滑らかさをもつと考え、

$$u_0 \in X, \qquad u_0 \geq 0, \qquad u_0 \not\equiv 0 \tag{2.2}$$

と仮定する。次に m を $m > \| A^{\alpha}u_0 \|$ をみたすようにとり、

$$K := \{v \in C([0,T];X); v \geq 0, \sup_{leqt \leq T} \| A^{\alpha}v(t) \| \leq m\}$$

と定義する。ここで $T > 0$ は後ほど決める正定数である。$v \in K$ に対して (2.1) の右辺を Φv とおけば、(P) の解を見つけることは Φ の不動点を探すことに帰着される。半群 e^{-tA} の解析性とコンパクト性を利用すると、T を十分に小さく取れば Φ は K から K 内への連続かつコンパクトな写像となることが示される (Henry [5], Pazy [8] を参照せよ) 。これより、Schauder の不動点定理によって Φ は K 内に不動点をもつことがわかり、(2.1) の局所解が求まる。この解が正則性をもち、(P) をみたすことも発展方程式の一般論から導かれる。このあたりの議論は Pazy の本 ([8, Chapter 6]) に詳しい。以上の結果をまとめると次の存在定理になる。

定理 2.1 u_0 は (2.2) をみたすと仮定する。このときある正定数 T が存在して $u \in C([0,T];X) \cap C((0,T];D(A)) \cap C^1((0,T];L^r(\Omega))$ および

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(u), & 0 < t < T, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

をみたす非負関数 u が存在する。

この定理 2.1 より (P) の非負解の存在が示されたから、次に比較定理（あるいは一意性定理）について調べよう。まず λ が正のケースから始める。

A. $\lambda > 0$ のケース

(P) をみたす非負解の性質を調べるために、次の結果に注意する。

命題 2.1 u_0 は (2.2) および $u_0(x) \geq c_0\varphi_1(x)$ $(x \in \Omega)$、ただし $c_0 \geq 0$、 をみたし、定理 2.1 と同じ正則性をもつ非負関数 $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbf{R}$ は

$$\begin{cases} u_t \geq \Delta u + \lambda |u|^{q-1}u + g(u) & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

をみたすとする。このとき

$$u(x,t) \geq [c_0 + \{(1-q)\lambda t\}^{1/(1-q)}]e^{-\mu_1 t}\varphi(x) \qquad \text{in} \quad \Omega \times [0,T]$$

が成立する。

注意 2.1 命題 2.1 に現われる関数 $y(t) := \{(1-q)\lambda t\}^{1/(1-q)}$ は常微分方程式に対する初期値問題 $y_t = \lambda y^q, y(0) = 0$ の特別解である。

証明 仮定 (A) より、非負関数 u は

$$u(t) \geq e^{-tA}u_0 + \lambda \int_0^t e^{-(t-s)A}u(s)^q ds \tag{2.3}$$

をみたす。 最初に $c_0 > 0$ のケースで証明する。

$$e^{-tA}\varphi_1 = e^{-\mu_1 t}\varphi_1 \tag{2.4}$$

であるから、u_0 の仮定より

$$e^{-tA}u_0 \geq c_0 e^{-\mu_1 t}\varphi_1 \tag{2.5}$$

となり、これを (2.3) に代入すれば

$$u(t) \geq c_0 e^{-\mu_1 t}\varphi_1. \tag{2.6}$$

これより

$$u(s)^q \geq c_0^q e^{-q\mu_1 s}\varphi_1^q \geq c_0^q e^{-q\mu_1 s}\varphi_1$$

となるから、(2.4) を利用して

$$e^{-(t-s)A}u(s)^q \geq c_0^q e^{-q\mu_1 s}e^{-\mu_1(t-s)}\varphi_1 \geq c_0^q e^{-\mu_1 t}\varphi_1$$

となる。この不等式を (2.3) の右辺の積分項に代入すれば,

$$\lambda \int_0^t e^{-(t-s)A}u(s)^q ds \geq \lambda c_0^q t e^{-\mu_1 t}\varphi_1$$

となり

$$u(t) \geq \lambda c_0^q t e^{-\mu_1 t}\varphi_1 \tag{2.7}$$

が成立する。次に (2.6) の代わりに (2.7) を利用する議論を繰り返す。したがって帰納的にすべての $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$u(t) \geq c_0^{q^k} D_k \lambda^{1+q+q^2+\cdots+q^{k-1}} t^{1+q+q^2+\cdots+q^{k-1}} e^{-\mu_1 t}\varphi_1 \tag{2.8}$$

を示すことができる。ただし $\{D_k\}$ は $D_0 = 1$ および漸化式

$$D_{k+1} = \frac{D_k^q}{1 + q + \cdots + q^k}$$

から決まる。これよりすべての k について $D_k \geq (1-q)^{1/(1-q)}$ が成立するから、(2.8) において $k \to \infty$ とすれば、$0 < q < 1$ であるから

$$u(t) \geq (1-q)^{1/(1-q)}(\lambda t)^{1/(1-q)} e^{-\mu_1 t}\varphi_1, \qquad (t, x) \in \Omega \times [0, T] \tag{2.9}$$

となり、再び (2.9) を (2.3) に代入して命題の主張が示される。ここで重要なことは (2.9) が c_0 と無関係な不等式となることである。

最後に $c_0 = 0$ のケースを証明する。このとき $u_0 \not\equiv 0$ であるから、任意の $\epsilon \in (0,T]$ に対して放物型方程式の強最大値原理 ([9]) より

$$u(\epsilon) \geq c_\epsilon \varphi_1$$

をみたす正数 c_ϵ が存在する。よって $t = \epsilon$ における $u(\epsilon)$ を初期値と考えれば (2.9) より

$$u(t) \geq (1-q)^{1/(1-q)} \{\lambda(t-\epsilon)\}^{1/(1-q)} e^{-\mu_1(t-\epsilon)} \varphi_1, \qquad (t,x) \in \Omega \times [\epsilon, T]$$

が成立する。ここで　$\epsilon \downarrow 0$ とすれば (2.9) が示され、命題 2.1 の主張が得られる。

注意 2.2 Cuachy 問題に対しても同様な結果は Aguirre-Escobedo [1, Lemma 2.2] によって示されている。

注意 2.3 命題 2.1 において u がみたすべき境界条件を $u \geq 0$ に置き換えても同様な結果が成立する。

補題 2.1 任意の $\rho < 1$ に対して

$$\int_\Omega \varphi_1(x)^{-\rho} dx < \infty$$

が成立する。

証明は省略する。この補題と Aguirre-Escobedo [1] のアイデアを利用して次の比較定理を示そう。この定理 2.2 の特別な場合が第 1 節の定理である。

定理 2.2 $1 > q > 1 - 2/N$ とする。$u, v : \Omega \times [0,T] \to \mathbf{R}^+$ が定理 2.1 と同じ正則性をみたし

$$\begin{cases} u_t \geq \Delta u + \lambda |u|^{q-1} u + g(u) & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

および

$$\begin{cases} v_t \leq \Delta v + \lambda |v|^{q-1} v + g(v) & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ v = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ v(\cdot, 0) = v_0 & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

をみたすと仮定する。(2.2) をみたす初期関数 u_0, v_0 が $u_0 \geq v_0$ および $u_0 \geq c_0 \varphi_1$ $(c_0 > 0)$ をみたせば

$$u(\cdot, t) \geq v(\cdot, t) \qquad \text{in} \quad \Omega \times (0, T]$$

が成立する。

証明 議論を簡単にするために $g \equiv 0$ として証明する（$g \not\equiv 0$ のケースも以下の議論を少し修正すればよい)。$w = v - u$ とおくと

$$
\begin{aligned}
w(t) &\le e^{-tA}w(0) + \lambda \int_0^t e^{-(t-s)A}\{v(s)^q - u(s)^q\}ds \\
&\le \lambda \int_0^t e^{-(t-s)A}\{v(s)^q - u(s)^q\}ds \\
&\le \lambda \int_0^t e^{-(t-s)A}\{v(s)^q - u(s)^q\}^+ds
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

となる。ここで $u^+ = \max\{u, 0\}$ である。$v(s) \ge u(s)$ が成立している s で考える。命題 2.1 より $u(s) \ge c_0 e^{-\mu_1 s}\varphi_1$ となることに注意すると

$$
\begin{aligned}
v(s)^q - u(s)^q &= q\int_0^1 \{\tau v(s) + (1-\tau)u(s)\}^{q-1}d\tau \cdot w(s) \\
&\le m\varphi_1^{-(1-q)}w^+(s), \qquad 0 \le s \le T
\end{aligned}
$$

をみたす正数 m が存在する。上の不等式を (2.10) に代入すると

$$
w^+(t) \le \lambda m \int_0^t e^{-(t-s)A}\{\varphi_1^{-(1-q)}w^+(s)\}ds. \tag{2.11}
$$

ここで $r > \max\{1, N/2\}$ を $r < 1/(1-q)$ をみたすようにとり、次に p を

$$
1 - q < \frac{1}{r} - \frac{1}{p} < \frac{2}{N}
$$

をみたすように十分大きく選ぶ。 e^{-tA} に対する評価

$$
\| e^{-tA}v \|_p \le M(p,r)t^{-\theta} \| v \|_r, \qquad \theta = \frac{N}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right), \tag{2.12}
$$

ただし $\| \cdot \|_p$ は $L^p(\Omega)-$ ノルム、を利用する ([5])。(2.12) において $\theta < 1$ であるから、(2.11) と (2.12) より

$$
\| w^+(t) \|_p \le \lambda m M(p,r) \int_0^t (t-s)^{-\theta} \| \varphi_1^{-(1-q)}w^+(s) \|_r \, ds \tag{2.13}
$$

ここで Hölder の不等式より

$$
\begin{aligned}
\| \varphi_1^{-(1-q)}w^+(s) \|_r &\le \| w \|_p \left(\int_\Omega \varphi_1^{-N(1-q)/2\theta}dx\right)^{2\theta/N} \\
&\le C \| w \|_p .
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

最後の不等式において $N(1-q)/2\theta < 1$ であるから、補題 2.1 を利用した。したがって (2.13), (2.14) より

$$
\| w^+(t) \|_p \le \lambda m C M(p,r) \int_0^t (t-s)^{-\theta} \| w^+(s) \|_p \, ds.
$$

ここで $\theta < 1$ であるから、[5, Lemma 7.1.1] の結果を用いて $w^+(t) \equiv 0$ が導かれ、$u(t) \geq v(t)$ が示される。

注意 2.4 定理 2.2 における条件 $u_0 \geq c_0\varphi_1$ において $c_0 > 0$ という仮定は不要と思われるが、残念ながら現在のところ除去できない。

定理 2.2 より解の一意性は容易に示される。

定理 2.3 $1 > q > 1 - 2/N, u_0 \geq C_0\varphi_1 \quad (c_0 > 0) \quad \text{in} \quad \Omega$ とする。このとき (P) の非負解は一意である。

B. $\lambda \leq 0$ のケース

$\lambda \leq 0$ の場合、比較定理の証明は容易であり、結果のみを述べる。

定理 2.4 $\lambda \leq 0$ のとき u, v は定理 2.2 の仮定をみたすとする。このとき $u_0 \geq v_0$ ならば、$u(\cdot, t) \geq v(\cdot, t) \quad \text{in} \quad \Omega \times [0, T]$ が成立する。

このように定理 2.4 は定理 2.2 と異なり、指数や初期関数の正値性に関する条件なしで成立する。この状況は、一意性定理についても同様である。

3 定常解の安定性と漸近挙動

まず用語の準備から始める。

定義 $u \geq 0 (\not\equiv 0)$ が (SP) の supersolution (resp. subsolution) であるとは

$$\text{(SP)} \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda |u|^{q-1}u + g(u) \leq 0 \quad (\text{resp. } \Delta u + \lambda |u|^{q-1}u + g(u) \geq 0) & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

をみたすことをいう。

注意 3.1 $\lambda > 0$ とする。$u \geq 0 \ (\not\equiv 0)$ が (SP) の supersolution ならば $-\Delta u \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega$ かつ $u|_{\partial\Omega} = 0$ であることより、最大値原理 (Protter-Weinberger [9, pp. 64-65]) によって

$$u > 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} < 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega,$$

ただし $\partial/\partial n$ は外向き法線方向の微分、が成立する。これより (SP) の supersolution u について

$$u > c_0\varphi_1 \quad \text{in} \quad \Omega$$

をみたす $c_0 > 0$ が存在することがわかる。

以後 $u_0 \geq 0 (\not\equiv 0)$ を初期関数とする (P) の解を $u(t; u_0)$ と表すことにする。さらに $\lambda > 0$ のときは $q > 1 - \frac{2}{N}$ を仮定する。Sattinger [10] の議論を用いて次の定理を示す。

定理 3.1 ϕ を (SP) の supersolution とする。このとき (P) の解 $u(t;\phi)$ について

$$u(x,t;\phi) \le \phi(x) \qquad \text{for} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),$$

かつ各 $x \in \Omega$ において $t \to u(x,t;\phi)$ は単調減少で

$$\lim_{t\to\infty} u(\cdot,t;\phi) = \phi^* \qquad \text{uniformly} \quad \text{in} \quad \Omega$$

をみたす。ここで ϕ^* は (SP) の非負解である。

証明 ϕ は (SP) の supersolution であるから、注意 3.1 より $\phi \ge c_0\varphi_1$ となる c_0 が存在する。したがって定理 2.2（あるいは定理 2.4）より任意の $(x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$ において

$$\phi(x) \ge u(x,t;\phi)$$

が成立する。次に $t \to u(x,t;\phi)$ の単調性については任意の $h > 0$ に対して定理 2.2（定理 2.4）を $u_0 = \phi, v_0 = u(h;\phi), u(t) = u(t;\phi), v(t) = u(t+h;\phi)$ として適用すると

$$u(x,t;\phi) \ge u(x,t+h;\phi) \qquad \text{for} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$$

が成立し、単調減少性がわかる。これよりある有界関数 ϕ^* に対して

$$\lim_{t\to\infty} u(\cdot,t;\phi) = \phi^* \qquad \text{各点収束} \tag{3.1}$$

となる。さらに $L^r(\Omega)$ 空間における発展方程式理論により $\{A^\beta u(t)\}_{t>0}$ は任意の $\beta \in (0,1)$ について $L^r(\Omega)$ 内で相対コンパクト集合となる。これより (3.1) の収束は一様収束（さらに $C^1(\Omega)$ での一様収束）となることがわかる。また、力学系の理論を用いて

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u(x)|^{q+1} dx - \int_\Omega G(u(x))dx$$

（ただし $G(u) = \int_0^u g(v)dv$）と定義すれば、$E(u(t;\phi))$ は t について単調減少である。したがって解軌道 $\{u(t;\phi)\}_{t\ge 0}$ に対応する ω 極限集合 $\omega(\phi)$ は (SP) の解集合に含まれ、ϕ^* は (SP) の解となる。詳しくは Henry [5] を参照してほしい。

同様に subsolution について次の結果を証明することができる。

定理 3.2 ψ は (SP) の subsolution で、ある正定数 c_0 について $\psi \ge c_0\varphi_1$ とする。このとき (P) の解 $u(t;\psi)$ について

$$u(x,t;\psi) \ge \psi(x) \qquad \text{for} \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),$$

かつ各 $x \in \Omega$ において $t \to u(x,t;\phi)$ は単調増加で、(SP) の解 ϕ_* に対して

$$\lim_{t\to\infty} u(\cdot,t;\psi) = \phi_* \qquad \text{uniformlyin} \quad \Omega$$

となるか、またはある $T > 0$ に対して $\lim_{t\to\infty} \| u(t;\psi) \|_\infty = +\infty$ となる。ここで $\| \cdot \|_\infty$ は supremum-ノルムである。

定理 3.1, 3.2 を (SP) の解の安定性の考察に適用しよう。g は条件 (A) のほか $g'(0)=0$ をみたすと仮定する。このとき $w=\epsilon\varphi_1$ は

$$\Delta w+\lambda w^q+g(w)=\epsilon^q\varphi_1^q\{\lambda-\mu_1\epsilon^{1-q}\varphi_1^{1-q}+o(1)\}$$

をみたす。よって $\epsilon>0$ が十分小ならば

$$\begin{cases}\lambda>0\text{ のとき }\epsilon\varphi_1\text{は (SP) の subsolution}\\ \lambda\leq 0\text{ のとき }\epsilon\varphi_1\text{は (SP) の supersolution}\end{cases}$$

となることがわかる。よって $\lambda>0$ のとき $u(t;\epsilon\varphi_1)$ は定理 3.2 より t について単調増加となり、(SP) の自明解 $u\equiv 0$ は不安定となることがわかる。一方 $\lambda\leq 0$ のとき $u(t;\epsilon\varphi_1)$ は定理 3.1 より t について単調減少となり、(SP) の自明解 $u\equiv 0$ は漸近安定となることがわかる。このとき、実は有限の T において $u(T;\epsilon\varphi_1)=0$ となることも示すことができる (Friedman-Herrero [3])。

(SP) の非自明解について考えよう。以後はパラメータ λ への依存性をはっきりさせるため、下付き添字 (たとえば $(\mathrm{SP})_\lambda$) を使う。$g(u)=u^p, 1<p\leq(N+2)/(N-2)$ とおくと、正値解について Ambrosetti-Brezis-Cerami [2], Ouyang-Shi [7] の結果をまとめると次の定理が知られている。

定理 正数 Λ が存在して次が成立する：

(i) $\lambda>\Lambda$ に対しては $(\mathrm{SP})_\lambda$ は非自明解をもたない。

(ii) $0<\lambda<\Lambda$ に対して $(\mathrm{SP})_\lambda$ は最小正値解 u_λ をもち、この u_λ は λ について単調増加である。

(iii) $0<\lambda<\Lambda$ に対して $(\mathrm{SP})_\lambda$ は最小正値解と異なる正値解 v_λ をもつ。とくに Ω が球、かつ $p\leq N/(N-2)$ ならば $(\mathrm{SP})_\lambda$ の正値解はちょうど 2 つである。

そこで $\lambda>0$ のとき最小正値解 u_λ の安定性を調べる。$(\mathrm{SP})_\mu$ の解 u_μ を用いると

$$\Delta u_\mu+\lambda u_\mu^q+g(u_\mu)=(\lambda-\mu)u_\mu^q \tag{3.2}$$

であるから、$\mu>\lambda$ のとき u_μ は $(\mathrm{SP})_\lambda$ の supersolution となる。よって、定理 3.1 から $t\to\infty$ のとき単調減少に $u(t;u_\mu)\to u_\lambda$ (Ω で一様収束) となることが示される。逆に (3.2) より $\mu<\lambda$ のとき u_μ は $(\mathrm{SP})_\lambda$ の subsolution となる。よって、前の結果と定理 3.2 から $t\to\infty$ のとき単調増加に $u(t;u_\mu)\to u_\lambda$ (Ω で一様収束) となることがわかる。とくに Ouyang-Shi の条件がみたされているならば、次の結果を示すことができる。

定理 3.3 Ω は球で $p\leq N/(N-2)$ をみたすとする。任意の $\lambda\in(0,\Lambda)$ に対して $(\mathrm{SP})_\lambda$ はちょうど *2* つの正値解 $u_\lambda, v_\lambda (u_\lambda<v_\lambda)$ をもち、$u_0\geq 0(\not\equiv 0)$ が $\mu>\lambda$ をみたす μ に対して $u_0\leq v_\mu$ であれば $(\mathrm{P})_\lambda$ の解 $u(t;u_0)$ について

$$\lim_{t\to\infty}u(t;u_0)=u_\lambda \qquad (\Omega\text{で一様収束})$$

となる。

$\lambda \leq 0$ のケースを考える。$(\mathrm{SP})_\lambda$ の非負解を任意にとり、v_λ とする。$K > 0$ に対して $w = Kv_\lambda$ とおくと

$$\Delta w + \lambda w^q + w^p = K(K^{p-1} - 1)v_\lambda^p - \lambda K^q v_\lambda^q (K^{1-q} - 1)$$

であるから

$$\Delta w + \lambda w^q + w^p > 0 \ \ (\text{resp.} < 0) \qquad \text{if} \qquad K > 1 \ \ (\text{resp.} \ \ K < 1).$$

これより

$$\begin{cases} K < 1 \text{ のとき } Kv_\lambda \text{ は } (\mathrm{SP})_\lambda \text{ の supersolution} \\ K > 1 \text{ のとき } Kv_\lambda \text{ は } (\mathrm{SP})_\lambda \text{ の subsolution} \end{cases}$$

となる。したがって定理 3.1 より次の意味で v_λ は不安定となる。

定理 3.4 $u_0 \geq 0$ が任意の $K < 1$ に対して $u_0 \leq Kv_\lambda$ ならば、$(\mathrm{P})_\lambda$ の $u(t; u_0)$ について

$$\lim_{t \to \infty} u(t; u_0) = 0 \qquad (\Omega \text{で一様収束}).$$

さらに有限の $T > 0$ について $u(T; u_0) = 0$ となる。

特に $N = 1$ のときは Kuto [6] によって非負値定常解のつくる集合は完全に解明されている。とりわけ、$\lambda < 0$ がある一定の負の数よりも小さくなると、正値解の存在と一意性が失われ、vanishing zone をもつ非負解が作る連続体集合が出現する。これらの解の安定性の解析についても定理 3.1, 3.2 は有効である。

参考文献

[1] J. Aguirre and M. Escobedo, *A Cauchy problem for $u_t - \Delta u = u^p$ with $0 < p < 1$. Asymptotic behaviour of solutions*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **8**(1986-1987), 175-203.

[2] A. Ambrosetti, H. Brézis and G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Functional Anal. **122**(1994), 519-543.

[3] A. Friedman and M. A. Herrero, *Extinction properties of semilinear heat equations with strong absorption*, J. Math. Anal. Appl. **124** (1987), 530-546.

[4] H. Fujita and S. Watanabe, *On the uniqueness and non-uniqueness of solutions of initial value problems for some quasilinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **21**(1968), 631-652.

[5] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics **840**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1981.

[6] K. Kuto, *On the structure of solutions of one-dimensional elliptic equations with concave and convex nonlinearities*, preprint.

[7] T. Ouyang and J. Shi, *Exact multiplicity of solutions and global bifurcation of* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Proceedings of the US-Chinese Conference : Differential Equations and Applications held in Hangzhou, 1996, edited by P.W.Bates, S-N.Chow, K.Lu and X.Pan, International Press, 1997.

[8] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences **44**, Springer-Verlag, New York, 1983.

[9] M. H. Protter and H. F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1984.

[10] D. H. Sattinger, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 979-1000.

反応拡散方程式の定常解集合の研究

早稲田大学理工学部
中島主恵

1 正値定常解集合の大域的構造

ここでは写像度の理論，大域的な分岐理論を用いて，解の存在，多重度などについて調べた結果を紹介する．

1. Positive steady-states for prey-predator models with cross-diffusion, *Advances in Differential Equation*, **1**, (1996), 1099-1122 (with Yoshio Yamada).

以下のような準線型拡散反応方程式系の定常問題を考える．

$$\begin{cases} \Delta[(1+\alpha v)u] + au(1-u-cv) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta[(1+\beta u)v] + bv(1+du-v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u \geq 0, \quad v \geq 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで Ω は境界のなめらかな有界領域，α, β は非負の数，a, b, c, d は正定数である．この問題は数理生態学に現れるモデルのうち，非線型拡散を伴ったものである．(1.1) について次のような結果が得られている．

本研究の成果 1．正値定常解の存在のための十分条件が得られたこと，および，$N = 1$ に限定すれば，ある条件をみたす α, β に対し，正値解が存在するための必要十分条件と一意性が示されたことである．

非線型楕円型方程式の解の存在，多重度を示すには変分法が非常に有力な道具であるが，(1.1) は変分構造をもたない．そこで，非線型楕円型方程式でよく使われるもう 1 つの幾何的な道具—写像度—を応用することを考える．写像度の方法は，ある集合のホモトピー不変性を利用してその集合の中に漠然と“解がある”ことを示すのには非常に有力である．しかし (1.1) のように自明解だけでなく，相異なる解が複数個存在することが期待される場合，いわばブラックボックス的に解の含まれるべき集合の外のようすを見ているだけでは解の個数，性質などについて調べることはできない弱点がある．

この写像度の弱点を補うため，次のような方法をとることにした．まず解析的手法を用いて方程式の性質を調べ，方程式系にたいし不変な集合をみつける．さらに写像度を用いて，その不変な集合内に解が存在することを示す．またそのような集合が複数存在する場合，それぞれの集合が共通部分をもっていなければ，解が複数存在することが示される．また解は属している集合の性質を備えているから，解の性質も同時に得られる．

このように解析的道具と写像度のような幾何的な道具を組み合わせて応用するところに本研究の特徴がある.

2. Multiple existence of spatially inhomogenious steady-states for competition diffusion systems, *Advances in Mathematical Sciences and Applications* **9** (1999), 973-991.

本論文では以下のような常微分方程式系の正値解について考える.

$$\begin{cases} \{a(x)^2u'\}' + h(x)^2uf(u,v) = 0 & \text{in } (0,1), \\ \{b(x)^2v'\}' + k(x)^2vg(u,v) = 0 & \text{in } (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

ここで $a(x), b(x), h(x), k(x)$ は正の $C^2[0,1]-$ 関数, $f, g : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は連続微分可能な関数, f_u, f_v, g_u, g_v は $u, v > 0$ に対し負であるとする.

(2.1) の正値解 (u,v) のなかで興味があるのは, u' と v' がともに $n-1$ 個の単純零点をもつような解で, これを $n-$ mode 解と呼ぶことにする. (定数解は $0-$mode とする.) S を (2.1) のすべての正値解からなる集合とし, S_n を (2.1) の n-mode 解全体からなる集合とすると, 次のような結果がえられる.

本研究の成果2.1. 次の分解定理が成立する.

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n. \tag{2.1}$$

これより (2.1) の解は定数解か n-mode 解のどちらかとなる. 一般の方程式系では, u' と v' の零点の数は一致しないから, (2.1) の解が n-mode 解という特別な性質をもつ解に限られるということに注意されたい.

上記の結果は, 球対称領域 Ω における Lotka-Volterra 型競争系の球対称な正値定常解の研究に適用することができる:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u(\alpha - u - \beta v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta v + \lambda v(\gamma - v - \delta u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial u/\partial\nu = \partial v/\partial\nu = 0 & \text{on } \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

ここで $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N; R_1 < |x| < R_2\}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は正定数で $\frac{1}{\delta} < \frac{\alpha}{\gamma} < \beta$, をみたすと仮定する. この仮定のもと (2.2) は双安定系となり, 不安定な唯一の正定数解 $(u^*, v^*) = (\beta\gamma-\alpha)/(\beta\delta-1), (\alpha\delta-\gamma)/(\beta\delta-1)$, をもつ. (2.2) について $(u,v) = (u^*, v^*)$ で線型化し, 局所分岐理論を用いると, (u^*, v^*) からさまざまな mode をもつ非定数解が分岐してくることがわかる. そこで空間変数 $x \in \mathbf{R}^N$ を $r = |x|$ に変え, $a(r) = b(r) = h(r) = k(r) = r^{(N-1)/2}$ とおくと, (2.1) の形になる. これに分解定理を用いると以下の結果がえられる.

本研究の成果2.2. 各 $n = 1, 2, 3, \cdots$ にたいし, ある $\lambda = \lambda_n$ で (u^*, v^*) から分岐した $n-$mode 解の分岐枝は, $n-$mode 解の性質を保ったまま, $\lambda = +\infty$ まで伸びる.

システムの場合, 一般には非常に複雑である解集合を $n-$mode 解という非常にクリアな性質をもつ解に分類しえたこと, また分類しうるような方程式のクラスをみつけたところに研究の特徴がある.

なお結果２．２と後述の結果４をあわせると，(2.2) の球対称解な分岐解の形状に関する，次のような興味深い結果がえられる．すなわち十分大きい n に対し，分岐した直後の $n-$mode 解の n 個の layer は，$[R_1, R_2]$ 上ほぼ均一に存在することがわかっている（layer の間隔は ϵ の order）が，$\epsilon \to 0$ とすると，分岐した $n-$mode 解の layer は R_2 にひきよせられることがわかる．

このように，当研究の大域的な分岐の結果に，上記の方程式の $\epsilon \to 0$ における特異極限として現れる界面方程式に関する理論を応用することで，分岐の直後と分岐枝が伸びていった遠方（$\lambda = +\infty$）での解の形状の変化のしかたについて詳しい情報が得られる．このような解析はこれまでなされたことがなく，こうした研究に突破口を開いたところに当研究の重要性がある．

2 特異摂動問題

ある種の反応拡散方程式では，拡散係数が極端に小さいと，いわゆる“内部遷移層”をもつ解が現れる．内部遷移層とは，空間内のある曲面を境に，解の値がほとんど不連続にみえるほど急激に変化している部分のことである．

以下の論文３では，十分小さい拡散係数にたいし，このような内部遷移層をもつ定常解の存在を，upper solution と lower solution を構成することによって証明し，そのさまざまな性質を論じている．

3. Stable transition layers in a balanced bistable equation, to appear in *Differential and Integral Equations.*

本論文では次の境界値問題について，$\epsilon > 0$ が十分小さいときに遷移層をもつ安定解を構成することを目標とする．

$$\begin{cases} \epsilon^2 u_{xx} - (u - a(x))(u - b(x))(u - c(x)) = 0 \quad \text{in} \quad (0,1), \\ u_x(0) = u_x(1) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

$a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot) : [0,1] \to \mathbf{R}$ は $a(x) < b(x) < c(x) \quad (x \in [0,1])$ を満たすなめらかな関数である．対応する放物型方程式の時間発展の解は時間の経過とともにエネルギー

$$\frac{1}{2}\epsilon^2 \int_0^1 u_x^2 dx + \int_0^1 W(x, u(x)) dx.$$

を減少させる．ここで $W(x,u) = -\int_0^u (\tau - a(x))(\tau - b(x))(\tau - c(x)) d\tau,$ はポテンシャルエネルギーに対応する関数である．$W(x, a(x)) - W(x, c(x))$ が $(0,1)$ 内の有限個の点で符号を変えているとき，Angenent,Mallet-Paret,Peletier らにより，次の結果が得られている．すなわち，$\epsilon > 0$ が十分小さいとき，(3.1) の安定解 u として $W(x, a(x)) < W(x, b(x))$ をみたす点 x 上ではほぼ a に近く，$W(x, a(x)) > W(x, c(x))$ をみたす点 x 上ではほぼ c に近く，$W(x, a(x)) = W(x, c(x))$ をみたす点の近傍で遷移層をもつものが存在する．

上記の結果から，“エネルギーレベルの差” $W(x, a(x)) - W(x, c(x))$ の符号が変化すると，遷移層が形成されることが結論できる．ところが，エネルギーレベルの差が生じない様な状況で何が起こるのかについてはこれまでの研究では十分に明らかにされてこなかった．

そこで本研究では：$u=a$ と $u=c$ のエネルギーレベルに差がないときを考え，次のような仮定をおく．

$$(A) \qquad W(x,a(x)) = W(x,c(x)), \quad \text{for every} \quad x \in (0,1).$$

条件 (A) のもと以下の結果が得られた．

本研究の成果３． 関数 $c(x)-a(x)$ の任意の極小点の近傍で遷移層を形成する安定解が構成できる．しかも，$W(x,a(x)) \neq W(x,b(x))$ の場合の結果とは対照的に，遷移層はどちらの向きもとりうるし，また解が遷移層をとりうる位置は任意の極小点であるので，極小点の選び方に応じて多数の安定解が存在することがわかる．

これまで遷移層をもつ定常解の構成は，主としてエネルギーレベルの差が０でない場合に対してのみ行われてきたが，本研究ではエネルギーレベルの差が０の場合にも遷移層をもつ安定な定常解が存在することを示している．空間１次元の場合のみの結果であるが，遷移層の位置を決定する本質的な量は何かを示唆しており，大変興味深い．また解の遷移層の幅を数学的にきちんと評価している．

現在研究中のテーマ

現在研究しているのは界面方程式を用いる方法である．拡散係数を 0 に近づけた特異極限下では，内部遷移層は厚さが 0 の曲面（一般に“界面”とよばれる.）に収束し，もとの非線型拡散方程式系に対する解析はこの界面の運動をつかさどる方程式の解析に帰着される．一般に解析が困難な非線型拡散方程式系の解の挙動を“界面の動き”という比較的とらえやすい形で理解するところにこの方法の利点がある．

この $\epsilon \to 0$ の特異極限下で得られる界面方程式がどのようなものであるかは，もとの拡散方程式によって大きく異なることがさまざまな研究からわかっている．最も単純な Allen-Cahn 方程式とよばれる単独の拡散方程式の場合は，特異極限下で得られる界面方程式（以下“極限方程式”とよぶ.）が微分幾何学に登場する平均曲率流方程式になることが知られており，したがってこの方程式の定常解は極小曲面になる．極限方程式が何かを知ることは，もとの非線形拡散方程式の解の挙動の本質を理解するうえで非常に重要な鍵となっている．

現在，私は次のような空間非一様な競合系について，Danielle Hilhorst 氏（パリ南大），俣野博氏（東京大学）との共同研究を行っている．

$$\begin{cases} \epsilon u_t = \epsilon\Delta u + \epsilon^{-1}h(x)^2 u(\alpha - u - \beta v) & \text{in } \Omega \times [0,\infty), \\ \epsilon v_t = \epsilon\Delta v + \epsilon^{-1}h(x)^2 v(\gamma - v - \delta u) & \text{in } \Omega \times [0,\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0,\infty). \end{cases} \tag{4.1}$$

ここで ϵ は正定数，Ω は $\mathbf{R}^n$ 内の領域，h は滑らかな正値関数，係数は $\frac{1}{\delta} < \frac{\alpha}{\gamma} < \beta$ をみたすとする．またこの条件をおくと (4.1) は２つの安定な定数解 $(\alpha,0),(0,\gamma)$ をもつ，いわゆる双安定型のシステムになる．

本研究の成果４． $\epsilon \to 0$ とした特異極限下での界面方程式は

$$V = -(n-1)E_1\kappa - E_2\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial \nu} \tag{4.2}$$

で与えられる．ここで V は界面の速度，κ は界面の平均曲率，$\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ は法線方向の微分，E_1, E_2 は係数 a, b, c, d によって決まる定数である．

特異極限における界面方程式を厳密に導出する作業は，通例，upper-lower solutions を構成する手法を用いる．本研究もその手法に従っている．ただ，この方法の難点は，upper solution と lower solution の間隔が $\epsilon \to 0$ としたときに急速に狭くなっていき，そのため，upper-lower solutions ではさまれる初期値のクラスが非常に制限されてしまう点にある．本研究では，非常に広いクラスの初期値から出発した解が，きわめて短時間の間に遷移層を形成することを証明し（generation of interface），その結果，解が upper solution, lower solution に挟まれる狭い領域に入ることを示すことで上記の困難を克服した．さらにこの結果を用いて，シャープな内部遷移層をもつ安定定常解の存在も示している．

さらに最近は次のような物理学における相転移現象をあらわす方程式について研究をすすめている．

$$\begin{cases} \epsilon u_t = \epsilon u_{xx} - \epsilon^{-1} h(x)^2 u(1-u^2) & \text{in } (0,1) \times [0,\infty), \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0 \geq 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

(5.1) は $u = -1$ と $u = 1$ の２つの定数安定解をもち，この２つの安定解のエネルギーレベルは等しい．

証明には楕円型方程式の優解劣解を構成する手法を用いる．

現在考えているのは次のような問題である．

問題．関数 $h(x)$ の任意の極点（極大点と極小点）の近傍で遷移層を形成する解を構成する．またそれぞれの解のモース指数を正確に評価する，

これにたいし，次のような結果が得られた．

本研究の成果５．１． 関数 $h(x)$ の極点の集合を　P とし，その任意の部分集合を M とする．(5.1) の解で，M に含まれる点それぞれの近傍に任意個の遷移層をもつものが存在する．

定理１は，１つの極点に多数の遷移層が折り重なって現れるような解が存在することを示している．

以下に述べる成果は，解のもつ遷移層の数と位置に関する情報から，解のモース指数が完全に決定される事を示している．

本研究の成果５．２． 十分小さい $\epsilon > 0$ にたいし，次が成り立つ．

$$h(x) \text{ の極大点付近に存在する解の遷移層の総数} = \text{モース指数}$$

証明は２階の微分作用素の変分的特徴づけとストゥルムーリュービルの理論によっている．

研究分担者　大谷 光春の報告

研究成果概要

(i) porous medium 方程式及びその一般化された方程式の C^∞-級に属する時間局所解の存在に関する研究をおこなった。従来の研究においては、porous medium 方程式の弱解の Hölder 連続性が良く知られていたが、滑らかな (局所) 解の存在については、長く、未解決問題として残されていた。大谷-杉山により、Lipshitz 連続な時間局所解が構成され、ここで開発された、L^∞-エネルギー評価法を発展させ、C^∞ に属する局所解の存在が証明された。(論文 [8],[11],[12])

(ii) 非線形楕円型方程式の解の存在、非存在及び解の多重性について研究をおこなった。特に、非線形項の係数が境界に特異性を有する場合の解の存在、非存在の研究 (論文 [9],[10]) の応用として、外部領域における、supercritical の増大度の非線形項を有する半線形楕円型方程式のは正値解の持つか？という未解決問題が、肯定的に解決された。(学会発表 [12],[15]) 解の非存在については、通常仮定される、領域の「星状性」が満たされない場合にも、非存在性が保証される場合があることが発見された。(学会発表 [3],[9]) この他にも、部分対称性がある非有界領域におけるコンパクト性の破れの解析 (論文 [14])、臨界指数近くの増大度の非線形項の係数関数のトポロジーが正値解の多重性に及ぼす影響の解析 ([13],[15]) などのこれからの進展が期待される成果もあった。

(iii) 抽象論の立場からは、劣微分作用素に摂動項がついた作用素に対する「写像度」の理論を確立 (学会発表 [6]) し、多価作用素が現れる物理現象への応用が検討されている。発展方程式の分野では、従来ヒルベルト空間での理論しか存在しなかった、劣微分作用素の理論を回帰的 Banach 空間に拡張する試み (学会発表 [18]) もなされている。

論文発表

[1] M. Ôtani; A semigroup approach for the Zakharov equations, Functional Analysis and Global Analysis, Springer-Verlag (1997), 222-228.

[2] Polly W. Sy et al.; Approximation of some elliptic equations in Banach spaces, Functional Analysis and Global Analysis, Springer-Verlag (1997), 9-13 .

[3] Hiroshi Inoue and M. Ôtani; Periodic problems for heat convection equations in noncylindrical domains, Funkcialaj Ekvacioj **40** (1997), 19-39 .

[4]Takahiro Hashimoto and M. Ôtani; Nonexistence of weak solutions of nonlinear elliptic equations in exterior domains, Houston J. Math. **23** (1997), 267-290.

[5]Nonexistence of positive solutions for some quasilinear elliptic equations in striplike domains, Discrete and Continuous Dynamical Systems **3** (1997), 565-578.

[6]M. Ôtani and Polly W. Sy); Approximation for the first eigenvalues of some

nonlinear elliptic operators in Banach spaces, Advances in Mathematical Sciences and Applications, **8** (1998), 273-283.

[7]Dynamical systems and time-dependent subdifferential operators, Proceedings of the International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, Southwest Missouri State University Press, **2** (1998), 153-161.

[8]and M. Ôtani; C^∞-solutions of generalized porous medium equations, Proceedings of the Conference on "Nonlinear Partial Differential Equations and Applications" ed. by Guo Boling and Yang Dadi, World Scientific (1998), Singapore,NewJersey, London, Hong Kong, 62-70. [9]M. Ôtani; Elliptic Equations with Singularity on the Boundary, Differential and Integral Equations **12**, No.3, May 1999, 339-349.

[10]M. Ôtani; Sublinear Elliptic Equations and Eigenvalue Problems with Singular Coefficients, to appear in Communications in Applied Analysis.

[11]and M. Ôtani; A method of energy estimates in L^∞ and its application to porous medium equations, submitted.

[12]Local existence of C^∞ solutions for porous media equations, submitted to the proceedings of FBP'99.

[13]M. Ôtani; Effect of critical point at infinity on the multiplicity of solutions for singular perturbed semilinear elliptic equations in exterior domains, submitted to the proceedings of FBP'99.

[14]M. Ôtani; Concentration compactness principle at infinity with partial symmetry and its applications, submitted.

[15]M. Ôtani; Multiplicity of positive solutions for semilinear elliptic equations with nearly critical exponent, preprint.

口頭発表

学会報告

[1] Positive solutions for semilinear elliptic equations in unbounded domains involving critical Sobolev exponent,
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 信州大学), 1997/4/4 (共同講演者 石渡 通徳).

[2] 係数関数が境界上に特異性を持つ楕円型方程式について
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 東京大学）, 1997/10/2 (共同講演者 橋本 哲).

[3] 非連結な境界をもつある非線形楕円型方程式の弱解の非存在について
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 東京大学), 1997/10/2 (共同講演者 橋本 貴宏).

[4]Brezis-Nirenberg-type results in strip-like domains,
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 東京大学), 1997/10/2 (共同講演者 石渡 通

徳).

[5] C^∞-solutions for porous medium equations with perturbations,
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 名城大学), 1998/3/28 (共同講演者 杉山 由恵).

[6]Degree for subdifferentials with nonmonotone perturbations
実函数論分科会講演／日本数学会（於 名城大学), 1998/3/28 (共同講演者 小林 純).

[7]Sobolev-Poincaré の不等式に関連した 2 点境界値問題の解の振る舞いについて
日本応用数理学会 1998 年度年会 (於 早稲田大学), 1998/9/13 (共同講演者 井戸川 知之).

[8] 境界上に特異性を持つ楕円型方程式の解の非存在について
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 大阪大学）, 1998/10/2 (共同講演者 橋本 哲).

[9] 非星状領域における Sobolev 臨界指数を含む非線形楕円型方程式の正値解の非存在について
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 大阪大学）, 1998/10/2 (共同講演者 橋本 貴宏).

[10]Existence of Multiple Positive Solutions for Brezis-Nirenberg Type Equations
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 大阪大学）, 1998/10/2 (共同講演者 石渡 通徳).

[11]Positeive Solutions for Semilinear Elliptic Equations in Unbounded Domains with Symmetry
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 学習院大学）, 1999/3/26 (共同講演者 石渡 通徳).

[12] 外部領域における半線形楕円型方程式の正値解について- Supercritical Case -
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 学習院大学）, 1999/3/26 (共同講演者 橋本 哲).

[13]Time Local Estimates for Derivatives of Solutions of Some Doubly Nonlinear Equations,
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 学習院大学）, 1999/3/27 (共同講演者 杉山 由恵).

[14]Existence of multiple solutions for semilinear elliptic equations with nearly critical exponent,
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 広島大学), 1999/9/27 (共同講演者 石渡 通徳).

[15] 変数係数をもつ半線形楕円型方程式の外部領域における解の存在条件について
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 広島大学), 1999/9/27 (共同講演者 橋本 哲).

[16]4 階非線形楕円型方程式の弱解の非存在について
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 広島大学), 1999/3/27 (共同講演者 橋本 貴

宏).

[17]2 つの指数を持つある 2 点境界値問題の解の指数に対する挙動
実函数論分科会講演／日本数学会（於 広島大学), 1999/3/27 (共同講演者 井戸川 知之).

[18]Evolution equations governed by subdifferentials in reflexive Banach space
実函数論分科会講演／日本数学会（於 早稲田大学), 1999/3/29 (共同講演者 赤木 剛朗).

[19]Effect of weight function on the multiplicity of positive solutions for semilinear elliptic equations with nearly critical exponent
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 早稲田大学), 2000/3/30 (共同講演者 石渡通徳).

[20]C^∞-solutions of porous medium equations in R^N
函数方程式分科会講演／日本数学会（於 早稲田大学), 2000/3/30 (共同講演者 杉山由恵).

研究集会発表

[1] C^∞-sol utions of generalized porous medium equations, 国際会議「International Conference on Nonlinear Partial DifferentialEquations and Applications, Chongqing Univ. China, 1997 年 5 月.

[2] Quasilinear elliptic equations in unbounded domains, 「Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations 1997」, Saitama Univ. Japan, 1997 年 9 月.

[3] Nonlinear elliptic equations with supercritical nonlinearity in unbounded domains, 「Fucik Memorial Workshop 1999」, Paskey (チェコ), 1999 年 5 月.

[4] Local existence of C^∞-solutions for porous medium equations, 国際会議「Free Boundary Problems: Theory and Applications」, 千葉大学, 1999 年 11 月.

研究分担者　田中和永の報告

研究成果は (i) ハミルトン系に関するもの, (ii) 非線型楕円型方程式に関するものの 2 つに分けることができる.

(i) ハミルトン系に関しては prescribed energy problem に関して天体力学における N-体問題の状況において weak force の下で周期解の存在を論じたもの ([8]), 2-体問題の状況で周期解の存在を論じ, 同様な手法により non-compact な Riemann 多様体上の測地線の存在を求めたもの ([6]) がある. また最近は chaotic な挙動をもつ解軌道に興味をもち, singularity をもつハミルトン系に対してビリヤード問題を論じている ([1,5]).

(ii) 非線型楕円型方程式に関しては主に解の多重性のための条件を論じている. [7] においては $\mathbf{R}^N$ での正値球対称解の一意性のための条件を論じ, その応用として, Séré の非退化条件をみたす楕円型方程式の例を構成した. [2,3] においては $\mathbf{R}^N$ での正値解の多重性を論じ concentration-compactness に基づく議論によりそれを示した. その際, 解の多重性は空間変数 x への依存性に非常にデリケートに依存することを示す例を与えた. また, [4] においては小川によって導入された $\mathbf{R}^N$ での Trudinger-Moser 型の不等式の最良指数を求め, [9] では変分構造をもつ非線型楕円型方程式の正値解の多重性を論じた.

発表論文

[1] P. Felmer and K. Tanaka; Scattering solutions for planar singular hamiltonian systems via minimization, to appear in Adv. Diff. Eqn.

[2] S. Adachi and K. Tanaka; Four positive solutions for the semilinear elliptic equation: $-\Delta u+u = a(x)u^p + f(x)$ in $\mathbf{R}^N$, to appear in Calculus of Variations and Partial Differential Equations.

[3] S. Adachi and K. Tanaka; Existence of positive solutions for a class of nonhomogeneous elliptic equations in $\mathbf{R}^N$, to appear in Nonlinear Analysis: T.M.A.

[4] S. Adachi and K. Tanaka; Trudinger type inequalities in $\mathbf{R}^N$ and their best exponents, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[5] P. Felmer and K. Tanaka; Hyperbolic-like solutions for singular Hamiltonian systems, to appear in NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.

[6] K. Tanaka; Periodic solutions for singular Hamiltonian systems and closed geodesics on non-compact Riemannian manifolds, to appear in Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.

[7] Y. Kabeya and K. Tanaka; Uniqueness of positive radial solutions of semilinear elliptic equaitons in $\mathbf{R}^N$ and Sere's non-degeneracy condition, to appear in Comm. Partial Differential Equations 24 (1999), 563–598.

[8] A. Ambrosetti and K. Tanaka; On Keplerian N-body type problems, in "Nonlinear Analysis and continuum mechanics: Paper for the 65-th birthday of James Serrin" (G. Buttazzo, G.P. Galdi, E. Lanconelli, P. Pucci ed.) Springer 1998, 15-25.

[9] K. Tanaka; Multiple positive solutions for some nonlinear elliptic systems, Topological Methods in Nonlinear Analysis 10 (1997), 15-45.

研究分担者　草間時武の報告

研究経過.　　　許容性、 完全類、 最小完全類 なる概念は、もともと統計的決定関数論における概念であるが、 統計的実験の集合にも統計的実験の比較における半順序(Blackwellの意味での)が導入されるから、これらの概念が論じられる筈である。 逐次二項実験の族において、 完全類、 許容性について、 小山 暢之 氏と研究した （1）。

線形模型の比較について H. Heyer(Tübingen大)と共同研究中である。

Semiparametric Model について 鈴木 武 氏(早大)、 久保木 正孝 氏(電通大)と 研究中である。

研究業績.

（1） T.Kusama, N.Koyama : Complete Classes in Comparison of Sequential Binomial Experiments (Statistics and Decision Vol 18 に掲載予定)

研究分担者　西原健二　の報告

Porous Media 中の一次元圧縮性流は、Dissipation の付いた p-system と呼ばれる双曲型方程式系で表現される。この系の解は、Darcy の法則によって得られる放物型方程式、即ち、Porous Media 方程式の解に漸近することが予想される。実際、1992 年、Hsiao-Liu により、数学的証明がなされた。その後、境界を持つ場合、漸近の速さについて、エントロピーを考慮した方程式系について等、考察が深められてきた。一連の研究の中で、漸近の速さについて、最良の漸近挙動を得ることができた。それは、エネルギー法と、放物型方程式の Green 関数の方法を組み合せることによって得られた。変数係数の場合にも、最近開発された近似 Green 関数の方法を用いて、最良の漸近オーダーが得られたことに注意したい。また、同様の方法が Thermoelastic system にも応用された。

論文発表

1. K. Nishihara and T. Yang, Boundary effect on asymptotic behavior of solutions to the p-system with linear damping, J. Differential Equations 156, 439-458(1999).
2. K. Nishihara, W. Wang and T. Yang, L^p-convergence rate to Nonlinear diffusion waves for p-system with damping, to appear in J. Differential Equations.
3. K. Nishihara and S. Nishibata, Large time behavior of solutions to the Cauchy problem for one-dimensional thermoelastic system with dissipation, to appear in J. Inequalities and Applications.
4. K. Nishihara and M. Nishikawa, Asymptotic behavior of solutions to the system of compressible adiabatic flow through porous media, to be submitted.

口頭発表

1. Damping を持つ双曲型保存則系の解の漸近挙動, シンポジウム"双曲系の諸問題", 大阪電通大, １９９８年２月
2. Asymptotic behavior of solutins to the p-system with linear damping, 第 23 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 北海道大学, 1998 年７月
3. Nonlinear waves with boundary effect, Summer Workshop on Conservation Laws, Stanford University, USA, 1999. 8.
4. Porous media 中の一次元圧縮性流の漸近挙動について、日本数学会秋季総合分科会（広島大学），１９９９年９月

研究分担者　四ツ谷 晶二の報告

半線形の楕円型方程式においては，解の構造を調べる際に球対称解が基本的な役割をはたすことがしばしばある．対象を球対称解に限れば，問題は球対称解が満たす力学系の解析へと簡単化されるが，既存の力学系の手法や関数解析の手法を駆使しても，存在，非存在，一意性などの問題はけっして容易に解ける問題ではない．

従来の研究では，非線形項や境界条件がわずかに異なるだけでも，それぞれ違った手法を用いて個別的に調べられることが多かった．ところが，方程式の形や領域の異なるいくつかの問題に対し，球対称解が類似した全体構造を持つことが徐々に明らかになってきた．最近，これらの球対称解が満たす境界値問題が，適当な変数変換によって一種の標準形に帰着できることを発見した．これにより，個別に得られてきた多くの結果を統一的に理解できるだけでなく，これまで未解明であった方程式の解の構造を明らかにしたり，より詳細な構造を知ることができるようになってきた．

論文発表

[MKTAY] 森下博，小林尚弘，高市英明，天野要，四ツ谷晶二，代用電荷法におけるポアソン方程式の数値計算，情報処理学会論文誌，Vol.38, No.8, 1183-1491, 1997.
[KbYY2] Kabeya, Y., Yanagida, E. and Yotsutani, S., Number of zeros of solutions to singular initial value problems, Tohoku J. Math. 50 (1998), 1-22.
[YY] 柳田英二，四ツ谷晶二：非線形偏微分方程式の最近の話題 – 半線形楕円型方 程式の球対称の構造 –，数学，51(3) (1999)，276-290.
[Y] Yotsutani, S., Structure of radial singular solutions of semilinear elliptic equations, Proceedings of Conference on Nonlinear Differential Equations and Numerical Analysis (Eds. C.-S. Lin et al.), National Center for Theoretical Sciences, Taiwan, 1999, 155-162.
[MAY] 森下博，天野要，四ツ谷晶二，代用電荷法におけるポアソン方程式の数値計算の改良，情報処理学会論文誌，Vol.40, No.9, 3337-3344, 1999.
[MYY1] Morishita, H., Yanagida, E. and Yotsutani, S., Structural change of solutions for a scalar curvature equation, to appear in Differential and Integral equations.

口頭発表

[KbYY1] 壁谷喜継，柳田英二，四ツ谷晶二，非線形 Sturm-Liouville 方程式の標準形と解の構造，応用数学合同研究 集会報告集，1997,　345-350.
[MYY2] Morishita, H., Yanagida, E. and Yotsutani, S., On the structure of positive radial solutions including all singular solutions, 応用数学合同研究集会報告集，1999, 295-300.
[MyYY] Myogahara, H., Yanagida, Y. and Yotsutani, S., Classification of the structure of positive radial solutions to semilinear elliptic equations in a ball and its applications, 応用数学合同研究集会報告集，1999, 289-294.

なお、研究の具体的内容を以下に記す．

1　標準形への変換

従来，存在，非存在，一意性などの問題は，方程式や境界条件に応じて異なった解析手法を用いて個別に論じられてきた．しかしながら，u^p の形の非線形項を含む 2 階常微分方程式に対する境界値問題（第 3 種境界条件を含む）あるいは全域の問題

$$u'' + \alpha(x)u' + \beta(x)u + \gamma(x)u^p = 0, \quad -\infty \le a < x < b \le +\infty$$

が，適当な変数変換によっていくつかの標準形の一つに帰着できることが明らかになってきた．これは，標準形によって多くの問題を統一的に扱えるだけではなく，一つの問題に対して得られた結果を，標準形を通して他の問題に応用できることを意味している．さらには，もとの問題に対する Kelvin 変換や Rellich-Pohozaev 型の恒等式を単純な形の標準形に翻訳してみると，それらの持つ意味が直感的に明確に理解できるようになるのである（[KbYY1], [KbYY3], [MYY2], [MyYY], [Y], [YY]).

詳しい一般論は省略し，

(i) Lane-Emden 方程式に対する単位球上の Dirichlet 問題
(ii) 松限型方程式に対する全域解
(iii) Brezis-Nirenberg 方程式に対する単位球上の Dirichlet 問題
(iv) scalar field 方程式に対する全域解

が，独立変数と従属変数に適当な変換を施すことによって

$$v_{tt}(t) + k(t)v^p = 0, \quad t \in (0,1) \tag{1.1}$$

の形の Dirichlet 問題に帰着されることを示そう（[YY]). 次元，領域，境界条件，空間的非一様性 $K(r)$ などの情報はすべて $k(t)$ に含まれてしまうことになる．

まず，与えられた方程式は，

$$\frac{1}{g(r)}\{g(r)u_r\}_r + L(r)v^p = 0 \text{ in } (a,b) \tag{1.2}$$

の形に帰着することができる．ただし，$g(r)$ と $L(r)$ は (a,b) 上で正の値をとる滑らかな関数である．例えば，(ii) の場合は　$g(r) = r^{n-1}$, $a = 0$, $b = \infty$, $L(r) = K(r)$ である．(i) も同様である．(iii)，(iv) の場合は，それぞれ，

$$\phi_{rr} + \frac{n-1}{r}\phi_r + \lambda\phi = 0, \quad \phi(0) = 1,$$

$$\phi_{rr} + \frac{n-1}{r}\phi_r - \lambda\phi = 0, \quad \phi(0) = 1$$

の解を用い，$u \to u\phi$ と変数変換して 1 次の項を消去し，しかるのち (1.2) の形に帰着する．例えば，(iii) で $n = 3$, $0 < \lambda < \pi^2$ の場合は，$\phi(r) = \sin(\mu r)/(\mu r)$, $g(r) = \sin^2(\mu r)/\mu^2$, $a = 0$, $b = 1$, $L(r) = (\sin^2(\mu r)(\cot(\mu r) - \cot(\mu))/(\mu r))^4$ である．ただし，$\mu = \lambda^{1/2}$ とおいた．さらに，

$$v(t) := tu(r), \quad t := \{1 + \int_b^r \frac{1}{g(s)}\, ds\}^{-1}$$

と変換し,

$$k(t) = t^{-(3+p)} g(r)^2 L(r)$$

とおけば (1.2) は (1.1) に帰着できる.

さて, 関数 $k(t)$ は $(0,1)$ で滑らかであるが, 端点では発散している場合がある. このため, 次の定義を導入しておく必要がある. $v(t)$ が正値解のとき, $v(t)/(1-t)$ は非減少であり, $t=1$ での挙動は次のように分類できる.

(i) $\lim_{t\to 1} v(t)/(1-t)$ が存在し正のとき, $v(t)$ は $t=1$ で regular であるという.
(ii) $\lim_{t\to 1} v(t)/(1-t) = \infty$ のとき, $v(t)$ は $t=1$ で singular であるという.

この定義を標準形に変換する前の問題に対応させてみると, $t=1$ が球の境界に対応する場合は, regular, singular は通常の意味で解が境界条件を満たす, 満たさないという意味に対応している. $t=1$ が無限遠点に対応している場合は, regular な解は最も速く減衰する解 (rapid-decay solution) に, singular な解は減衰の遅い解 (slow-decay solution) に対応している.

Kelvin 変換 $u(r) \to s^{n-2}u(s), s = 1/r$ は, 無限遠と原点を取り替える変換で, 無限領域における楕円型方程式の解析に非常に有効である. これは, 標準形 (1.1) では単なる $t = 1/2$ における折り返し $v(t) \mapsto v(s), s = 1-t$ に対応している.

また, Rellich-Pohozaev 型の恒等式は, 標準形 (1.1) では

$$\frac{d}{dt} P(t,v) \equiv G_t\{v/t\}^{p+1} = H_t\{v/(1-t)\}^{p+1}. \tag{1.3}$$

ただし,

$$\begin{aligned} G_t &:= \frac{1}{p+1}\{(t(1-t))^{(p+3)/2} k(t)\}_t \{t/(1-t)\}^{(p+1)/2}, \\ H_t &:= \frac{1}{p+1}\{(t(1-t))^{(p+3)/2} k(t)\}_t \{(1-t)/t\}^{(p+1)/2} \end{aligned}$$

となる. この恒等式は Kelvin 変換に対して不変であることに注意しよう. Rellich-Pohozaev の恒等式は全空間の問題に対しては非常に有効でシャープな結果を与えることが知られているが, 球や円環領域に対しては必ずしもそうではない. 適合する恒等式は, 区間 (a,b) や境界条件まで考慮にいれ, 標準形 (1.1) に帰着する変数変換の逆変換によって (1.3) を表現し直したものである. 例えば, Brezis-Nirenberg 方程式に対して Brezis-Nirenberg により用いられた Rellich-Pohozaev 型の恒等式は (1.3) を書き直したものと一致する.

ところで, 恒等式 (1.3) は一見すると奇妙な形をしているが, その正体は何なのであろうか. 実は見方を変えると普通のエネルギー等式である. 実際, 変数変換 $w(s) := (e^s + e^{-s})v(t), t := (1+e^{-2s})^{-1}$ を行うと, w は方程式

$$w_{ss} - w + j(s,w) = 0 \text{ in } (-\infty, \infty)$$

を満たす. ただし, $j(s,w) := (t-t^2)^{3/2} k(t, (t-t^2)^{1/2} w)$ である. この方程式に対する通常のエネルギー等式の微分形は

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\{w_s^2 - w^2 + 2J(s,w)\} = J_s(s,w),$$

ただし，$J(s,w) := \int_0^w j(s,\zeta)d\zeta$ である．このエネルギー等式は，標準形 (1.1) では Rellich-Pohozaev 型の恒等式 (1.3) に対応するのである．したがって，(1.3) は見方によっては極めて自然な恒等式であるといえる．

さて，標準形を通すことにより，一つの問題に対する結果を他の問題に変換することが可能となった．このような考えに基づいて，これまでのところ，scalar field 型方程式, 勾配項を含む方程式

$$\Delta u + x \cdot \nabla u + \lambda u + u^p = 0$$

に対する応用, Brezis-Nirenberg 方程式に対する Neumann 問題や第 3 種境界値問題に関する研究 ([KbYY3])，松限型方程式に対する（端点で特異性を持つことも許した）すべての球対称解の構造の研究（[MYY2]）などがなされている．これらは従来の方法では答えることのできなかった問題である．ただ，標準形への変換は各種の特殊関数が絡んだ複雑なものになる場合が多く，見通しよく計算しないと意味のある結果が得られない．

本格的な応用はこれからの課題であるが，これまで個別になされてきた研究が標準形を通して有機的に結びつき，逆にそれが各方程式に対する個別の研究の進展を促すことが期待される．

2 関連する研究

スカラー曲率方程式においては，係数にわずかに摂動を加えただけでも，解の構造が激変することが Ding-Ni により発見されていたが，その理由を納得いく形で説明できていなかった．論文 [MYY1] において，初期値 α のみならず非線形項 u^p の指数 p をもパラメータとみなして解の構造を (p,α) 平面で観察することにより解の構造が激変するからくりが明らかになった．すなわち，パラメータを増やした (p,α) 平面では解の構造をあらわす直線が曲線に連続的に変化するのであるが，スカラー曲率方程式の場合は $p=(n+2)/(n-2)$ のところでの切り口でみているので解の構造が激変するように見えるのである．

ラプラシアンを特殊な場合 (m=2) として含むものとして，m-ラプラス作用素がある．m-ラプラス作用素に非線形項がついた方程式については，従来から多くの研究が知られている．しかしながら，解の構造に関する結果はほんの僅かである．ラプラシアンの場合については，解の構造の研究は著しく進展している．このことに示唆を受け，m-ラプラス作用素の解の構造を統一的に考察する第一歩として論文 [KbYY2] を書いた．この論文により，ラプラシアンで成り立つことは，証明は別として，m-ラプラス作用素でも同様に成り立つことの見通しが立った．これに引き続き m-ラプラス作用素の標準形の理論を完成させる予定である．

２次元，３次元の非線形楕円型方程式の解の構造を調べるためには，高速で高精度な数値計算法が有用である．その準備として，先ず，基本となるポアソン方程式に対して，ラプラス方程式の高精度計算として有名な代用電荷法を利用した新しい数値計算法を [MKTAY] において提案した．さらに，[MAY] において，精度を高めかつ高速化した解法に改良した．

研究分担者　伊藤正幸の報告

ラプラス作用素の数学的に自然な非線形拡張として、作用素 p-ラプラシアンがある。この作用素またはその摂動系は、弾性膜の平衡モデル、フラックス勾配に非線形依存する拡散現象モデルなどで注目されきた。　また p が無限大の極限状態は、数学的にも工学的にもさらに興味ある問題となる。　p-ラプラシアンの固有値問題は、変分問題的な定式化可能で、数学的にかなり研究されてきた。我々はこの問題の p 無限大極限に注目した。もともと $p-1$ は方程式の次数でこれを無限大にした極限問題は変分的定式化の枠からはみ出すので、粘性解の概念を導入して定式化に成功した（伊藤、成川、深貝）。これは強い退化性を持つ作用素に対する新しいタイプの固有値問題で、今後注目されるものと思われる。

論文発表

(1) N. Fukagai, M. Ito & K.Narukawa; A Bifurcation Problem of Some Nonlinear Digenerate Elliptic Equations, Adv. Diff. Equatios, Vol. 2, No. 6 (1997), 895-925

(2) N. Fukagai, M. Ito & K. Narukawa; Limit as $p \to \infty$ of p-Laplace eigenvalue problems and L^{∞}- inequality of the Poincare type, Diff. Int. Equations, Vol.12, No. 2 (1999), 183-206

口頭発表

(1) 深貝暢良、伊藤正幸、成川公昭；　p-Laplace 固有値問題の $p \to \infty$ 極限について, 愛媛大学における微分方程式セミナー, 愛媛大学, １９９７年８月

(2) 深貝暢良、伊藤正幸、成川公昭；Limits as $p \to \infty$ of p-Laplace eigenvalue problems and related Poincare type inequalities. 阿波ワークショップ'97, 徳島大学, １９９７年８月

(3) 深貝暢良、伊藤正幸、成川公昭；　p-Laplace 作用素の第１固有値の $p \to \infty$ 極限と L^{∞}-Poincaré 型不等式の最良係数について, 日本数学会（函数方程式分科会, 東京大学　１９９７年１０月

(4) 深貝暢良、伊藤正幸、成川公昭；∞-Laplace 作用素の固有値問題について, 非線形微分方程式の定性的理論、福岡大学, １９９８年１月

(5) 深貝暢良、伊藤正幸、成川公昭；The limit eigenvalue problem of the p-Laplace operators at $p = \infty$, 非線形偏微分方程式研究集会, 東京都立大学, １９９８年１月

研究分担者　菱田俊明の報告

3 次元空間の中の compact な物体の外部領域において非圧縮性粘性流体の運動を記述する非線形偏微分方程式系 (Navier-Stokes 方程式系およびそれとの連成系) の初期値境界値問題を考察し, 解の存在や安定性に関する結果を得た.

[1] では, 物体の表面で流体を熱したときに起こる熱対流の問題に対して, 漸近安定となる定常解のクラスを Lorentz 空間 (Lebesgue 空間を実補間して得られる関数空間) を用いて重力のクラスとの関連の中で決定した.

[2][3][4] では, 一定角速度で回転する物体のまわりの Navier-Stokes 流の運動を考察した. 変数と未知関数の適当な変換によって固定外部領域における問題にかき直すと, 係数が無限遠方で増大する移流項をもつ線型偏微分作用素が現れる. この作用素は, その係数の非有界性のため, 既存の種々の一般論が適用されない. まず, [3] において, 上の偏微分作用素を同次 Dirichlet 境界条件のもとで L^2 空間において実現した作用素がもつ重要で基本的な性質, 具体的には楕円型正則性を与える a priori 評価と分数巾の評価, および強連続半群の生成を証明した. この半群は解析的半群とよばれる良いクラスには属さず, このことが問題を難しくしている. しかし, [4] において, [3] で得た半群の少し弱い意味での平滑性および $t = 0$ の近くでの評価を証明した. さらに, その評価を有効に用いて, $H^{1/2}$ の滑らかさをもつ初期関数に対する一意解を時間局所的に構成した. この初期関数に対する仮定は, L^2理論では最良と考えられる. 当問題に対する従来の研究によって知られていたのは, Borchers による弱解のみであり, その一意性は不明である. 本研究の特色は, 通常の Navier-Stokes 方程式と質の異なる問題に対して, はじめて一意解を構成した点にある. 最近, 物体の回転角速度が時間により変化する問題に対して, 同様な結果が得られた (論文準備中). 今後の研究課題は, 上の半群の $t \to \infty$ での減衰評価を求めた上で, 一意解を時間大域的に構成することである.

論文発表

[1] Hishida, T., *On a class of stable steady flows to the exterior convection problem*, J. Differential Equations **141** (no. 1), 54–85 (1997).

[2] Hishida, T., *A local existence theorem for the Navier-Stokes flow in the exterior to a rotating obstacle*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1061**, 153–163 (1998).

[3] Hishida, T., *The Stokes operator with rotation effect in exterior domains*, Analysis **19** (no. 1), 51–67 (1999).

[4] Hishida, T., *An existence theorem for the Navier-Stokes flow in the exterior of a rotating obstacle*, Arch. Rational Mech. Anal. **150** (no.4), 307-348 (1999).

口頭発表

[1] 回転する物体の外部における *Navier-Stokes* 方程式, 非線形発展方程式の解の正則性と解の爆発との関連 (京都大学数理解析研究所), 1997 年 5 月.

[2] 回転する物体の外部における *Navier-Stokes* 方程式, 松本偏微分方程式研究集会 (信州大学), 1997 年 7 月.

[3] *A local existence theorem for the Navier-Stokes flow in the exterior to a rotating obstacle*, 1997 年度日本数学会秋季総合分科会 (東京大学), 1997 年 10 月.

[4] *A local existence theorem for the Navier-Stokes flow in the exterior to a rotating obstacle*, 非線形発展方程式とその応用 (京都大学数理解析研究所), 1997 年 10 月.

[5] *A local existence theorem for the Navier-Stokes flow in the exterior to a rotating obstacle*, 第 2 回流体力学の数学解析 (名古屋大学), 1997 年 12 月.

[6] *The Navier-Stokes flow in the exterior to a rotating obstacle*, Workshop on Maximal Regularity of Parabolic Problems (Sachsen-Anhalt, Germany), 1998 年 3 月.

[7] *The Navier-Stokes flow in the exterior to a rotating obstacle*, International Conference on Operator Theory and Its Applications to Scientific and Industrial Problems (Winnipeg, Canada), 1998 年 10 月.

[8] *The Navier-Stokes flow in the exterior to a rotating obstacle*, Minisemester on Fluid Dynamics: Existence, Regularity and Singularity (Banach Center, Warsaw, Poland), 1999 年 3 月.

[9] *Existence of smooth stationary solutions to the Navier-Stokes equations in five dimensions* (*Frehse-Ružička* の論文紹介), 非線形偏微分方程式の解の構造とその解析手法についての研究 (京都大学数理解析研究所), 1999 年 5 月.

[10] 回転する物体のまわりの非圧縮粘性流について, 流体力学と数値解析 (東北大学), 1999 年 12 月.

研究分担者　廣瀬宗光の報告

私は，Haraux-Weissler 型方程式と呼ばれる勾配項を含む半線形楕円型方程式 $\Delta u + (x \cdot \nabla u)/2 + \lambda u + |u|^{p-1}u = 0$, $x \in R^n$ の球対称解 $u = u(r)(r = |x|)$ が作る集合の構造を明らかにすること，すなわち常微分方程式の初期値問題

(P) $u_{rr} + \{(n-1)/r + r/2\}u_r + \lambda u + |u|^{p-1}u = 0$, $r > 0$; $u(0) = \alpha \in (0, \infty)$, $u_r(0) = 0$ の解 $u(r;\alpha)$ が，パラメータ $n \geq 1, \lambda > 0, p > 1$ に応じてどのような振る舞いをするか決定することを目標にしてきました．

Haraux と Weissler は Haraux-Weissler 型方程式の球対称解を考察の対象とし，$n \geq 1$, $0 < \lambda < n/2$, $(n-2)p < (n+2)$ ならば，解集合の中に無限遠で急速に減衰する正値解が存在することを示しました．その後，Weissler をはじめ Atkinson，Peletier，Terman 等により (P) の各 α に対する解の挙動が調べられましたが，十分な結果は得られていませんでした．そこでまず，(P) の正値解集合の構造について調べることにしました．正数 α を出発後，解 $u(r;\alpha)$ は正の値をとる限り単調減少することは容易にわかります．したがって，(i) $u(r;\alpha)$ は区間 $(0,\infty)$ 内に零点をもつか，(ii) $u(r;\alpha)$ が区間 $(0,\infty)$ 内に零点をもたない場合，無限遠方での漸近挙動はどうなるか，の 2 点が問題となります．ここで，Peletier-Terman-Weissler の結果を利用すると，$\lambda > 0$ ならば $r \to \infty$ での挙動は $u(r;\alpha) \sim r^{-2\lambda}$ または $u(r;\alpha) \sim r^{2\lambda-n}\exp(-r^2/4)$ となります．これらの性質に基づいて (P) の解 $u(r;\alpha)$ は，零点をもつような交差解，正にとどまり多項式 $r^{-2\lambda}$ の速さでゼロに収束する緩減衰解，正にとどまり $r^{2\lambda-n}\exp(-r^2/4)$ の速さでゼロに収束する急減衰解の 3 種類に分類されます．この分類のもと，Weissler により $\lambda \geq n/2$ のときはすべての α について $u(r;\alpha)$ は交差解となることが示されていましたが，$0 < \lambda < n/2$ のケースにおいては，十分な情報は得られていませんでした．しかし，私の研究により $1 < p < p_n (:= (n+2)/(n-2))$ のケースについて，$n \geq 3$ に対する完全な結果が得られました：$0 < \lambda < n/2$，$1 < p < p_n$ ならば，$u(r;\alpha_0)$ が急減衰解となる $\alpha_0 \in (0,\infty)$ が一意的に存在し，各 $\alpha \in (0,\alpha_0)$ に対して $u(r;\alpha)$ は緩減衰解となり，各 $\alpha \in (\alpha_0,\infty)$ に対して $u(r;\alpha)$ は交差解となる．

さらに，先に考えた交差解についてより詳しい情報を得ること，すなわち符号を変えながら振動する解について調べています．振動解に対しても $r \to \infty$ での解の挙動は成立するので，緩減衰解，あるいは急減衰解の用語を用いると，どのような α に対して $u(r;\alpha)$ が k 個の零点をもつ緩減衰解，あるいは急減衰解になるか，そのメカニズムを明らかにすることが問題となります．以下では，$\lambda = 1/(p-1)$ に制限します．振動解については，Weissler により k 個の零点をもつ急減衰解の存在性は議論されましたが，一意性については未解決でした．これに関連して得られた結果は，以下のようにまとめられます：$n \geq 1$ を仮定し $p_k := 1 + 2/(n+2k)$ $(k = -1, 0, 1, 2, \cdots)$ を定義する．このとき (i) 各 k に対して，$p \in (p_k, p_{-1}]$ 上で定義される C^1 級関数 $\alpha = \alpha_k(p) > 0$ が存在し，$u(r;\alpha_k(p),p)$ は k 個の零点をもつ急減衰解となる．(ii) 各 $p \in (p_k, p_{k-1}]$ に対して，実数列 $\{\alpha_i(p)\}$ は $0 < \alpha_k(p) < \alpha_{k+1}(p) < \alpha_{k+2}(p) < \cdots \to \infty$ を満たし，$\alpha \in (0, \alpha_k(p))$ に対して $u(r;\alpha,p)$ は k 個の零点をもつ緩減衰解となり，$\alpha \in (\alpha_i(p), \alpha_{i+1}(p))$ $(i = k, k+1, k+2\cdots)$ に対して $u(r;\alpha,p)$ は $i+1$ 個の零点をもつ緩減衰解となる．

論文発表

(1) M. Hiorse and E. Yanagida; Bifurcation of rapidly decaying solutions for the Haraux-Weissler equation, Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol.7 (1997), pp.619-636.

(2) C. Dohmen and M. Hirose; Structure of positive radial solutions to the Haraux-Weissler equation,

Nonlinear Analysis TMA, Vol.33 (1998), pp.51-69.

(3) M. Hirose; Structure of positive radial solutions to the Haraux-Weissler equation II, Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol.9 (1999), pp.473-497.

(4) M. Hirose and E. Yanagida; Global structure of self-similar solutions in a semilinear parabolic equation, Journal of Mathmatical Analysis and Applications に掲載決定済み（印刷中）.

口頭発表

(1) 廣瀬宗光；Structure of positive radial solutions to the Haraux-Weissler equation for subcritical p, 日本数学会 1997 年度秋季総合分科会，東京大学，1997 年 10 月.

(2) 廣瀬宗光；ある常微分方程式の初期値問題に対する正値解の構造，第 23 回発展方程式研究会，千葉大学，1997 年 12 月.

(3) 廣瀬宗光；反応拡散方程式の自己相似解について，第 21 回発展方程式若手セミナー，静岡県浜松市・サンビーチ浜松，1998 年 8 月.

(4) 廣瀬宗光；Structure of positive radial solutions to a scalar field equation with harmonic potential, 第 25 回発展方程式研究会，千葉大学，1999 年 12 月.

研究分担者　中島主恵の報告

私が研究対象とする非線型拡散反応方程式は，数理生態学，生物学，化学反応論をはじめとする自然科学や工学における諸現象を数学的に記述するモデルとして重要な位置を占めている．しかし単に現象を記述するモデルとして重要なだけではなく，純粋に数学的観点からも，分岐理論，特異摂動論，無限次元力学系の理論における興味深い題材を提供している点で重要である．

ひとくちに非線型拡散方程式といっても，非線型項の種類によって解の挙動は大きく異なり，その性質は非常に多様である．解のダイナミクスを完全に理解するのは一般に容易なことではない．方程式系がもっている非線型現象の本質を抽出するような簡略化ができれば，大きな助けになる．その際，どのような簡略化をするか，すなわち，どのような切り口から問題を理解するか，が非常に重要になる．

私の研究では，主に２つの方向から非線型拡散反応方程式に迫っている．ひとつは，正値定常解の解集合のようすを調べる研究である．方程式系の解全般の挙動を理解するためには，第一段階として定常解にまず注目し，その存在，個数，形状，安定性などの性質を知ることが重要な第一歩となる．本研究ではとりわけ解集合の大域的な変化を調べた仕事が中心となっている．もうひとつは，特異摂動問題に関る研究である．ある微小パラメターを限りなく小さくしたときに現れる界面方程式はもとの非線型拡散方程式のある意味での簡略化として位置づけられ，この界面方程式の解析を通して非線型拡散現象のさまざまな興味深い性質が導かれることを示す．

論文発表

[1] Kimie Nakashima and Yoshio Yamada, *On positive steady-states for some reaction-diffusion system,* Advances in Mathematical Sciences and Applications **6**, (1996), 279-289.

[2] Kimie Nakashima and Yoshio Yamada, *Positive steady-states for prey-predator models with cross-diffusion,* Advances in Differential Equation, **1**, (1996), 1099-1122.

[3] Kimie Nakashima, *Multiple existence of spatially inhomogeneous steady-states for competition diffusion systems,* Advances in Mathematical Sciences and Applications **9**, (1999), 973-991.

[4] Kimie Nakashima, *Stable transition layers in a balanced bistable equation,* to appear in Differential and Integral Equations.

口頭発表（国内講演）

1. ある Cross-Diffusion System の正値定常解の存在について，１９９４年１２月，第２０回発展方程式研究会，早稲田大学．

2. Positive steady-states for some cross diffusion system, １９９５年３月，日本数学会年会，立命館大学.

3. Existence of positive steady-states for Lotka-Volterra competition model, １９９５年９月，日本数学会秋季総合分科会，東北大学.

4. ある順序保存系の正値定常解の存在について，１９９５年１２月,「微分方程式の総合的研究」函数方程式分科会，東京電機大学.

5. On radial and nonradial positive steady-states for Lotka-Volterra competition model on two-dimensional annulus, １９９６年１０月，研究集会「非線型発展方程式とその応用」，京都大学数理解析研究所.

6. ロトカ・ボルテラ競争系の球対称解，非球対称解について，１９９７年２月，研究集会「反応拡散系の生成する様々な紋様」，東北大学.

7. アニュラス上のロトカ・ボルテラ型競争系の解の存在について，１９９７年４月，日本数学会年会，信州大学.

8. 空間非一様なロトカ・ボルテラ型競争系の layer をもつ解について，１９９７年１１月，金沢非線型セミナー，金沢大学.

9. Stable transition layers for some balanced bistable equations, １９９７年１２月，第２３回発展方程式研究会，千葉大学.

10. ある楕円型方程式の遷移層をもつ解について，１９９８年4月，日本数学会年会，名城大学.

11. Lotka-Volterra competition model の layer をもつ解について，１９９８年４月，日本数学会年会，名城大学.

12. Motion of interfaces arising in a competition diffusion system with spatially inhomogeneous coefficients, １９９８年１２月，研究集会「非線形問題に現れる特異性の解析　’９８」，関西セミナーハウス.

13. Motion of interfaces arising in a competition diffusion system with spatially inhomogeneous coefficients, １９９８年１２月，第２４回発展方程式研究会，千葉大学.

14. Lotka-Volterra 競合系の境界層をもつ定常解の存在，１９９９年１月，研究集会「Recent topics in Nonlinear PDEs」, 東北大学.

15. Boundary layers in some competition-diffusion system, １９９９年１月，研究集会「遷移過程の数理的研究」，宮崎大学.

16. ある双安定型方程式の安定遷移層と不安定遷移層について，１９９９年９月，日本数学会秋季総合分科会，広島大学.

17. Multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn

equation. １９９９年１１月, “ＦＢＰ’９９”, 千葉大学.

18. Morse indices of multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation. １９９９年１１月，研究集会「非線形問題に現れる特異性の解析　’９９」，関西セミナーハウス.

19. Multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation. ２０００年１月，研究集会「Recent topics in Nonlinear PDEs」, 鹿児島県隼人町妙見ホテル,

20. Morse indices of multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation. ２０００年１月，研究集会 “非線形系における解の空間構造とダイナミクス” 東京大学,

口頭発表（海外講演）

1. Existence of positive steady-states for some order preserving system, １９９６年５月，Work shop on Cross Diffusion and Related Topics, ミネソタ大学.

2. Existence of positive solutions for spatially inhomogeneous Lotka-Volterra competition system, １９９８年６月，Groupe de Travail Équations Elliptiques et Paraboliques non Linéaires, パリ南大学.

3. Boundary layers in a steady-state problem for the Lotka-Volterra competition model, １９９９年３月，Analyse Non Linéaire et Problèmes de Transitions de Phase, パリ南大学.

研究分担者：竹内慎吾の報告

これまで，退化する拡散項とロジスティック型の反応項からなる非線型偏微分方程式：

$$\begin{cases} u_t = \lambda \Delta_p u + f(u), & (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

について解の存在や漸近挙動，およびその定常問題

$$\begin{cases} \lambda \Delta_p u + f(u) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

の解全体の集合の構造，各定常解の安定性などについて研究してきた．ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ のなめらかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域，$\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ $(p > 2)$，$f(u) = |u|^{q-2}u(1-|u|^r)$ $(q \geq 2,\ r > 0)$，また $\lambda > 0$ はパラメータである．このような，非線型拡散 Δ_p とロジスティック型の反応との組み合わせによる反応拡散方程式の研究は，定常問題 (2) の $p = q$ の場合について M. Guedda, S. Kamin，J. Sabina de Lis，L. Véron らによってなされてきたが，$p \neq q$ の場合や時間発展を含む (1) については何もなされていなかった．私はそれらについて以下のような研究を行った．

1. 定常問題 (2) の解析　空間 1 次元において，(2) の解全体の集合 E_λ の構造を明らかにした．p, q の大小に応じて E_λ の構造は大きく異なること，そして $\lambda > 0$ が十分小さいときにはフラットハットとよばれる平らな部分を持つ解が存在することが示された．その結果，E_λ は連続体を含むが，これは線型拡散 $p = 2$ の場合に E_λ が離散集合であることとは対照的である．

また，空間多次元における非負値解の考察を行った．その際，$N = 1$ のときのフラットハットをもつ解を用いて適当な比較関数を構成し，十分小さい λ に対してフラットハットをもつ解が存在することがわかった．特に $p < q$ ならば解の一意性は成り立たず，実際に変分的手法により別の解を得ている．

2. 非定常問題 (1) および (2) の解の安定・不安定性の解析　$N = 1$ のときに，任意の $u_0 \in L^2$ に対して (1) が一意大域解 $u(t;u_0)$ を持つこと，その ω 極限集合 $\omega(u_0)$ は空でない不変な連結コンパクト集合でかつ E_λ に含まれること，そしてその結果として $u(t;u_0)$ は E_λ に近づいていくことが示された．線型拡散の場合には E_λ は離散集合となるので $\omega(u_0)$ は一点集合，すなわち解はある定常解に $t \to +\infty$ で収束するが，われわれの場合には E_λ が連続体を含むのでそうは結論できず，解の漸近挙動がつかみづらい．そこで連続体の近傍に u_0 をとったときの (1) の $u(t;u_0)$ の挙動を，その形状の変化を追跡することで調べた．その結果，u_0 が定常解のフラットハットと $\frac{p}{p-2}$ 次のオーダーで接していれば $u(t;u_0)$ も同じところで接していること，および両者が離れている部分では時間発展後も離れたままだという結果を得た．これらの結果は退化拡散固有のもので，フラットハット付近での解の挙動の安定性を示唆しているので興味深い．

また (2) の解の安定・不安定性についても考察した．フラットハットを持たない解についてはその安定・不安定性は比較的容易に決定できるが，そうでないものに対しては工夫を要する．私は弱比較定理を準備・適用することで，フラットハットを持つ解 ϕ に対して安定領域 S を構成した：$\phi \in S$ であり，S に属する u_0 から出発した解はいつまでも S に属する．

論文発表

1. S. Takeuchi and Y. Yamada, **Asymptotic properties of a reaction-diffusion equation with degenerate p-Laplacian**, to appear in *Nonlinear Anal.*
2. S. Takeuchi, **Behavior of solutions near the flat hats of stationary solutions for a degenerate parabolic equation**, to appear in *SIAM J. Math. Anal.*
3. S. Takeuchi, **Positive solutions of a degenerate elliptic equation with logistic reaction**, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*
4. S. Takeuchi, **Multiplicity result for a degenerate elliptic equation with logistic reaction**, submitted.

口頭発表

(国内会議)

1. "**p-Laplacian を拡散項にもつ Chafee-Infante 問題**", 日本数学会函数方程式論分科会, 信州大学, 1997 年 4 月.
2. "**退化 p-Laplacian を拡散項にもつ Chafee-Infante 問題**", 都立大学偏微分方程式セミナー, 東京都立大学, 1997 年 5 月.
3. "**退化 p-Laplacian を拡散項にもつ Chafee-Infante 問題**", 応用解析セミナー, 東京大学, 1997 年 6 月.
4. "**退化 p-Laplacian の拡散と cubic like の反応**", 第 19 回発展方程式若手セミナー, 土浦市国民宿舎「水郷」, 1997 年 8 月.
5. "**退化 p-Laplacian の拡散と cubic like の反応**", 夏の偏微分方程式セミナー, 神戸商船大学, 1997 年 8 月.
6. "**Asymptotic properties of a reaction diffusion equation with degenerate p-Laplacian**", 研究集会「非線形発展方程式とその応用」, 京都大学数理解析研究所, 1997 年 10 月.
7. "**ある退化放物型方程式に関する有限時間での flat hat の形成について**", 第 23 回発展方程式研究会, 千葉大学, 1997 年 12 月.
8. "**ある退化放物型方程式に関する有限時間での flat hat の形成について**", 日本数学会函数方程式論分科会, 名城大学, 1998 年 3 月.
9. "**ある退化放物型方程式に関する定常解の flat hat の効果について**", 第 20 回発展方程式若手セミナー, 浜松市勤労者保養所「サン・ビーチ浜松」, 1998 年 8 月.
10. "**Behavior of solutions near the flat hats of stationary solutions for a degenerate parabolic equation**", Workshop on Phase Transition, 千葉大学, 1998 年 10 月.
11. "**ある退化放物型方程式の解の大域的・局所的な挙動について**", 大阪大学微分方程式セミナー, 大阪大学, 1998 年 10 月.
12. "**Positive solutions of a degenerate elliptic equation with logistic reaction**", 第 24 回発展方程式研究会, 千葉大学, 1998 年 12 月.
13. "**Positive solutions of a degenerate elliptic equation with logistic reaction**", 日本数学会函数方程式論分科会, 学習院大学, 1999 年 3 月.

14. **"Degenerate elliptic equation with logistic reaction"**, 研究集会「変分問題とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 1999 年 6 月.
15. **"ある退化楕円型方程式の正値解の形状と多重性について"**, 第 21 回発展方程式若手セミナー, 京都市「関西セミナーハウス」, 1999 年 8 月.
16. **"ある退化楕円型方程式の正値解の多重存在について"**, 夏の偏微分方程式セミナー, 宮崎市「KKR 宮崎ひむか」, 1999 年 8 月.
17. **"Multiplicity result for a degenerate elliptic equation with logistic reaction"**, 第 25 回発展方程式研究会, 於千葉大学, 1999 年 12 月.
18. **"Multiplicity result for a degenerate elliptic equation with logistic reaction"**, 研究集会「非線形系における解の空間構造とダイナミクス」, 於東京大学, 2000 年 1 月.
19. (予定) **"Multiplicity result for a degenerate elliptic equation with logistic reaction"**, 日本数学会函数方程式論分科会, 於早稲田大学, 2000 年 3 月.

(国際会議)

1. **"Behavior of solutions near the flat hats of stationary solutions for a degenerate parabolic equation"**, The 8th International Conference "Free Boundary Problems: Theory and Applications", November 1999, Chiba, Japan.