

ゲインスケジューリング理論に基づく
非線形制御系の解析設計法に関する研究

(課題番号 09650490)

平成9年度～平成10年度科学研究費補助金
(基盤研究(C)(2) 研究成果報告書)

平成11年3月

研究代表者 内田健康
(早稲田大学理工学部 教授)

まえがき

ゲインスケジューリングは非線形性を有する実プラントに対する制御手法であり、その基本的な考え方は、いくつかの動作点あるいは平衡点で得られる線形近似系に対して線形制御則を構成し、この局所的な制御則を適当なパラメータを用いて補間して非線形系に対する大域的な制御則を得るというものである。ゲインスケジューリング手法は、近年展開された、 H_∞ 制御理論を中核とするロバスト制御手法に基づくいくつかの体系化の試みがなされている。本研究でも数年前からこのテーマに取り組み、スケジューリングパラメータの変化率を考慮した保守性の少ない解析設計法を提案してきた。これらの試みに共通した特徴は、非線形性を有するプラントのモデルとしてスケジューリングパラメータをもつ線形系を考え、そのモデルに対して制御系設計を行うことにある。しかしながら、得られた制御則がモデルに対して保証する制御性能が、非線形の実プラントに対してどの程度まで保証するかという最も重要な問題にはほとんど何も答えないという共通の欠点がある。本研究では、上記のゲインスケジューリングの体系化における問題点の解決を図ることによって、スケジューリングパラメータを媒介とした非線形制御系の新しい解析設計法を確立することを目的とした。

解法と設計アルゴリズムの確立を目指して、安定性の問題、 L^2 ゲインを評価関数とする制御問題、ロバスト制御問題と検討を進めた。まず、モデルの特殊性を考慮した拡張2次形式リアプノフ関数の適用により、状態フィードバックの場合と出力フィードバックの場合それぞれに設計法を提案した。ビジュアルサーボ問題、ゴム人工筋による追従問題、混合液攪拌プラントの制御問題などの実システムのモデルへの適用とシミュレーションを通して、提案法の有効性を確認した。提案法で必要となる状態に依存する線形行列不等式の解法についても、スケジューリングパラメータに依存する線形行列不等式の解法を準用することによって、有限次元の線形行列不等式の解法に帰着させる方法を提案した。また、 k 次多項式型という特別な非線形型については、可到達集合解析という新しい解析手法を用いて、 L^2 ゲインの解析を、有限次元の線形行列不等式の解法に帰着させる方法を開発した。

本研究で展開した非線形制御問題へのアプローチは、状態あるいは状態の一部をスケジューリングパラメータと見なして線形型の手法を活用することにある。その場合、解決しなければならない問題は、不確かなパラメータが含まれる場合の問題、またスケジューリングパラメータの値域や変化率の範囲など事前に分かっている情報がない情報をどのようにして手にいれるかという問題である。本研究では、この問題のそれぞれについて、一つの解決策を与えることに成功した。パラメータ依存の線形行列不等式の解法については、一つの実行可能なアルゴリズムを提案したが、この問題についてはさらに効率的な方法を考える必要がある。また本研究の提案法はさらに広範囲の制御問題の解法に適用可能であり、これらの問題は今後の課題である。

研究組織

研究代表者 内田健康 (早稲田大学理工学部 教授)

研究経費

平成 9 年度 900 千円

平成 10 年度 800 千円

計 1,700 千円

研究発表

1. 渡辺亮, 内田健康, 藤田政之, 示村悦二郎, スケールド H^∞ ノルム条件に基づいた二次安定領域の評価, 計測自動制御学会論文集, Vol.33, No.4, 1997 年 4 月
2. 佐々木清吾, 内田健康, 拡張 2 次形式リアプノフ関数による非線形システム L^2 ゲイン解析--線形行列不等式による凸解析アプローチ, 計測自動制御学会論文集, Vol.33, No.5, 1997 年 5 月
3. Seigo Sasaki and Kenko Uchida, A Convex Characterization of Analysis and Synthesis for Nonlinear Systems via Extended Quadratic Lyapunov Function, Proceedings of the American Control Conference, June 1997
4. Takehito Azuma, Ryo Watanabe and Kenko Uchida, An Approach to Solving Parameter-Dependent LMI Conditions Based on Finite Number of LMI Conditions, Proceedings of the American Control Conference, June 1997
5. Seigo Sasaki and Kenko Uchida, Quadratic Cost Output Feedback Control for Bilinear Systems, Proceedings of the 2nd Asian Control Conference, July 1997
6. 佐々木清吾, 内田健康, 拡張 2 次形式リアプノフ関数による非線形状態フィードバック制御の構成法--線形行列不等式による凸解析アプローチ, 計測自動制御学会論文集, Vol.33, No.11, 1997 年 11 月
7. Takehito Azuma, Ryo Watanabe and Kenko Uchida, Semi-global State Feedback H^∞ Control of Nonlinear Systems--An Approach via Linear Systems with Self-Scheduling Parameters, Proceedings of American Control Conference, June 1998

8. Yoko Sato, Ryo Watanabe and Kenko Uchida, Semi-global L^2 Gain Analysis for k th-degree Systems based on Reachable Set Analysis, Proceedings of American Control Conference, June 1998
9. Seigo Sasaki and Kenko Uchida, Nonlinear H^∞ Control System Design via Extended Quadratic Lyapunov Function, Preprints of the 4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium, July 1998
10. Takehito Azuma, Ryo Watanabe and Kenko Uchida, Semi-global L^2 Gain Analysis of Nonlinear Systems--An Approach via Linear Systems with Self-scheduling Parameters, Preprints of the 4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium, July 1998
11. 内田健康, 渡辺亮, ゲインスケジューリング--適応/非線形制御への展開, システム/制御/情報, Vol.42, No.6, 1998年
12. 東剛人, 渡辺亮, 内田健康, 不確かなパラメータとスケジューリングパラメータをもつ線形システムに対するロバスト H^∞ 制御, システム制御情報学会論文誌, Vol.11, No.6, 1998年
13. 渡辺亮, 内田健康, 藤田政之, 2次システムに対する状態可到達集合の解析, 計測自動制御学会論文集, Vol.34, No.11, 1998年11月
14. 渡辺亮, 内田健康, 実用化が見えてきたゲインスケジューリング, 計測と制御, Vol.38, No.1, 1999年1月

目 次

まえがき

1. スケールド H^∞ ノルム条件に基づいた二次安定領域の評価
2. 拡張 2 次形式リアプノフ関数による非線形システム L^2 ゲイン解析
--線形行列 不等式による凸解析アプローチ--
3. A Convex Characterization of Analysis and Synthesis for Nonlinear Systems
via Extended Quadratic Lyapunov Function
4. An Approach to Solving Parameter-Dependent LMI Conditions Based on Finite
Number of LMI Conditions
5. Quadratic Cost Output Feedback Control for Bilinear Systems
6. 拡張 2 次形式リアプノフ関数による非線形状態フィードバック制御の構成法
--線形行列不等式による凸解析アプローチ--
7. Semi-global State Feedback H^∞ Control of Nonlinear Systems--An Approach
via Linear Systems with Self-Scheduling Parameters
8. Semi-global L^2 Gain Analysis for k th-degree Systems based on Reachable Set
Analysis
9. Nonlinear H^∞ Control System Design via Extended Quadratic Lyapunov
Function
10. Semi-global L^2 Gain Analysis of Nonlinear Systems--An Approach via Linear
Systems with Self-scheduling Parameters
11. ゲインスケジューリング--適応/非線形制御への展開
12. 不確かなパラメータとスケジューリングパラメータをもつ線形システムに
対するロバスト H^∞ 制御
13. 2 次システムに対する状態可到達集合の解析
14. 実用化が見えてきたゲインスケジューリング

スケールド H^∞ ノルム条件に基づいた二次安定領域の評価†

渡辺 亮*・内田 健康**
藤田 政之***・示村 悦二郎****

Evaluation of Quadratic Stability Regions Based on Scaled H^∞ Norm Condition

Ryo WATANABE*, Kenko UCHIDA**,
Masayuki FUJITA*** and Etujiro SHIMEMURA****

Quadratic stability analysis is one of the most effective technique to robust stability analysis for systems with parametric uncertainties. In ordinary quadratic stability analysis, quadratic stability of the system which consists of given system matrices (A -matrix), structure of parametric uncertainties, and a region of parametric uncertainties becomes a subject of discussion. In this paper, we evaluate the region of the parametric uncertainties for given system matrices and structure of parametric uncertainties, in which the system is quadratically stable. Though the evaluation is based on scaled H^∞ norm condition which is usually applied to quadratic stability analysis for parametric uncertain system, the evaluation dose not include scaling matrix.

Key Words: quadratic stability, parametric uncertainty scaling matrix

1. はじめに

二次安定性解析は、パラメータ変動を持つシステムのロバスト安定性解析に用いられる手法の一つで、

$$V(x) = x'Px,$$

が与えられたシステムのリアプノフ関数となる正定対称行列、 P の存在によってその二次安定性が解析される。ここで、パラメータ変動 $\theta(t)$ を持つ次のシステムの二次安定性解析について考えてみる。

$$\dot{x} = A(\delta, \theta(t))x. \quad (1)$$

(1)式において $x \in R^n$, $\delta \in R^{n^2}$, $\theta(t) \in R^{n^2}$, また、 $A(\delta, \theta(t)) \in R^{n \times n}$ の (i, j) 成分は次で与えられているものとする。

$$A_{ij}(\delta, \theta(t)) = a_{ij} + \delta_{n(i-1)+j} \cdot \theta_{n(i-1)+j}(t).$$

なお、 $\delta, \theta(t)$ の各成分はそれぞれ $\delta_k \geq 0, |\theta_k(t)| \leq 1$ を満たしているものとする。通常の二次安定性解析では、あらかじめ与えられた δ に対するシステムの二次安定性が問題となるが、本稿ではそれとは逆に、システムが二次安定であるような δ の領域(以下、領域と略す)の評価を問題とする。

二次安定性の定義に従った場合、この問題は次で定義される領域、 A_q の評価として定式化される。

$$A_q = \{[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n^2}] \mid \exists Q > 0, Q' = Q, \text{ s.t.} \\ A'(\delta, \theta(t))Q + QA(\delta, \theta(t)) < 0, \forall \theta(t)\}.$$

この定式化では、(1)式が二次安定である必要十分な領域が評価される一方、 A_q が δ と $\theta(t)$ という二つの自由度を含むため、その評価にかなりの数値計算が必要とされる、という問題点が存在する。

これに対し、(1)式の二次安定性解析を H^∞ ノルム条件に帰着する手法が知られている。この手法では、(1)式が次の形で表現されることを利用する。

$$\dot{x}_1 = [A + B \cdot \text{diag}[\theta(t)] \cdot \Delta(\delta)]x. \quad (2)$$

ここで、 $\text{diag}[\theta(t)]$ は $\theta(t) = [\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_{n^2}(t)]'$ を対角成分とする対角行列を表す。この場合、(1)式が二次安定であるための十分条件が次の H^∞ ノルム条件で与えられる。

$$\| [A, B, \Delta(\delta), 0] \|_\infty < 1, \quad (3)$$

ここで、 $[A, B, C, D]$ は次で与えられるものとする。

$$[A, B, C, D] = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

† 第17回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (1994・12)

* 石川島播磨重工業(株) 東京都西多摩郡瑞穂町殿ヶ谷229

** 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保3-4-1

*** 北陸先端科学技術大学院大学 石川県能美郡辰口町旭台15

* Ishikawajima-Harima Heavy Industries Co. Ltd,
Nishitama-gun, Tokyo

** School of Science and Engineering, Waseda University,
Shinjuku-ku, Tokyo

*** Japan Advanced Institute of Science and Technology,
Hokuriku, Nobi-gun, Ishikawa

(Received January 10, 1996)

(Revised December 2, 1996)

(3) 式の条件から導かれる領域は次の通りである。

$$A_n = \{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n2}) \mid \| [A, B, \Delta(\delta), 0] \|_\infty < 1\}.$$

この手法は、評価における自由度が δ だけであるという利点を持つ一方、(3) 式の H^∞ ノルム条件が (1) 式が二次安定であるための十分条件にすぎないこと、(2) 式の表現が一意ではないこと等から、 A_n が A_q に比べ一般的にかなり狭くなる、という問題点が存在する。

この問題点を改善する手法として知られているのが、(2) 式の表現を一般化した次の状態変数表現に対し、 H^∞ ノルム条件を適用する手法である。

$$\dot{x} = [A + BD \cdot \text{diag}[\theta(t)] \cdot D^{-1} \Delta(\delta)] x. \quad (4)$$

ここで、 D は次の条件を満たす正則な定数行列であるものとする。

$$\text{diag}[\theta(t)] = D^{-1} \cdot \text{diag}[\theta(t)] \cdot D.$$

定数行列 D は、パラメータ変動、 $\text{diag}[\theta(t)]$ に対するスケールリングと解釈されることから、一般に定数スケールリング行列と呼ばれる。この場合、(4) 式が (2) 式のより一般的な表現であることから、(4) 式に H^∞ ノルム条件を適用することにより導かれる領域、

$$A_{sn} = \{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n2}) \mid \| [A, BD, D^{-1} \Delta(\delta), 0] \|_\infty < 1, \det D \neq 0, D \cdot \text{diag}[\theta(t)] = \text{diag}[\theta(t)] \cdot D\},$$

は A_n と比べて広がっていると考えられる。しかしながら、 A_{sn} が定数スケールリング行列 D を含んでいることから、評価の自由度が δ だけであるという、単純に H^∞ ノルム条件を適用した場合の利点が失われている。

本稿では、上述の問題に対する取り組みの第一歩として、特別なパラメータ変動の構造を持つシステムを対象に、スケールドノルム条件によって二次安定性が保証される領域の上界を、定数スケールリング行列に依存しない形で与える。これにより、スケールド H^∞ ノルム条件によって二次安定性が保証される領域を、 δ に関する自由度だけで評価する事が可能となる。

2. 問題の定式化

2.1 対象とするシステム

本稿で二次安定性解析の対象とするシステムの状態変数表現を次で与える。

$$(\Sigma) \quad \dot{x} = [A + B\Theta(t)\Delta] x. \quad (5)$$

システム Σ において、 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times n}$, $\Theta(t) \in R^{n \times n}$,

$\Delta \in R^{n \times n}$ は次で与えられるものとする。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Theta(t) = \text{diag}[\theta(t)] = \text{diag}[\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_n(t)],$$

$$\Delta = \text{diag}[\delta] = \text{diag}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n].$$

また、 $\Theta(t)$, Δ は次の条件を満たしていると仮定する。

$$\Theta'(t)\Theta(t) \leq I, \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (6)$$

$$0 \leq \Delta. \quad (7)$$

2.2 スケールド H^∞ ノルム条件に基づく二次安定性解析システム Σ の二次安定性は次で定義される。

【定義】 (6) 式を満たす任意の $\Theta(t)$ に対して次の行列不等式を満足する正定対称行列、 Q が存在するとき、システム Σ は二次安定であるという。

$$[A + B\Theta(t)\Delta]'Q + Q[A + B\Theta(t)\Delta] < 0.$$

\bar{D} を次で定義する。

$$\bar{D} = \{\text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n] : d_k > 0\}.$$

このとき、次が成立する。

$$D\Theta(t)D^{-1} = \Theta(t), \quad \forall D \in \bar{D}.$$

これより、(5) 式の一般的な表現として次をえる。

$$\dot{x} = [A + BD\Theta(t)D^{-1}\Delta] x, \quad D \in \bar{D}. \quad (8)$$

(8) 式における定数行列 D は、 $\Theta(t)$ に対するスケールリングとして解釈することができる。以降では D を定数スケールリング行列と呼ぶ。

一方、 $D \in \bar{D}$ に対して $[A, BD, D^{-1}\Delta, 0]$ で与えられるシステムが次の H^∞ ノルム条件を満たすことは、システム Σ が二次安定であるための十分条件であることが知られている。

$$\| [A, BD, D^{-1}\Delta, 0] \|_\infty < 1. \quad (9)$$

ここで、任意の $k \in R, k \neq 0$ に対して次が成立することに注意する。

$$\| [A, BD, D^{-1}\Delta, 0] \|_\infty = \| [A, B(kD), (kD)^{-1}\Delta, 0] \|_\infty,$$

これより、定数スケールリング行列の集合を次に限定する。

$$\mathcal{D} = \{D \in \bar{D} : \text{Trace} D' D = 1\}.$$

【定義】 次の不等式を満たす定数スケーリング行列 $D \in \mathcal{D}$ が存在するとき、システム Σ はスケールド H^∞ ノルム条件を満たすと言う。

$$\| [A, BD, D^{-1}\Delta, 0] \|_\infty < 1.$$

(注意) 有界実の補題から、システム Σ がスケールド H^∞ ノルム条件を満たすことは、次の行列不等式を満足する正定対称行列 Q と定数スケーリング行列 $D \in \mathcal{D}$ が存在することと同値である。

$$A'Q + QA + QBD^2B'Q + \Delta'D^{-2}\Delta < 0.$$

2.3 問題の定式化

本稿における問題を次のように定式化する。

問題 システム Σ がスケールド H^∞ ノルム条件を満たすような δ の領域、

$$A_{\delta n} = \{ \delta : \min_{D \in \mathcal{D}} \| [A, BD, D^{-1}\Delta, 0] \|_\infty < 1 \}.$$

を評価せよ。

3. スケールド H^∞ ノルム条件を満たす領域の評価

はじめに次の補題を示す。

【補題1】 超楕円面の集合 \mathcal{X} が次で与えられているものとする。

$$\mathcal{X} = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{p_k^2} = 1 : (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P \right\}.$$

ここで、 P は次式で定義される超楕円面である。

$$\sum_{k=1}^n \frac{p_k^2}{a_k^2} = 1.$$

このとき、次の超平面は \mathcal{X} に含まれる任意の超楕円面に対する超接平面である。

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a_k} = 1.$$

(証明) $\bar{X} \in \mathcal{X}$ を $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n) \in P$ を径とする超楕円面とする。このとき $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in \bar{X}$ における超接平面は次で与えられる。

$$\sum_{k=1}^n \frac{\bar{x}_k}{\bar{p}_k} (x_k - \bar{x}_k) = 0. \tag{10}$$

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in \bar{X}$ であることから、(10) 式を次のように整理することができる。

$$\sum_{k=1}^n \frac{\bar{x}_k}{\bar{p}_k^2} x_k = 1. \tag{11}$$

ここで、超楕円面の助変数表示³⁾

$$\varphi_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n-1} \sin \theta_j, & k = 1, \\ \cos \theta_{k-1} \prod_{j=k}^{n-1} \sin \theta_j, & k = 2, \dots, n-1, \\ \cos \theta_{n-1}, & k = n. \end{cases}$$

を用いることによって、 \bar{p}_k, \bar{x}_k を次で与えることができる

$$\bar{p}_k = a_k \varphi_k(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n-1}), \tag{12}$$

$$\bar{x}_k = \bar{p}_k \varphi_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{n-1}). \tag{13}$$

(11) 式に (12) 式、及び (13) 式を代入することにより次を与える。

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{n-1})}{a_k \varphi_k(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n-1})} x_k = 1.$$

これより次の超平面は、 \bar{X} の $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{n-1}) = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n-1})$ における超接平面である。

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a_k} = 1,$$

(注意) $n = 2$ の場合を例にとり、補題1の意味を説明する。この場合、 P は次で与えられる。

$$\frac{p_1^2}{a_1^2} + \frac{p_2^2}{a_2^2} = 1.$$

補題1の主張は、任意の $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) \in P$ に対して、 $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) \in P$ を経とする楕円

$$\frac{x_1^2}{\bar{p}_1^2} + \frac{x_2^2}{\bar{p}_2^2} = 1,$$

が、Fig.1に示されるように $(a_1, 0)$ と $(0, a_2)$ を結ぶ直線

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 1,$$

に接するというものである。

【補題2】 システム Σ 、および定数スケーリング行列 $D \in \mathcal{D}$ に対し、 $G_j(s), j = 1, 2, \dots, n$ を次で定義する。

$$G_j(s) = \frac{s^{j-1}}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1}.$$

このとき、次が成立する。

$$\begin{aligned} & \| [A, BD, D^{-1}\Delta, 0] \|_\infty \\ &= \sup_{\omega \in R} \sum_{k=1}^n \frac{|G_k(j\omega)|^2 \delta_k^2}{d_k^2}. \end{aligned}$$

(証明) 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して $BD^2B', \Delta D^{-2}\Delta$ が次で

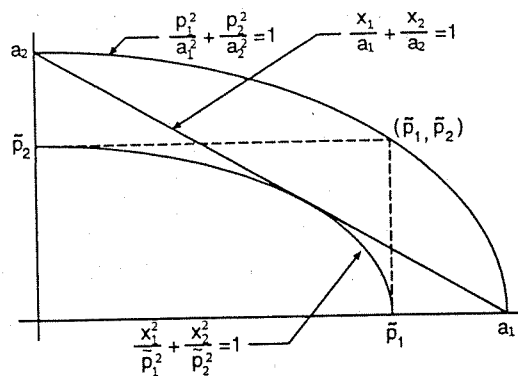


Fig. 1 Lemma 1

与えられることより明らか.

$$BD^2B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta'D^{-2}\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1/d_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2/d_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n/d_n^2 \end{bmatrix}$$

[補題3] $A_{s,n}$ は次で与えられる.

$$A_{s,n} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \bigcap_{\omega \in R} \left\{ \delta : \sum_{k=1}^n \frac{|G_k(j\omega)|^2 \delta_k^2}{d_k^2} < 1 \right\}.$$

(証明) $A_{s,n}$ の定義と補題2より明らか.

〔定理1〕 システム Σ に対して次が成立する.

$$A_{s,n} \subset \bigcap_{\omega \in R} \left\{ \delta : \sum_{k=1}^n |G_k(j\omega)| \delta_k < 1 \right\}.$$

(証明) $\bar{\delta} \in A_{s,n}$ とする. このとき, ある定数スケーリング行列 $\bar{D} \in \mathcal{D}$, $\bar{D} = \text{diag}(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_n)$ が存在して次を満たす.

$$\bar{\delta} \in \bigcap_{\omega \in R} \left\{ \delta : \sum_{k=1}^n \frac{|G_k(j\omega)|^2 \delta_k^2}{\bar{d}_k^2} < 1 \right\}.$$

ここで, $(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_n)$ が半径1の超球面上の点であることから, 補題1より任意の $\omega \in R$ に対して次が成立する.

$$\left\{ \delta : \sum_{k=1}^n \frac{|G_k(j\omega)|^2 \delta_k^2}{\bar{d}_k^2} < 1 \right\} \\ \subset \left\{ \delta : \sum_{k=1}^n |G_k(j\omega)| \delta_k < 1 \right\}.$$

これより, 次をえる.

$$\bar{\delta} \in \bigcap_{\omega \in R} \left\{ \delta : \sum_{k=1}^n |G_k(j\omega)| \delta_k < 1 \right\}.$$

(注意) 定理1が与える評価は, システムの二次安定性がスケールド H^∞ ノルム条件で保証されるための必要条件であることから, 必ずしも, その内部でシステムの二次安定性が保証される領域であるとは限らない. しかしながら, その評価は定数スケーリング行列に依存しない形で与えられている.

(注意) 与えられた定数スケーリング行列 $D \in \mathcal{D}$ に対してスケールド H^∞ ノルム条件を満たす領域は, 補題2より次で与えられる.

$$\bigcap_{\omega \in R} \left\{ \delta : \sum_{k=1}^n \frac{|G_k(j\omega)|^2}{d_k^2} \delta_k^2 < 1 \right\}. \quad (14)$$

ここで, (14)式における領域

$$\left\{ \delta : \sum_{k=1}^n \frac{|G_k(j\omega)|^2}{d_k^2} \delta_k^2 < 1 \right\}, \quad (15)$$

と定理1の評価における領域

$$\left\{ \delta : \sum_{k=1}^n |G_k(j\omega)| \delta_k < 1 \right\}, \quad (16)$$

の境界の関係を考えてみる. このとき, 定理1の証明と同様の議論で(16)式で与えられる領域の境界は(15)式で与えられる領域の境界に対する接線となることが示される, $n=2$ の場合をFig.2に示す. 任意の定数スケーリング行列 $D \in \mathcal{D}$ に対して, Fig.2に示される関係が成り立つことから((16)式は定数スケーリング行列 D に依存していないことに注意), 定理1は, 二次安定性が保証される領域を広げるという定数スケーリングの働きを, 幾何学的な観点から示唆していると言える.

4. 数値例

本節では次のシステムを対象に, その二次安定性の解析を行なう.

$$\dot{x} = [A + B\Theta(t)\Delta]x. \quad (17)$$

(17)式において, $A, B, \Theta(t), \Delta$ は次で与えられるものとする.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Theta(t) = \text{diag}[\theta(t)] \\ = \text{diag}[\theta_1(t), \theta_2(t)],$$

$$\Delta = \text{diag}[\delta] \\ = \text{diag}[\delta_1, \delta_2].$$

また, $\Theta(t), \Delta$ は次の条件を満たしていると仮定する.

$$\Theta'(t)\Theta(t) \leq I, \quad \forall t \in [0, \infty), \\ 0 \leq \Delta.$$

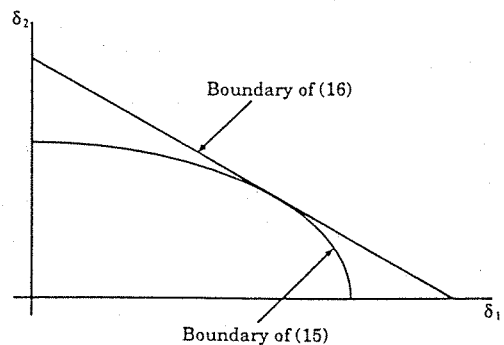


Fig. 2 Note

一方, (17) 式に対して, 定理 1 における $G_1(s), G_2(s)$ は次で与えられる.

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + a_2s + a_1},$$

$$G_2(s) = \frac{s}{s^2 + a_2s + a_1}.$$

(17) 式の二次安定性解析をおこなうにあたり, 次の四つの領域を考える.

$$A_q = \{ \delta : \exists Q > 0, Q' = Q \text{ s.t.} \\ [A + B\Theta(t)\Delta]'Q + Q[A + B\Theta(t)\Delta] < 0, \\ \forall \Theta(t), \}$$

$$\bar{A}_{sn} = \bigcap_{\omega \in R} \left\{ \delta : \sum_{k=1}^2 |G_k(j\omega)| \delta_k < 1 \right\},$$

$$A_n = \bigcap_{\omega \in R} \left\{ \delta : \sum_{k=1}^2 |G_k(j\omega)|^2 \delta_k^2 < \frac{1}{2} \right\},$$

$$A_r = \{ \delta : \delta_1 < a_1, \delta_2 < a_2 \}.$$

これらの領域は次のように意味づけることが出来る. 領域 A_q は二次安定性の定義に基づいた, 対象とするシステムが二次安定である必要十分な領域である. 領域 A_q の評価は MATLAB/最適化ツールボックスを用いておこなった. 次に, 領域 \bar{A}_{sn} は定理 1 によって与えられる A_{sn} の上界で, この外側では対象とするシステムがスケールド H^∞ ノルム条件を満たさない領域である. 一方, 領域 A_n は定数スケーリングを行なわない場合に二次安定性が保証される領域である. なお, 領域 A_n は次の定数スケーリング行列を用いた場合に二次安定性が保証される領域と考えることもできる.

$$D = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

最後に, 領域 A_r はパラメータ変動, $\theta(t)$ を時不変なクラスに限定した場合に, $A + B\Theta\Delta$ の固有値が左半平面に存在する領域である.

Fig.3 に (a_1, a_2) が $(4, 4)$ で与えられる場合, Fig.4 に (a_1, a_2) が $(4, 1.6)$ で与えられる場合の領域, A_q から A_r を示す. 各図において '+' は A_q の境界を, 実線は \bar{A}_{sn} の境界を, また点線は A_n の境界を表す. また, 各図の表示範囲は A_r を表す.

5. おわりに

本稿では, 特別なパラメータ変動の構造を有する線形システムを対象に, スケールド H^∞ ノルム条件で二次安定性が保証されるパラメータの変動領域を, その上界を求めることによって評価した. 得られた評価は, システムの二次安定性がスケールド H^∞ ノルム条件で保証されるための必要条件ではあるが, 定数スケーリング行列に依存しない形で与えられている. なお, 今後の課題として, さらに一般的な不確かさの構造を有する線形システムに対して考察を進めることが挙げられる.

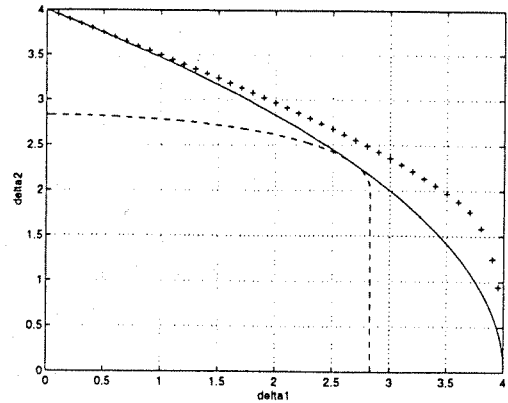


Fig. 3 Stability Regions in Parameter Space : $a_1 = 4, a_2 = 4$

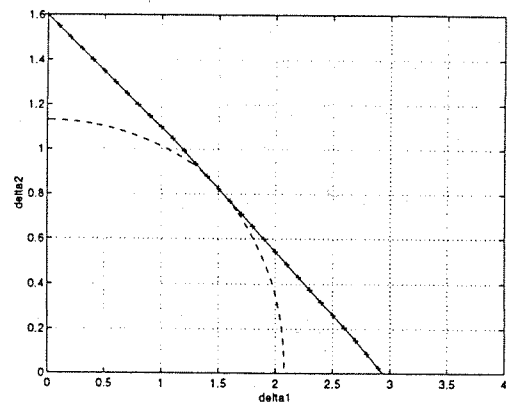


Fig. 4 Stability Regions in Parameter Space : $a_1 = 4, a_2 = 1.6$

参考文献

- 1) P.P.Khargonekar, I.R.Petersen and K.Zhou, Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems : Quadratic Stabilizability and H^∞ Control Theory, IEEE Trans. Automatic Control, AC-35, pp.356-361(1990)
- 2) 藤井, 2次安定化とロバスト制御, 計測と制御, 29-2, pp.142-150(1990)
- 3) 小林, 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房(1970)
- 4) M.Saeki, Optimal Constant Scaling Matrix for H^∞ Control and μ Synthesis - State Feedback Case -, Proc. in 31st CDC, pp.243-248(1992)

拡張 2 次形式リアプノフ関数による非線形システムの L_2 ゲイン解析† —線形行列不等式による凸解析アプローチ—

佐々木 清 吾*・内 田 健 康*

L_2 -Gain Analysis of Nonlinear Systems via Extended Quadratic Lyapunov Function
—Convex Analysis Approach Using Linear Matrix Inequalities—

Seigo SASAKI* and Kenko UCHIDA*

Using an extended quadratic Lyapunov function of the form $V(x) = x^T P(x)x$, we derive a sufficient condition that an input-affine polynomial-type nonlinear system is internal stable and the L_2 -gain is less than or equal to some given positive constant. The condition is given as Riccati-type inequality, for $P(x)$, which depends on the state. We can obtain the solution $P(x)$ as a polynomial function by solving linear matrix inequalities, and determine the region of internal stability. We also illustrate that the proposed method is effective through a numerical example of bilinear systems.

Key Words: nonlinear system, L_2 -gain, Lyapunov function, linear matrix inequality

1. はじめに

時間領域において、線形システムに対する H_∞ 制御問題の解法¹⁾が得られてから、近年では、その理論を非線形システムに拡張することが行われてきた^{2),3)}。 H_∞ 制御理論では、システムの入出力における L_2 誘導ノルム (L_2 ゲイン) に着目し、制御系の設計を行なう。線形システムにおいて、システムが内部安定でかつ、ある正定数以下の L_2 ゲインをもつための条件は、リカッチ不等式 (方程式) として与えられるが、非線形システムにおいては、ハミルトン・ヤコビ不等式 (方程式) として与えられる。一般に、ハミルトン・ヤコビ不等式 (方程式) を解くのは容易ではなく、多くの理論応用についての報告では、テイラー級数展開によって、その方程式の解を求めている^{4),5)}。しかし、テイラー級数によって解を求める際、設計者はその展開次数を任意に決定できず、一般には無限級数展開を必要とする。そこで、数値計算を行なうためのある条件のもとで、適当にその次数を決定し近似解を得ることになる。また、それらの方法では、その近似解が有効となる状態の領域についても考慮しておらず、大域的な任意の状態に対する条件を解くために、解を得るのは容易ではない。また、ハミルトン・ヤコビ不等式を満たす数値解を求めるアプローチとしては、リアプノフ関数を 2 次形式

$V(x) = x^T P x$ に限定し、領域を考慮した L_2 ゲイン解析についての報告⁶⁾がある。しかし、リアプノフ関数を 2 次形式に限定しているために、一般に解析結果が保守的となる。また、リアプノフ関数の候補を $\partial V / \partial x(x) = 2x^T X(x)$ に限定した報告⁸⁾もあるが、 $X(x)$ が正定であることが必要となるため、適用範囲が限定される。

本論文では、拡張 2 次形式リアプノフ関数 $V(x) = x^T P(x)x$ を用いて、入力アフィン多項式型非線形システム

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)w,$$

$$z = C(x)x + D(x)w$$

の内部安定性および L_2 ゲインの解析を行なう。まず、平方完成による直接的アプローチによって、内部安定でかつ、ある正定数以下の L_2 ゲインをもつ条件を状態 x に依存したリカッチ不等式として与える。つぎに、システムが多項式型の非線形性をもつことから、リカッチ不等式の解が、線形行列不等式を解くことによって状態 x に関する多項式行列として与えられることを示す。また、内部安定性および L_2 ゲインを保証する条件と併せて、内部安定領域の評価式を与える。

2 次形式リアプノフ関数 $V(x) = x^T P x$ に比べ、拡張 2 次形式リアプノフ関数 $V(x) = x^T P(x)x$ では、行列 P が x に依存しているために、より保守的でない解析結果を得ることが期待できる。リアプノフ関数として直接に非線形汎関数 $V(x)$ を扱うことも考えられるが、拡張 2 次形式リアプノフ関数は、入力アフィン非線形システムの構造とより適合する (すなわち、線形 2 次形式の議論と類似のことが展開できる) ため、線形 2 次形式問題の結果を自然に拡張した結果を得る

† 第 25 回制御理論シンポジウムで発表 (1996・5)

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

* School of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo

(Received April 25, 1996)

(Revised January 8, 1997)

ことができる。さらにこの結果から、近年、有力な数値計算法が考えられた凸解析法への接近が可能となる。

最後に、入力アフィン多項式型非線形システムの特別な場合である双線形システムを例にあげ、多項式解 $P(x)$ の次数、 L_2 ゲインの上限、および内部安定となる領域との関係について考察し、本論文の解析手法の有効性を示す。

以下では、つぎの記号を用いる。ベクトル x に対して、 $\|x\|$ はユークリッドノルムを表す。さらに行列 R に対して、 $\|x\|_R$ は $x^T R x$ を表す。 $\|\cdot\|_2$ は 2 乗可積分空間 L_2 のノルムを表し、つぎのように定義する。

$$\|x\|_2 := \left(\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, x \in L_2.$$

特に、任意の $t \in [0, \infty)$ に対し $\|x(t)\| < \rho$ となるとき、 $L_{2\rho}$ と表す。正定数の要素をもつベクトル $\sigma \in \mathbb{R}^n$ に対して、 B_σ^n は集合 $\{x \mid |x_i| \leq \sigma_i, i=1, \dots, n\}$ を表す。ただし、 x_i, σ_i は、それぞれのベクトルの i 番目の要素を表す。

2. 非線形システムの L_2 ゲイン解析

本章では、非線形システムが内部安定でかつ、ある正定数以下の L_2 ゲインをもつための条件を示す。

2.1 対象システム

原点に平衡点をもつ非線形システム (Σ) :

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))w(t), \quad (1)$$

$$z(t) = C(x(t))x(t) + D(x(t))w(t) \quad (2)$$

を考える。ただし、 $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ は状態、 $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ は外生入力、 $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ は観測出力である。また、 $A(x(t))$ 、 $B(x(t))$ 、 $C(x(t))$ 、 $D(x(t))$ は、 $x(t)$ に対して多項式で表されているものとする。

2.2 拡張 2 次形式リアプノフ関数による解析

本節では、非線形システム (Σ) が内部安定でかつ、ある正定数以下の L_2 ゲインをもつための条件を示すが、そのまえにまず、つぎの 3 つのことを定義する。

【定義】 原点を含む領域 $B_\sigma^{n_x} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ が存在し、連続微分可能で対称な行列関数 $P(x) : B_\sigma^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ に対して、

$$x^T P(x)x > 0, \forall x \in B_\sigma^{n_x}, x \neq 0 \quad (3)$$

のとき、領域 $B_\sigma^{n_x}$ で $P(x)$ は正定であるといい、つぎのように表す。

$$P(x) > 0, \forall x \in B_\sigma^{n_x}. \quad (4)$$

また、領域 $B_\sigma^{n_x}$ で $-P(x)$ が正定であるとき、 $P(x)$ は負定であるといい、

$$P(x) < 0, \forall x \in B_\sigma^{n_x} \quad (5)$$

と表す。

【定義】 $w=0$ としたシステム (Σ) において、漸近安定な平衡点 $x=0$ を含む領域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ の任意の点から出発する解 $x(t)$ が平衡点に収束するとき、システム (Σ) は領域 Ω で内部安定であるという。

【定義】 $x(0)=0$ としたシステム (Σ) において、その L_2 ゲインを

$$\mathcal{G}_\rho(\Sigma) := \sup_{w \in L_{2\rho}, w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$$

と定義する。

以上の準備のもと、非線形システム (Σ) が内部安定でかつ、ある正定数以下の L_2 ゲインをもつための条件は、つぎの定理 2.1 で与えられる。

【定理 2.1】 システム (Σ) において、与えられた正定数 γ に対して、原点を含む領域 $B_\sigma^{n_x} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ が存在し、

$$R_\gamma(x) := \gamma^2 I - D^T(x)D(x) > 0, \forall x \in B_\sigma^{n_x} \quad (6)$$

を満足し、つぎの条件を満たす $P(x)$ が存在するものとする。

$$(1) P(x) > 0, \quad \forall x \in B_\sigma^{n_x}, \quad (7)$$

$$(2) X(P(x), x)A(x) + A^T(x)X^T(P(x), x) \\ + (X(P(x), x)B(x) + C^T(x)D(x))R_\gamma^{-1}(x) \times \\ (B^T(x)X^T(P(x), x) + D^T(x)C(x)) \\ + C^T(x)C(x) < 0, \quad \forall x \in B_\sigma^{n_x}. \quad (8)$$

ただし、

$$X(P(x), x) := P(x) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial P}{\partial x_1}(x)x \cdots \frac{\partial P}{\partial x_{n_x}}(x)x \right] \quad (9)$$

である。

このとき、システム (Σ) は、領域 $B_\sigma^{n_x}$ に含まれる最大の領域

$$\Omega_\alpha := \{x \mid x^T P(x)x \leq \alpha\} \subseteq B_\sigma^{n_x} \quad (10)$$

で内部安定でかつ、 $\mathcal{G}_\rho(\Sigma) \leq \gamma$ となる。なお、 α は $\Omega_\alpha \subseteq B_\sigma^{n_x}$ となる最大の正数である。

(証明) $x \in B_\sigma^{n_x}$ において、汎関数

$$V(x) := x^T P(x)x \quad (11)$$

を考える。

$V(x)$ を解軌道に沿って時間微分し、平方完成を行なうと

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T P(x)x + x^T \dot{P}(x)x + x^T P(x)\dot{x} \\ &= \dot{x}^T P(x)x + x^T \sum_{i=1}^{n_x} \left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)\dot{x}_i \right] x + x^T P(x)\dot{x} \\ &= \dot{x}^T P(x)x + x^T \sum_{i=1}^{n_x} \left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)x\dot{x}_i \right] + x^T P(x)\dot{x} \\ &= \dot{x}^T P(x)x + x^T P(x)\dot{x} \\ &\quad + x^T \left[\frac{\partial P}{\partial x_1}(x)x \cdots \frac{\partial P}{\partial x_{n_x}}(x)x \right] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n_x} \end{bmatrix} \\ &= \dot{x}^T P(x)x + x^T P(x)\dot{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + x^T \left[\frac{\partial P}{\partial x_1}(x)x \cdots \frac{\partial P}{\partial x_{n_x}}(x)x \right] \dot{x} \\
 = & \dot{x}^T \left[P(x) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial P}{\partial x_1}(x)x \cdots \frac{\partial P}{\partial x_{n_x}}(x)x \right]^T \right] x \\
 & + x^T \left[P(x) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial P}{\partial x_1}(x)x \cdots \frac{\partial P}{\partial x_{n_x}}(x)x \right] \right] \dot{x} \\
 = & \dot{x}^T X^T(P(x), x)x + x^T X(P(x), x)\dot{x} \\
 = & -\|z\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - \|w - w_*\|_{R_\gamma(x)}^2 \\
 & + x^T \left[X(P(x), x)A(x) + A^T(x)X^T(P(x), x) \right. \\
 & + (X(P(x), x)B(x) + C^T(x)D(x))R_\gamma^{-1}(x) \times \\
 & (B^T(x)X^T(P(x), x) + D^T(x)C(x)) \\
 & \left. + C^T(x)C(x) \right] x \tag{12}
 \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$w_* := R_\gamma^{-1}(x)(B^T(x)X^T(P(x), x) + D^T(x)C(x))x$$

である。ここで、(8)を用いると

$$\dot{V}(x(t)) < -\|z\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - \|w - w_*\|_{R_\gamma(x)}^2 \tag{13}$$

となる。

まず、システム (Σ) が領域 Ω_α で内部安定であることを確認する。そのために初期状態 $x(0)$ を Ω_α にとり、 $w = 0$ とおくと、(13)は

$$\dot{V}(x(t)) < -\|z\|^2 - \|w_*\|_{R_\gamma(x)}^2 \leq 0 \tag{14}$$

となる。(7)(11)(14)より $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0$ であり、 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ となる⁷⁾。したがって、システム (Σ) は Ω_α で内部安定となる。

つぎに、 $\mathcal{G}_\rho(\Sigma) \leq \gamma$ を満たすことを示す。システム (Σ) の内部安定性、 $x(0) = 0$ 、および $w \in L_{2\rho}$ に注意すると、十分小さな ρ に対して $x(t)$ は原点に収束する³⁾。したがって、(13)より

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 < -\|w - w_*\|_{2R_\gamma(x)}^2 \leq 0 \tag{15}$$

を得る。

(注意) 定理2.1より、入力アフィン非線形システムに対して、拡張2次形式リアプノフ関数を考えることによって、ハミルトン・ヤコビ不等式も拡張2次形式((12)を参照)になることがわかる。このことから線形システムに対する議論を自然に拡張した形で条件(8)が得られ、この条件は、 $X(P(x), x)$ に関するリカッチ不等式として表現されていることがわかる。リアプノフ関数 $x^T P(x)x$ とリカッチ不等式の解 $X(P(x), x)$ の構造に注目すると、(9)より、 $P(x)$ が x に依存しないとき、すなわち、 $P(x) = P$ のとき、 $X(P(x), x) = P$ となることから、拡張2次形式リアプノフ関数は、2次形式リアプノフ関数となる。なお、定義式(9)からわかるように、 $X(P(x), x)$ は、 $P(x)$ に $P(x)$ の x における時間変動分を加えたものである。

3. 多項式リアプノフ関数による L_2 ゲイン解析

本章では、定理2.1の条件を満たす解 $P(x)$ を、 r 次多項式行列 $P_r(x), r = 0, 1, \dots$ で得るための条件を導く。

まず、つぎの記号を定義する。

[定義]

(1) ある正の整数 n_x 、非負の整数 k が存在し、 n_x 個の中から重複を許して k 個とるときの組合せを、

$${}_{n_x}H_k := {}_{n_x+k-1}C_k = \frac{(n_x+k-1)!}{k!(n_x-1)!} \tag{16}$$

と定義する。

(2) $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ に対して、

$$x^{(0)} := 1, \tag{17}$$

$$x^{(1)} := x, \tag{18}$$

$$x^{(k)} := \begin{bmatrix} x_1^k & kx_1^{k-1}x_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\frac{k!}{k_1!k_2! \cdots k_{n_x}!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{n_x}^{k_{n_x}}$$

$$\cdots x_{n_x}^k \Big]^T \in \mathbb{R}^{n_x H_k},$$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n_x} = k, k_1, k_2, \dots, k_{n_x} \geq 0 \tag{19}$$

を定義する。

(3) つぎの2つの行列関数 $P_r(x), X(P_r(x), x) : B_\sigma^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ を定義する。

$$\begin{aligned}
 P_r(x) & := \sum_{k=0}^r \sum_{i=1}^{n_x H_k} x_i^{(k)} P_{\eta(x_i^{(k)})}, \\
 r & = 0, 1, 2, \dots, \tag{20}
 \end{aligned}$$

$$X(P_r(x), x) := P_r(x)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^r k \sum_{i=1}^{n_x H_{k-1}} x_i^{(k-1)} \sum_{j=1}^{n_x} x_j \dot{P}_{\eta(x_i^{(k-1)})j}, \\
 r & = 0, 1, 2, \dots \tag{21}
 \end{aligned}$$

ただし、添字 $\eta(x_i^{(k)})$ は、 $x^{(k)}$ の i 番目の要素に含まれる、 x の要素を表す k 個の番号を辞書配列の順番に並べた数字列を表す。ここで、 $k=0$ のとき $\eta(x_i^{(k)}) = 0$ とする。また、 $\dot{P}_{\eta(x_i^{(k-1)})j}$ は、与えられた $k=1, 2, \dots, r$ 、 $i=1, 2, \dots, n_x H_k$ に対して、

$$\begin{aligned}
 \left[\sum_{j=1}^{n_x} \mu_j P_{\theta(\eta(x_i^{(k-1)})j)} \right] \nu & = \left[\sum_{j=1}^{n_x} \nu_j \dot{P}_{\eta(x_i^{(k-1)})j} \right] \mu, \\
 \forall \mu \in \mathbb{R}^{n_x}, \forall \nu \in \mathbb{R}^{n_x} \tag{22}
 \end{aligned}$$

を満たす行列であり、 $P_{\theta(\eta(x_i^{(k-1)})j)}$ 、 $j=1, \dots, n_x$ (つまり、 $P_{\eta(x_i^{(k)})}$) が与えられると自然に導かれる。ここで、添字 $\theta(\eta(x_i^{(k-1)})j)$ は、 $\eta(x_i^{(k-1)})$ が表す数字列と j が表す数字を合わせて、 k 個の数字を辞書配列の順に並べた数字列を表す。なお、 $k=0$ のとき、(21)の右辺第2項は零とする。

[例] $x^{(3)}$ の3番目の要素に x_1^2, x_3 を含む場合, $[\eta(x_i^{(k)})]_{k=3, i=3}$ は, "113" を表す. $[\eta(x_i^{(k)})j]_{k=3, i=3, j=2}$ は, "1132" を表す. また, $[\theta(\eta(x_i^{(k)}), j)]_{k=3, i=3, j=2}$ は, "1123" を表す.

以上の準備のもとで, 定理 2.1 の条件を満たす解 $P(x)$ を r 次多項式行列 $P_r(x)$, $r = 0, 1, 2, \dots$ で得るための定理はつぎのようになる.

(定理 3.1) システム (Σ) において, 与えられた正定数 γ に対して, 原点を含む領域 $B_\sigma^{n_x} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ が存在し,

$$R_\gamma(x) := \gamma^2 I - D^T(x)D(x) > 0, \quad \forall x \in B_\sigma^{n_x} \quad (23)$$

を満足し, つぎの条件を満たす r 次多項式解 $P_r(x)$ が存在するものとする.

$$(1) \quad P_r(x) > 0, \quad \forall x \in B_\sigma^{n_x}, \quad (24)$$

$$(2) \quad X(P_r(x), x)A(x) + A^T(x)X^T(P_r(x), x) \\ + (X(P_r(x), x)B(x) + C^T(x)D(x))R_\gamma^{-1}(x) \times \\ (B^T(x)X^T(P_r(x), x) + D^T(x)C(x)) \\ + C^T(x)C(x) < 0, \quad \forall x \in B_\sigma^{n_x}. \quad (25)$$

このとき, システム (Σ) は, 領域 $B_\sigma^{n_x}$ に含まれる最大の領域

$$\Omega_{\alpha_r}^+ := \{x \mid x^T P_r(x)x \leq \alpha_r\} \subseteq B_\sigma^{n_x} \quad (26)$$

で内部安定でかつ, $\mathcal{G}_\rho(\Sigma) \leq \gamma$ となる. なお, α_r は $\Omega_{\alpha_r}^+ \subseteq B_\sigma^{n_x}$ となる最大の正数である.

(証明) $x \in B_\sigma^{n_x}$ において, 汎関数

$$V_r(x) := x^T P_r(x)x \quad (27)$$

を考える.

$V_r(x)$ を解軌道に沿って時間微分し, 平方完成を行なうと

$$\begin{aligned} \dot{V}_r(x(t)) &= \dot{x}^T P_r(x)x + x^T P_r(x)\dot{x} \\ &+ x^T \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=0}^r \sum_{i=1}^{n_x H_k} x_i^{(k)} P_{\eta(x_i^{(k)})} \right] x \\ &= \dot{x}^T P_r(x)x + x^T P_r(x)\dot{x} \\ &+ x^T \left[\sum_{k=0}^r k \sum_{i=1}^{n_x H_{k-1}} x_i^{(k-1)} \sum_{j=1}^{n_x} \dot{x}_j P_{\theta(\eta(x_i^{(k-1)}), j)} \right] x \\ &= \dot{x}^T P_r(x)x + x^T P_r(x)\dot{x} \\ &+ x^T \left[\sum_{k=0}^r k \sum_{i=1}^{n_x H_{k-1}} x_i^{(k-1)} \left[\sum_{j=1}^{n_x} \dot{x}_j P_{\theta(\eta(x_i^{(k-1)}), j)} \right] \right] x \\ &= \dot{x}^T P_r(x)x + x^T P_r(x)\dot{x} \\ &+ x^T \left[\sum_{k=0}^r k \sum_{i=1}^{n_x H_{k-1}} x_i^{(k-1)} \left[\sum_{j=1}^{n_x} x_j \dot{P}_{\eta(x_i^{(k-1)})j} \right] \right] \dot{x} \\ &= \dot{x}^T X^T(P_r(x), x)x + x^T X(P_r(x), x)\dot{x} \quad (28) \end{aligned}$$

となる. 以下は, 定理 2.1 と同様にして証明できる. ■

(注意) 定理 3.1 の証明より, リアプノフ関数 $V(x) = x^T P(x)x$ の $P(x)$ の構造を多項式行列 (20) とした場合, リカッチ不等式の解 $X(P(x), x)$ の構造が多項式行列 (21) となることわかる. それらの係数行列は, (22) によって関係づけられている.

(注意) 数値計算への可能性を考慮し, 線形 2 次形式の議論を非線形システムの議論に拡張した報告 (たとえば, 文献 8)) では,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) = 2x^T X(x)$$

とおくことによって, ハミルトン・ヤコビ不等式を $X(x)$ に関するリカッチ不等式とみなし, 正定行列 $X(x)$ を求めている (このとき, $V(x)$ は正定となる). しかし, 上記の $X(x)$ (本論文では, $X(P(x), x)$ に対応する) は, 正定行列である必要はない. 実際, 5 章の例 ((37) を参照) からわかるように, $X(P(x), x)$ が正定行列として与えられるのは, 一般にはかなり限定された場合である. このように, 本論文のアプローチでは, 従来の手法よりさらに広いクラスのリアプノフ関数の候補を考慮できる.

4. 線形行列不等式による L_2 ゲイン解析

本章では, 線形行列不等式により非線形システム (Σ) の L_2 ゲインを解析する手法を示す. 文献 11) の結果を用いて, 線形行列不等式条件を解くことにより, まず, r 次多項式解 $P_r(x)$ を得ることができることを示し, つぎに解 $P_r(x)$ の次数 r と L_2 ゲインの上限 γ の関係を知ることも可能であることを示す.

以下では記号の簡略化のために, r 次多項式解 $P_r(x)$ の係数行列の全体

$$P_0, P_{\eta(x_i^{(k)})}, k = 1, 2, \dots, r, i = 1, 2, \dots, n_x H_k$$

を記号 P_r^{Cof} で表す. システム (Σ) および解 $P_r(x)$ が x に関して多項式であることに注意すると, 定理 3.1 の条件は, Schur complement¹⁰⁾を用いることにより, P_r^{Cof} に対する, つぎの線形行列不等式として表現できる.

$$F_r(P_r^{Cof}, \psi(x)) := F_0(P_0) + \sum_{i=1}^q \psi_i(x) F_i(P_r^{Cof}) := \begin{bmatrix} -P_r(x) & & & & 0 \\ 0 & X(P_r(x), x)A(x) + A^T(x)X^T(P_r(x), x) & & & \\ 0 & & B^T(x)X^T(P_r(x), x) & & \\ 0 & & & C(x) & \\ & 0 & & & 0 \\ X(P_r(x), x)B(x) & C^T(x) & & & \\ -\gamma^2 I & D^T(x) & & & \\ D(x) & & -I & & \end{bmatrix} < 0, \quad \forall x \in B_\sigma^{n_x}. \quad (29)$$

ただし, $n_{\Sigma r} \neq 0$ のとき,

$$\psi(x) :=$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n_x} \\ x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_{n_x}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n_{\Sigma r}} & x_1^{n_{\Sigma r}-1}x_2 & \cdots & x_{n_x}^{n_{\Sigma r}} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^q, \quad (30)$$

$$q := \sum_{i=1}^{n_{\Sigma r}} n_x H_i \quad (31)$$

であり、 $n_{\Sigma r} = 0$ のとき、 $\psi(x) := 0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ 、 $q := n_x$ である。ここで、 $n_{\Sigma r}$ は、システム (Σ) および解 $P_r(x)$ の x に関する次数で決まる非負の整数である。また、 $\psi_i(x)$ は、 $\psi(x)$ の i 番目の要素を表す。

以上より、定理 3.1 はつぎのように言い換えられる。

〈定理 4.1〉 システム (Σ) において、与えられた正定数 γ に対して、ある非負の整数 $n_{\Sigma r}$ 、および原点を含む領域 $\Psi(B_\sigma^{n_x}) \subseteq \mathbb{R}^q$ が存在し、つぎの条件を満たす解 $P_r(x)$ の係数行列 P_r^{Cof} が存在するものとする。

$$F_r(P_r^{Cof}, \psi(x)) < 0, \quad \forall \psi(x) \in \Psi(B_\sigma^{n_x}). \quad (32)$$

このとき、システム (Σ) は、領域

$$\Omega_{\alpha_r} := \{x | x^T P_r(x) x \leq \alpha_r\} \subseteq B_\sigma^{n_x} \quad (33)$$

で内部安定でかつ、 $\mathcal{G}_\rho(\Sigma) \leq \gamma$ となる。

〈注意〉 システム (Σ) が線形システムでかつ、リアプノフ関数が 2 次形式 $x^T P x$ のとき、 $n_{\Sigma r} = 0$ となる。このとき、定理 4.1 は線形システムに対する結果に対応する。

定理 4.1 を用いて、システム (Σ) が内部安定でかつ、ある正定数以下の L_2 ゲインをもつことを確認するためには、任意の $\psi(x) \in \Psi(B_\sigma^{n_x})$ に対して、条件 (32) を満たす解の係数行列 P_r^{Cof} を得なければならない。しかし、つぎの定理 4.2 より、有限個の線形行列不等式条件を解くことにより、解の係数行列 P_r^{Cof} が得られる。

〈定理 4.2〉 (渡辺ら¹¹⁾ $\Psi(B_\sigma^{n_x}) = \{\psi(x) | x \in B_\sigma^{n_x}\}$ を内部に含み、 2^q 個の頂点をもつ q 次元凸多面体 Φ を考える。 Φ の 2^q 個の頂点を $(^1\phi, \dots, ^{2^q}\phi)$ とするとき、その任意の頂点に対するつぎの不等式を満たす P_r^{Cof} が存在するものとする。

$$F_r(P_r^{Cof}, ^j\phi) < 0, \quad j = 1, \dots, 2^q. \quad (34)$$

ただし、 $^j\phi$ は、 Φ の j 番目の頂点を表す。

このとき P_r^{Cof} は、任意の $\psi(x) \in \Psi(B_\sigma^{n_x})$ に対して、(32) を満たす。

〈証明〉 文献 11) の定理 4.1 を、本論文で扱っている問題に適用するために言い改めたものである。なお、文献 11) の問題では、設計者が凸多面体の頂点の数を決定できることに注意すべきである。 ■

以上より、多項式解 $P_r(x)$ を得ることができる。また、定

理 4.1 より、係数行列 P_r^{Cof} が凸集合であることに注意すると、多項式解 $P_r(x)$ の次数 r と L_2 ゲインの上限 γ の関係に関する、つぎの 2 つの系が得られる。

〔系 4.1〕 システム (Σ) の係数行列 $A(x)$ 、 $B(x)$ 、 $C(x)$ 、 $D(x)$ が状態の一部 $x_1, \dots, x_m (m < n_x)$ だけに依存し、解 $P_r(x)$ が定数 P_0 の場合を考える。このとき、 L_2 ゲインの上限 γ は、残りの状態 x_{m+1}, \dots, x_{n_x} に無関係にただ一つに定まる。

〈証明〉 仮定より、システム (Σ) の係数行列は、状態 x_{m+1}, \dots, x_{n_x} に依存しない。また、 $P_r(x) = P_0$ であるため、解は状態変数に依存しない。これらのことより、定理 4.1 の条件 (32) は、 x_{m+1}, \dots, x_{n_x} に依存しない条件となる。したがって、 L_2 ゲインの上限 γ は、状態 x_{m+1}, \dots, x_{n_x} には無関係にただ一つに定まる。 ■

〔系 4.2〕 与えられた σ に対して、定理 4.1 の条件を満たす解 $P_{\bar{r}}^*(x)$ 、 $P_{\hat{r}}^*(x)$ 、および、そのときのそれぞれの L_2 ゲインの上限 $\gamma_{\bar{r}}^*$ 、 $\gamma_{\hat{r}}^*$ が存在し、 $\bar{r} < \hat{r}$ であるとする。このとき、 $\gamma_{\bar{r}}^* \geq \gamma_{\hat{r}}^*$ となる。

〈証明〉 \bar{r} および \hat{r} 次多項式解の候補の集合を、それぞれ $\Pi(P_{\bar{r}}(x))$ 、 $\Pi(P_{\hat{r}}(x))$ と表す。 $\bar{r} < \hat{r}$ より、 $\Pi(P_{\bar{r}}(x)) \subset \Pi(P_{\hat{r}}(x))$ となる。これより、 $\gamma_{\bar{r}}^*$ を与える $P_{\bar{r}}^*(x) \in \Pi(P_{\hat{r}}(x))$ は、 $P_{\hat{r}}^*(x) \in \Pi(P_{\hat{r}}(x))$ でもある。したがって、 $\gamma_{\bar{r}}^* \geq \gamma_{\hat{r}}^*$ となる。 ■

5. 数 値 例

本章では、定理 4.1、4.2 に基づき、双線形システム (Σ_{bls}) ⁹⁾:

$$\dot{x} = Ax + (B_0 + x_1 B_1 + x_2 B_2)w, \quad (35)$$

$$z = Cx,$$

$$A = \begin{bmatrix} 13/6 & 5/12 \\ -50/3 & -8/3 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} -1/8 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

の L_2 ゲインを解析する。システム (Σ_{bls}) において、 x_1 は w との積の項をもつ非線形な状態変数であり、 x_2 は線形な状態変数である。また、 $|x_1| \leq \sigma_1$ 、 $|x_2| \leq \sigma_2$ とする。

以下では、求める多項式解 $P_r(x)$ の次数が $r = 0, 1, 2$ である場合について解析を行なう。このとき、次数 r と、 x の乗数の最大値 $n_{\Sigma r}$ 、 $\Psi(B_\sigma^{n_x})$ の次元 q および凸多面体 Φ の頂点の数 2^q との関係は、Table 1 の通りである。Table 1 より、 $r = 2$ の場合、512 個の線形行列不等式条件 (34) を

Table 1 次数 r と Φ の頂点の数との関係

r	$n_{\Sigma r}$	q	2^q
0	1	2	4
1	2	5	32
2	3	9	512

Table 2 状態の制限領域の大きさ, 解の次数, L_2 ゲインの上限の関係

$\sigma_1 = 0.5$ のとき				$\sigma_1 = 1.0$ のとき			
σ_2	$r=0$	$r=1$	$r=2$	σ_2	$r=0$	$r=1$	$r=2$
10^{50}	3.3984	3.3984	3.3984	10^{50}	6.1171	6.1171	6.1171
10	3.3984	3.3336	3.3261	10	6.1171	6.0563	6.0331
1	3.3984	3.0690	3.0377	1	6.1171	5.6291	5.6179
0.5	3.3984	2.9419	2.9170	0.5	6.1171	5.5576	5.5436

同時に満たす P_r^{Cof} をみつける問題を解くことになる. そして, このときの解 $P_r(x)$ の構造は,

$$[P_r(x)]_{r=2} = P_0 + x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_1^2 P_{11} + 2x_1 x_2 P_{12} + x_2^2 P_{22} \quad (36)$$

であり, $X(P_r(x), x)$ の構造は,

$$\begin{aligned} [X(P_r(x), x)]_{r=2} &= [P_r(x)]_{r=2} + \frac{1}{2} \{x_1 \hat{P}_1 + x_2 \hat{P}_2\} \\ &\quad + 2\{x_1(x_1 \hat{P}_{11} + x_2 \hat{P}_{12}) + x_2(x_1 \hat{P}_{21} + x_2 \hat{P}_{22})\} \\ &= P_0 + x_1(P_1 + \frac{1}{2} \hat{P}_1) + x_2(P_2 + \frac{1}{2} \hat{P}_2) \end{aligned}$$

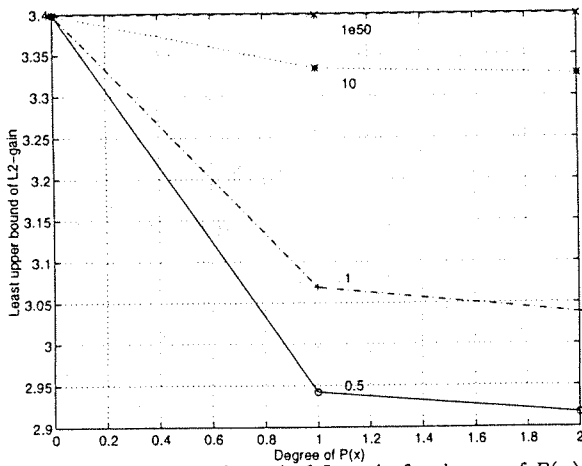


Fig. 1 Least upper bound of L_2 gain for degree of $P(x)$ ($\sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 10^{50}, 10, 1, 0.5$)

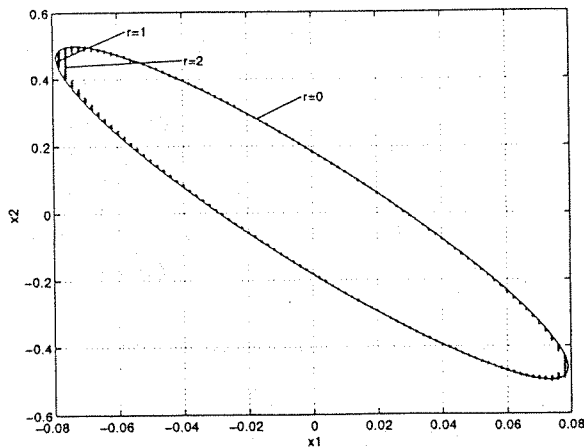


Fig. 2 Region of internal stability for $P_r(x), r = 0, 1, 2$ ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$)

$$\begin{aligned} &+ x_1^2(P_{11} + \hat{P}_{11}) + x_1 x_2(2P_{12} + \hat{P}_{12} + \hat{P}_{21}) \\ &+ x_2^2(P_{22} + \hat{P}_{22}) \end{aligned} \quad (37)$$

となる. ただし, 行列 $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_{11}, \hat{P}_{12}, \hat{P}_{21}, \hat{P}_{22}$ は, (22) によって導かれる.

定理 4.1, 4.2 をもとに, システム (Σ_{bls}) の L_2 ゲインの上限 γ を計算した結果を Table 2, Fig. 1 に示す. また, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$ のときの内部安定領域 $[\Omega_{\alpha_r}^*]_{r=0,1,2}$ を Fig. 2 に示す. このときの 2 次多項式解 $[P_r(x)]_{r=2}$ の係数行列の値は, つぎの通りである.

$$\begin{aligned} P_0 &= \begin{bmatrix} 1.482 \times 10^1 & 2.157 \\ 2.157 & 3.638 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \\ P_1 &= \begin{bmatrix} -2.407 & -3.873 \times 10^{-1} \\ -3.873 \times 10^{-1} & -6.664 \times 10^{-2} \end{bmatrix}, \\ P_2 &= \begin{bmatrix} 2.028 \times 10^{-1} & 5.463 \times 10^{-4} \\ 5.463 \times 10^{-4} & -3.016 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \\ P_{11} &= \begin{bmatrix} -1.393 \times 10^{-2} & -3.325 \times 10^{-3} \\ -3.325 \times 10^{-3} & -2.417 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \\ P_{12} &= \begin{bmatrix} 1.494 \times 10^{-1} & 2.124 \times 10^{-2} \\ 2.124 \times 10^{-2} & 2.340 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \\ P_{22} &= \begin{bmatrix} -1.690 \times 10^{-3} & 1.817 \times 10^{-3} \\ 1.817 \times 10^{-3} & 3.857 \times 10^{-4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

なお, 数値計算には, MATLAB, LMI Control Toolbox を用い, 線形行列不等式による拘束条件のもとで, γ に対する最小化問題を解いた.

定数解 $[P_r(x)]_{r=0}$ に限定して解析を行なうと, どの σ_2 に対しても L_2 ゲインの上限の値は変わらないことが確認できる (Fig. 1, Table 2). これより, 系 4.1 が確認できる. また, σ_2 が小さいほど, 次数 r を大きくする効果がよく現れる (Fig. 1, Table 2). 特に, 次数を $r=0$ から $r=1$ にした場合に顕著である. 内部安定かつ $\mathcal{G}_\rho(\Sigma_{bls}) \leq \gamma$ となる領域 $\Omega_{\alpha_r}^*$ は, 次数を大きくしていくと, 楕円が, 多少小さくなる方向へ歪んでいくのが確認できる (Fig. 2). しかし, 領域の大きさの変化に比べ, γ の値は著しく小さくなっていることから (Fig. 1), 次数 r を大きくするにつれ, 同じ大きさの γ を与える領域は大きくなると予想される. Table 2 において, $\sigma_2 = 10^{50}, r=0$ の場合が, $V(x) = x^T P x$ を用いた文献 6) の結果に対応する. これより, 拡張 2 次形式リアプノフ関数を用いることで, より保守的でない解析結果を得ら

れることが確認できる。

6. おわりに

本論文では、拡張 2 次形式リアプノフ関数 $V(x) = x^T P(x)x$ を用いて、非線形システムの内部安定性および L_2 ゲインの解析手法を提案した。 $P(x)$ が、線形行列不等式を解くことによって、 x に関する多項式行列で得られることを示した。その結果に基づき、双線形システムを例として、数値計算によって L_2 ゲイン解析を行ない、解の x に関する次数と L_2 ゲインの上限、および内部安定領域の大きさの関係について議論し、本論文の解析手法の有効性を示した。

最後に、本研究を進めるにあたり、様々な貴重な御意見を頂きました。石川島播磨重工業（株）の渡辺 亮 博士に多大な感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar and B.A. Francis: State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, IEEE Trans., AC-34-8, 831/847 (1989)
- 2) A.J. van der Schaft: L_2 -Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback H_∞ Control, IEEE Trans., AC-37-6, 770/784 (1992)
- 3) 井村, 杉江, 吉川: 非線形システムの内部安定性と L_2 ゲイン —有界実条件の導出—, 計測自動制御学会論文集, 29-6, 659/667 (1993)
- 4) W. Kang, P.K. De and A. Isidori: Flight Control in a Windshear via Nonlinear H_∞ Methods, Proc. of 31st IEEE CDC, 1135/1142, (1992)
- 5) J. Huang and C.F. Lin: An Algorithm and Data Structure for Approximately Computing Nonlinear H_∞ Control Laws, Proc. of IEEE ACC, 1133/1137, (1994)
- 6) L.El Ghaoui and G. Scorletti: Control of Rational Systems using Linear-Fractional Representations and Linear Matrix Inequalities, Automatica, 32-9, 1273/1284, (1996)
- 7) H.K. Khalil: Nonlinear Systems, Macmillan Publishing Company, (1992)
- 8) W.M. Lu and J.C. Doyle: H_∞ Control of Nonlinear Systems: A Convex Characterization, IEEE Trans., AC-40-9, 1668/1675 (1995)
- 9) E.P. Hofer and B. Tibken: An Iterative Method for the Finite-Time Bilinear-Quadratic Control Problem, Journal of Optimization Theory and Applications, 57-3, 411/427 (1988)
- 10) S.Boyd, L.E.Ghaoui, E.Feron and V.Balakrishnan: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM. studies in applied mathematics; vol. 15, (1994)
- 11) 渡辺, 内田, 藤田: 有限個の LMI 条件に基づいたスケジューリングパラメータを持つ線形システムの解析. 第 24 回制御理論シンポジウム, 9/14, 刈谷, (1995)

A Convex Characterization of Analysis and Synthesis for Nonlinear Systems via Extended Quadratic Lyapunov Function

Seigo SASAKI and Kenko UCHIDA

Department of Electrical, Electronics and Computer Engineering, Waseda University, Tokyo 169, Japan

sasaki@uchi.elec.waseda.ac.jp kuchida@uchi.elec.waseda.ac.jp

Abstract

Using an extended quadratic Lyapunov function of the form $V(x) = x^T P(x)x$, we consider L_2 -gain analysis and state feedback control synthesis for input-affine polynomial type nonlinear systems, and derive Riccati type matrix inequality conditions that depend on x . We show that the solution $P(x)$ can be given by solving linear matrix inequalities as a polynomial type matrix. We also determine the domain of internal stability. We finally show that the proposed method is effective through a numerical example of bilinear systems.

1. Introduction

We often use Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) inequality/equation to analyze and synthesize nonlinear systems. However, it is generally not easy to obtain the solution satisfying the HJI inequality/equation. Many works (e.g. [6, 2]) in control synthesis obtain Taylor series expansion solution satisfying the HJI equation. The Taylor series generally needs infinity expansion. Therefore, under some condition for numerical calculation, we decide a degree of the expansion and obtain only an approximate solution. The method also does not consider any domain to guarantee feasibility of the solution. The work [3] shows a method numerically solving the HJI inequality which uses a linear robust control technique considering a domain of state. There, the form of the solution is restricted to the standard quadratic Lyapunov function $V(x) = x^T P x$ and small-gain type conditions are used, and so the results might be sometimes conservative. In the work [7], some systematic method is proposed. There the authors restrict the solution to a Lyapunov function which satisfies $\partial V / \partial x(x) = 2x^T X(x)$, where $X(x)$ is assumed to be positive definite.

In this paper, by using an extended quadratic Lyapunov function of the form $V(x) = x^T P(x)x$, we consider L_2 -gain analysis and state feedback control synthesis for an input-affine polynomial type nonlinear system of the form $\dot{x} = A(x)x + B(x)u$ and propose a convex programming approach. The approach consists of the following two steps.

First, by using an extended quadratic Lyapunov function $V(x) = x^T P(x)x$ for the solution of the HJI inequality, we give the conditions as Riccati type matrix inequality

that depends on the state x . Since the structure for the extended quadratic Lyapunov function adjusts to that for the system, we can obtain results that is naturally extended from those of linear quadratic problems. This makes it possible to rewrite the Riccati type inequality condition to a linear matrix inequality that depends on the state x in parallel with the procedure for linear systems [5].

Second, we give the solution satisfying the linear matrix inequality that depends on the state x by enclosing an admissible domain of state in a convex hull and solving linear matrix inequalities for all vertices of the convex hull [4]. Consequently, we obtain the solution which satisfy exactly the HJI inequality.

This paper is organized as follows. In Section 2, we describe the input-affine polynomial type nonlinear system and discuss L_2 -gain analysis for the system. Section 3 gives the state feedback control synthesis. In Section 4, we propose a convex programming approach for the analysis and synthesis. In Section 5, efficiency of the proposed approach is shown through a numerical example for bilinear systems that is a special class of the considered system.

Notations: For a vector x , $\|x\|$ denotes the Euclidean norm. For a vector $\sigma \in \mathbb{R}^n$ with positive elements, \mathcal{B}_σ^n denotes $\{x \mid |x_i| \leq \sigma_i, i = 1, \dots, n\}$, where x_i and σ_i stand for the i -th element of the vector, respectively. For a continuously differentiable symmetric matrix-valued function $P(x) : \mathcal{B}_\sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $P(x) > 0, \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0$ means $x^T P(x)x > 0, \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0$.

2. L_2 -Gain Analysis

We consider an input-affine polynomial type nonlinear system (Σ) of the form

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)w, \quad (2.1)$$

$$z = C(x)x + D(x)w \quad (2.2)$$

whose equilibrium point is $(x, w) = (0, 0)$.

$x \in \mathbb{R}^n$ is the state, $z \in \mathbb{R}^q$ is the controlled output and $w \in \mathbb{R}^p$ is the exogenous input. We assume that $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ are matrices of suitable dimensions, whose entries are polynomial functions with respect to elements of x . In this paper, we call the matrix whose entries are polynomial functions *polynomial type matrix*.

For the system (Σ) , we define an internal stability as follows, which considers a domain of state.

Definition (Internal stability) Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ be a domain that contains the equilibrium point $x = 0$. Consider the system (Σ) with $w = 0$. If the equilibrium point $x = 0$ is asymptotically stable and the solution $x(t)$ starting in the domain Ω approaches to the point $x = 0$ as $t \rightarrow \infty$, we say the system (Σ) is internally stable in the domain Ω .

We consider L_2 -gain analysis for the system (Σ) .

Definition (L_2 -gain) Consider the system (Σ) with an initial state $x(0) = 0$. The L_2 -gain is defined as $\mathcal{G}_\rho(\Sigma) := \sup_{w \in L_{2\rho}, w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$, where $\|\cdot\|_2$ denotes the norm of the space of square integrable signals, and is defined as $\|x\|_2 := (\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$, $x \in L_2$. $L_{2\rho}$ denotes the set of bounded functions with $\|x(t)\| < \rho$ for all $t \in [0, \infty)$.

The following theorem characterizes the L_2 -gain analysis for the system (Σ) .

Theorem 2.1 Consider the system (Σ) . For a given positive constant γ , if there exist a domain $\mathcal{B}_\sigma^n \subseteq \mathbb{R}^n$ and a matrix-valued function $P(x)$ such that

$$(i) \quad P(x) > 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0, \quad (2.3)$$

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} X(P(x), x)A(x) + A^T(x)X^T(P(x), x) & & \\ & B^T(x)X^T(P(x), x) & \\ & & C(x) \end{bmatrix} < -\gamma^2 I, \quad \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0, \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} X(P(x), x)B(x) & C^T(x) \\ -\gamma^2 I & D^T(x) \\ D(x) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0, \quad (2.4)$$

where

$$X(P(x), x) := P(x) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial P}{\partial x_1}(x)x \quad \cdots \quad \frac{\partial P}{\partial x_n}(x)x \right], \quad (2.5)$$

then the system (Σ) is internally stable in the maximum supersolid $\Omega(\alpha_1) := \{x \mid x^T P(x)x \leq \alpha_1\}$ that is contained in the domain \mathcal{B}_σ^n , and has $\mathcal{G}_\rho(\Sigma) \leq \gamma$.

Proof: For $x \in \mathcal{B}_\sigma^n$, consider a functional

$$V(x) := x^T P(x)x. \quad (2.6)$$

Differentiating both sides of (2.6) with respect to t , we obtain

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T P(x)x + x^T \dot{P}(x)x + x^T P(x)\dot{x} \\ &= \dot{x}^T P(x)x + x^T \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)\dot{x}_i \right] x + x^T P(x)\dot{x} \\ &= \dot{x}^T P(x)x + x^T \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)x\dot{x}_i \right] + x^T P(x)\dot{x} \\ &= \dot{x}^T P(x)x + x^T P(x)\dot{x} \end{aligned}$$

$$+ x^T \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1}(x)x & \cdots & \frac{\partial P}{\partial x_n}(x)x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \dot{x}^T \left[P(x) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1}(x)x & \cdots & \frac{\partial P}{\partial x_n}(x)x \end{bmatrix} \right]^T x \\ &\quad + x^T \left[P(x) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1}(x)x & \cdots & \frac{\partial P}{\partial x_n}(x)x \end{bmatrix} \right] \dot{x} \\ &= \dot{x}^T X^T(P(x), x)x + x^T X(P(x), x)\dot{x}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Then, by using the standard technique of completion of square and Schur complement [5], we can show that the system (Σ) is internally stable in the domain $\Omega(\alpha_1)$ and has $\mathcal{G}_\rho(\Sigma) \leq \gamma$. ■

By assuming that $X(P(x), x) > 0, \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0$ instead of the condition (2.3) and regarding the inequality (2.4) as an inequality with respect to $X(P(x), x)$, we can obtain a corresponding result of the work [7]. But, as we will see in Section 5, $X(P(x), x) > 0$ is not assumed even if $P(x) > 0$. On the other hand, the following Lemma shows that, if $X(P(x), x) > 0$, then $P(x) > 0$, which means that our approach leads to less conservative results.

Lemma 2.1 If there exist a domain $\mathcal{B}_\sigma^n \subseteq \mathbb{R}^n$ and a matrix-valued function $Y(x) > 0, \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0$ such that $X(P(x), x) = Y^{-1}(x), \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0$, then, we obtain $P(x) > 0, \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0$ and

$$x^T P(x)x = \int_0^1 2kx^T Y^{-1}(kx)x dk. \quad (2.8)$$

Proof: Since $Y^{-1}(x) > 0, \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0$, we obtain

$$2kx^T Y^{-1}(kx)x > 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0, \quad \forall k \in (0, 1].$$

Then, from the definition (2.5), we obtain the following inequality

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^1 2kx^T Y^{-1}(kx)x dk \\ &= \int_0^1 2kx^T \left[P(kx) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial P}{\partial x_1}(kx)kx \quad \cdots \quad \frac{\partial P}{\partial x_n}(kx)kx \right] \right] x dk \\ &= \int_0^1 \left[2kx^T P(kx)x + kx^T \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(kx)x_i \right] kx \right] dk \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dk} [kx^T P(kx)x] dk \\ &= x^T P(x)x, \quad \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0. \end{aligned}$$

3. State Feedback Control Synthesis

In this section, we consider a state feedback control problem for a system (Σ_0) of the form

$$\dot{x} = A(x)x + B_1(x)w + B_2(x)u, \quad (3.1)$$

$$z = C_1(x)x + D_1(x)u, \quad (3.2)$$

where $u \in \mathbb{R}^r$ is the control input. We assume that matrices $A(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$, $C_1(x)$, $D_1(x)$ are polynomial type matrices with respect to x .

Now, the state feedback control problem is given as follows.

State Feedback Control Problem [P]

Consider a system (Σ_0) . Given a positive constant γ , find a state feedback controller $u = K(x)x$ satisfying the following conditions (P₁), (P₂):

(P₁) The closed-loop system (Σ_{cl}) , which is the system (Σ_0) with $u = K(x)x$, is internally stable in a domain $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ that contains the equilibrium point $x = 0$;

(P₂) Whenever $x(0) = 0$, there exists some positive constant ρ and $\mathcal{G}_\rho(\Sigma_{cl}) \leq \gamma$ for all $w \in L_{2\rho}, w \neq 0$.

At the same time, find the domain Ω satisfying the condition (P₁).

Then, the problem is characterized by the following theorem based on Theorem 2.1.

Theorem 3.1 Consider the system (Σ_0) . For a given positive constant γ , if there exist a domain $\mathcal{B}_\sigma^n \subseteq \mathbb{R}^n$ and matrix-valued functions $P(x)$, $Y(x)$ and $W(x)$ such that

(i) $P(x) > 0, \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0$, (3.3)

(ii)
$$\begin{bmatrix} F_1(Y(x), W(x), x) & B_1(x) & F_2^T(Y(x), W(x), x) \\ B_1^T(x) & -\gamma^2 I & 0 \\ F_2(Y(x), W(x), x) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0,$$
 (3.4)

where $F_1(Y(x), W(x), x) := A(x)Y^T(x) + Y(x)A^T(x) + B_2(x)W(x) + W^T(x)B_2^T(x)$

and $F_2(Y(x), W(x), x) := C_1(x)Y^T(x) + D_1(x)W(x)$,

(iii) $X(P(x), x)Y(x) = I, \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n$, (3.5)

then, a state feedback controller solving the problem [P] is given as

$$u = W(x)X^T(P(x), x)x. \quad (3.6)$$

Moreover, the closed-loop system (Σ_{cl}) is internally stable in the maximum supersolid $\Omega(\alpha_2) = \{x \mid x^T P(x)x \leq \alpha_2\}$ that is contained in the domain \mathcal{B}_σ^n .

Due to the condition (3.5), the conditions of Theorem 3.1 are not affine in the solutions $P(x)$ and $Y(x)$. Using Lemma 2.1, we obtain the following restrictive but tractable conditions for the state feedback control problem, which is same type as in [7]. The conditions of Theorem 3.2 are affine in solutions. To obtain solutions $Y(x)$ and $W(x)$ satisfying the conditions of Theorem 3.2 is reduced to the same procedure to solve the conditions for analysis given in Theorem 2.1.

Theorem 3.2 Consider the system (Σ_0) . For a given positive constant γ , if there exist a domain $\mathcal{B}_\sigma^n \subseteq \mathbb{R}^n$ and matrix-valued functions $Y(x) > 0, \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, x \neq 0$ and $W(x)$ satisfying the condition (3.4) of Theorem 3.1, then, there exists a state feedback controller solving the problem [P], and $P(x)$ is given as (2.8).

4. Convex Programming Approach

Here we have the considered problems result in convex programming and obtain the solutions as polynomial type matrices. In this section, we particularly focus on obtaining a solution $P(x)$ satisfying the conditions for L_2 -gain analysis in Theorem 2.1. We can use this approach for state feedback control synthesis based on Theorem 3.2.

4.1. Polynomial type Extended Quadratic Lyapunov Function

To obtain the solution $P(x)$ as a polynomial type matrix, we discuss structures for $P(x)$ and $X(P(x), x)$. In the following discussion, $P_r(x)$ denotes r -degree polynomial type matrix with respect to x . We also define the following notations:

1. For a positive integer n and a non-negative integer k ,

$${}_n H_k := {}_{n+k-1} C_k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \quad (4.1)$$

denotes the number of combinations with repetitions of k from n .

2. For $x \in \mathbb{R}^n, x^{(0)} := 1, x^{(1)} := x$ and

$$x^{(k)} := [x_1^k \quad kx_1^{k-1}x_2 \quad \dots \quad \frac{k!}{k_1!k_2! \dots k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \quad \dots \quad x_n^k]^T \in \mathbb{R}^{nH_k},$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = k, k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0. \quad (4.2)$$

Then, for r -degree polynomial type matrix $P_r(x) : \mathcal{B}_\sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ of the form

$$P_r(x) := \sum_{k=0}^r \sum_{i=1}^{nH_k} x_i^{(k)} P_{\eta(x_i^{(k)})}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

we can obtain

$$X(P_r(x), x) := P_r(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^r k \sum_{i=1}^{nH_{k-1}} x_i^{(k-1)} \sum_{j=1}^n x_j \hat{P}_{\eta(x_i^{(k-1)})j}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.4)$$

where the subscript $\eta(x_i^{(k)})$ denotes a symbol of k lexicographically ordered numbers that stand for elements of x contained in the i -th element of $x^{(k)}$. Whenever $k = 0$, let $\eta(x_i^{(k)}) = 0$. Moreover, for given $k = 1, 2, \dots, r$, and $i = 1, 2, \dots, nH_k, \hat{P}_{\eta(x_i^{(k-1)})j}$ denotes a matrix such that

$$\left[\sum_{j=1}^n \mu_j P_{\theta(\eta(x_i^{(k-1)})j)} \right] \nu = \left[\sum_{j=1}^n \nu_j \hat{P}_{\eta(x_i^{(k-1)})j} \right] \mu, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^n, \forall \nu \in \mathbb{R}^n, \quad (4.5)$$

and is obtained from given matrices $P_{\theta(\eta(x_i^{(k-1)})j)}$, $j = 1, \dots, n$ (i.e. $P_{\eta(x_i^{(k)})}$), where the subscript $\theta(\eta(x_i^{(k-1)})j)$

denotes a symbol of k lexicographically ordered numbers that are consisted of numbers displayed by $\eta(x_i^{(k-1)})$ and j . Whenever $k = 0$, let the second term of the right hand side of (4.4) be equal to zero.

Example: Assume that the third element of $x^{(3)}$ consist of x_1^2 and x_3 . Then, $\eta(x_i^{(k)}) |_{k=3, i=3}$ stands for "113". $\eta(x_i^{(k)})_j |_{k=3, i=3, j=2}$ stands for "1132". Besides, $\theta(\eta(x_i^{(k)}), j) |_{k=3, i=3, j=2}$ stand for "1123".

Remark 4.1 We can obtain the identity (4.4) by substituting (4.3) into (2.7) and using the identity (4.5). Examples of the structure for $P(x)$ and $X(P(x), x)$ will be shown in numerical example in Section 5.

4.2. Linear Matrix Inequality Conditions

Here we try to find the polynomial type solution $P_r(x)$ for the matrix inequality condition in Theorem 2.1. First, remembering that the nonlinear system (Σ) is polynomial type, we rewrite the matrix inequality condition into that for the coefficients of the polynomial $P_r(x)$. The obtained condition still depends on the state x . Next, using a result of the work [4], we show that the condition can be solved and so $P_r(x)$ can be obtained by solving finite number of linear matrix inequalities.

To simplify notations, we denote by P_r^{Cof} all coefficient matrices of r -degree polynomial type matrix $P_r(x)$:

$$P_0, P_{\eta(x_i^{(k)})}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad i = 1, 2, \dots, n H_k.$$

Note that the coefficient matrices of the system (Σ) and the solution $P_r(x)$ are polynomial type matrices with respect to x . Then, we can redefine the conditions of Theorem 2.1 as

$$F_r(P_r^{Cof}, \psi(x)) := F_0(P_0) + \sum_{i=1}^q \psi_i(x) F_i(P_r^{Cof}) := \begin{bmatrix} -P_r(x) & 0 \\ 0 & X(P_r(x), x)A(x) + A^T(x)X^T(P_r(x), x) \\ 0 & B^T(x)X^T(P_r(x), x) \\ 0 & C(x) \\ 0 & 0 \\ X(P_r(x), x)B(x) & C^T(x) \\ -\gamma^2 I & D^T(x) \\ D(x) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}_\sigma^n, \quad x \neq 0. \quad (4.6)$$

Where, when $n_{\Sigma r} \neq 0$,

$$\psi(x) := [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \quad x_1^2 \quad x_1 x_2 \quad x_1 x_3 \quad \dots \quad x_n^2 \quad \dots \quad x_1^{n_{\Sigma r}} \quad x_1^{n_{\Sigma r}-1} x_2 \quad \dots \quad x_n^{n_{\Sigma r}}]^T \in \mathbb{R}^q, \quad (4.7)$$

$$q := \sum_{i=1}^{n_{\Sigma r}} n H_i, \quad (4.8)$$

and when $n_{\Sigma r} = 0$, $\psi(x) := 0 \in \mathbb{R}^n$ and $q := n$. Here, the degree $n_{\Sigma r}$ is determined by the degrees of polynomial

type matrices $A(x), B(x), C(x), D(x)$ and solution $P_r(x)$. Also, $\psi_i(x)$ denotes i -th elements of $\psi(x)$. Now, we can restate Theorem 2.1 as the following theorem.

Theorem 4.1 Consider the system (Σ) . For a given positive constant γ , if there exist a non-negative integer $n_{\Sigma r}$, a domain $\Psi(\mathcal{B}_\sigma^n) \subseteq \mathbb{R}^q$ which contains the origin, and coefficient matrices P_r^{Cof} of $P_r(x)$ such that

$$F_r(P_r^{Cof}, \psi(x)) < 0, \quad \forall \psi(x) \in \Psi(\mathcal{B}_\sigma^n), \quad (4.9)$$

then, the system (Σ) is internally stable in the maximum supersolid $\Omega_r(\alpha_r) := \{x | x^T P_r(x) x \leq \alpha_r\}$ that is contained in the domain \mathcal{B}_σ^n , and has $\mathcal{G}_\rho(\Sigma) \leq \gamma$.

Theorem 4.1 suggests that, to obtain coefficient matrices P_r^{Cof} of the solution $P_r(x)$, we must solve the condition (4.9) for all $\psi(x) \in \Psi(\mathcal{B}_\sigma^n)$, that is, we must solve the condition (4.9) that depends on the state x . But, we can obtain coefficient matrices P_r^{Cof} by enclosing an admissible domain of state in a convex hull and solving finite number of linear matrix inequalities for all vertices of the convex hull.

Theorem 4.2 [4] Consider a q -dimensional convex hull Φ , with 2^q vertices, that contains $\Psi(\mathcal{B}_\sigma^n) = \{\psi(x) | x \in \mathcal{B}_\sigma^n\}$. Assume $({}^1\phi, \dots, {}^{2^q}\phi)$ denotes 2^q vertices of Φ . If there exist matrices P_r^{Cof} satisfying

$$F_r(P_r^{Cof}, j\phi) < 0, \quad j = 1, \dots, 2^q, \quad (4.10)$$

where $j\phi$ denotes j -th vertex of Φ , then the matrices P_r^{Cof} satisfies the inequality (4.9).

Remark 4.2 In this section, we considered the polynomial type solution $P_r(x)$ only for L_2 -gain analysis. Based on Theorem 4.2, we can obtain polynomial type solutions $Y_r(x)$ and $W_r(x)$ for the control problem as well. However, a structure for $P(x)$ derived by the obtained $Y_r(x)$ is not polynomial type matrix in the control problem.

Remark 4.3 For a control problem that $B_1(x) = 0$ and $B_2(x)$ is a constant matrix, the work [8] shows an algorithm to solve a Riccati equation depended on a state by solving an algebraic Riccati equation.

5. Numerical Examples

We discuss numerically L_2 -gain for a bilinear model (Σ_{bls}) of CSTR [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + (B_0 + x_1 B_1)u, & z &= Cx, \\ x &= [x_1 \quad x_2]^T, & A &= \begin{bmatrix} 13/6 & 5/12 \\ -50/3 & -8/3 \end{bmatrix}, \\ B_0 &= \begin{bmatrix} -1/8 \\ 0 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, & C &= [1 \quad 0]. \end{aligned}$$

For the system (Σ_{bls}) , x_1 is a nonlinear element of the state multiplied by w , and x_2 a linear element of the state.

Assume that $|x_1| \leq \sigma_1$ and $|x_2| \leq \sigma_2$, where σ_1 and σ_2 are given in the following discussion. Now, we discuss cases of 0, 1, 2-degree polynomial type solutions $P_r(x)|_{r=0,1,2}$. When $r = 2$, a structure for $P_r(x)$ is

$$P_r(x)|_{r=2} = P_0 + x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_1^2 P_{11} + 2x_1 x_2 P_{12} + x_2^2 P_{22},$$

and a structure for $X(P_r(x), x)$

$$\begin{aligned} X(P_r(x), x)|_{r=2} &= P_r(x)|_{r=2} + \frac{1}{2} \{ [x_1 \hat{P}_1 + x_2 \hat{P}_2] \\ &\quad + 2\{x_1(x_1 \hat{P}_{11} + x_2 \hat{P}_{12}) + x_2(x_1 \hat{P}_{21} + x_2 \hat{P}_{22})\} \} \\ &= P_0 + x_1(P_1 + \frac{1}{2} \hat{P}_1) + x_2(P_2 + \frac{1}{2} \hat{P}_2) \\ &\quad + x_1^2(P_{11} + \hat{P}_{11}) + x_1 x_2(2P_{12} + \hat{P}_{12} + \hat{P}_{21}) \\ &\quad + x_2^2(P_{22} + \hat{P}_{22}), \end{aligned}$$

where matrices $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_{11}, \hat{P}_{12}, \hat{P}_{21}, \hat{P}_{22}$ are defined by $P_1, P_2, P_{11}, P_{12}, P_{22}$ from the identity (4.5).

Results of L_2 -gain analysis for the system (Σ_{bls}) , which are calculated by the formulates of Theorem 4.1 and 4.2, are shown in Table 4.1 and Figure 5.1. Moreover, domains $\Omega_r(\alpha_r)|_{r=0,1,2}$ of internal stability in the case of $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$ are shown in Figure 5.2. In this case, coefficient matrices of 2-degree polynomial type solution $P_r(x)|_{r=2}$ were obtained as

$$\begin{aligned} P_0 &= \begin{bmatrix} 1.482 \times 10^1 & 2.157 \\ 2.157 & 3.638 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \\ P_1 &= \begin{bmatrix} -2.407 & -3.873 \times 10^{-1} \\ -3.873 \times 10^{-1} & -6.664 \times 10^{-2} \end{bmatrix}, \\ P_2 &= \begin{bmatrix} 2.028 \times 10^{-1} & 5.463 \times 10^{-4} \\ 5.463 \times 10^{-4} & -3.016 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \\ P_{11} &= \begin{bmatrix} -1.393 \times 10^{-2} & -3.325 \times 10^{-3} \\ -3.325 \times 10^{-3} & -2.417 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \\ P_{12} &= \begin{bmatrix} 1.494 \times 10^{-1} & 2.124 \times 10^{-2} \\ 2.124 \times 10^{-2} & 2.340 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \\ P_{22} &= \begin{bmatrix} -1.690 \times 10^{-3} & 1.817 \times 10^{-3} \\ 1.817 \times 10^{-3} & 3.857 \times 10^{-4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

In this calculation, we used LMI Control Toolbox, MATLAB.

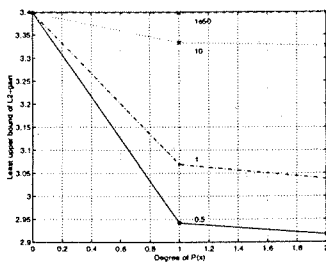


Figure 5.1: γ vs. r ($\sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 10^{50}, 10, 1, 0.5$)

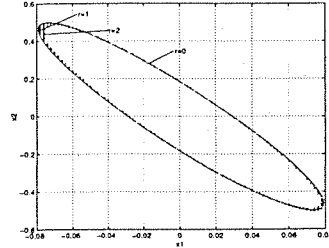


Figure 5.2: Domain of internal stability with $r = 0, 1, 2$

Table 4.1: Least upper bound of L_2 -gain γ ($\sigma_1 = 0.5$)

σ_2	$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$
10^{50}	3.3984	3.3984	3.3984
10	3.3984	3.3336	3.3261
1	3.3984	3.0690	3.0377
0.5	3.3984	2.9419	2.9170

In the case of constant solution $P_r(x)|_{r=0}$, magnitudes of least upper bound of L_2 -gain γ are same for any σ_2 (Figure 5.1 and Table 4.1) because the conditions of Theorem 2.1 are not depended on the linear state x_2 , i.e. σ_2 . Moreover, The smaller σ_2 is, the more sensitive to increase a degree r is (Figure 5.1 and Table 4.1). As for a domain of internal stability $\Omega_r(\alpha_r)$, when a degree r is larger, a size of ellipsoid is slightly smaller and a shape of that is slightly distorted (Figure 5.2). Therefore, we can obtain a large domain of stability with a small γ by increasing r . In Table 4.1, a case of $\sigma_2 = 10^{50}$ and $r = 0$ corresponds to a result of the work [3] using $V(x) = x^T P x$. Therefore, by using an extended quadratic Lyapunov function, we can obtain less conservative result of analysis.

6. Conclusion

In this paper, by combining an extended quadratic Lyapunov function and a method of convex programming, we proposed an approach to L_2 -gain analysis and state feedback control synthesis for input-affine polynomial type nonlinear systems. By using a numerical example of bilinear system, we demonstrated efficiency of our approach.

Acknowledgment

The authors wish to thank Dr. Ryo Watanabe for valuable discussions and comments.

References

- [1] E.P. Hofer and B. Tibken. An iterative method for the finite-time bilinear-quadratic control problem. *J. of Optimization Theory and Applications*, 57(3), pp.411-427, 1988.
- [2] J.Huang and C.-F. Lin. Numerical approach to computing nonlinear H_∞ control laws. *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, 18(5), pp.989-994, 1995.
- [3] L.El Ghaoui and G.Scorletti. Control of rational systems using linear-fractional representations and linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(9), pp.1273-1284, 1996.
- [4] R.Watanabe, K.Uchida and M.Fujita. A new LMI approach to analysis of linear systems with scheduling parameter - reduction to finite number of LMI conditions. In *Proc. IEEE CDC*, pp.1663-1665, 1996.
- [5] S.Boyd, L.E.Ghaoui, E.Feron and V.Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994.
- [6] W. Kang, P.K. De and A. Isidori. Flight control in a wind-shear via nonlinear H_∞ methods. In *Proc. IEEE CDC*, pp.1135-1142, 1992.
- [7] W.-M. Lu and J.C. Doyle. H_∞ control of nonlinear systems: A convex characterization. *IEEE Trans. AC.*, 40(9), pp.1668-1675, 1995.
- [8] Z.Qu, J.R.Cloutier and C.P.Mrcek. A new sub-optimal nonlinear control design technique - sdare. In *Proc. IFAC World Congr.*, pp.365-370, 1996.

An Approach to Solving Parameter-Dependent LMI Conditions Based on Finite Number of LMI Conditions

Takehito Azuma[†], Ryo Watanabe[‡], Kenko Uchida[†]

[†] Department of Electrical, Electronics and Computer
Engineering, Waseda University.

[‡] Department of Control Systems Engineering, Ishikawajima
Harima Heavy Industries Co., Ltd.
tazuma@uchi.elec.waseda.ac.jp

Abstract

Recently many researches for Linear Parameter Varying Systems focus on the approach using a parameter-dependent Lyapunov function. Analysis and controller design for Linear Parameter Varying Systems are characterized by parameter-dependent Linear Matrix Inequalities(LMIs). In this paper, we propose an approach to solving parameter-dependent LMI conditions based on finite number of LMI conditions. The proposed method does not require any particular assumptions on the parameter dependence except continuity. We consider a class of Linear Parameter Varying Systems and apply the proposed technique on analysis of their L^2 gain. Finally we demonstrate its efficacy by numerical case study.

1. Introduction

Recently many researches for Linear Parameter Varying Systems (LPV systems) focus on the approach using the parameter-dependent Lyapunov function [4] [7] [8] [9]. In this approach, analysis of L^2 gain and parameter-dependent controller design for LPV systems are characterized by parameter-dependent Linear Matrix Inequalities(LMIs).

Though solutions to parameter-dependent LMI conditions are solutions to infinite number of LMI conditions which are pointwise LMI conditions at each point in the domain of parameter, it seems impossible to compute solutions to infinite number of LMI conditions. Usually solutions to parameter-dependent LMI conditions are approximately given as solutions to finite number of conditions that are chosen appropriately from infinite number of conditions. We might obtain better approximate solutions, if the number of conditions increases. But this approximate solution is not assured to satisfy parameter-dependent LMI conditions on the whole domain of parameter.

If parameter is scalar and dependence of parameter is polynomial, parameter-dependent LMI conditions can be reduced to finite number of LMI conditions [11] [12].

In this technique, a convex polyhedron which includes a curve characterized by parameter plays a important role. And a systematic procedure of constructing this convex polyhedron is proposed in [13]. This technique is applied to analysis and synthesis of nonlinear systems [6]. Though the solution given by this technique satisfies parameter-dependent LMI conditions on the whole domain of parameter, the dependence of parameter is restricted to polynomial.

If parameter is vector and dependence of parameter is quadratic, parameter-dependent LMI conditions can be reduced to finite number of LMI conditions on extreme points of domain of parameter according to an assumption of convex [4]. The solution satisfies parameter-dependent LMI conditions on the whole domain of parameter, but the dependence of parameter is restricted to quadratic.

In this paper, we propose an approach to solving parameter-dependent LMI conditions based on finite number of LMI conditions. We only assume continuity on the dependence of parameter. The solution given by the proposed technique is satisfied parameter-dependent LMI conditions on the whole domain of parameter. In section 2, we propose the technique to solve parameter-dependent LMI conditions. In section 3, we propose the construction procedure of convex polyhedron. In section 4, we consider a class of linear systems with scheduling parameter, and apply the proposed technique on analysis of their L^2 gain. In section 5, we demonstrate its efficacy by numerical case study.

2. A Solution of Parameter-Dependent LMI Conditions

In this section, we consider a solution of the following parameter-dependent LMI condition.

$$F_0(Q_u) + f_1(\theta)F_1(Q_u) + \cdots + f_r(\theta)F_r(Q_u) < 0, \quad (1)$$

where θ is the parameter that satisfies

$$\theta \in \Theta, \quad \Theta = \{[\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_s]' \mid \theta_i \in [\theta_i^{min}, \theta_i^{max}]\}.$$

$f_i : R^s \rightarrow R$ is a continuous function of θ , and a symmetric matrix function F_i depends affinely on the unknown matrix Q_u .

The unknown matrix Q_u is obtained by solving infinite number of LMI conditions, which are pointwise LMI conditions at each θ in Θ . But it seems impossible to compute solutions to infinite number of LMI conditions. Therefore it is desired that Q_u in (1) is given as solutions to finite number of LMI conditions.

Here based on the method in [12], we can show that parameter-dependent LMI condition (1) is reduced to finite number of LMI conditions.

Theorem 1. Let $\{p_1, p_2, \dots, p_q\}$ be vertices of a convex polyhedron which includes the curved surface T ,

$$T = \{[f_1(\theta) \ f_2(\theta) \ \dots \ f_r(\theta)]' \mid \theta \in \Theta\}. \quad (2)$$

Assume that there exists Q_u which satisfies the following LMI condition for all $p_i (i = 1, 2, \dots, q)$,

$$F_0(Q_u) + p_{i1}F_1(Q_u) + \dots + p_{ir}F_r(Q_u) < 0, \quad (3)$$

where p_{ij} is the j th element of p_i . Then Q_u satisfies (1) for all $\theta \in \Theta$.

Proof. The idea of this proof is based on [12].

(3) is equivalent to

$$\xi' [F_0(Q_u) + p_{i1}F_1(Q_u) + \dots + p_{ir}F_r(Q_u)] \xi < 0, \quad (4)$$

for any ξ , $\xi \neq 0$.

(4) can be rewritten as

$$\xi' F_0(Q_u) \xi + \langle p_i, F(Q_u, \xi) \rangle < 0,$$

where $\langle *, * \rangle$ denotes inner product and

$$F(Q_u, \xi) = [\xi' F_1(Q_u) \xi \ \xi' F_2(Q_u) \xi \ \dots \ \xi' F_r(Q_u) \xi]'$$

Now define λ_i as

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0,$$

and (3) is satisfied for all $p_i (i = 1, 2, \dots, q)$, so the following condition is satisfied.

$$\xi' F_0(Q_u) \xi + \left\langle \sum_{i=1}^q \lambda_i p_i, F(Q_u, \xi) \right\rangle < 0. \quad (5)$$

Any point on the curved surface T can be expressed as a convex combination of $\{p_1, p_2, \dots, p_q\}$, therefore (5) implies that Q_u in (3) satisfies parameter-dependent LMI condition (1) for all $\theta \in \Theta$. **Q.E.D.**

Multiple parameter-dependent LMI conditions (6) are also reduced to finite number of LMI conditions.

$$F_{10}(Q_u) + f_1(\theta)F_{11}(Q_u) + \dots + f_r(\theta)F_{1r}(Q_u) < 0, \quad (6a)$$

$$F_{20}(Q_u) + f_1(\theta)F_{21}(Q_u) + \dots + f_r(\theta)F_{2r}(Q_u) < 0, \quad (6b)$$

⋮

$$F_{r0}(Q_u) + f_1(\theta)F_{r1}(Q_u) + \dots + f_r(\theta)F_{rr}(Q_u) < 0, \quad (6c)$$

Corollary 1. Let $\{p_1, p_2, \dots, p_q\}$ be vertices of a convex polyhedron which includes the curved surface T ,

$$T = \{[f_1(\theta) \ f_2(\theta) \ \dots \ f_r(\theta)]' \mid \theta \in \Theta\}.$$

Assume that there exists Q_u which satisfies the following LMI condition for all $p_i (i = 1, 2, \dots, q)$,

$$F_{i0}(Q_u) + p_{i1}F_{i1}(Q_u) + \dots + p_{ir}F_{ir}(Q_u) < 0,$$

$$F_{20}(Q_u) + p_{i1}F_{21}(Q_u) + \dots + p_{ir}F_{2r}(Q_u) < 0,$$

⋮

$$F_{r0}(Q_u) + p_{i1}F_{r1}(Q_u) + \dots + p_{ir}F_{rr}(Q_u) < 0,$$

where p_{ij} is the j th element of p_i . Then Q_u satisfies (6) for any $\theta \in \Theta$.

Proof. The proof is a straightforward extension of that of Theorem 1. **Q.E.D.**

3. Construction of Convex Polyhedron

In this section, we consider a construction method of a convex polyhedron which includes T . First note that the existence of solutions to parameter-dependent LMI condition (1) is related to convex hull of T , which is minimum convex set including T , as shown below.

Theorem 2. Let $Co(T)$ be convex hull of T . The following three statements are equivalent.

- (i) There exist solutions to (1) for any $\theta \in \Theta$
- (ii) There exist solutions to (3) for any point on T .
- (iii) There exist solutions to (3) for any point in $Co(T)$.

Proof. It is obvious that (i) and (ii) are equivalent. Here we show that (ii) and (iii) are equivalent.

Suppose that (3) is satisfied for any $x_1, x_2 \in T$, that is,

$$F(Q_u, x_1) < 0, \quad F(Q_u, x_2) < 0,$$

where

$$F(Q_u, x_i) = F_0(Q_u) + x_{i1}F_1(Q_u) + \dots + x_{ir}F_r(Q_u).$$

For any $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$, the following condition is satisfied.

$$\begin{aligned}
& F(Q_u, (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) \\
&= F_0(Q_u) + (\lambda x_{11} + (1 - \lambda)x_{21})F_1(Q_u) \\
&\quad + \cdots + (\lambda x_{1r} + (1 - \lambda)x_{2r})F_r(Q_u) \\
&= \lambda F(Q_u, x_1) + (1 - \lambda)F(Q_u, x_2) \\
&< 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

where x_{ij} is the j th element of x_i . $Co(T)$ is the set that consists of all convex combinations of points on T , therefore (ii) and (iii) are equivalent because $Co(T)$ includes T . **Q.E.D.**

Theorem 3. (Construction of Convex polyhedron)

Step 1 We divide Θ into $\{\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{d^s}\}$, gridding each dimensions of Θ with d (Division Number) points. For Θ_i , we define the curved surface T_i as

$$T_i = \{[f_1(\theta) \ f_2(\theta) \ \cdots \ f_r(\theta)]' \mid \theta \in \Theta_i\}.$$

Step 2 We construct the hyper-rectangular solid whose diagonal is two points such that

$$r_1 = \left[\min_{\theta \in \Theta_i} f_1(\theta) \quad \min_{\theta \in \Theta_i} f_2(\theta) \quad \cdots \quad \min_{\theta \in \Theta_i} f_r(\theta) \right]', \tag{8a}$$

$$r_2 = \left[\max_{\theta \in \Theta_i} f_1(\theta) \quad \max_{\theta \in \Theta_i} f_2(\theta) \quad \cdots \quad \max_{\theta \in \Theta_i} f_r(\theta) \right]'. \tag{8b}$$

Step 3 We define the convex hull of $\{R_1, R_2, \dots, R_{d^s}\}$ as H .

$$H = Co(R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_{d^s}). \tag{9}$$

The convex hull H is the convex polyhedron which includes T . (See Figure 1.)

Proof. Since the convex hull H of $\{R_1, R_2, \dots, R_{d^s}\}$ is the convex polyhedron, we show that H includes T . Since H includes $R_i (i = 1, 2, \dots, d^s)$, then we show that R_i includes T_i .

Let T_{ij} be the j th element of T_i and $R_{ij}^{min}, R_{ij}^{max}$ be extreme points of the j th element of R_i (the j th element of r_1, r_2). As the following condition is satisfied, R_i includes T_i .

$$R_{ij}^{min} \leq T_{ij} \leq R_{ij}^{max},$$

Q.E.D.

Remark 1. $\{p_1, p_2, \dots, p_q\}$ defined in Theorem 1 are included in the set of vertices of $R_i (i = 1, 2, \dots, d^s)$. It is difficult to find which vertex is one of $\{p_1, p_2, \dots, p_q\}$. But it is not necessary to find which vertex is one of $\{p_1, p_2, \dots, p_q\}$, because Theorem 1 says that (3) is satisfied for any point in H if (3) is satisfied for all vertices of H .

Remark 2. As Division Number d increases, $r_2 - r_1$ converges to 0. So $R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_{d^s}$ converges to T , namely H converges $Co(T)$. By Theorem 2, this implies that conservativeness about the solution of Theorem 1 is improved as Division Number d increases.

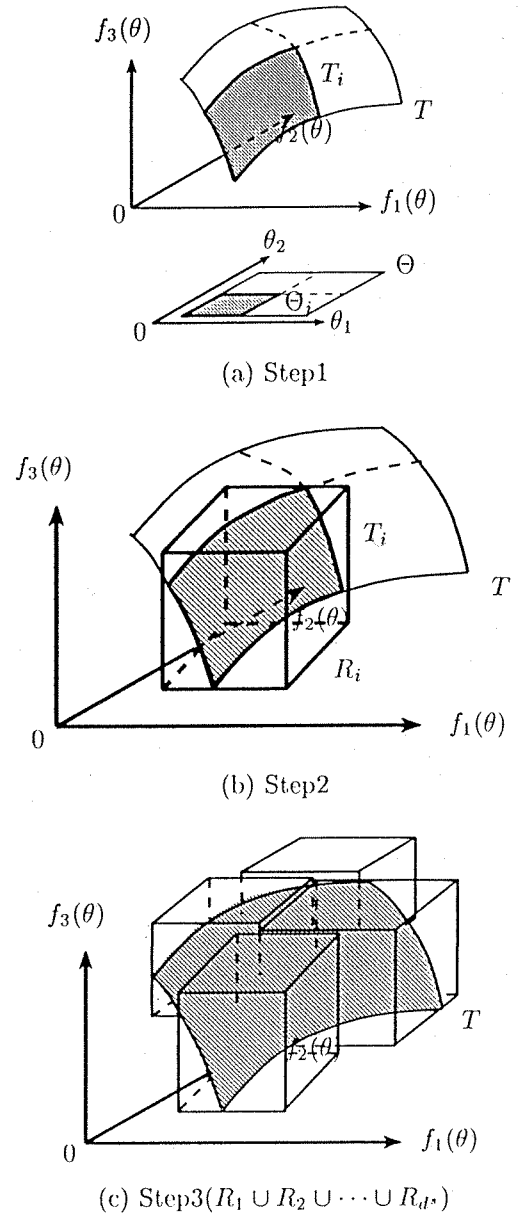


Figure 1: Construction of Convex Polyhedron

4. Application to Gain Scheduling

In this section, we consider a class of the following linear systems with scheduling parameter, and show that we can apply the proposed technique(Theorem 1, Theorem 3) on analysis of their L^2 gain.

$$\begin{aligned}
\Sigma : \quad & \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))w(t), x(0) = 0, \\
& z(t) = C(\theta(t))x(t),
\end{aligned}$$

where $x(t) \in R^n$, $z(t) \in R^l$, $w(t) \in R^m$, and $\theta(t) \in R^s$ is scheduling parameter of Σ . $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ are continuous matrix functions of θ . We assume the following properties on $\theta(t)$,

- i) $\theta(t) \in \Theta$, $t \in [0, \infty)$,
- ii) $\theta(t) \in C^1$,
- iii) $\dot{\theta}(t) \in \Psi$; $t \in [0, \infty)$.

And we define the extreme points of Ψ as ψ_k ($k = 1, 2, \dots, 2^s$).

Theorem 4. [7] [8] The system Σ is internally stable and their L^2 gain is less than γ , if there exists a continuous differentiable and positive definite matrix function $Q(\theta)$ on Θ such that for all ψ_k ($k = 1, 2, \dots, 2^s$),

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} A'(\theta)Q(\theta) + Q(\theta)A(\theta) \\ +C'(\theta)C(\theta) + \sum_{i=1}^s \psi_{ki} \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}(\theta) \end{array} \right) & Q(\theta)B(\theta) \\ B'(\theta)Q(\theta) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$\forall \theta \in \Theta,$$

where ψ_{ki} is the i th element of ψ_k .

Now let Σ' be the class of Σ whose system parameters $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ have the following forms,

$$A(\theta) = A_0 + a_1(\theta)A_1 + \dots + a_{L_a}(\theta)A_{L_a}, \quad (11a)$$

$$B(\theta) = B_0 + b_1(\theta)B_1 + \dots + b_{L_b}(\theta)B_{L_b}, \quad (11b)$$

$$C(\theta) = C_0 + c_1(\theta)C_1 + \dots + c_{L_c}(\theta)C_{L_c}, \quad (11c)$$

where $a_i, b_i, c_i : R^s \rightarrow R$ are continuous functions on Θ . We restrict $Q(\theta)$ such that

$$Q(\theta) = Q_0 + q_1(\theta)Q_1 + q_2(\theta)Q_2 + \dots + q_{L_q}(\theta)Q_{L_q}, \quad (12)$$

where $q_i : R^s \rightarrow R$ is a continuous differentiable function on Θ and Q_i is a symmetric matrix.

Theorem 5. Conditions in Theorem 4 can be written as in the form of parameter-dependent LMI condition (1).

Proof. It is obvious that $Q(\theta) > 0$, where $Q(\theta)$ is given by (12), can be written in the form of parameter-dependent LMI condition (1).

By substituting (11) to (10), we can rewrite (10) as

the following form :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A'_0 Q_0 + Q_0 A_0 & C'_0 & Q_0 B_0 \\ C_0 & -I & 0 \\ B'_0 Q_0 & 0 & -\Gamma I \end{bmatrix} \\ & + \sum_{i=0}^{L_a} \sum_{\substack{j=0, \\ i=j \neq 0}}^{L_q} a_i(\theta, \delta) q_j(\theta) \begin{bmatrix} A'_i Q_j + Q_j A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \sum_{i=0}^{L_c} c_j(\theta, \delta) \begin{bmatrix} 0 & C'_i & 0 \\ C_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{L_q} \frac{\partial q_j}{\partial \theta_i}(\theta) \begin{bmatrix} \psi_{ki} Q_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \sum_{i=0}^{L_b} \sum_{\substack{j=0, \\ i=j \neq 0}}^{L_q} b_i(\theta, \delta) q_j(\theta) \begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_j B_i \\ 0 & 0 & 0 \\ B'_i Q_j & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & < 0, \end{aligned} \quad (13)$$

where $a_0(\theta) = 1, b_0(\theta) = 1, c_0(\theta) = 1, q_0(\theta) = 1, \Gamma = \gamma^2$.

Since $a_i(\theta), b_i(\theta), c_i(\theta), q_i(\theta)$ are continuous functions on Θ , $a_i(\theta)q_j(\theta)$, $c_i(\theta)c_j(\theta)$, $b_i(\theta)q_j(\theta)$ are continuous functions on Θ . Since $q_i(\theta)$ is a continuous differentiable function on Θ , $\partial q_j / \partial \theta_i$ is a continuous function on Θ . Thus (13) has the form of parameter-dependent LMI condition (1). **Q.E.D.**

By Theorem 5, conditions in Theorem 4 can be written in the form of multiple parameter-dependent LMI conditions (6). Therefore those conditions can be reduced to finite number of LMI conditions.

5. Numerical Example

In this section, using the proposed technique, we evaluate numerically L^2 gain of a linear system with scheduling parameter. We verify that conservativeness about evaluation of L^2 gain is improved as Division Number d increases. Consider the following linear system with scheduling parameter.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \{-1 - 0.5 \exp(\theta(t))\}x(t) + \{3 + 1.5\theta(t)\}w(t), \\ z(t) &= 0.5x(t), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \theta(t) &\in [0 \ 1], \quad \forall t \in [0 \ \infty), \\ \dot{\theta}(t) &\in [-5 \ 10], \quad \forall t \in [0 \ \infty), \end{aligned}$$

and restrict $Q(\theta)$ in the following form,

$$Q(\theta(t)) = Q_0 + \theta(t)Q_1 + \theta^2(t)Q_2. \quad (14)$$

Upper bound of the L^2 gain can be evaluated by the proposed technique. And lower bound of the L^2 gain

is evaluated by solving finite number of LMI conditions which are pointwise LMI conditions at extreme points of Θ_i . The result is shown in Figure 2. In Figure 2, the vertical axis is L^2 gain which is evaluated using the proposed technique, and the horizontal axis is Division Number d in Theorem 3. This result shows conservativeness of the evaluation of L^2 gain is improved as Division number increases.

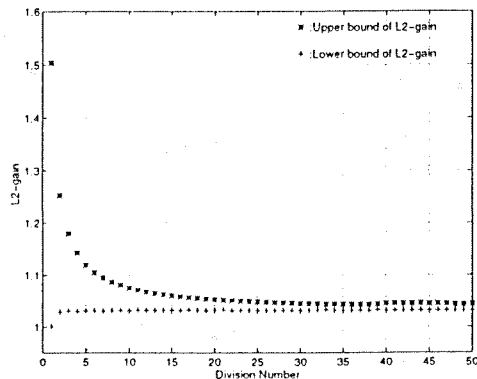


Figure 2: L^2 gain

6. Conclusion

In this paper, we proposed an approach to solving parameter-dependent, infinite dimensional, LMI conditions based on finite number of LMI conditions which does not depend on parameter. We considered a class of linear system with scheduling parameter and showed that we can apply the proposed technique on analysis of their L^2 gain. In numerical case study, we demonstrate its efficacy.

References

- [1] G. Becker, A. Packard, D. Philbrick and G. Balas, Control of Parametrically-Dependent Linear Systems : A Single Quadratic Lyapunov Approach, In Proc. of American Control Conference, pp.2795-2799, 1993.
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM, studies in applied mathematics, vol. 15, 1994.
- [3] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, LMI Control Toolbox for Use with MATLAB, The Math Works, Inc, 1995.
- [4] P. Gahinet, P. Apkarian, M. Chilali, Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 41, pp.436-442, 1996.
- [5] J. S. Shamma and M. Athans, Gain Scheduling: Potential, Hazards and Possible Remedies, IEEE Control Systems Magazine, Vol.12, pp.101-107, 1992.
- [6] S. Sasaki and K. Uchida, A convex characterization of analysis and synthesis for nonlinear systems via extended quadratic Lyapunov function, In Proc. of American Control Conference, 1997.
- [7] R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita, and E. Shimemura, L^2 Gain and H^∞ Control of Linear Systems with Scheduling Parameter, In Proc. of 33rd IEEE Conference on Decision and Control, pp.1412-1414, 1994.
- [8] F. Wu, A. Packard, G. Becker, Induced L^2 -Norm Control for LPV System with Bounded Parameter variation Rates, In Proc. of American Control Conference, pp.2379-2383, 1995.
- [9] R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita, and E. Shimemura, H^∞ Control of Linear Systems with Scheduling Parameter, Trans.SICE, Vol.31, No.4, 1995. (In Japanese)
- [10] R. Watanabe, Research on Robust Control of Actual Plants via Linear Feedback Control, Chapter 4 "Gain Scheduling", Doctoral Dissertation, Waseda Univ., 1995. (In Japanese)
- [11] R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita, Analysis of Linear Systems with Scheduling Parameter based on finite number of LMI conditions, In Proc. of Control System Theory Symposium, pp.9-14, 1995. (In Japanese)
- [12] R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita, A New LMI Approach to Analysis of Linear Systems with Scheduling Parameter - Reduction to Finite Number of LMI Conditions, In Proc. of 34th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, pp.1663-1665, 1996.
- [13] T. Azuma, R. Watanabe, K. Uchida, Construction of Convex Hull for Linear Systems with Scheduling Parameter based on finite number of LMI conditions, In Proc. of Control System Theory Symposium, pp.73-78, 1996. (In Japanese)

Quadratic Cost Output Feedback Control for Bilinear Systems

Seigo SASAKI and Kenko UCHIDA

Department of Electrical, Electronics and Computer Engineering,
Waseda University, Tokyo 169, JAPAN

sasaki@uchi.elec.waseda.ac.jp kuchida@uchi.elec.waseda.ac.jp

Abstract

In this paper, we consider an output feedback control problems for bilinear systems with a quadratic cost function, and develop a robust control theory approach. The key point of the approach is to regard once the bilinear term as the term with unknown parameters and then use some robust control synthesis methods [4, 1]. By using this approach, we derive two types of nonlinear output feedback controller that guarantees an upper bound for the cost function. We also demonstrate efficiency of the proposed approach through a numerical example.

1. Introduction

Bilinear systems comprise perhaps the simplest class of nonlinear systems. But the linearization of bilinear systems easily loses the essential nature of the problem for the systems. Moreover, bilinear systems are nonlinear systems that have a lot of practical applications in various fields. Many researchers have studied various aspects of bilinear systems for the past thirty years [3].

In this paper, we consider an output feedback control problem for bilinear systems with a quadratic cost function, and develop a robust control theory approach. The key point of the approach is to regard once the bilinear term as the term with unknown parameters and then use some robust control synthesis methods [1]. By using this approach, we derive two types of nonlinear output feedback controller that guarantees an upper bound for the cost function. To construct the controllers requires solutions satisfying two Riccati inequalities that depend on the state of a system or a controller. But it is difficult to obtain the solutions satisfying the inequalities. We propose an algorithm to obtain the solutions satisfying the Riccati inequalities via specifying a domain of the state and solving constant coefficient Riccati inequalities. The proposed algorithm includes an evaluation method for the domain of internal stability. To show potential of this algorithm, we discuss numerically an output feedback control problem for a bilinear model presented in the work [2]. There, we compare the nonlinear controller with a linear controller designed for linearized

system of the bilinear model.

The paper is organized as follows. Section 2 gives statement of output feedback control problem and sufficient conditions for the existence of controllers solving the problem. Section 3 gives the algorithm that obtains the solutions satisfying the sufficient condition. In section 4, we discuss the numerical example of bilinear model of [2].

Notations: For a vector x , $\|x\|$ denotes the Euclidean norm. $\|x\|_Q$ denotes the Euclidean norm weighted by a matrix Q . For a real matrix P , $P > 0$ ($P \geq 0$) means P is symmetric and positive (positive-semi) definite.

2. Quadratic Cost Output Feedback Control Problem

2.1. Problem Statement

We consider a bilinear system (Σ) of the form

$$\dot{x} = Ax + B(x)u, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$y = Cx, \quad (2)$$

where,

$$B(x) = B + \{xG\}, \quad (3)$$

$$\{xG\} := \sum_{i=1}^n x_i G_i, \quad G_i \in \mathbb{R}^{n \times r}, i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

x_i stands for the i -th element of x .

$x \in \mathbb{R}^n$ is the state, $u \in \mathbb{R}^r$ is the control input and $y \in \mathbb{R}^m$ is the measured output. A, B, C are coefficient matrices of appropriate dimensions. For given matrices $G_i, i = 1, \dots, n$, there exist matrices $H_j, j = 1, \dots, r$ such that

$$\{xG\}u = \{uH\}x, \quad (5)$$

for all x, u , where $\{uH\}$ is defined as

$$\{uH\} := \sum_{j=1}^r u_j H_j, \quad H_j \in \mathbb{R}^{n \times n}, j = 1, \dots, r. \quad (6)$$

u_j stands for the j -th element of u .

For the system (Σ), we consider a nonlinear output feedback controller (Γ) of the form

$$\dot{\xi} = \eta_1(\xi) + \eta_2(\xi)u + \eta_3(\xi)y, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (7)$$

$$u = \theta_1(\xi), \quad (8)$$

where $\eta_1(\xi)$, $\eta_2(\xi)$, $\eta_3(\xi)$ and $\theta_1(\xi)$ are sufficiently smooth functions with $\eta_1(0) = 0$ and $\theta_1(0) = 0$, which guarantees

$$J(u, x_0, \xi_0) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \leq \left\| \begin{array}{c} x_0 \\ \xi_0 \end{array} \right\|_N^2, \quad \forall (x_0, \xi_0) \in \Omega \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (9)$$

where N is some matrix of appropriate dimensions, which is specified in the following discussion.

2.2. Sufficient Conditions for the Existence of Controllers

Now assume that the structures $\eta_1(\xi)$, $\eta_2(\xi)$ and $\eta_3(\xi)$ of the controller (Γ) are already designed. Here, if we obtain a solution $V(x_a)$ satisfying the Hamilton-Jacobi inequality,

$$\min_{u=\theta_1(\xi)} \left[\frac{\partial V}{\partial x_a}(x_a) \{f_1(x_a) + f_2(x_a)u\} + \|x\|_Q^2 + \|u\|_R^2 \right] \leq 0, \quad (10)$$

for the augmented system that consists of the system (Σ) and the controller (Γ), given as

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= f_1(x_a) + f_2(x_a)u, & (11) \\ x_a &= \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad f_1(x_a) = \begin{bmatrix} Ax \\ \eta_1(\xi) + \eta_3(\xi)Cx \end{bmatrix}, \\ f_2(x_a) &= \begin{bmatrix} B(x) \\ \eta_2(\xi) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

then we have the controller (Γ) which guarantees $J(u, x_0, \xi_0) \leq V(x_a(0))$.

It is not easy to obtain the solution $V(x_a)$ satisfying the Hamilton-Jacobi inequality (10). In this paper, by restricting a structure of the solution $V(x_a)$ to two particular types, we obtain two solutions presented in Theorem 2.1 and 2.2. The solution $V(x_a)$ for Theorem 2.1 has the structure

$$V(x, \xi) := \xi^T S \xi + \gamma^2 (x - \xi)^T P^{-1} (x - \xi), \quad (12)$$

and the solution for Theorem 2.2 the structure

$$V(x, \xi) := x^T M x + \gamma^2 (x - \xi)^T T^{-1} (x - \xi). \quad (13)$$

These structures of the solutions are the same as those of the linear H_∞ control problem [1]. We might think that the structures (12) and (13) are introduced as the second order approximation of $V(x_a)$ with respect to the linearization model in neighborhood of the equilibrium point $(x, \xi) = (0, 0)$ of the bilinear system (1) and controller (7). This is not true, because the linearization model of bilinear system (1) is generally useless because of lacking the control input. In this paper, we regard the state x in the bilinear term as an unknown parameter, and the bilinear system (1) as a linear system with an unknown parameter. We shall prove the following theorems with the same technique

“completing the square” as in the linear case. Before proving the theorems, we define an *internal stability* for the closed-loop system (Σ, Γ) as follows, which considers a domain of state.

Definition (Internal stability).

Consider the closed-loop system (Σ, Γ). Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ be a domain that contains the equilibrium point $(0, 0)$. If the equilibrium point $(0, 0)$ is asymptotically stable and the solution $(x(t), \xi(t))$ starting in the domain Ω approaches to the point $(0, 0)$ as $t \rightarrow \infty$, we say the closed-loop system (Σ, Γ) is internally stable in the domain Ω .

Theorem 2.1 Consider the system (Σ). If there exists a domain $\Phi_1 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ that contains the origin, and for all $(x, \xi) \in \Phi_1$, $(x, \xi) \neq (0, 0)$, there exist $S > 0, P > 0$ such that

$$\begin{aligned} \text{(C11) Eqn}_{11}(S, B(\xi)) &:= \\ S(A + \gamma^{-2}PQ) + (A + \gamma^{-2}PQ)^T S \\ - S(B(\xi)R^{-1}B^T(\xi) - \gamma^{-2}PC^T C P)S + Q &< 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{(C12) Eqn}_{12}(P) &:= \\ PA^T + AP - P(C^T C - \gamma^{-2}Q)P &< 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{(C13)} \\ \xi^T \text{Eqn}_{11}(S, B(\xi))\xi + \gamma^2 (x - \xi)^T P^{-1} \\ [\text{Eqn}_{12}(P) + P\{\underline{\nu}(\xi)H\}^T + \{\underline{\nu}(\xi)H\}P]P^{-1}(x - \xi) \\ - \gamma^2 \|C(x - \xi) - \gamma^{-2}CPS\xi\| &< 0, \end{aligned} \quad (16)$$

where $\underline{\nu}(\xi) := -R^{-1}B^T(\xi)S\xi$,

then, the controller (Γ) of the form

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= A\underline{x} - B(\underline{x})R^{-1}B^T(\underline{x})S\underline{x} + \gamma^{-2}PQ\underline{x} \\ &\quad + PC^T(y - C\underline{x}), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$u = -R^{-1}B^T(\underline{x})S\underline{x} \quad (18)$$

guarantees

$$\begin{aligned} J(u, x_0, \underline{x}_0) &\leq \underline{x}_0^T S \underline{x}_0 + \gamma^2 (x_0 - \underline{x}_0)^T P^{-1} (x_0 - \underline{x}_0), \\ \forall (x_0, \underline{x}_0) &\in \Omega_1(\sigma_1), \end{aligned} \quad (19)$$

where $\Omega_1(\sigma_1)$ is defined below. Moreover, the closed-loop system (Σ, Γ) is internally stable in the maximum hyper-ellipsoid

$$\begin{aligned} \Omega_1(\sigma_1) &:= \\ \{ (x, \xi) \mid \xi^T S \xi + \gamma^2 (x - \xi)^T P^{-1} (x - \xi) &\leq \sigma_1 \}, \end{aligned} \quad (20)$$

that is contained in the domain Φ_1 .

Theorem 2.2 Consider the system (Σ). If there exists a domain $\Phi_2 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ that contains the origin, and for all $(x, \xi) \in \Phi_2$, $(x, \xi) \neq (0, 0)$, there exist $M > 0, T > 0$ such that

$$\begin{aligned} \text{(C21) Eqn}_{21}(M, B(x)) &:= \\ MA + A^T M - MB(x)R^{-1}B^T(x)M + Q &< 0; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{(C22) Eqn}_{22}(T, B(x)) :=$$

where $\eta_1(\xi)$, $\eta_2(\xi)$, $\eta_3(\xi)$ and $\theta_1(\xi)$ are sufficiently smooth functions with $\eta_1(0) = 0$ and $\theta_1(0) = 0$, which guarantees

$$J(u, x_0, \xi_0) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \leq \left\| \begin{array}{c} x_0 \\ \xi_0 \end{array} \right\|_N^2, \quad \forall (x_0, \xi_0) \in \Omega \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (9)$$

where N is some matrix of appropriate dimensions, which is specified in the following discussion.

2.2. Sufficient Conditions for the Existence of Controllers

Now assume that the structures $\eta_1(\xi)$, $\eta_2(\xi)$ and $\eta_3(\xi)$ of the controller (Γ) are already designed. Here, if we obtain a solution $V(x_a)$ satisfying the Hamilton-Jacobi inequality,

$$\min_{u=\theta_1(\xi)} \left[\frac{\partial V}{\partial x_a}(x_a) \{f_1(x_a) + f_2(x_a)u\} + \|x\|_Q^2 + \|u\|_R^2 \right] \leq 0, \quad (10)$$

for the augmented system that consists of the system (Σ) and the controller (Γ), given as

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= f_1(x_a) + f_2(x_a)u, & (11) \\ x_a &= \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad f_1(x_a) = \begin{bmatrix} Ax \\ \eta_1(\xi) + \eta_3(\xi)Cx \end{bmatrix}, \\ f_2(x_a) &= \begin{bmatrix} B(x) \\ \eta_2(\xi) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

then we have the controller (Γ) which guarantees $J(u, x_0, \xi_0) \leq V(x_a(0))$.

It is not easy to obtain the solution $V(x_a)$ satisfying the Hamilton-Jacobi inequality (10). In this paper, by restricting a structure of the solution $V(x_a)$ to two particular types, we obtain two solutions presented in Theorem 2.1 and 2.2. The solution $V(x_a)$ for Theorem 2.1 has the structure

$$V(x, \xi) := \xi^T S \xi + \gamma^2 (x - \xi)^T P^{-1} (x - \xi), \quad (12)$$

and the solution for Theorem 2.2 the structure

$$V(x, \xi) := x^T M x + \gamma^2 (x - \xi)^T T^{-1} (x - \xi). \quad (13)$$

These structures of the solutions are the same as those of the linear H_∞ control problem [1]. We might think that the structures (12) and (13) are introduced as the second order approximation of $V(x_a)$ with respect to the linearization model in neighborhood of the equilibrium point $(x, \xi) = (0, 0)$ of the bilinear system (1) and controller (7). This is not true, because the linearization model of bilinear system (1) is generally useless because of lacking the control input. In this paper, we regard the state x in the bilinear term as an unknown parameter, and the bilinear system (1) as a linear system with an unknown parameter. We shall prove the following theorems with the same technique

“completing the square” as in the linear case. Before proving the theorems, we define an *internal stability* for the closed-loop system (Σ, Γ) as follows, which considers a domain of state.

Definition (Internal stability).

Consider the closed-loop system (Σ, Γ) . Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ be a domain that contains the equilibrium point $(0, 0)$. If the equilibrium point $(0, 0)$ is asymptotically stable and the solution $(x(t), \xi(t))$ starting in the domain Ω approaches to the point $(0, 0)$ as $t \rightarrow \infty$, we say the closed-loop system (Σ, Γ) is internally stable in the domain Ω .

Theorem 2.1 Consider the system (Σ). If there exists a domain $\Phi_1 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ that contains the origin, and for all $(x, \xi) \in \Phi_1$, $(x, \xi) \neq (0, 0)$, there exist $S > 0, P > 0$ such that

$$\begin{aligned} \text{(C11) Eqn}_{11}(S, B(\xi)) &:= \\ S(A + \gamma^{-2}PQ) + (A + \gamma^{-2}PQ)^T S \\ - S(B(\xi)R^{-1}B^T(\xi) - \gamma^{-2}PC^T C P)S + Q &< 0; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{(C12) Eqn}_{12}(P) &:= \\ PA^T + AP - P(C^T C - \gamma^{-2}Q)P &< 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{(C13)} \\ \xi^T \text{Eqn}_{11}(S, B(\xi))\xi + \gamma^2 (x - \xi)^T P^{-1} \\ [\text{Eqn}_{12}(P) + P\{\underline{\nu}(\xi)H\}^T + \{\underline{\nu}(\xi)H\}P]P^{-1}(x - \xi) \\ - \gamma^2 \|C(x - \xi) - \gamma^{-2}CPS\xi\| &< 0, \end{aligned} \quad (16)$$

where $\underline{\nu}(\xi) := -R^{-1}B^T(\xi)S\xi$, then, the controller (Γ) of the form

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} - B(\underline{x})R^{-1}B^T(\underline{x})S\underline{x} + \gamma^{-2}PQ\underline{x} \\ &\quad + PC^T(y - C\underline{x}), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$u = -R^{-1}B^T(\underline{x})S\underline{x} \quad (18)$$

guarantees

$$\begin{aligned} J(u, x_0, \underline{x}_0) &\leq \underline{x}_0^T S \underline{x}_0 + \gamma^2 (x_0 - \underline{x}_0)^T P^{-1} (x_0 - \underline{x}_0), \\ \forall (x_0, \underline{x}_0) &\in \Omega_1(\sigma_1), \end{aligned} \quad (19)$$

where $\Omega_1(\sigma_1)$ is defined below. Moreover, the closed-loop system (Σ, Γ) is internally stable in the maximum hyper-ellipsoid

$$\begin{aligned} \Omega_1(\sigma_1) &:= \\ \{ (x, \xi) \mid \xi^T S \xi + \gamma^2 (x - \xi)^T P^{-1} (x - \xi) &\leq \sigma_1 \}, \end{aligned} \quad (20)$$

that is contained in the domain Φ_1 .

Theorem 2.2 Consider the system (Σ). If there exists a domain $\Phi_2 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ that contains the origin, and for all $(x, \xi) \in \Phi_2$, $(x, \xi) \neq (0, 0)$, there exist $M > 0, T > 0$ such that

$$\begin{aligned} \text{(C21) Eqn}_{21}(M, B(x)) &:= \\ MA + A^T M - MB(x)R^{-1}B^T(x)M + Q &< 0; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{(C22) Eqn}_{22}(T, B(x)) :=$$

$$\begin{aligned}
& TA^T + AT \\
& -T(C^T C - \gamma^{-2} M B(x) R^{-1} B^T(x) M) T < 0; \quad (22) \\
\text{(C23)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x^T \text{Eqn}_{21}(M, B(x)) x \\
& + \gamma^2 (x - \xi)^T T^{-1} [\text{Eqn}_{22}(T, B(x)) \\
& + T\{\hat{\nu}(\xi)H\}^T + \{\hat{\nu}(\xi)H\}T] T^{-1} (x - \xi) \\
& + \|R^{-1}(B^T(x)Mx - B^T(\xi)M\xi)\|_R^2 \\
& - \|R^{-1}B^T(x)M(x - \xi)\|_R^2 - \gamma^2 \|C(x - \xi)\|^2 < 0, \\
\end{aligned} \quad (23)$$

where $\hat{\nu}(\xi) := -R^{-1}B^T(\xi)M\xi$,
then, the controller (Γ) of the form

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} - B(\hat{x})R^{-1}B^T(\hat{x})M\hat{x} \\
& + TC^T(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (24)
\end{aligned}$$

$$u = -R^{-1}B^T(\hat{x})M\hat{x} \quad (25)$$

guarantees

$$\begin{aligned}
J(u, x_0, \hat{x}_0) &\leq x_0^T M x_0 + \gamma^2 (x_0 - \hat{x}_0)^T T^{-1} (x_0 - \hat{x}_0), \\
\forall (x_0, \hat{x}_0) &\in \Omega_2(\sigma_2), \quad (26)
\end{aligned}$$

where $\Omega_2(\sigma_2)$ is defined below. Moreover, the closed-loop system (Σ, Γ) is internally stable in the maximum hyper-ellipsoid

$$\begin{aligned}
\Omega_2(\sigma_2) &:= \\
&\{(x, \xi) \mid x^T M x + \gamma^2 (x - \xi)^T T^{-1} (x - \xi) \leq \sigma_2\}, \quad (27)
\end{aligned}$$

that is contained in the domain Φ_2 .

Remark 2.1 In Theorem 2.1, we use the conditions (C11),(C12) to construct the controller (Γ) and the condition (C13) to evaluate the domain in which the closed-loop system (Σ, Γ) is internally stable. In the same way, in Theorem 2.2, the conditions (C21),(C22) construct the controller (Γ) and the condition (C23) evaluates the domain. The conditions (C11),(C12) and (C21),(C22) correspond to two Riccati inequalities, which let $B_1 = 0$, in a linear H_∞ control problem [1].

Remark 2.2 If the parameter γ is taken as $\gamma \rightarrow \infty$, then both controllers (17),(18) and (24),(25) coincide and become the controller of so-called LQG type.

3. Controller Synthesis Algorithm

In Section 2.2, we showed two theorems which present the sufficient conditions to obtain the nonlinear output feedback controllers (Γ). To construct the controllers (Γ), from the sufficient conditions, we must solve the Riccati inequalities that depend on the state x (or ξ) of the controlled system (or the controller). In this section, we focus on Theorem 2.1 and propose an algorithm to obtain the solutions satisfying the Riccati inequalities (14),(15) via specifying an admissible domain of the state ξ and solving constant coefficient

Riccati inequalities. The algorithm gives also the domains Ω_1 in which the closed-loop system is internally stable. For Theorem 2.2, a similar algorithm can be developed, but that is omitted due to the space limit.

Algorithm

Step1. Set a domain $\Phi_\xi^{11} \subseteq \mathbb{R}^n$ that contains the origin. For all $\xi \in \Phi_\xi^{11}$, find \underline{B} such that $B(\xi)R^{-1}B^T(\xi) \geq \underline{B}R^{-1}\underline{B}^T$, and $S > 0, P > 0, \underline{\Delta}_1 > 0, \underline{\Delta}_2 > 0$ such that

$$\text{Eqn}_{11}(S, \underline{B}) + \underline{\Delta}_1 = 0, \quad (28)$$

$$\text{Eqn}_{12}(P) + \underline{\Delta}_2 = 0. \quad (29)$$

At this time, the obtained S, P give a controller (Γ) in the form of (17), (18).

Step2. Find σ_1 such that

$$\begin{aligned}
\Omega_1(\sigma_1) &= \{(x, \xi) \mid \\
&\xi^T S \xi + \gamma^2 (x - \xi)^T P^{-1} (x - \xi) \leq \sigma_1\} \subseteq \Phi_1. \quad (30)
\end{aligned}$$

Ω_1 is a domain in which the closed-loop system (Σ, Γ) is internally stable, where Φ_1 is an admissible domain that contains Ω_1 , defined as $\Phi_1 := (\mathbb{R}^n \times \Phi_\xi^{11}) \cap \Phi^{12}$. Here, Φ^{12} is defined as

$$\begin{aligned}
\Phi^{12} &:= \{(x, \xi) \mid \\
&-\xi^T [S(B(\xi)R^{-1}B^T(\xi) - \underline{B}R^{-1}\underline{B}^T)S + \underline{\Delta}_1] \xi \\
&+ \gamma^2 (x - \xi)^T P^{-1} [P\{\mathcal{L}(\xi)H\}^T + \{\mathcal{L}(\xi)H\}P - \underline{\Delta}_2] \\
&P^{-1}(x - \xi) - \gamma^2 \|C(x - \xi) - \gamma^{-2} C P S \xi\| < 0\}, \quad (31)
\end{aligned}$$

which is given by substituting (14)(15)(28)(29) into (16).

Remark 3.1 A basic idea of the algorithm is to solve the constant coefficient Riccati inequalities in stead of the Riccati inequalities that depend on the state ξ , by setting the admissible domain for ξ and evaluating the nonlinear term with respect to ξ in the admissible domain. It is a key point of the algorithms how large admissible domain we set for ξ :

For example, in Algorithm, if there exists \underline{B} such that $B(\xi)R^{-1}B^T(\xi) \geq \underline{B}R^{-1}\underline{B}^T$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n$, then we get $\text{Eqn}_{11}(S, B(\xi)) \leq \text{Eqn}_{11}(S, \underline{B})$. Therefore, by solving the inequality $\text{Eqn}_{11}(S, \underline{B}) < 0$, we can solve the inequality $\text{Eqn}_{11}(S, B(\xi)) < 0$. Note that the smaller $\|\underline{B}R^{-1}\underline{B}^T\|$ is, the more difficult to obtain the solution is; conversely, the larger $\|\underline{B}R^{-1}\underline{B}^T\|$ is, the smaller the admissible domain is.

Remark 3.2 To obtain a domain in which the system is internally stable (that is, to get σ_1 in Algorithm), we solve a nonlinear optimization problem given as

$$\sigma_1 = \min_{(x, \xi) \in \partial \Phi_1} [\xi^T S \xi + \gamma^2 (x - \xi)^T P^{-1} (x - \xi)]. \quad (32)$$

4. Numerical Example

In this section, we demonstrate efficiency of the proposed algorithm through a numerical example.

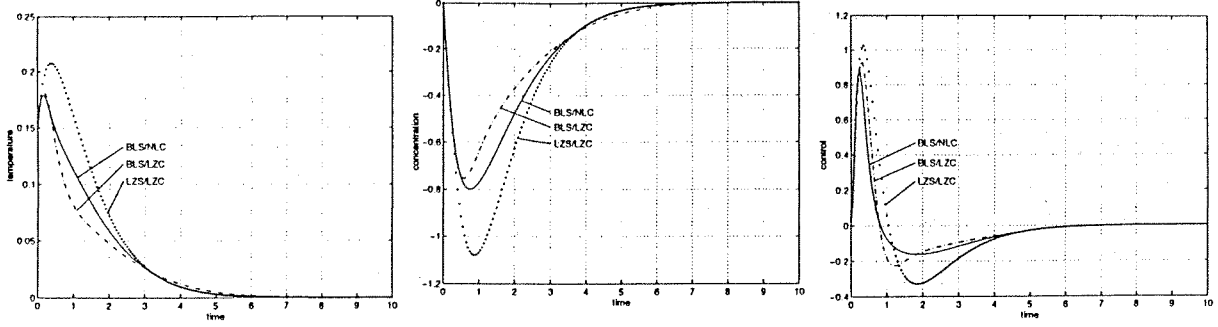


Figure 1: Comparison between BLS/NLC, BLS/LZC and LZS/LZC for $x_0 = [0.15, 0]^T$

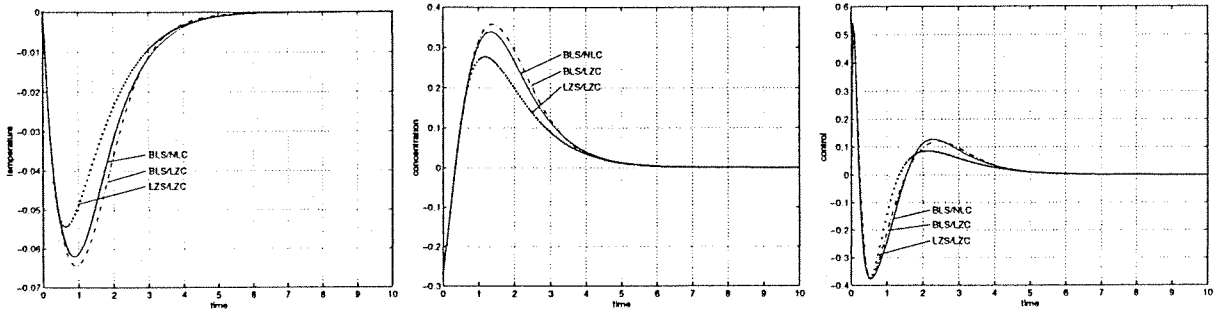


Figure 2: Comparison between BLS/NLC, BLS/LZC and LZS/LZC for $x_0 = [0, -0.27]^T$

We consider a bilinear model [2] of a continuously stirred tank reactor (CSTR) given as

$$\dot{x} = Ax + (B + x_1 G_1)u, \quad x(0) = x_0, \quad (33)$$

$$y = Cx, \quad (34)$$

$$A = \begin{bmatrix} 13/6 & 5/12 \\ -50/3 & -8/3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1/8 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1]$$

and a quadratic cost function

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad \gamma = 20. \quad (35)$$

Now, by using Algorithm proposed in Section 3, we solve the quadratic cost output feedback control problem and obtain the nonlinear output feedback controller. To show a potential of the nonlinear controller, we also construct a linear controller for a linearized system, which lets $G_1 = 0$, of the bilinear system.

Figure 1 and 2 show results of computer simulations for different initial states. In these figures, BLS/NLC denotes responses of a closed-loop system which consists of the bilinear system and the nonlinear controller, BLS/LZC the bilinear system and the linear controller and LZS/LZC the linearized system and the linear controller. The figures show that responses in BLS/LZC change largely in comparison with those in LZS/LZC, because the linear controller does not consider the bilinear term and so does not guarantee theoretically certain cost value for the bilinear system. The nonlinear controller presents good results, which gives a

guaranteed cost function for any initial states in a domain $\Omega_1(\sigma_1)$ given by (32). Therefore, we can feel it better to use the nonlinear controller. An advantage of the proposed approach was shown through the above result.

5. Conclusion

We considered output feedback control problem for bilinear systems with quadratic cost function. We derived two types of nonlinear output feedback controller that guarantees an upper bound for the performance functional. We proposed an algorithm to obtain the solutions satisfying the Riccati inequalities via specifying a domain of the state and solving constant coefficient Riccati inequalities. Based on the algorithm, we also discussed the numerical example for the bilinear model presented in the work [2].

References

- [1] A.Kojima, M.Fujita, K.Uchida and E.Shimemura. Linear quadratic differential game and H_∞ control - A direct approach based on completing the square -. *Trans. of SICE*, 28(5):570-577, 1992. In Japanese.
- [2] E.P. Hofer and B. Tibken. An iterative method for the finite-time bilinear-quadratic control problem. *J. of Optim. Theory and Appl.*, 57(3):411-427, 1988.
- [3] R.R. Mohler. *Nonlinear Systems, vol.2 : Application to Bilinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [4] T. Başar and P. Bernhard. *H^∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems, Second Edition*. Birkhäuser, 1995.

拡張 2 次形式リアプノフ関数による非線形状態フィードバック制御の構成法†

— 線形行列不等式による凸解析アプローチ —

佐々木 清 吾・内 田 健 康*

Synthesis of Nonlinear State Feedback Control via Extended Quadratic Lyapunov Function

— Convex Analysis Approach Using Linear Matrix Inequalities —

Seigo SASAKI* and Kenko UCHIDA*

We show a synthesis method of nonlinear state feedback control for input-affine polynomial-type nonlinear systems. The method consists of having this problem result in convex programming and solving linear matrix inequalities. To demonstrate efficiency of this method, we also show a computer simulation for a bilinear model of a continuous stirred tank reactor.

Key Words: nonlinear system, Lyapunov function, linear matrix inequality

1. はじめに

先に, 入力アフィン多項式型非線形システムの内部安定性と L2ゲインを解析するための新しいアプローチを提案した4). ここでは, 拡張 2 次形式リアプノフ関数を用いて, 状態に依存する線形行列不等式の形式で可解条件を導き, 状態の許容領域を凸包で囲みその端点で条件を解くことによつて6), その条件を厳密に解くことを可能とした.

本論文では, このアプローチを内部安定性と拡張 2 次形式評価関数の有界性を保証する状態フィードバック制御の設計に適用し, その可能性を明らかにする. まず, 拡張 2 次形式リアプノフ関数を用いて制御則の構成条件を導出する. この条件は状態依存双線形行列方程式を含むため, 先のアプローチを適用することができない. そこで, つぎに, この構成条件を状態依存線形行列不等式のみに変換する可能性を検討し, 先のアプローチがそのまま使える一つの十分条件を与える. 最後に, 数値例を用いて, 先に提案したアプローチ4)が状態フィードバック制御の設計にも有効であることを示す. なお, 本論文の問題に対する従来の解法としては, 無限級数展開を用いたもの5), 近似的に解いたもの2)が代表的である.

記号: ベクトル x ∈ R^n に対して, B_σ^n は, 集合 {x ||x_i| ≤ σ_i, σ_i > 0, i = 1, ..., n} を表す. x_i, σ_i はベクトルの i 番目の要素を表す. 領域 B_σ^n ⊆ R^n で, 連続微分可能で対称な行列関数 P(x) : B_σ^n → R^{n×n} に対して, x^T P(x)x > 0, ∀x ∈ B_σ^n, x ≠ 0 のとき, P(x) > 0, ∀x ∈ B_σ^n, x ≠ 0 と表す.

2. 非線形状態フィードバック制御問題

2.1 問題の定式化

本論文では, 原点に平衡点をもつ, つぎの入力アフィン多

項式型非線形システム (Σ) :

ẋ = A(x)x + B(x)u, x(0) = x_0, (1)

に対して, 評価関数

J(u, x_0) = ∫_0^∞ (x^T C^T(x)C(x)x + u^T R(x)u)dt (2)

の有界性を保証する非線形状態フィードバック制御問題を考える. x ∈ R^n は状態, u ∈ R^r は制御入力, 各行列は適当な次数をもつ行列である. R(x) は, R(x) > 0, ∀x ∈ B_σ^n, x ≠ 0 であるとする. 行列 A(x), B(x), C(x), R^{-1}(x) の各要素は, x の要素に関する多項式とする.

2.2 非線形状態フィードバック制御問題の可解条件

状態 x の領域を考慮した安定性をつぎのように定義する.

【定義】 システム (Σ) において, 漸近安定な平衡点 x = 0 を含む領域 Ω ⊆ R^n の任意の点から出発する解 x(t) が平衡点に収束するとき, システム (Σ) は領域 Ω で内部安定であるという.

非線形状態フィードバック制御問題の可解条件は, つぎの定理で与えられる.

【定理 2.1】 システム (Σ) において, ある正定数 γ および領域 B_σ^n ⊆ R^n が存在し, 任意の x ∈ B_σ^n, x ≠ 0 に対して, つぎの条件を満たす P(x), Y(x) が存在するものとする.

(C11) P(x) > 0, (3)

(C12) P(x) < γI, (4)

(C13) [F_1(Y(x), x) Y(x)C^T(x) ; C(x)Y^T(x) -I] < 0, (5)

ただし F_1(Y(x), x) := A(x)Y^T(x)

+Y(x)A^T(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x),

(C14) Y^T(x)X^T(P(x), x)x = x, (6)

ただし,

X(P(x), x) := P(x) + 1/2 [∂P/∂x_1(x)x ... ∂P/∂x_n(x)x] (7)

† 第 19 回 DST シンポジウムで発表 (1996・10)

* 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

* School of Science and Engineering, Waseda University, Shinju-ku, Tokyo

(Received December 27, 1996)

(Revised July 14, 1997)

である。このとき、非線形状態フィードバック制御

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)X^T(P(x), x)x \quad (8)$$

によって、システム (Σ) は、領域 B_σ^n に含まれる最大の領域

$$\Omega_1(\alpha_1) := \{x | x^T P(x)x \leq \alpha_1\} \subseteq B_\sigma^n \quad (9)$$

で内部安定、かつ、つぎの有界な評価関数値をもつ。

$$J(u, x_0) \leq x_0^T P(x_0)x_0 \leq \gamma x_0^T x_0, \forall x_0 \in \Omega_1(\alpha_1). \quad (10)$$

(略証) $x \in B_\sigma^n$ において、汎関数 $V(x) = x^T P(x)x$ を考える。 $V(x)$ を解軌道に沿って時間微分すると、

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{x}^T X^T(P(x), x)x + x^T X(P(x), x)\dot{x}$$

となることに注意し⁴⁾、(5) に Schur Complement³⁾ を用いて得られるリカッチ行列不等式と (8) を用いると、標準的な平方完成の手順を踏むことによって本定理は証明できる。 ■

(注意 2.1) 最小の γ を求めれば、定理 2.1 は、領域 $\Omega_1(\alpha_1)$ に含まれるすべての初期状態 x_0 に対して、評価関数 (2) を最小化する非線形状態フィードバック制御問題の解を与える。

3. 線形行列不等式条件への変換

定理 2.1 の条件は解 $P(x)$ と $Y(x)$ の積の項をもつ条件 (C14) を含み、このままでは、文献 4) の手法で扱える線形行列不等式条件とはならない。そこで、定理 2.1 の条件を $Y(x)$ だけに関する条件に置き換えることを考える。

[補題 3.1] 領域 $B_\sigma^n \subseteq \mathbb{R}^n$ が存在し、 $Y(x) > 0, \forall x \in B_\sigma^n, x \neq 0$ となる $Y(x)$ が与えられるとき、

$$P(x) := \int_0^1 2kY^{-1}(kx)dk \quad (11)$$

と定義する。このとき $P(x)$ は、 $P(x) > 0, \forall x \in B_\sigma^n, x \neq 0$ を満たし、さらに $Z(Y^{-1}(x), x)$ が対称ならば (6) を満足する。ただし、

$$Z(Y^{-1}(x), x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial Y^{-1}}{\partial x_1}(x)x & \dots & \frac{\partial Y^{-1}}{\partial x_n}(x)x \end{bmatrix}. \quad (12)$$

(証明) (11) より $Y(x) > 0$ ならば、 $P(x) > 0$ となることがわかる。さらに、 $Z(Y^{-1}(x), x)$ の対称性とつぎの関係式

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[2kY^{-1}(kx)x + k^2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial Y^{-1}}{\partial kx_i}(kx)x_i \right] x \right] dk \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dk} \{ k^2 Y^{-1}(kx)x \} dk = Y^{-1}(x)x \end{aligned}$$

を用いれば、(11) が $X^T(P(x), x)x = Y^{-1}(x)x$ 、すなわち (6) を満たすことを確認できる。 ■

[補題 3.2] (11) において、ある正定数 γ および領域 $B_\sigma^n \subseteq \mathbb{R}^n$ が存在し、 $Y^{-1}(x) < \gamma I, \forall x \in B_\sigma^n, x \neq 0$ ならば、 $P(x) < \gamma I, \forall x \in B_\sigma^n, x \neq 0$ である。

(証明) 補題の条件より、任意の $x \in B_\sigma^n, x \neq 0, k \in (0, 1)$ に対して、 $2kx^T Y^{-1}(kx)x < 2k\gamma x^T x$ だから、

$$\int_0^1 2kx^T Y^{-1}(kx)x dk < \gamma x^T x \int_0^1 2k dk$$

となり、 $x^T P(x)x < \gamma x^T x$ 。これより、 $P(x) < \gamma I, \forall x \in B_\sigma^n, x \neq 0$ を得る。 ■

上記の補題を用いると、定理 2.1 の条件に対する十分条件として、つぎの定理に示す状態依存線形行列不等式条件を得ることができる。この条件は、文献 4) の手法により計算可能である。

(定理 3.1) システム (Σ) において、ある正定数 γ および領域 $B_\sigma^n \subseteq \mathbb{R}^n$ が存在し、任意の $x \in B_\sigma^n, x \neq 0$ に対して、つぎの条件を満たす $Y(x)$ が存在するものとする。

$$(C21) \quad Y(x) > 0, \quad (13)$$

$$(C22) \quad \begin{bmatrix} \gamma I & I \\ I & Y(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (14)$$

$$(C23) \quad \begin{bmatrix} F_1(Y(x), x) & Y(x)C^T(x) \\ C(x)Y(x) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

$$(C24) \quad Z(Y^{-1}(x), x) \text{ が対称}. \quad (16)$$

ただし、 $F_1(Y(x), x)$ は定理 2.1 において、 $Z(Y^{-1}(x), x)$ は (12) で定義されている。

このとき、非線形状態フィードバック制御

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)Y^{-1}(x)x \quad (17)$$

によって、システム (Σ) は、 B_σ^n に含まれる最大の領域 (9) で内部安定、かつ、有界な評価関数値 (10) をもつ。ただし、 $P(x) = \int_0^1 2kY^{-1}(kx)dk$ である。

(注意 3.1) 条件 (C24) が成立しないときは、(6) が成立せず、(11) に対する $dV(x(t))/dt$ の表現に新たな項 $O(\varepsilon)\|x\|^2$ が追加される。ここで、 $O(\varepsilon)$ は ε の 2 次式 (ただし、 $O(0) = 0$) であり、数 ε は $\Delta(x) := Z(Y^{-1}(x), x) - Z^T(Y^{-1}(x), x), \forall x \in B_\sigma^n$ の大きさ (固有値の絶対値の最大値) に比例する。したがって、(C24) が成立しない場合でも、 $\Delta(x)$ が十分に小さいときには、 $dV(x(t))/dt < 0$ が保証されるため、定理 3.1 の結論はそのまま成立する。

4. 数値例

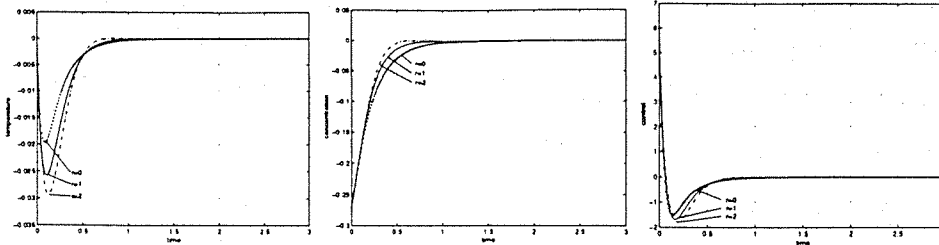
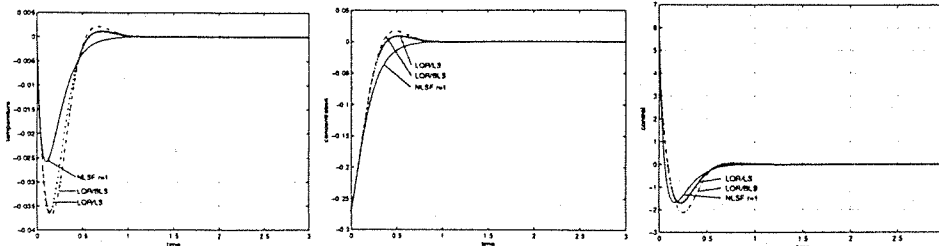
定理 3.1 に基づいて、連続攪拌反応器 (CSTR)¹⁾ に対する非線形状態フィードバックコントローラを設計する。

ここで非線形システム (Σ) は、双線形システム (Σ_{bls}) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + (B_0 + x_1 B_1)u, \quad x(0) = x_0, \\ x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 13/6 & 5/12 \\ -50/3 & -8/3 \end{bmatrix}, \\ B_0 &= \begin{bmatrix} -1/8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

である。状態変数 x_1, x_2 は、それぞれ化学反応の初期生成物の温度と濃度を表す。入力 u は、反応器のまわりのジャケット内の冷却剤の流量を表す。評価関数はつぎに与えられる。

$$J(u, x_0) = \int_0^\infty (x^T C^T C x + u^T R u) dt,$$

Fig. 1 Profiles for temperature, concentration and control for $x_0 = [0 \ -0.27]^T$ Fig. 2 Comparison between LQR/LS, LQR/BLS and NLSF $r=1$

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{1000} & 0 \\ 0 & \sqrt{1000} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1, \quad (19)$$

定理 3.1 の条件を満たす解 $Y(x)$ を x に関する $r = 0, 1, 2$ 次多項式行列として、文献 4) で示した手法により求めた。また、 γ に対する最小化を行なった。数値計算には、MATLAB, LMI Control Toolbox を用いた。状態 x の許容領域 $\sigma = [0.05 \ 0.5]^T$ のもとで、得られた最小の γ を Table 1 に示し、そのときの 1 次多項式解 $Y(x) = Y_0 + x_1 Y_1 + x_2 Y_2$ の係数行列をつぎに示す。

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 8.7651 \times 10^{-4} & 1.0397 \times 10^{-3} \\ 1.0397 \times 10^{-3} & 7.8280 \times 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 8.0592 \times 10^{-3} & 8.9060 \times 10^{-3} \\ 8.9060 \times 10^{-3} & 1.3159 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1.5673 \times 10^{-20} & 4.4523 \times 10^{-19} \\ 4.4523 \times 10^{-19} & 7.5504 \times 10^{-18} \end{bmatrix}.$$

なお、この解は条件 (C24) を満たしていないが、 $\Delta(x)$ が十分小さいため、注意 3.1 で述べた理由により、定理 3.1 の解となる。

初期状態を $x_0 = [0 \ -0.27]^T$ と選び、得られた $r = 0, 1, 2$ 次多項式解 $Y(x)$ を用いたシミュレーション結果を Fig. 1 に示す。異なる次数 r に対して、 γ の値はあまり変わらなかったが (Table 1 の太字に注意)、 $Y(x)$ の次数 r を大きくすると、振幅が大きくなり、はやく収束していることが確認できる。

つぎに、双線形システム (Σ_{bls}) を線形近似したシステムに対して、評価関数 (19) のもとで最適レギュレータを構成

Table 1 Degree r of $Y(x)$ vs. Minimum γ

r	γ
0	$2.348665429976481 \times 10^3$
1	$2.348665429976472 \times 10^3$
2	$2.348665429989249 \times 10^3$

し、それを線形近似システムに適用した結果 (LQR/LS)、もとの双線形システムに適用した結果 (LQR/BLS)、そして、1 次多項式解 $Y(x)$ による非線形状態フィードバックによる結果 (NLSF $r=1$) を比較した図を Fig. 2 に示す。非線形状態フィードバック制御による結果が、その他の結果に比べて良い応答を示していることが確認できる。

5. おわりに

本論文では、文献 4) に示したアプローチを状態フィードバック制御の設計に適用し、数値例を通してその有効性を示した。なお、本論文では、有界な拡張 2 次形式評価関数値を与える問題を扱ったが、有界な L_2 ゲインを与える問題へ一般化することは容易である。

最後に、評価関数の最小化問題に関して、貴重なご意見を頂いた東京工業大学 原 辰次 先生に謝意を表します。また、重要な御指摘を頂いた査読者に謝意を表します。

参考文献

- 1) E.P. Hofer and B. Tibken: An iterative method for the finite-time bilinear-quadratic control problem, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 57-3, 411/427 (1988)
- 2) P.Laosuwan, M.Sampegi, M.Koga and E.Shimizu: A numerical computational approach of Hamilton-Jacobi-Isaacs equation in nonlinear H_∞ control problems, 25th SICE Symposium on Control Theory, 335/340, Chiba (1996)
- 3) S.Boyd, L.E.Ghaoui, E.Feron and V.Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM. studies in applied mathematics; vol. 15 (1994)
- 4) 佐々木, 内田: 拡張二次形式リアプノフ関数による非線形システムの L_2 ゲイン解析- LMI による凸解析アプローチ -, 第 25 回制御理論シンポジウム, 83/88, 千葉 (1996), 計測自動制御学会論文集に投稿中 (1996)
- 5) 大久保, 北森: 非線形レギュレータの構成, 計測自動制御学会論文集, 11-5, 541/549 (1975)
- 6) 渡辺, 内田, 藤田: 有限個の LMI 条件に基づいたスケジューリングパラメータを持つ線形システムの解析, 第 24 回制御理論シンポジウム, 9/14, 刈谷 (1995)

Semi-global State Feedback H^∞ Control of Nonlinear Systems - An Approach via Linear Systems with Self-Scheduling Parameters -

Takehito Azuma[†], Ryo Watanabe[‡], Kenko Uchida[†]

[†] Department of Electrical, Electronics and Computer Engineering, Waseda University.

[‡] Department of Computer-Controller Mechanical Systems, Osaka University.

tazuna@uchi.elec.waseda.ac.jp

Abstract

In this paper, we consider semi-global L^2 gain analysis and semi-global state feedback H^∞ control design for nonlinear systems described as linear systems with self-scheduling parameters. First we show a method to convert linear systems with self-scheduling parameters into linear systems with scheduling parameters based on evaluation of the domain of the self-scheduling parameter. Second, using the tools for linear systems with scheduling parameters, we discuss semi-global L^2 gain analysis and semi-global H^∞ control design and propose an approach together with feasible formulas of computation.

1. Introduction

L^2 gain analysis and H^∞ control problem have been focused on and many results of importance have obtained in recent researches concerning linear systems with scheduling parameters (called linear parameter varying systems: LPV systems) [1] [4] [8] [13] [15]. In linear systems with scheduling parameters, it is assumed that scheduling parameters and/or their time variations are bounded and the domains are obtained a priori. Most of the results for analysis and synthesis in linear systems with scheduling parameters are derived based on this assumption. In this paper, we are concerned with nonlinear systems which can be described as linear systems by regarding some of the state variables as parameters, which we call linear systems with self-scheduling parameters. Here note that linear systems with self-scheduling parameters look but are not linear systems with scheduling parameters, because self-scheduling parameters, which are some of the state variables, may be unbounded and the domain are not given a priori in general.

In this paper, we deal with the nonlinear system which can be expressed as linear systems with self-scheduling parameters as follows,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\theta_x(x))x + B_1(\theta_x(x))w(t) + B_2(\theta_x(x))u(t), \\ z &= C(\theta_x(x))x + D(\theta_x(x))u(t), \\ \theta_x(x) &= hx.\end{aligned}$$

$\theta_x(x)$ is the self-scheduling parameter and is given as a linear functional of the state variable, and discuss L^2 gain analysis and state feedback H^∞ control synthesis. Considering that this system is nonlinear, in particular, we constrain the disturbance w to an ellipse and consider *semi-global* L^2 gain analysis and *semi-global* H^∞ control problem. In our approach, we first describe linear systems with self-scheduling parameters as linear systems with scheduling parameters by evaluating the domain of the self-scheduling parameter based on the output reachable sets analysis [14]. Once description of linear systems with scheduling parameters is obtained, useful techniques are available. We next apply the techniques to our semi-global L^2 gain analysis and semi-global H^∞ control problem and establish an approach, together with feasible formulas, to the analysis and control synthesis. Semi-global L^2 gain analysis and semi-global H^∞ control are characterized by solutions to parameter dependent Linear Matrix Inequalities (LMIs).

In section 2, we introduce a linear system with a self-scheduling parameter. In section 3, we present the technique to evaluate the domain of the self-scheduling parameter. We discuss semi-global L^2 gain analysis in section 4 and semi-global H^∞ control problem in section 5, and propose an approach to the analysis and synthesis.

2. Linear Systems with Self-Scheduling Parameters

2.1. System Description

Consider the following nonlinear system,

$$\Sigma: \begin{aligned}\dot{x} &= A(hx)x + B_1(hx)w(t) + B_2(hx)u(t), \quad x(0) = 0, \\ z &= C(hx)x + D(hx)u(t),\end{aligned}$$

where $x \in R^n$, $z \in R^l$, $w \in R^{n_w}$, $u \in R^{n_u}$ and $h \in R^{1 \times n}$. Note that hx is a scalar. x is the state, z is the output, w is the disturbance and u is the control. We assume that $A(hx)$, $B_1(hx)$, $B_2(hx)$, $C(hx)$ and $D(hx)$

are given in the following forms,

$$\begin{aligned}
A(hx) &= A_0 + a_1(hx)A_1 + \cdots + a_{r_a}(hx)A_{r_a}, \\
B_1(hx) &= B_{10} + b_{11}(hx)B_{11} + \cdots + b_{1r_{b1}}(hx)B_{1r_{b1}}, \\
B_2(hx) &= B_{20} + b_{21}(hx)B_{21} + \cdots + b_{2r_{b2}}(hx)B_{2r_{b2}}, \\
C(hx) &= C_0 + c_1(hx)C_1 + \cdots + c_{r_c}(hx)C_{r_c}, \\
D(hx) &= D_0 + d_1(hx)D_1 + \cdots + d_{r_d}(hx)D_{r_d},
\end{aligned} \tag{1}$$

where each of a_i, b_{1i}, b_{2i}, c_i and $d_i : R \rightarrow R$ is a continuous function and A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_i and D_i are constant matrices with the appreciate dimension.

In this paper, we express the nonlinear system Σ as linear system with a scalar self-scheduling parameter given as follows.

Linear systems with self-scheduling parameters:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{LSS} : \quad & \dot{x} = A(\theta_x(x))x(t) + B_1(\theta_x(x))w(t) \\
& \quad + B_2(\theta_x(x))u(t), x(0) = 0, \\
& z = C(\theta_x(x))x + D(\theta_x(x))u(t), \\
& \theta_x(x) = hx,
\end{aligned}$$

where $\theta_x(x)$ is the self-scheduling parameter of Σ_{LSS} , which is given as a linear combination of elements of the state vector x .

If the domain of the parameter $\theta_x(x(t))$ and its time variation $\dot{\theta}_x(x(t))$ are given a priori, the system Σ_{LSS} is described as the linear systems with a scheduling parameter, called the linear parameter varying(LPV) system, given as follows.

Linear systems with scheduling parameters:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{LS} : \quad & \dot{x} = A(\theta(t))x + B_1(\theta(t))w(t) \\
& \quad + B_2(\theta(t))u(t), x(0) = 0, \\
& z = C(\theta(t))x + D(\theta(t))u(t), \\
& \theta(t) \in [\alpha_1, \alpha_2], \quad \forall [t, \infty), \\
& \dot{\theta}(t) \in [\beta_1, \beta_2], \quad \forall [t, \infty).
\end{aligned}$$

For Σ_{LS} , the recent researches [1] [4] [8] [13] [15] have already developed several powerful tools of L^2 gain analysis and H^∞ controller design. In this paper, we first describe the given systems Σ_{LSS} as in the form of Σ_{LS} by evaluating the domain of $\theta_x(x(t))$ and $\dot{\theta}_x(x(t))$, which is done in section 3. Then, L^2 gain analysis and H^∞ controller design for Σ_{LSS} (or Σ) are performed by applying the tools developed for Σ_{LS} , which is done in section 4 and 5.

2.2. Constraint Set of Disturbance

For the general nonlinear system Σ (Σ_{LSS}), it seems difficult to discuss system performances(e.g., L^2 gain

performance) globally against the disturbance and appropriate to consider some constraint on the disturbance. We assume throughout this paper that the disturbance $w(t)$ is constrained to the following ellipse,

$$\begin{aligned}
w(t) &\in \mathcal{W}, \quad \forall t \in [0, \infty), \\
\mathcal{W} &= \{w \mid w'Ww \leq 1\},
\end{aligned} \tag{2}$$

where W is a given positive definite matrix. In order to specify that the disturbance $w(t)$ is constrained to a given set \mathcal{W} , we use the prefix "semi-global", e.g. semi-global L^2 gain, in the following discussions. We emphasize that our discussion based on a prescribed constraint set \mathcal{W} will be different from the so-called "local" one.

3. Evaluation of Self-Scheduling Parameters

In this section, we consider the following linear system with a scalar self-scheduling parameter.

$$\Sigma_{LSS}^1 : \quad \begin{aligned} & \dot{x} = A(\theta_x(x))x + B_1(\theta_x(x))w(t), x(0) = 0, \\ & \theta_x(x) = hx, \end{aligned}$$

where $w(t)$ is constrained to (2). The domain of $\theta_x(x(t))$ and the domain of the time variation of $\theta_x(x(t))$ can be evaluated as follows.(See [3] for more details and proofs.)

Theorem 1. Assume that there exist $Q_x > 0, \alpha > 0, q_\theta > 0$ and $q_\psi > 0$ which satisfy the following inequalities,

$$\begin{bmatrix} A(\theta)Q_x + Q_xA'(\theta) + \alpha Q_x & B_1(\theta) \\ B_1'(\theta) & -\alpha W \end{bmatrix} \leq 0, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & Q_x h' \\ hQ_x & q_\theta \end{bmatrix} \geq 0, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} 2Q_x & 0 & 2Q_xA'(\theta)h' \\ 0 & 2W^{-1} & 2W^{-1}B_1'(\theta)h' \\ 2hA(\theta)Q_x & 2hB_1(\theta)W^{-1} & q_\psi \end{bmatrix} \geq 0, \tag{5}$$

$$\forall \theta \in [-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}].$$

Then the domain of $\theta_x(x(t))$ and $\dot{\theta}_x(x(t))$ are given as follows,

$$\Theta \subset [-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}], \tag{6}$$

$$\Psi \subset [-\sqrt{q_\psi}, \sqrt{q_\psi}]. \tag{7}$$

Though the domain of $\theta_x(x(t))$ and $\dot{\theta}_x(x(t))$ is characterized as in **Theorem 1**, it is not easy to obtain solutions which satisfy the inequalities (3), (4) and (5). The main difficulties are that (3) is a nonlinear(bilinear) matrix inequalities and the inequalities (3) and (5) are dependent on the parameter θ . As for the parameter dependence, we will discuss this problem later (See **Remark 5**). As for the nonlinearity of (3) and (5), we put aside this problem by adopting a recursive calculation as follows.

Corollary 2. Assume that there exist $Q_x > 0, \alpha > 0, q_\theta > 0$ and $q_\psi > 0$ which satisfy the following inequalities for given $\tilde{Q}_x > 0, \tilde{q}_\theta > 0$ and $\tilde{q}_\psi > 0$,

$$\begin{bmatrix} A(\theta)Q_x + Q_x A'(\theta) + \alpha \tilde{Q}_x & B_1(\theta) \\ B_1'(\theta) & -\alpha W \end{bmatrix} \leq 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & Q_x h' \\ h Q_x & q_\theta \end{bmatrix} \geq 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} 2Q_x & 0 & 2Q_x A'(\theta) h' \\ 0 & 2W^{-1} & 2W^{-1} B_1'(\theta) h' \\ 2h A(\theta) Q_x & 2h B_1(\theta) W^{-1} & q_\psi \end{bmatrix} \geq 0, \quad (10)$$

$$Q_x \leq \tilde{Q}_x, \quad (11)$$

$$q_\theta \leq \tilde{q}_\theta, \quad (12)$$

$$q_\psi \leq \tilde{q}_\psi, \quad (13)$$

$$\forall \theta \in [-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}].$$

Then the domain of $\theta_x(x(t))$ and $\hat{\theta}_x(x(t))$ are given as follows,

$$\Theta \subset [-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}], \quad (14)$$

$$\Psi \subset [-\sqrt{q_\psi}, \sqrt{q_\psi}]. \quad (15)$$

Remark 3. Corollary 2 implies that the domains $[-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}]$ and $[-\sqrt{q_\psi}, \sqrt{q_\psi}]$ are included in the domains $[-\sqrt{\tilde{q}_\theta}, \sqrt{\tilde{q}_\theta}]$, $[-\sqrt{\tilde{q}_\psi}, \sqrt{\tilde{q}_\psi}]$ respectively. Thus, using Corollary 2 recursively, we can expect to obtain the smaller domains.

Remark 4. From Theorem 1, the system Σ_{LSS}^1 is described as the linear system with a scalar scheduling parameter given as follows,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta(t))x + B_1(\theta(t))w(t), \\ \Sigma_{LSS}^1: \theta(t) &\in [-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}], \\ \hat{\theta}(t) &\in [-\sqrt{q_\psi}, \sqrt{q_\psi}]. \end{aligned} \quad (16)$$

where $w(t)$ is constrained to (2). Thus semi-global L^2 gain analysis and semi-global H^∞ control problem for the nonlinear system Σ_{LSS}^1 is characterized by L^2 gain analysis and H^∞ control problem for linear system with a scalar scheduling parameter (16).

Remark 5. Since system parameters A, B_1 are given as (2.1.), the inequalities (8) (10) in Corollary 2 can be written in the form of the parameter dependent LMI condition,

$$F_0(Q_u) + f_1(\hat{\theta})F_1(Q_u) + \dots + f_r(\hat{\theta})F_r(Q_u) < 0,$$

where $\hat{\theta}$ is the parameter that satisfies (In this case, $s = 1$.)

$$\hat{\theta} \in \hat{\Theta}, \quad \hat{\Theta} = \{[\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2 \ \dots \ \hat{\theta}_s]' \mid \hat{\theta}_i \in [\hat{\theta}_i^{min}, \hat{\theta}_i^{max}]\}.$$

$f_i: R^s \rightarrow R$ is a continuous function of $\hat{\theta}$, and a symmetric matrix function F_i depends affinely on the unknown matrix Q_u . It is shown in [2] that this type of parameter dependent LMI can be reduced to a finite number of parameter independent LMIs. Thus solutions to the conditions in Corollary 2 can be computed by using CAD tools, e.g. LMILAB[6].

4. Semi-global L^2 gain Analysis

In this section, we consider the following linear system with a scalar self-scheduling parameter.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta_x(x))x + B_1(\theta_x(x))w(t), \quad x(0) = 0, \\ \Sigma_{LSS}^2: z &= C(\theta_x(x))x, \\ \theta_x(x) &= hx, \end{aligned}$$

where $w(t)$ is constrained to (2). We define the internal stability of Σ_{LSS}^2 and the semi-global L^2 gain of Σ_{LSS}^2 as follows.

Definition 6. Let $\hat{\Sigma}_{LSS}^2$ be the following linear system with a scalar self-scheduling parameter,

$$\hat{\Sigma}_{LSS}^2: \begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta_x(x))x(t), \\ \theta_x(x) &= hx, \end{aligned}$$

and let \mathcal{M} be the set defined as follows,

$$\mathcal{M} = \{x \in R^n \mid x' M x \leq 1\},$$

where M is a positive definite matrix. The system Σ_{LSS}^2 is said to be internally stable in the stability region \mathcal{M} if all trajectories of $\hat{\Sigma}_{LSS}^2$ starting from an initial state within \mathcal{M} converge to the equilibrium point $x = 0$ of $\hat{\Sigma}_{LSS}^2$.

Definition 7. If the system Σ_{LSS}^2 is internally stable, the L^2 gain of Σ_{LSS}^2 is defined by

$$G(\Sigma_{LSS}^2) = \sup_{\substack{w \in L^2 \cap \mathcal{W} \\ w \neq 0}} \frac{\|z\|_{L^2}}{\|w\|_{L^2}},$$

and called the semi-global L^2 gain. Note that \mathcal{W} denotes the constraint set of the disturbance w .

Combining the result in [13] [15] with Theorem 1, we have the following result for semi-global L^2 gain analysis of the nonlinear system Σ_{LSS}^2 . (See [3] for more details and proofs.)

Theorem 8. Assume that there exist $Q_x > 0, \alpha > 0, q_\theta > 0, q_\psi > 0$ and a continuously differentiable matrix function $Q(\theta)$ which satisfy the following inequality

ties,

$$\begin{bmatrix} A(\theta)Q_x + Q_x A'(\theta) + \alpha Q_x & B_1(\theta) \\ B_1'(\theta) & -\alpha W \end{bmatrix} \leq 0, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & Q_x h' \\ h Q_x & q_\theta \end{bmatrix} \geq 0, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} 2Q_x & 0 & 2Q_x A'(\theta)h' \\ 0 & 2W^{-1} & 2W^{-1}B_1'(\theta)h' \\ 2hA(\theta)Q_x & 2hB_1(\theta)W^{-1} & q_\psi \end{bmatrix} \geq 0, \quad (19)$$

$$Q(\theta) > 0, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} A'(\theta)Q(\theta) + Q(\theta)A(\theta) \\ \pm \left(\sqrt{q_\psi} \frac{dQ}{d\theta}(\theta) \right) \\ B_1'(\theta)Q(\theta) \\ C(\theta) \end{array} \right) & Q(\theta)B_1(\theta) & C'(\theta) \\ & -\gamma^2 I & 0 \\ & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

$$\forall \theta \in [-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}],$$

where the notation $\pm(\cdot)$ indicates $+(\cdot)$ and $-(\cdot)$ in the inequality.

Then the linear system with a scalar self-scheduling parameter Σ_{LSS}^2 is internally stable in the stability region \mathcal{M}_{LSS}^2 ,

$$\mathcal{M}_{LSS}^2 = \{x \mid x' Q_x^{-1} x \leq 1\},$$

and the semi-global L^2 gain is less than γ .

5. Semi-global State Feedback H^∞ Control

In this section, we consider the semi-global state feedback H^∞ control problem for the linear system with a scalar self-scheduling parameter Σ (or Σ_{LSS}). We consider the following state feedback controller for Σ_{LSS}

$$\Gamma : u(t) = K(\theta_x(x(t)))x(t), \quad (22)$$

$$\theta_x(x(t)) = hx(t),$$

where $K(\theta_x(x))$ is a continuous matrix function of $\theta_x(x)$. Then the closed loop system $(\Sigma\Gamma)_{LSS}$ is given as follows,

$$\dot{x} = A_a(\theta_x(x))x + B_1(\theta_x(x))w(t), x(0) = 0,$$

$$(\Sigma\Gamma)_{LSS} : z = C_a(\theta_x(x))x,$$

$$\theta_x(x) = hx,$$

$$(23)$$

where

$$A_a(\theta_x(x)) = A(\theta_x(x)) + B_2(\theta_x(x))K(\theta_x(x)),$$

$$C_a(\theta_x(x)) = C(\theta_x(x)) + D(\theta_x(x))K(\theta_x(x)).$$

We can obtain the semi-global state feedback H^∞ controller for Σ_{LSS} as follows.

Theorem 9. Assume that there exist $Q_x > 0, \alpha > 0, q_\theta > 0, q_\psi > 0$, continuous matrix function $W_1(\theta)$ and $W_2(\theta)$ and a continuously differentiable matrix function $Y(\theta)$ which satisfy the following inequalities,

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} A(\theta)Q_x + Q_x A'(\theta) + \alpha Q_x \\ B_2(\theta)W_1(\theta) + W_1'(\theta)B_2'(\theta) \\ B_1'(\theta) \end{array} \right) & B_1(\theta) \\ & -\alpha W \end{bmatrix} \leq 0, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & Q_x h' \\ h Q_x & q_\theta \end{bmatrix} \geq 0, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} 2Q_x & 0 & \left(\begin{array}{c} 2\{Q_x A'(\theta) \\ +W_1'(\theta)B_2'(\theta)\}h' \\ 2W^{-1}B_1'(\theta)h' \end{array} \right) \\ 0 & 2W^{-1} & \\ \left(\begin{array}{c} 2h\{A(\theta)Q_x \\ +B_2(\theta)W_1(\theta)\} \end{array} \right) & 2hB_1(\theta)W^{-1} & q_\psi \end{bmatrix} \geq 0, \quad (26)$$

$$Y(\theta) > 0, \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} A(\theta)Y(\theta) + Y(\theta)A'(\theta) \\ \pm \left(\sqrt{q_\psi} \frac{dY}{d\theta}(\theta) \right) \\ B_2(\theta)W_2(\theta) + W_2'(\theta)B_2'(\theta) \\ B_1'(\theta) \\ C(\theta)Y(\theta) \\ +D(\theta)W_2(\theta) \end{array} \right) & B_1(\theta) & \left(\begin{array}{c} Y(\theta)C'(\theta) \\ +W_2'(\theta)D'(\theta) \end{array} \right) \\ & -\gamma^2 I & 0 \\ & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (28)$$

$$W_1(\theta)Q_x^{-1} = W_2(\theta)Y(\theta)^{-1}, \quad (29)$$

$$\forall \theta \in [-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}],$$

where the notation $\pm(\cdot)$ indicates $+(\cdot)$ and $-(\cdot)$ in the inequality.

Then the closed loop system $(\Sigma\Gamma)_{LSS}$ is internally stable in the stability region $\mathcal{M}_{\Sigma\Gamma}$,

$$\mathcal{M}_{\Sigma\Gamma} = \{x \mid x' Q_x^{-1} x \leq 1\},$$

and the semi-global L^2 gain is less than γ . The feedback gain $K(\theta_x(x))$ is given as follows,

$$K(\theta_x(x)) = W_1(\theta_x(x))Q_x^{-1} = W_2(\theta_x(x))Y(\theta_x(x))^{-1}. \quad (30)$$

In addition to the same computational difficulties as the conditions in **Theorem 1** **Theorem 8**, there is another difficulty in computation in **Theorem 9**, that is, the condition (29). So we rewrite this theorem in the form of recursive computation as follows.

Corollary 10. Assume that there exist a continuously differentiable matrix function $Y(\theta)$ and a continuous matrix function $W_2(\theta)$ which satisfy the following in-

equalities for given $\bar{q}_\theta > 0$ and $\bar{q}_\psi > 0$,

$$Y(\theta) > 0, \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} A(\theta)Y(\theta) + Y(\theta)A'(\theta) \\ \pm (\sqrt{\bar{q}_\psi} \frac{dY}{d\theta}(\theta)) \\ B_2(\theta)W_2(\theta) + W_2'(\theta)B_2'(\theta) \end{array} \right) & B_1(\theta) & \left(\begin{array}{c} Y(\theta)C'(\theta) \\ +W_2'(\theta)D'(\theta) \end{array} \right) \\ B_1'(\theta) & -\gamma^2 I & 0 \\ \left(\begin{array}{c} C(\theta)Y(\theta) \\ +D(\theta)W_2(\theta) \end{array} \right) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (32)$$

$$\forall \theta \in [-\sqrt{\bar{q}_\theta}, \sqrt{\bar{q}_\theta}],$$

where the notation $\pm(\cdot)$ indicates $+(\cdot)$ and $-(\cdot)$ in the inequality.

Then if there exist $Y_x > 0$, $\alpha > 0$, $q_\theta > 0$ and $q_\psi > 0$ which satisfy the following inequalities for given $\bar{Y}_x > 0$, $\bar{q}_\theta > 0$ and $\bar{q}_\psi > 0$,

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} Y(\theta)\{Y_x A(\theta) + A'(\theta)Y_x \\ +\alpha \bar{Y}_x\}Y(\theta) + Y(\theta)Y_x B_2(\theta)W_2(\theta) \\ +W_2'(\theta)B_2'(\theta)Y_x Y(\theta) \\ B_1'(\theta)Y_x Y(\theta) \end{array} \right) & Y(\theta)Y_x B_1(\theta) \\ & -\alpha W \end{bmatrix} \leq 0, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} Y_x & h' \\ h & q_\theta \end{bmatrix} \geq 0, \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} 2Y(\theta)Y_x Y(\theta) & 0 & \left(\begin{array}{c} 2\{Y(\theta)A'(\theta) \\ +W_2'(\theta)B_2'(\theta)\}h' \\ 2W^{-1}B_1'(\theta)h' \end{array} \right) \\ 0 & 2W^{-1} & \\ \left(\begin{array}{c} 2h\{A(\theta)Y(\theta) \\ +B_2(\theta)W_2(\theta)\} \end{array} \right) & 2hB_1(\theta)W^{-1} & q_\psi \end{bmatrix} \geq 0, \quad (35)$$

$$Y_x \geq \bar{Y}_x, \quad (36)$$

$$q_\theta \leq \bar{q}_\theta, \quad (37)$$

$$q_\psi \leq \bar{q}_\psi, \quad (38)$$

$$\forall \theta \in [-\sqrt{\bar{q}_\theta}, \sqrt{\bar{q}_\theta}],$$

the closed loop system $(\Sigma\Gamma)_{LSS}$ is internally stable in the stability region $\mathcal{M}_{\Sigma\Gamma}$,

$$\mathcal{M}_{\Sigma\Gamma} = \{x \mid x'Y_x x \leq 1\},$$

and the semi-global L^2 gain is less than γ . The feedback gain $K(\theta_x(x))$ is given as follows,

$$K(\theta_x(x)) = W_2(\theta_x(x))Y(\theta_x(x))^{-1}. \quad (39)$$

6. Conclusion

In this paper, we considered semi-global L^2 gain analysis and semi-global state feedback H^∞ control problem for a class of nonlinear systems, which are described as linear systems with self-scheduling parameters. We developed first the technique of evaluating the domain of the self-scheduling parameter and the time variation of the self-scheduling parameter. By using this

technique, we next established the approach together with the feasible computation algorithms to semi-global L^2 gain analysis and semi-global state feedback H^∞ control problem for the class of nonlinear systems.

References

- [1] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker, Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example, *Automatica*, Vol. 31, No. 9, pp.1251-1261, 1995.
- [2] T. Azuma, R. Watanabe, and K. Uchida, An Approach to Solving Parameter-Dependent LMI Conditions Based on Finite Number of LMI Conditions, In Proc. of American Control Conference, 1997.
- [3] T. Azuma, R. Watanabe, and K. Uchida, Semi-global L^2 Gain Analysis of Nonlinear Systems, IFAC Conference on System Structure and Control, 1998.
- [4] G. Becker, A. Packard, D. Philbrick and G. Balas, Control of Parametrically-Dependent Linear Systems: A Single Quadratic Lyapunov Approach, In Proc. of American Control Conference, 1993.
- [5] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, studies in applied mathematics, vol. 15, 1994.
- [6] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox for Use with MATLAB*, The Math Works, Inc, 1995.
- [7] W. J. Grantham, Estimating Controllability Boundaries for Uncertain Systems, *Lecture Notes on Biomathematics*, Vol.40, pp.151-162, Springer-Verlag, 1980.
- [8] A. Packard, Gain Scheduling via Linear Fractional Transformations, *Syst. & Control Letters*, Vol.22, No.2, pp.79-92, 1994.
- [9] A. Rehm and F. Allgower, Self-Scheduled Nonlinear Output Feedback H_∞ -Control of a class of Nonlinear Systems, In Proc. of American Control Conference, pp. 386-390, 1997.
- [10] Y. Sato, R. Watanabe, K. Uchida, Semi-global L^2 Gain Analysis for kth-degree Systems based on Reachable Sets Analysis, In Proc. of Control System Theory Symposium, pp. 93-98, 1997. (In Japanese)
- [11] J. S. Shamma and M. Athans, Gain Scheduling: Potential, Hazards and Possible Remedies, *IEEE Control Systems Magazine*, Vol.12, pp.101-107, 1992.
- [12] D. Summers, Lyapunov Approximation of Reachable Sets for Uncertain Linear Systems, *Int. J. Control*, Vol.41, pp.1235-1243, 1985.
- [13] R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita, and E. Shimemura, L^2 Gain and H^∞ Control of Linear Systems with Scheduling Parameter, In Proc. of 33rd IEEE Conference on Decision and Control, 1994.
- [14] R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita, Analysis of Output Reachable Sets for Quadratic Systems, In Proc. of Dynamical System Theory Symposium, pp. 193-198, 1996. (In Japanese)
- [15] F. Wu, A. Packard, G. Becker, Induced L^2 -Norm Control for LPV System with Bounded Parameter variation Rates, In Proc. of American Control Conference, pp.2379-2383, 1995.

Semi-global L_2 Gain Analysis for k th-degree Systems based on Reachable Set Analysis

Yoko Sato[†], Ryo Watanabe^{††}, and Kenko Uchida[†]

[†]Department of Electrical, Electronics and Computer Engineering, Waseda University
Okubo 3-4-1, Shinjuku, Tokyo 169-8555, JAPAN

^{††}Department of Computer-Controlled Mechanical Systems, School of Engineering, Osaka University
Yamada-Oka 2-1, Suita, Osaka 565-0871, JAPAN

Abstract: In this paper, we define the k th-degree system which is regarded as Taylor series up to the k th-degree term for the nonlinear system, and propose an analysis technique of the semi-global L_2 gains based on the reachable set analysis for the k th-degree systems with the constraint sets on the disturbances. In this technique, the upper bounds of the semi-global L_2 gains are obtained by solving linear matrix inequalities. We also illustrate the effectiveness of the proposed method with a numerical example.

1 Introduction

In the nonlinear H_∞ control problem which extends the H_∞ control problem into the nonlinear systems case, we aim at the L_2 gains that evaluate the system responses for the worst disturbances. The condition that the L_2 gain is less than a positive real number (the bounded real condition) is expressed by the Hamilton-Jacobi equation/inequality[1] in the nonlinear H_∞ control problem. Generally speaking, it is difficult to solve the Hamilton-Jacobi equation/inequality. Additionally, the L_2 gain of the nonlinear system is dependent on the size of the constraint set on the disturbance, so that the L_2 gain is estimated only in the local sense. Then, here arises a need of developing a feasible technique for analyzing the L_2 gains for nonlinear systems in the case when the constraint sets on the disturbances are given. We call the L_2 gain for the constraint set on the disturbance the semi-global L_2 gain.

In this paper, we consider the k th-degree system ($k \geq 2$) as one of the nonlinear systems and propose an analysis technique of the semi-global L_2 gains for the k th-degree systems. The k th-degree system is regarded as Taylor series up to the k th-degree term for the nonlinear system. We assume that the k th-degree system incurs the disturbance which is restricted by a constraint set. The analysis technique is given as follows. First, we analyze the reachable set of the state for the k th-degree system by using LMI (Linear Matrix Inequality). From the result of this reachable set analysis, we can evaluate the size of the nonlinear term in the k th-degree system. Then, by regarding the nonlinear term of the k th-degree system as the parametric uncertainty in the linear system with the parametric uncertainty, we can finally analyze the semi-global L_2 gain of the k th-degree system. We also illustrate the effectiveness of the proposed method with a numerical example.

Notation: I_n denotes the identity matrix of $\mathbb{R}^{n \times n}$. \otimes stands for the Kronecker product. For a matrix $\Delta^{[j]} \in \mathbb{R}^{n^{[j]} \times m^{[j]}}$, $n^{[j]} = m^{[j+1]}$, $j = 2 \sim i$, define the following matrix:

$$\prod_{j=i}^2 \Delta^{[j]} = \Delta^{[i]} \Delta^{[i-1]} \dots \Delta^{[2]}.$$

For matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, define the matrix function $S(A, Q) = Q^T A^T + A Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. For matrices $A^{[i]} \in \mathbb{R}^{n \times n^i}$, $i = 2 \sim k$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and a vector $\beta_{[i]}^{[i]} \in \mathbb{R}^{n^{i-1}}$, $i = 2 \sim k$, the matrix function $H(A^{[i]}, \beta_{[i]}^{[i]}, Q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is defined as follows:

$$H(A^{[i]}, \beta_{[i]}^{[i]}, Q) = \sum_{i=2}^k A^{[i]} \left[\text{diag}(\beta_{[i]}^{[i]}) \otimes Q \right] A^{[i]T}.$$

For a positive definite matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, the set $\mathcal{E}(P) \subset \mathbb{R}^n$ is given by $\mathcal{E}(P) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi^T P \xi \leq 1\}$. For integers h and j , the set \mathcal{I}_h^j is defined as $\mathcal{I}_h^j = \{i \mid h \leq i \leq j, i \text{ is an integer}\}$. The L_2 norm for a time function $\xi(t)$ is defined as $\|\xi\|_2 = \left[\int_0^\infty \xi^T(t) \xi(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$. \mathcal{L}_2 denotes the L_2 norm space.

2 k th-degree System

In this paper, we consider a k th-degree system ($k \geq 2$) of the state space form

$$\Sigma_k \begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + Bw(t), & x(0) = 0 \\ w(t) \in \mathcal{W} = \mathcal{E}(\mathcal{W}), & \forall t \in [0, \infty) \\ z(t) = Cx(t), & z(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ is the disturbance with the constraint set \mathcal{W} and $z(t) \in \mathbb{R}^l$ is the output. The matrix function $A(x)$ is defined as follows:

$$A(x) = A^{[1]} + \sum_{i=2}^k A^{[i]} \prod_{j=i}^2 \Delta^{[j]}(x), \quad (2)$$

$$\Delta^{[i]}(x) = I_n \otimes \Delta^{[i-1]}(x), \quad \Delta^{[1]}(x) = x,$$

where $A^{[i]} \in \mathbb{R}^{n \times n^i}$, $i = 1 \sim k$ and $\Delta^{[i]}(x) \in \mathbb{R}^{n^i \times n^{i-1}}$, $i = 2 \sim k$.

3 Reachable Set Analysis

In this section, we present an analysis technique of the reachable sets for the k th-degree systems Σ_k . This analysis technique is applied to the semi-global L_2 gain analysis of the k th-degree systems Σ_k which will be discussed in the next section.

Definition 1 [3] A state x_1 is reachable from $x(0) = 0$ in the k th-degree system Σ_k if there exist a finite time $t_1 \geq 0$, a piecewise continuous disturbance $w : [0, t_1] \rightarrow \mathcal{W}$ and a corresponding solution $x : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ to (1) such that $x(0) = 0$ and $x(t_1) = x_1$.

Definition 2 The reachable set for the k th-degree system Σ_k , $\mathcal{R}(\Sigma_k)$, is defined as follows:

$$\mathcal{R}(\Sigma_k) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ is reachable from } x(0) = 0 \text{ in the } k\text{th-degree system } \Sigma_k \}.$$

Then, we formulate the analysis problem of the reachable sets.

Problem 1 Evaluate the reachable set $\mathcal{R}(\Sigma_k)$.

For the evaluation of the reachable set $\mathcal{R}(\Sigma_k)$, we need the following lemma.

Lemma 1 For a given positive definite matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, if there exists a vector $\beta_{[h]}^{[i]} \in \mathbb{R}^{n^{h-1}}$, $\beta_{[h]j}^{[i]} > 0$, $h = 2 \sim i$ such that

$$\text{diag}(\beta_{[h]}^{[i]}) \geq \text{diag}(\beta_{[h-1]}^{[i]}) \otimes U, \quad \forall h \in \mathcal{I}_3^i, \quad (3)$$

then the following inequality holds:

$$\begin{aligned} & \left[\prod_{j=i}^2 \Delta^{[j]}(\delta) \right]^T A^{[i]T} P + P A^{[i]} \prod_{j=i}^2 \Delta^{[j]}(\delta) \\ & \leq P A^{[i]} \left[\text{diag}(\beta_{[i]}^{[i]}) \otimes U \right] A^{[i]T} P + \left[\text{diag}(\beta_{[2]}^{[i]}) \right]^{-1}, \\ & \forall i \in \mathcal{I}_2^k, \forall \delta \in \mathcal{D} = \mathcal{E}(U^{-1}), \forall P > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (4) \end{aligned}$$

By combining Lemma 1 with Lyapunov Approach[2] to the reachable set analysis for the general nonlinear systems, we obtain the following theorem for Problem 1.

Theorem 2 If there exist a positive definite matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a nonnegative real number α and a vector $\beta_{[h]}^{[i]} \in \mathbb{R}^{n^{h-1}}$, $\beta_{[h]j}^{[i]} > 0$, $h = 2 \sim i$, $i = 2 \sim k$ such that

$$1) \begin{bmatrix} \left(S(A^{[1]}, Q) + \alpha Q \right) & B & Q \cdots Q \\ +H(A^{[i]}, \beta_{[i]}^{[i]}, Q) & & \\ B^T & -\alpha W & 0 \cdots 0 \\ Q & 0 & \left(\beta_{[2]}^{[2]} \right) \\ \vdots & \vdots & -\text{diag} \left(\begin{matrix} \beta_{[2]}^{[2]} \\ \vdots \\ \beta_{[2]}^{[k]} \end{matrix} \right) \\ Q & 0 & \left(\beta_{[2]}^{[k]} \right) \end{bmatrix} \leq 0; \quad (5)$$

$$2) \text{diag}(\beta_{[h]}^{[i]}) \geq \text{diag}(\beta_{[h-1]}^{[i]}) \otimes Q, \quad \forall h \in \mathcal{I}_3^i, \forall i \in \mathcal{I}_2^k, \quad (6)$$

then the reachable set $\mathcal{R}(\Sigma_k)$ satisfies

$$\mathcal{R}(\Sigma_k) \subset \mathcal{E}(Q^{-1}). \quad (7)$$

Since Theorem 2 evaluates the reachable set $\mathcal{R}(\Sigma_k)$ via the upper bound $\mathcal{E}(Q^{-1})$, it is important to find the least upper bound $\mathcal{E}(Q^{-1})$. On the other hand, the conditions of Theorem 2 are described by BMI conditions,

and it is known that BMIs are difficult to solve numerically. To solve these problems in the practical evaluation, we propose the following algorithm, which leads us to less conservative evaluation of the upper bound $\mathcal{E}(Q^{-1})$ for the reachable set $\mathcal{R}(\Sigma_k)$ by solving LMIs.

Algorithm 3

Step-0: Input a positive definite matrix $Q_{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Set $q = 0$ and $\bar{Q} = Q_{(q)}$.

Step-1: Set $q = q + 1$. For the positive definite matrix \bar{Q} , find a positive definite matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a nonnegative real number α and a vector $\beta_{[h]}^{[i]} \in \mathbb{R}^{n^{h-1}}$, $\beta_{[h]j}^{[i]} > 0$, $h = 2 \sim i$, $i = 2 \sim k$ such that

$$1) \begin{bmatrix} \left(S(A^{[1]}, Q) + \alpha \bar{Q} \right) & B & Q \cdots Q \\ +H(A^{[i]}, \beta_{[i]}^{[i]}, \bar{Q}) & & \\ B^T & -\alpha W & 0 \cdots 0 \\ Q & 0 & \left(\beta_{[2]}^{[2]} \right) \\ \vdots & \vdots & -\text{diag} \left(\begin{matrix} \beta_{[2]}^{[2]} \\ \vdots \\ \beta_{[2]}^{[k]} \end{matrix} \right) \\ Q & 0 & \left(\beta_{[2]}^{[k]} \right) \end{bmatrix} \leq 0; \quad (8)$$

$$2) \text{diag}(\beta_{[h]}^{[i]}) \geq \text{diag}(\beta_{[h-1]}^{[i]}) \otimes \bar{Q}, \quad \forall h \in \mathcal{I}_3^i, \forall i \in \mathcal{I}_2^k; \quad (9)$$

$$3) Q \leq \bar{Q}, \quad (10)$$

and set $Q_{(q)} = Q$.

Step-2: If $Q_{(q)}$ converges, then set $Q = Q_{(q)}$, give $\mathcal{E}(Q^{-1})$ and stop; else, continue.

Step-3: If $Q_{(q)} < Q_{(q-1)}$, then set $\bar{Q} = Q_{(q)}$ and go to Step-1.

4 Semi-global L_2 Gain Analysis

In this section, we present an analysis technique of the semi-global L_2 gains for the k th-degree systems Σ_k .

Definition 3 The semi-global L_2 gain for the k th-degree system Σ_k , $G(\Sigma_k)$, is defined as follows:

$$G(\Sigma_k) = \sup_{w \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{W}, w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}.$$

Then, we formulate the analysis problem of the semi-global L_2 gains.

Problem 2 Evaluate the semi-global L_2 gain $G(\Sigma_k)$.

By applying Lemma 1 to the bounded real theorem, we obtain the following theorem described by the LMI conditions.

Theorem 4 Assume that the reachable set $\mathcal{R}(\Sigma_k)$ satisfies the condition (7). For a given positive real number γ , if there exist a positive definite matrix $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and a vector $\eta_{[h]}^{[i]} \in \mathbb{R}^{n^{h-1}}$, $\eta_{[h]j}^{[i]} > 0$, $h = 2 \sim i$, $i = 2 \sim k$ such that

$$1) \begin{bmatrix} S(A^{[1]}, Y) \\ +H(A^{[i]}, \eta_{[i]}^{[i]}, Q) \\ B^T \\ Y \\ \vdots \\ Y \\ CY \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & Y & \cdots & Y & YC^T \\ -\gamma^2 I_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} \eta_{[2]}^{[2]} \\ \vdots \\ \eta_{[k]}^{[k]} \\ \eta_{[2]}^{[2]} \end{pmatrix} & 0 & & & \\ -\text{diag} \begin{pmatrix} \eta_{[2]}^{[2]} \\ \vdots \\ \eta_{[k]}^{[k]} \\ \eta_{[2]}^{[2]} \end{pmatrix} & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -I_l \end{bmatrix} < 0; \quad (11)$$

$$2) \text{diag}(\eta_{[h]}^{[i]}) \geq \text{diag}(\eta_{[h-1]}^{[i]}) \otimes Q, \quad \forall h \in \mathcal{I}_3^i, \quad \forall i \in \mathcal{I}_2^k, \quad (12)$$

then the semi-global L_2 gain $G(\Sigma_k)$ satisfies

$$G(\Sigma_k) < \gamma. \quad (13)$$

5 Numerical Example

In this section, we illustrate the effectiveness of the proposed technique with a numerical example.

Consider the cubic system Σ_3 whose each coefficient matrices are given as follows:

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}, \quad A^{[2]} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.2 & -0.4 \\ -0.3 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$A^{[3]} = \begin{bmatrix} 0.03 & -0.04 & 0.03 & -0.02 & -0.04 & 0.02 & 0.03 & 0.02 \\ 0.02 & 0.01 & 0.01 & 0.02 & 0.05 & 0.01 & 0.01 & -0.01 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad W = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix},$$

and evaluate the semi-global L_2 gain $G(\Sigma_3)$ actually.

Fig. 1 shows the time responses for the cubic system Σ_3 . Fig. 2 shows the constraint set \mathcal{W} and the trajectory of the disturbance $w(t)$. We evaluate the reachable set $\mathcal{R}(\Sigma_3)$ by Algorithm 3 with $Q_{(0)} = 5.000I_2$. Then, we obtain the sequence $\{Q_{(q)}\}_{q=0}^{88}$ and the following positive definite matrix:

$$Q = Q_{(88)} = \begin{bmatrix} 7.233 \times 10^{-1} & -2.198 \times 10^{-2} \\ -2.198 \times 10^{-2} & 1.039 \times 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Fig. 3 shows the upper bounds $\mathcal{E}(Q_{(q)}^{-1})$ of the reachable set $\mathcal{R}(\Sigma_3)$ and the trajectory of the state $x(t)$. From Fig. 3, we can conclude that the trajectory of the state $x(t)$ for the cubic system Σ_3 satisfies the following condition:

$$x(t) \in \mathcal{E}(Q^{-1}), \quad \forall t \in [0, \infty).$$

We evaluate the semi-global L_2 gain $G(\Sigma_3)$ by Theorem 4 with Q . Then, we obtain the least upper bound $\gamma = 5.838 \times 10^{-1}$.

References

- [1] A.J. van der Schaft, " L_2 -Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback H_∞ Control", *IEEE Trans. on A.C.*, Vol.37, pp.770~784, 1992.
- [2] W.J.Grantham, "Estimating Controllability Boundaries for Uncertain Systems", *Lecture Notes in Biomathematics*, Vol.40, pp.151~162, Springer Verlag, 1980.

- [3] W.J.Grantham, "Estimating Reachable Sets", *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol.103, pp.420~422, Transactions of the ASME, 1981.

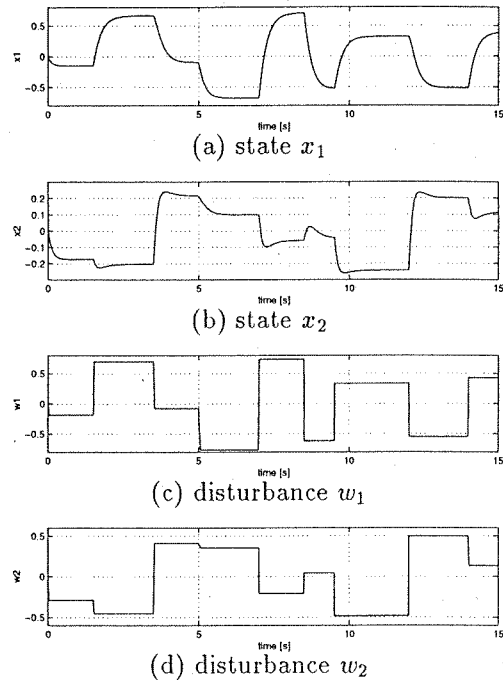


Fig. 1: Time Responses for Cubic System Σ_3

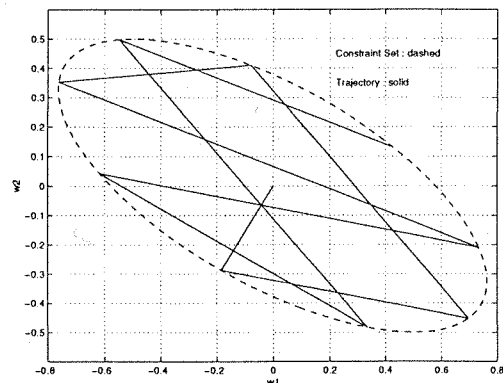


Fig. 2: Constraint Set \mathcal{W} and Trajectory of Disturbance $w(t)$

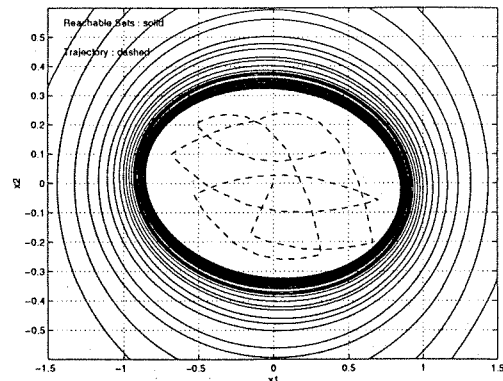


Fig. 3: Upper Bounds $\mathcal{E}(Q_{(q)}^{-1})$ of Reachable Set $\mathcal{R}(\Sigma_3)$ and Trajectory of State $x(t)$

Nonlinear H_∞ Control System Design via Extended Quadratic Lyapunov Function

Seigo SASAKI* and Kenko UCHIDA*

* Waseda University, Dept. of Elect., Electr. and Computer Eng., Tokyo 169-8555, Japan

Abstract. Using extended quadratic Lyapunov functions, we consider H_∞ control synthesis problems for input-affine polynomial type nonlinear systems, and characterize nonlinear H_∞ controllers, in the state feedback case and the output feedback case, via Riccati type matrix inequality conditions. The controllers can be given by solving linear matrix inequalities which are given at vertices of a convex hull enclosing a domain of states. We also determine a domain of internal stability. We finally show that the proposed method is effective through a numerical example for output feedback control problem of bilinear system.

Key Words. nonlinear control systems; Lyapunov function; H-infinity control; convex programming; control system synthesis

1. INTRODUCTION

Robust linear control theory has been remarkably developed to cope with disturbances and model uncertainties with respect to linearized models of nonlinear systems. The linear control design methods are successfully applied to practical control problems. Linearized models of nonlinear systems, however, do not generally give enough information to design control and lose the essence of considered problems. For one example, linearization of bilinear systems loses generally the true meaning because the linearized models ignore easily control inputs. We need treat nonlinear systems as they are.

One approach for robust nonlinear control is game theory one (Basar *et al.*, 1995), which generalizes robust linear control theory. If we take such approach, we need usually solve Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) inequality to design nonlinear control. It is generally not easy to obtain a solution satisfying the HJI inequality. Many works (e.g., (Kang *et al.*, 1992; Huang *et al.*, 1994)) obtain Taylor series expansion solution satisfying the HJI inequality. The Taylor series generally can not have arbitrary degree of expansion, and does need infinity expansion. Therefore, we decide a degree of the expansion and obtain only an approximate solution. Those methods generally obtain a local solution and does not consider any domain to guarantee feasibility of the solution.

In this paper, by using extended quadratic Lyapunov functions, we consider H_∞ control synthesis problems for input-affine polynomial type nonlinear systems and derive tractable conditions for nonlinear H_∞ controllers to exist. We also give a numerical method to construct the controllers. Our approach to design the control systems consists of the following two steps.

First, by using an extended quadratic Lyapunov functions, we characterize a nonlinear H_∞ controller, in the state feedback case and the output feedback case,

via Riccati type matrix inequality condition. Since the structure for the extended quadratic Lyapunov function is chosen to correspond to that for the system, we can obtain results that is naturally extended from those of linear quadratic problems. This also makes it possible to rewrite the Riccati type matrix inequality to a linear matrix inequality that depends on the state (Boyd *et al.*, 1994).

Next, we construct the controller by solving the state-dependent linear matrix inequality. Considering that the inequality is linear matrix inequality type and depends polynomially on the state, we can construct the controller by enclosing a domain of state in a convex hull and solving linear matrix inequalities which are given at vertices of the convex hull. Then, we can also obtain a domain of internal stability.

This paper is organized as follows. In Section 2, we state nonlinear H_∞ control problems for input-affine polynomial type nonlinear systems. Section 3 approaches generally to the problem via minimax design (Basar *et al.*, 1995) and discusses techniques to obtain solutions for the problems. In Section 4, focusing on L_2 -gain analysis, we characterize a condition for the problem to be solvable via a linear matrix inequality which depends on state. We show that the solution is given by enclosing a domain of state in a convex hull and solving linear matrix inequalities at the vertices of hull. Section 5 discusses state feedback control problems. Section 6 discusses output feedback control problems for nonlinear systems depended linearly on unmeasurable states. In Section 7, finally, efficiency of the proposed approach is shown through a numerical example for bilinear system that is a special class of the considered system.

Notations: I denotes an identity matrix of suitable dimensions. For a vector x , $\|x\|$ denotes the Euclidean norm. $\|\cdot\|_2$ denotes the norm of the space of square integrable signals, and is defined as $\|x\|_2 :=$

$(\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt)^{1/2}$, $x \in L_2$. $L_{2\rho}$ denotes the set of bounded functions with $\|x(t)\| < \rho$ for all $t \in [0, \infty)$. For a vector $\sigma \in \mathcal{R}^n$ with positive elements, B_σ^n denotes $\{x \mid |x_i| \leq \sigma_i, i = 1, \dots, n\}$, where x_i and σ_i stands for the i -th element of the vector, respectively. When there exists a domain $B_\sigma^m \subseteq \mathcal{R}^m$ which contains origin, for a continuously differentiable symmetric matrix-valued function $P(y) : B_\sigma^m \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}$, a notation $P(y) > 0, \forall y \in B_\sigma^m$ means $x^T P(y) x > 0, \forall y \in B_\sigma^m, \forall x \in \mathcal{R}^n, x \neq 0$.

2. PROBLEM STATEMENT

We consider an input-affine polynomial type nonlinear system (Σ) of the form

$$\dot{x} = A(y)x + B_1(y)w + B_2(y)u, \quad (1)$$

$$z = C_1(y)x + D_{12}(y)u, \quad (2)$$

$$y = C_2x \quad (3)$$

whose equilibrium point is $(x, w, u) = (0, 0, 0)$. $x \in \mathcal{R}^{n_x}$ is the state, $w \in \mathcal{R}^{n_w}$ is the exogenous input, $u \in \mathcal{R}^{n_u}$ is the control input, $z \in \mathcal{R}^{n_z}$ is the controlled output and $y \in \mathcal{R}^{n_y}$ is the measured output. We assume that each matrices are of suitable dimensions and satisfy $D_{12}^T(y)C_1(y) = 0$, $R(y) := D_{12}^T(y)D_{12}(y) > 0, \forall y \in B_\sigma^{n_y} \subseteq \mathcal{R}^{n_y}$, where $B_\sigma^{n_y}$ is a domain of interest. We also assume that entries of $A(y)$, $B_1(y)$, $B_2(y)$, $C_1(y)$ and $R^{-1}(y)$ are polynomial functions with respect to elements of y . In this paper, we call the matrix whose entries are polynomial functions *polynomial type matrix*.

In this paper, we consider two cases of feedback form for the system (Σ) : state feedback case with $C_2 = I$, i.e. $y = x$; output feedback case with $C_2 = [I, 0], n_y < n_x$.

For each system, we consider a controller (Γ) of the form; in the state feedback case,

$$u = K(x)x \quad (4)$$

where $K(x)$ is a sufficiently smooth function; in the output feedback case,

$$\dot{\xi} = \eta_1(\xi, y)\xi + \eta_2(\xi, y)u + \eta_3(\xi, y)y, \quad (5)$$

$$u = \theta(y)\xi, \quad (6)$$

where $\xi \in \mathcal{R}^{n_x}$, and $\eta_1(\xi, y)$, $\eta_2(\xi, y)$, $\eta_3(\xi, y)$ and $\theta(y)$ are sufficiently smooth functions. An augmented system that consists of the system (Σ) and the controller (Γ) is given as

$$\dot{x}_a = A_a(x_a)x_a + B_{a1}(x_a)w + B_{a2}(x_a)u, \quad (7)$$

$$z = C_1(x_a)x_a + D_{12}(x_a)u, \quad (8)$$

where in the state feedback case,

$$x_a = x \in \mathcal{R}^n, n = n_x,$$

$$A_a(x_a) = A(x), B_{a1}(x_a) = B_1(x), B_{a2}(x_a) = B_2(x);$$

in the output feedback case,

$$x_a = [x^T, \xi^T]^T \in \mathcal{R}^n, n = 2n_x,$$

$$A_a(x_a) = \begin{bmatrix} A(C_2x) & 0 \\ \eta_3(\xi, C_2x)C_2 & \eta_1(\xi, C_2x) \end{bmatrix},$$

$$B_{a1}(x_a) = \begin{bmatrix} B_1(C_2x) \\ 0 \end{bmatrix}, B_{a2}(x_a) = \begin{bmatrix} B_2(C_2x) \\ \eta_2(\xi, C_2x) \end{bmatrix}.$$

For the closed-loop system (Σ, Γ) , an internal stability considering a domain of state is defined as follows.

Definition 2.1 Let $\Omega \subseteq \mathcal{R}^n$ be a domain that contains the equilibrium point. Consider the closed-loop system (Σ, Γ) with $w = 0$. If the equilibrium point is asymptotically stable and Ω is contained in a domain of attraction of the system (Σ, Γ) , we say that the closed-loop system (Σ, Γ) is internally stable in the domain Ω .

In this paper, we consider the following problem (van der Schaft, 1992; Basar *et al.*, 1995).

Nonlinear H_∞ Control Problem [P]

Consider a system (Σ) . Given a positive constant γ , find an output feedback controller (Γ) satisfying the following conditions (P1) and (P2), and obtain a domain Ω satisfying the condition (P1).

(P1) The closed-loop system (Σ, Γ) is internally stable in a domain $\Omega \subseteq \mathcal{R}^n$ that contains the equilibrium point $x_a = 0$.

(P2) Whenever $x_a(0) = 0$, there exists some positive constant ρ and $\|z\|_2 \leq \gamma\|w\|_2$ for all $w \in L_{2\rho}$.

3. MINIMAX CONTROL

Now assume that the matrix C_2 is decided and the structures of the controller (Γ) are already designed. Then, the minimax approach (Basar *et al.*, 1995; Kojima *et al.*, 1992) leads us to that the problem [P] is solved by obtaining a positive definite solution $V(x_a)$ satisfying the Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) inequality

$$\min_{u=u(x_a)} \max_{w=w(x_a, u)} \left[\frac{\partial V}{\partial x_a}(x_a) \left\{ A_a(x_a)x_a + B_{a1}(x_a)w + B_{a2}(x_a)u \right\} + \|z\|^2 - \gamma^2\|w\|^2 \right] < 0. \quad (9)$$

Then, $V(x_a)$ is a Lyapunov function.

This paper restricts a structure of the solution $V(x_a)$ to an extended quadratic form $x_a^T P(x_a) x_a$ and solves the inequality (9) in the form of Riccati type matrix inequality. Since the structure for the extended quadratic functional is chosen to correspond to the structure for the system (Σ) , we can obtain results that is naturally extended from those of linear quadratic problems. This also makes it possible to rewrite the Riccati type matrix inequality for $P(x_a)$ to a linear matrix inequality that depends on the state x . If we can obtain the solution $P(x_a)$, we obtain a Lyapunov function $V(x_a) = x_a^T P(x_a) x_a$ that satisfies the inequality (9).

Remark 3.1 Works (Qu *et al.*, 1996; Patpong *et al.*, 1996; Lu *et al.*, 1995) let $\partial V(x_a)/\partial x_a = 2x_a^T X(x_a)$ in the inequality (9) and derive a Riccati type inequality or a linear matrix inequality for $X(x_a)$. However, we can not generally obtain a Lyapunov function $V(x_a)$ even if we can obtain the solution $X(x_a)$.

4. EXTENDED QUADRATIC LYAPUNOV FUNCTION AND CONVEX PROGRAMMING

Now, in order to simplify notations, we describe a closed-loop system, which consists of the system (Σ) and the controller (Γ) , as a nonlinear system (Σ_{cl}) of

the form

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)w, \quad (10)$$

$$\dot{z} = C(x)x + D(x)w, \quad (11)$$

where $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ and $D(x)$ are polynomial type matrices of suitable dimensions. (Note that in the following sections, controllers are not always polynomial type, and so closed-loop systems (Σ_{cl}) are not polynomial type even if systems (Σ) are polynomial type)

In this section, we focus on L_2 -gain analysis for the system (Σ_{cl}) and present a basis of our approach. The analysis problem is characterized by an inequality

$$\max_{w=u(x,u)} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(x) \{A(x)x + B(x)w\} + \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \right\} < 0 \quad (12)$$

which corresponds to the inequality (9). We restrict a structure of the solution $V(x)$ to the form $x^T P(x)x$, and solve the inequality (12) by a linear matrix inequality which depends on the state.

The following theorem characterizes an L_2 -gain for the system (Σ_{cl}) .

Theorem 4.1 (Sasaki *et al.*, 1997) Consider a system (Σ_{cl}) . For a given positive constant γ , if there exist a domain $B_\sigma^n \subseteq \mathcal{R}^n$ and a matrix-valued function $P(x)$ such that

$$(1) P(x) > 0, x \in B_\sigma^n, x \neq 0 \quad (13)$$

$$(2) \begin{bmatrix} F_{cl}(P(x), x) & X(P(x), x)B(x) & C^T(x) \\ B^T(x)X^T(P(x), x) & -\gamma^2 I & D^T(x) \\ C(x) & D(x) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$x \in B_\sigma^n, x \neq 0,$$

where

$$F_{cl}(P(x), x) := X(P(x), x)A(x) + A^T(x)X^T(P(x), x), \quad (15)$$

$$X(P(x), x) := P(x) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial P}{\partial x_1}(x)x \quad \dots \quad \frac{\partial P}{\partial x_n}(x)x \right], \quad (16)$$

then the system (Σ_{cl}) is internally stable in the maximum supersolid

$$\Omega_{cl}(\alpha_{cl}) := \{x \mid x^T P(x)x \leq \alpha_{cl}\} \quad (17)$$

that is contained in the domain B_σ^n , and when $x(0) = 0$, there exists some positive constant ρ and $\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$ for all $w \in L_{2\rho}$.

Theorem 4.1 is an extension of the corresponding result for linear systems. An L_2 -gain analysis (Theorem 2.2) in the work (Lu *et al.*, 1995) needs $X(P(x), x) > 0$ instead of $P(x) > 0$ and does not give a method to construct directly a Lyapunov function as remarked in Remark 3.1. On the other hand, Theorem 4.1 gives a Lyapunov function $x^T P(x)x$ if we can obtain $P(x)$. Moreover, the following lemma shows that a condition

$X(P(x), x) > 0$ is more conservative than $P(x) > 0$.

Lemma 4.1 (Sasaki *et al.*, 1997) If there exist a domain $B_\sigma^n \subseteq \mathcal{R}^n$ and $X(P(x), x) > 0$ for all $x \in B_\sigma^n, x \neq 0$, then $P(x) > 0$ for all $x \in B_\sigma^n, x \neq 0$.

Remark 4.1 We discuss a bound ρ of an external input w , here. The system (Σ_{cl}) is stable for an external input w such that the state x does not leave the domain $\Omega_{cl}(\alpha_{cl})$. The proof leads to that a Lyapunov function $V(x(\tau)) = x(\tau)P(x(\tau))x(\tau)$ at some time τ satisfies $V(x(\tau)) < \gamma^2 \int_0^\tau \|w(t)\|^2 dt$ when $x(0) = 0$. The definition (17) means that the system (Σ_{cl}) is stable while $V(x(\tau)) \leq \alpha_{cl}$. Consequently, those leads us to that the system (Σ_{cl}) is stable for an external input such that $(\int_0^\tau \|w(t)\|^2 dt)^{1/2} \leq \sqrt{\alpha_{cl}}/\gamma$ at some time τ . This means that an external input need satisfy $\lim_{r \rightarrow \infty} (\int_0^r \|w(t)\|^2 dt)^{1/2} \leq \sqrt{\alpha_{cl}}/\gamma$. For one example, an external input such that $\|w(t)\| \leq \sqrt{\alpha_{cl}}/\gamma \cdot e^{-t/2}$ satisfies the above condition. The input satisfies $\|w(t)\| \leq \sqrt{\alpha_{cl}}/\gamma, \forall t \in [0, \infty)$, which gives an upper bound of ρ .

Next, we show that a convex programming technique can give a solution $P(x)$ in Theorem 4.1. Now, we assume that $P(x)$ is some r -degree polynomial type matrix $P_r(x)$, $r = 0, 1, 2, \dots$. When $r = 0$, $P(x)$ denotes a constant matrix P_0 . To simplify notations, we denote by P_r^{Cof} all coefficient matrices $P_0, P_1, \dots, P_{11}, \dots$ of the r -degree polynomial type matrix. Note that the coefficient matrices of the system (Σ_{cl}) are polynomial type and conditions in Theorem 4.1 are affine in $P(x)$. Then, we can restate the conditions in Theorem 4.1 as

$$F_r(P_r^{Cof}, \psi(x)) := F_0(P_0) + \sum_{i=1}^q \psi_i(x) F_i(P_r^{Cof}) < 0, \quad (18)$$

where

$$\psi(x) := [x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2, x_1 x_2, \dots]^T \in \mathcal{R}^q, \quad (19)$$

$$q := \sum_{k=1}^r \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \quad (20)$$

\hat{r} is determined by the degrees of coefficient matrices in the system (Σ_{cl}) and the polynomial type matrix $P_r(x)$. $\psi_i(x)$ denotes i -th element of $\psi(x)$.

The following theorem shows that a solution in Theorem 4.1 can be given by solving linear matrix inequalities (Boyd *et al.*, 1994) at vertices of a convex hull enclosing a domain of state.

Theorem 4.2 (Watanabe *et al.*, 1996; Sasaki *et al.*, 1997) Consider a q -dimensional convex hull Φ , with 2^q vertices, that contains $\Psi(B_\sigma^n) = \{\psi(x) \mid x \in B_\sigma^n\}$. Assume $(^1\phi, \dots, ^{2^q}\phi)$ denotes 2^q vertices of Φ . If there exist matrices P_r^{Cof} satisfying

$$F_r(P_r^{Cof}, ^j\phi) < 0, \quad j = 1, \dots, 2^q, \quad (21)$$

where $^j\phi$ denotes j -th vertex of Φ , then the matrices P_r^{Cof} satisfies the inequality (18).

Using this theorem, we solve the conditions (13) and (14) with respect to $P(x)$, and obtain a solution $V(x) = x^T P(x)x$ satisfying the inequality (12) for all state in the domain B_σ^n .

The following sections discuss control synthesis problems for the nonlinear systems (Σ) and show conditions for the problems to be solvable. The conditions are given as polynomial type linear matrix inequalities that depend on states. We can obtain the solution by solving linear matrix inequalities at vertices of a convex hull enclosing a domain of state, in parallel with the procedure of L_2 -gain analysis discussed in this section.

5. STATE FEEDBACK CONTROL PROBLEM

This section discusses a case of $C_2 = I$, i.e. state feedback control problem. The following theorem gives a state feedback controller solving the problem [P].

Theorem 5.1 Consider a system (Σ). For a given positive constant γ , if there exist a domain $B_\sigma^{n_x} \subseteq \mathcal{R}^{n_x}$ and a matrix-valued function $Y(x)$ such that

$$(1) Y(x) > 0, \quad \forall x \in B_\sigma^{n_x}, x \neq 0, \quad (22)$$

$$(2) \begin{bmatrix} F_{sf}(Y(x), x) & Y(x)C_1^T(x) \\ C_1(x)Y(x) & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

$$(3) Z(Y^{-1}(x), x) \text{ is symmetric, } \forall x \in B_\sigma^{n_x}, x \neq 0, \quad (24)$$

where,

$$F_{sf}(Y(x), x) := A(x)Y(x) + Y(x)A^T(x) - B_2(x)R^{-1}(x)B_2^T(x) + \gamma^{-2}B_1(x)B_1^T(x), \quad (25)$$

$$Z(Y^{-1}(x), x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial Y^{-1}}{\partial x_1}(x)x & \dots & \frac{\partial Y^{-1}}{\partial x_{n_x}}(x)x \end{bmatrix}, \quad (26)$$

then a state feedback controller solving the problem [P] is given as

$$u = -R^{-1}(x)B_2^T(x)Y^{-1}(x)x. \quad (27)$$

Moreover, the closed-loop system (Σ, Γ) is internally stable in the maximum supersolid

$$\Omega_{sf}(\alpha_{sf}) := \{x \mid x^T P(x)x \leq \alpha_{sf}\} \quad (28)$$

that is contained in the domain $B_\sigma^{n_x}$, where $P(x) = \int_0^1 2kY^{-1}(kx)dk$.

Proof of Theorem 5.1 use the following lemma.

Lemma 5.1 When there exist a domain $B_\sigma^{n_x} \subseteq \mathcal{R}^{n_x}$ and a matrix-valued function $Y(x)$ such that $Y(x) > 0, \forall x \in B_\sigma^{n_x}, x \neq 0$, we define as

$$P(x) := \int_0^1 2kY^{-1}(kx)dk. \quad (29)$$

Then, $P(x)$ satisfies $P(x) > 0, \forall x \in B_\sigma^{n_x}, x \neq 0$. Moreover, if $Z(Y^{-1}(x), x)$ is symmetric, $P(x)$ satisfies

$$Y^T(x)X^T(P(x), x)x = x, \quad (30)$$

where $Z(Y^{-1}(x), x)$ and $X(P(x), x)$ are defined in (26) and (16), respectively.

The conditions in Theorem 5.1 are not affine in $Y(x)$ because of the condition (24). We discuss how to treat the condition (24).

If $Y(x)$ does not satisfy the condition (24), we can not obtain $P(x)$ satisfying the condition (30). This adds a new term $O(\varepsilon)\|x\|^2$ to an expression of $dV(x(t))/dt$ that is derived by the definition (29). Here, $O(\varepsilon)$ denotes a quadratic equation of ε (where $O(0) = 0$). An integer ε is proportional to a maximum absolute value of eigenvalue of the matrix $\Delta(x) := Z(Y^{-1}(x), x) - Z^T(Y^{-1}(x), x), \forall x \in B_\sigma^{n_x}$. Even when the condition (24) does not hold, however, if $\Delta(x)$ is sufficiently small, $dV(x(t))/dt < 0$ holds, and so Theorem 5.1 validly concludes. On the other hand, if we can restrict a structure of $Y(x)$ to that to satisfy the condition (24), we use a variable gradient method (Schultz *et al.*, 1962) and can obtain $Y(x)$, which satisfies the conditions (22) and (23), by using the convex programming technique in the Section 4.

6. OUTPUT FEEDBACK CONTROL PROBLEM

This section discusses a case of $C_2 = [I, 0], n_y < n_x$, i.e. output feedback control problem. We derive two types of output feedback controller (Γ) solving the problem [P].

Using two types of Lyapunov function of the form

$$V(x, \xi) = x^T X^{-1}x + \gamma^2(x - \xi)^T T(x - \xi)(x - \xi), \quad (31)$$

$$V(x, \xi) = \xi^T S^{-1}\xi + \gamma^2(x - \xi)^T P(x - \xi) \quad (32)$$

where X, S, P are constant matrices and $T(x - \xi)$ is a matrix-valued function, we give conditions for the controllers to exist in Theorem 6.1 and 6.2, respectively.

Here, in order to simplify notations in Theorem 6.1, we define matrix-valued functions of the form

$$Q(\lambda) := \begin{bmatrix} Q_a(\lambda) & Q_b \\ Q_b^T & Q_c \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{n_x \times n_x}, \quad (33)$$

$$Y(Q(\lambda), \lambda) := \begin{bmatrix} \hat{Q}_a(\lambda) & Q_b \\ Q_b^T & Q_c \end{bmatrix}, \quad (34)$$

where,

$$\lambda \in \mathcal{R}^{n_y}, \quad Q_a(\lambda) \in \mathcal{R}^{n_y \times n_y},$$

$$Q_b \in \mathcal{R}^{n_y \times (n_x - n_y)}, \quad Q_c \in \mathcal{R}^{(n_x - n_y) \times (n_x - n_y)},$$

$$\hat{Q}_a(\lambda) := Q_a(\lambda) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial Q_a(\lambda)}{\partial \lambda_1} \lambda \quad \dots \quad \frac{\partial Q_a(\lambda)}{\partial \lambda_{n_y}} \lambda \right]. \quad (35)$$

Theorem 6.1 Consider a system (Σ). For a given positive constant γ , if there exist a domain $(B_\sigma^{n_y} \times \mathcal{R}^{n_x - n_y}) \times (B_\sigma^{n_y} \times \mathcal{R}^{n_x - n_y}) \subseteq \mathcal{R}^{n_x} \times \mathcal{R}^{n_x}$, a matrix $X \in \mathcal{R}^{n_x \times n_x}$ and a matrix-valued function $Q(y - y_\xi) \in \mathcal{R}^{n_x \times n_x}$ such that

$$(1) \begin{bmatrix} F_1(X, y) & XC_1^T(y) & B_1(y) \\ C_1(y)X & -I & 0 \\ B_1^T(y) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall y \in B_\sigma^{n_y}, \quad (36)$$

$$(2) \begin{bmatrix} F_2(Y(Q(y - y_\xi), y - y_\xi), y) \\ B_1^T(y)Y(Q(y - y_\xi), y - y_\xi) \\ C_1(y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y(Q(y-y_\xi), y-y_\xi)B_1(y) & C_1^T(y) \\ -I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall (y, y_\xi) \in \mathcal{B}_\sigma^{n_y} \times \mathcal{B}_\sigma^{n_y}, \quad (37)$$

$$(3) \begin{bmatrix} Y(Q(y-y_\xi), y-y_\xi) & I \\ I & \gamma^2 X \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (y, y_\xi) \in \mathcal{B}_\sigma^{n_y} \times \mathcal{B}_\sigma^{n_y}, \quad (38)$$

where

$$\begin{aligned} F_1(X, y) &:= XA^T(y) + A(y)X - B_2(y)R^{-1}(y)B_2^T(y), \\ F_2(Y(Q(y-y_\xi), y-y_\xi), y) &:= \\ &Y(Q(y-y_\xi), y-y_\xi)A(y) \\ &+ A^T(y)Y(Q(y-y_\xi), y-y_\xi) - C_2^T C_2, \end{aligned}$$

$$y_\xi = C_2 \xi,$$

then an output feedback controller (Γ) solving the problem [P] is given as

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(y)\hat{x} - B_2(y)R^{-1}(y)B_2^T(y)X^{-1}\hat{x} \\ &+ \gamma^{-2}B_1(y)B_1^T(y)X^{-1}\hat{x} \\ &+ [Y(Q(y-\hat{y}), y-\hat{y}) - \gamma^{-2}X^{-1}]^{-1}C_2^T(y-C_2\hat{x}) \\ &+ \gamma^{-2}[Y(Q(y-\hat{y}), y-\hat{y}) - \gamma^{-2}X^{-1}]^{-1} \times \\ &X^{-1}\text{Eqn}_1(X, y)X^{-1}\hat{x}, \quad (39) \end{aligned}$$

$$u = -R^{-1}(y)B_2^T(y)X^{-1}\hat{x}. \quad (40)$$

Moreover, the closed-loop system (Σ, Γ) is internally stable in the maximum supersolid

$$\begin{aligned} \Omega_{of1}(\alpha_{of1}) &:= \{(x, \xi) \mid \\ x^T X^{-1}x + \gamma^2(x-\xi)^T T(x-\xi)(x-\xi) \leq \alpha_{of1}\} \quad (41) \end{aligned}$$

that is contained in the domain $(\mathcal{B}_\sigma^{n_y} \times \mathcal{R}^{n_x-n_y}) \times (\mathcal{B}_\sigma^{n_y} \times \mathcal{R}^{n_x-n_y})$, where

$$\begin{aligned} T(x-\xi) &:= Q(C_2(x-\xi)) - \gamma^{-2}X^{-1}, \\ \hat{y} &:= C_2 \hat{x}, \\ \text{Eqn}_1(X, y) &:= XA^T(y) + A(y)X \\ &- (B_2(y)R^{-1}(y)B_2^T(y) - \gamma^{-2}B_1(y)B_1^T(y)) \\ &+ XC_1^T(y)C_1(y)X. \end{aligned}$$

Theorem 6.2 Consider a system (Σ) . For a given positive constant γ , if there exist a domain $(\mathcal{B}_\sigma^{n_y} \times \mathcal{R}^{n_x-n_y}) \times \mathcal{R}^{n_x} \subseteq \mathcal{R}^{n_x} \times \mathcal{R}^{n_x}$ and matrices $X \in \mathcal{R}^{n_x \times n_x}$, $P \in \mathcal{R}^{n_x \times n_x}$ such that

$$(1) \begin{bmatrix} F_1(X, y) & XC_1^T(y) & B_1(y) \\ C_1(y)X & -I & 0 \\ B_1^T(y) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall y \in \mathcal{B}_\sigma^{n_y}, \quad (42)$$

$$(2) \begin{bmatrix} F_3(P, y) & PB_1(y) & C_1^T(y) \\ B_1^T(y)P & -I & 0 \\ C_1(y) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall y \in \mathcal{B}_\sigma^{n_y}, \quad (43)$$

$$(3) \begin{bmatrix} P & I \\ I & \gamma^2 X \end{bmatrix} > 0, \quad (44)$$

where

$$F_1(X, y) = XA^T(y) + A(y)X - B_2(y)R^{-1}(y)B_2^T(y),$$

$$F_3(P, y) := PA(y) + A^T(y)P - C_2^T C_2,$$

then an output feedback controller (Γ) solving the problem [P] is given as

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A(y)\underline{x} - B_2(y)R^{-1}(y)B_2^T(y)S^{-1}\underline{x} \\ &+ \gamma^{-2}P^{-1}C_1^T(y)C_1(y)\underline{x} + P^{-1}C_2^T(y-C_2\underline{x}) \\ &+ \gamma^{-2}P^{-1}\text{Eqn}_2(P, y)P^{-1}S^{-1}\underline{x}, \quad (45) \end{aligned}$$

$$u = -R^{-1}(y)B_2^T(y)S^{-1}\underline{x}. \quad (46)$$

Moreover, the closed-loop system (Σ, Γ) is internally stable in the maximum supersolid

$$\begin{aligned} \Omega_{of2}(\alpha_{of2}) &:= \{(x, \xi) \mid \\ \xi^T S^{-1}\xi + \gamma^2(x-\xi)^T P(x-\xi) \leq \alpha_{of2}\} \quad (47) \end{aligned}$$

that is contained in the domain $(\mathcal{B}_\sigma^{n_y} \times \mathcal{R}^{n_x-n_y}) \times \mathcal{R}^{n_x}$, where

$$\begin{aligned} S &:= X - \gamma^{-2}P^{-1}, \\ \text{Eqn}_2(P, y) &:= PA(y) + A^T(y)P \\ &- (C_2^T C_2 - \gamma^{-2}C_1^T(y)C_1(y)) + PB_1(y)B_1^T(y)P. \end{aligned}$$

We can see that the condition in Theorem 6.2 is a sufficient condition for Theorem 6.1.

In Theorem 5.1 for state feedback control problem, the condition (24) is a condition to obtain $P(x)$ from $Y(x)$, which gives a Lyapunov function. Theorem 6.1 does not require any condition that corresponds to the condition (24). This is because a matrix X does not depend on a state x .

Remark 6.1 H_∞ output feedback control problems for nonlinear systems are considered in works (Isidori, 1994; Imura *et al.*, 1994). The works give true local solutions and do not consider domains for the solutions to exist. A work (Lu *et al.*, 1995) also discusses output feedback control problems on the basis of a state depended linear matrix inequality. The work derives necessary condition for a nonlinear controller to exist, and gives a constant coefficient controller under some sufficient condition.

7. NUMERICAL EXAMPLE

This section shows efficiency of the proposed method through a numerical example for a bilinear system that is a special class of polynomial type system (Σ) . We also present simulation results from works (Sasaki *et al.*, 1996a; Sasaki *et al.*, 1996b) to compare with results in this paper.

We consider a nonlinear system (Σ_b) of the form (Sasaki *et al.*, 1996b)

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + (B_{20} + yB_{21})u,$$

$$z = C_1 x + D_{12} u,$$

$$y = x_1,$$

$$A = \begin{bmatrix} 13/6 & 5/12 \\ -50/3 & -8/3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = I, \quad B_{20} = \begin{bmatrix} -1/8 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

which is a bilinear model of continuous stirred tank

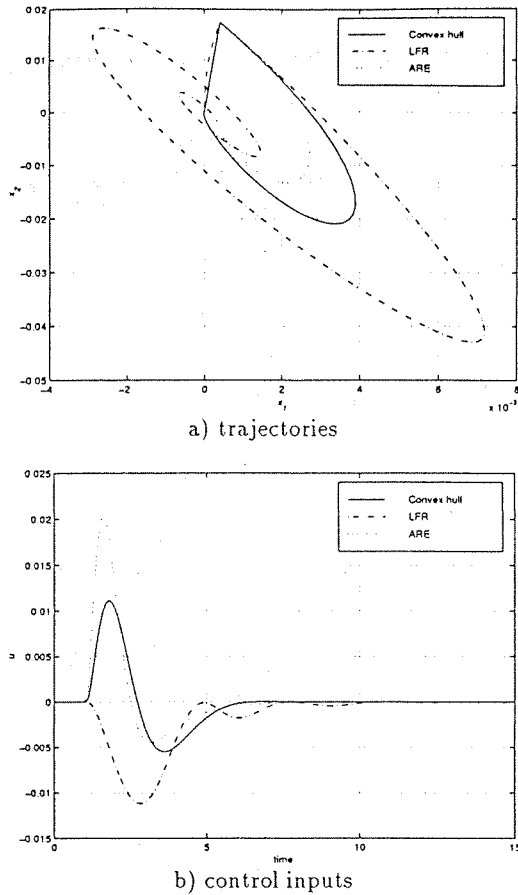


Fig. 1. Comparison of responses between three approaches

reactor (Hofer *et al.*, 1988) with process noises.

By using the convex programming technique in Section 4, we obtain a solution

$$X = \begin{bmatrix} 4.3241 \times 10^{-2} & -2.9024 \times 10^{-1} \\ -2.9024 \times 10^{-1} & 2.3074 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.7565 & 3.3662 \times 10^{-1} \\ 3.3662 \times 10^{-1} & 8.6542 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

with $\gamma = 25$, which satisfy the condition in Theorem 6.1 and construct a controller (39)(40). (The solution also satisfies the condition in Theorem 6.2 and construct another controller (45)(46))

Fig. 1 presents computer simulation results when an impulse-like process noise $w_1(1) = 0.2$ disturbs the system (Σ_{bl}). In the figure, Convex hull denotes results in this paper. We see that the controller works very well. LFR and ARE denotes results from works (Sasaki *et al.*, 1996b; Ghaoui *et al.*, 1996) and (Sasaki *et al.*, 1996a; Sasaki *et al.*, 1996b), respectively. A controller in ARE sufficiently attenuates amplitude of state because the method focuses particularly on a structure for bilinear system. The controller, however, gives a high gain as we see in Fig. 1. In this example, all three methods use quadratic Lyapunov functions. Even when we use quadratic Lyapunov functions, the proposed approach gives very good results.

8. CONCLUSION

By using an extended quadratic Lyapunov function, we considered H_∞ control synthesis problems for input-affine polynomial type nonlinear systems. We

characterized nonlinear H_∞ controllers, in the state feedback case and the output feedback case, via Riccati type matrix inequality conditions. We showed that the solution could be given by solving linear matrix inequalities at vertices of a convex hull enclosing a domain of state. We showed that the proposed method was effective through a numerical example for output feedback control problem of bilinear model for CSTR.

9. REFERENCES

- Basar, T. and P. Bernhard (1995). *H ∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems*. 2nd ed. Birkhäuser.
- Boyd, S., L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Vol. 15 of *studies in applied mathematics*. SIAM.
- Ghaoui, L. E. and G. Scorletti (1996). Control of rational systems using linear-fractional representations and linear matrix inequalities. *Automatica* 32(9), 1273-1284.
- Hofer, E. P. and B. Tibken (1988). An iterative method for the finite-time bilinear-quadratic control problem. *J. Optimization Theory and Appl.* 57(3), 411-427.
- Huang, J. and C.-F. Lin (1994). An algorithm and data structure for approximately computing nonlinear H_∞ control laws. In: *Proc. American Contr. Conf.* 1133-1137.
- Imura, J., T. Sugie and T. Yoshikawa (1994). Strict H_∞ control of nonlinear systems based on the Hamilton-Jacobi inequality. In: *Proc. First Asian Contr. Conf.* 189-192.
- Isidori, A. (1994). H_∞ control via measurement feedback for affine nonlinear systems. *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.* 4, 553-574.
- Kang, W., P. K. De and A. Isidori (1992). Flight control in a windshear via nonlinear H_∞ methods. In: *Proc. 31st Conf. Decision Contr.* 1135-1142.
- Kojima, A., M. Fujita, K. Uchida and E. Shimemura (1992). Linear quadratic differential game and H_∞ control - A direct approach based on completing the square -. *Trans. of SICE* 28(5), 570-577. In Japanese.
- Lu, W.-M. and J. C. Doyle (1995). H_∞ control of nonlinear systems: A convex characterization. *IEEE Trans. Autom. Contr.* 40(9), 1668-1675.
- Patpong, L., M. Sampei, M. Koga and E. Shimizu (1996). A numerical computational approach of Hamilton-Jacobi-Isaacs equation in nonlinear H_∞ control problems. In: *Proc. 35th Conf. Decision Contr.* 3774-3779.
- Qu, Z., J. R. Cloutier and C. P. Mracek (1996). A new sub-optimal nonlinear control design technique - sdare. In: *IFAC 13th World Congress.* 365-370.
- Schultz, D. G. and J. E. Gibson (1962). The variable gradient method for generating Liapunov functions. *Trans. AIEE* 81(Pt.2, Appl. and Industry), 203-210.
- Sasaki, S. and K. Uchida (1996a). H_∞ output feedback control problems for bilinear systems. In: *7th Int. Symp. Dynamic Games and Appl.* 806-814.
- Sasaki, S. and K. Uchida (1996b). Syntheses of H_∞ output feedback control for bilinear systems. In: *Proc. 35th Conf. Decision Contr.* 3282-3287.
- Sasaki, S. and K. Uchida (1997). A convex characterization of analysis and synthesis for nonlinear systems via extended quadratic Lyapunov function. In: *16th American Contr. Conf.* 411-415.
- van der Schaft, A. J. (1992). L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control. *IEEE Trans. Autom. Contr.* 37, 770-784.
- Watanabe, R., K. Uchida and M. Fujita (1996). A new LMI approach to analysis of linear systems with scheduling parameter - reduction to finite number of LMI conditions. In: *Proc. 35th Conf. Decision Contr.* 1663-1665.

SEMI-GLOBAL L^2 GAIN ANALYSIS OF NONLINEAR SYSTEMS -AN APPROACH VIA LINEAR SYSTEMS WITH SELF-SCHEDULING PARAMETERS-

Takehito Azuma* Ryo Watanabe** Kenko Uchida*

* *Department of Electrical, Electronics and Computer Engineering, Waseda University
Okubo 3-4-1, Shinjuku, Tokyo 169, Japan*

** *Department of Computer-Controlled Mechanical Systems, Osaka University
Yamadaoka 2-1, Suita City, Osaka 565, Japan*

Abstract: In this paper, we consider semi-global L^2 gain analysis for nonlinear systems described as linear systems with self-scheduling parameters. The term *semi-global* denotes that the disturbance is constrained to a given set. First we show a method to convert linear systems with self-scheduling parameters into linear systems with scheduling parameters based on evaluation of the domain of the self-scheduling parameters. Second, using the tools for linear systems with scheduling parameters, we discuss semi-global L^2 gain analysis and propose an approach together with feasible formulas of computation. Finally, we show a numerical example.

Keywords: Nonlinear systems, Linear systems with self-scheduling parameters, Linear systems with scheduling parameters(LPV systems), Semi-global L^2 gain

1. INTRODUCTION

L^2 gain analysis and H^∞ control problem have been focused on and many results of importance have obtained in recent researches concerning linear systems with scheduling parameters(called linear parameter varying systems: LPV systems)(Apkarian *et al.*, 1995) (Becker *et al.*, 1993) (Packard, 1994) (Watanabe *et al.*, 1994) (Wu *et al.*, 1995). In linear systems with scheduling parameters, it is assumed that scheduling parameters and/or their time variations are bounded and the domains are obtained a priori. Most of the results for analysis and synthesis in linear systems with scheduling parameters are derived based on this assumption. In this paper, we are concerned with nonlinear systems which can be described as linear systems by regarding some of the state variables as parameters. We call such nonlinear systems linear systems with self-scheduling pa-

rameters. Here note that linear systems with self-scheduling parameters look but are not linear systems with scheduling parameters, because self-scheduling parameters, which are some of the state variables, are unbounded functions of the state variables and the domains are not given a priori in general.

In this paper, we deal with the nonlinear system which can be expressed as linear systems with self-scheduling parameters as follows,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\theta_x(x))x + B(\theta_x(x))w(t), \quad x(0) = 0, \\ z &= C(\theta_x(x))x + D(\theta_x(x))w(t), \\ \theta_x(x) &= hx,\end{aligned}$$

where $\theta_x(x)$ is the self-scheduling parameter and is given as a linear functional of elements of the state variable, and discuss L^2 gain analysis of this nonlinear system. Considering that this system is nonlinear, in particular, we constrain the disturbance w to a given set and consider *semi-global* L^2 gain

analysis. In our approach, we first describe linear systems with self-scheduling parameters as linear systems with scheduling parameters by evaluating the domain of the self-scheduling parameter based on the output reachable sets analysis (Watanabe *et al.*, 1996). Once description of linear systems with scheduling parameters is obtained, useful techniques are available. And we discuss our semi-global L^2 gain analysis based on the technique of linear systems with scheduling parameters. In this paper, we establish an approach, together with feasible formulas, to the semi-global L^2 gain analysis.

In section 2, we introduce a linear system with a self-scheduling parameter. In section 3, we propose the technique to evaluate the domain of the self-scheduling parameter. In section 4, We discuss semi-global L^2 gain analysis and propose an approach together with feasible formulas, to the analysis. In section 5, we demonstrate the efficacy of the proposed approach in a numerical example.

2. LINEAR SYSTEMS WITH SELF-SCHEDULING PARAMETERS

2.1 System Description

Consider the following nonlinear system,

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = A(hx)x + B(hx)w(t), & x(0) = 0, \\ z = C(hx)x + D(hx)w(t), \end{cases} \quad (1)$$

where $x(t) \in R^n$ is the state, $z(t) \in R^l$ is the output, $w(t) \in R^m$ is the disturbance and $h \in R^{1 \times n}$ is a constant matrix. Note that hx is a scalar because the dimension of the constant matrix h is $1 \times n$. We assume that $A(hx), B(hx), C(hx)$ and $D(hx)$ are given in the following forms,

$$\begin{aligned} A(hx) &= A_0 + a_1(hx)A_1 + \cdots + a_{r_a}(hx)A_{r_a}, \\ B(hx) &= B_0 + b_1(hx)B_1 + \cdots + b_{r_b}(hx)B_{r_b}, \\ C(hx) &= C_0 + c_1(hx)C_1 + \cdots + c_{r_c}(hx)C_{r_c}, \\ D(hx) &= D_0 + d_1(hx)D_1 + \cdots + d_{r_d}(hx)D_{r_d}, \end{aligned} \quad (2)$$

where each of a_i, b_i, c_i and $d_i : R \rightarrow R$ is a continuous function and A_i, B_i, C_i and D_i are constant matrices with the appropriate dimension.

In this paper, we express the nonlinear system Σ as a linear system with a scalar self-scheduling parameter given as follows.

Linear systems with self-scheduling parameters:

$$\Sigma_{LSS} : \begin{cases} \dot{x} = A(\theta_x(x))x + B(\theta_x(x))w(t), & x(0) = 0, \\ z = C(\theta_x(x))x + D(\theta_x(x))w(t), \\ \theta_x(x) = hx, \end{cases} \quad (3)$$

where $\theta_x(x)$ is the self-scheduling parameter of Σ_{LSS} , which is given as a linear combination of elements of the state vector x .

If the domain of the self-scheduling parameter $\theta_x(x(t))$ and its time variation $\dot{\theta}_x(x(t))$ are given as Θ and Ψ a priori, the system Σ_{LSS} is described as the linear system with a scheduling parameter, called the linear parameter varying (LPV) system, given as follows.

Linear systems with scheduling parameters:

$$\Sigma_{LS} : \begin{cases} \dot{x} = A(\theta(t))x + B(\theta(t))w(t), & x(0) = 0, \\ z = C(\theta(t))x + D(\theta(t))w(t), \\ \theta(t) \in \Theta, & \forall [t, \infty), \\ \dot{\theta}(t) \in \Psi, & \forall [t, \infty). \end{cases} \quad (4)$$

For linear systems with scheduling parameters, the recent researches (Apkarian *et al.*, 1995) (Becker *et al.*, 1993) (Packard, 1994) (Watanabe *et al.*, 1994) (Wu *et al.*, 1995) have already developed several powerful tools of L^2 gain analysis and H^∞ control problem. In this paper, we first describe the given system Σ_{LSS} as in the form of Σ_{LS} by evaluating the domain of $\theta_x(x(t))$ and $\dot{\theta}_x(x(t))$, which is done in section 3. Then, L^2 gain analysis for Σ_{LSS} (or Σ) are performed by applying the tools developed for Σ_{LS} (Watanabe *et al.*, 1994) (Wu *et al.*, 1995), which is done in section 4.

2.2 Constraint Set of Disturbance

For the general nonlinear system Σ (Σ_{LSS}), it seems difficult to discuss system performances (e.g., L^2 gain performance) globally against the disturbance and appropriate to consider some constraint on the disturbance. We assume throughout this paper that the disturbance w is constrained to the following ellipse,

$$\begin{aligned} w(t) &\in \mathcal{W}, & \forall t \in [0, \infty), \\ \mathcal{W} &= \{w \mid w'Ww \leq 1\}, \end{aligned} \quad (5)$$

where W is a given positive definite matrix. In order to specify that the disturbance w is constrained to a given set \mathcal{W} , we use the prefix "semi-global", e.g., semi-global L^2 gain, in the following discussions. We emphasize that our discussion based on a prescribed constraint set \mathcal{W} will be different from the so-called "local" one.

3. EVALUATION OF SELF-SCHEDULING PARAMETERS

In this section, we consider the following linear system with a scalar self-scheduling parameter.

$$\Sigma_{LSS}^1: \begin{cases} \dot{x} = A(\theta_x(x))x + B(\theta_x(x))w(t), x(0) = 0, \\ \theta_x(x) = hx, \end{cases} \quad (6)$$

where the disturbance w is constrained to (5). We evaluate the domain of the self-scheduling parameter by using the output reachable sets analysis (Watanabe *et al.*, 1996). If the domain is obtained, the system Σ_{LSS}^1 is expressed as linear systems with a scalar scheduling parameter.

First we evaluate the domain of the self-scheduling parameter $\theta_x(x(t))$. By regarding $\theta_x(x) = hx$ as the output equation of Σ_{LSS}^1 and using the output reachable sets analysis directly, we have the domain of $\theta_x(x(t))$ as follows.

Lemma 1. Assume that there exist $Q_x > 0, \alpha > 0$ and $q_\theta > 0$ which satisfy the following inequalities,

$$\begin{bmatrix} A(\theta)Q_x + Q_x A'(\theta) + \alpha Q_x & B(\theta) \\ B'(\theta) & -\alpha W \end{bmatrix} \leq 0, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & Q_x h' \\ hQ_x & q_\theta \end{bmatrix} \geq 0, \quad (8)$$

$$\forall \theta \in [-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}].$$

Then the domain of $\theta_x(x(t))$ is given as follows,

$$\Theta \subset [-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}]. \quad (9)$$

Second we evaluate the domain of the time variation of the self-scheduling parameter $\dot{\theta}_x(x(t))$. In the L^2 gain analysis of linear systems with scheduling parameters (Watanabe *et al.*, 1994), it is shown that we can obtain less conservative results by considering the time variation of scheduling parameters. Thus it seems that we can get the same result by considering the time variation of the self-scheduling parameter in our semi-global L^2 gain analysis.

From $\theta_x = hx$, the time variation of $\theta_x(x(t))$ is given as follows,

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_x(x(t)) &= h\dot{x}(t) \\ &= hA(\theta_x(x(t)))x(t) + hB(\theta_x(x(t)))w(t). \end{aligned} \quad (10)$$

The domain of the time variation of $\theta_x(x(t))$ is not obtained directly by using the output reachable sets analysis because the time variation of $\theta_x(x(t))$ depends on $w(t)$. We need another consideration, and so prepare the next lemma.

Lemma 2. Assume that there exists $Y > 0$ which satisfy the following inequality for given $C, D, Q > 0, W > 0$,

$$\begin{bmatrix} 2Q & 0 & 2QC' \\ 0 & 2W^{-1} & 2W^{-1}D' \\ 2CQ & 2DW^{-1} & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad (11)$$

where $Q \in R^{n \times n}$, $W \in R^{m \times m}$ and each of C and D is a matrix with the appropriate dimension. Then the next condition is satisfied

$$y'Y^{-1}y \leq 1, \quad y = Cx + Dw, \quad (12)$$

for any x, w which satisfy

$$\begin{aligned} x &\in \{x \mid x'Q^{-1}x \leq 1\}, \\ w &\in \{w \mid w'Ww \leq 1\}. \end{aligned} \quad (13)$$

The domain of $\theta_x(x(t))$ and that of $\dot{\theta}_x(x(t))$ can be evaluated as follows.

Theorem 3. Assume that there exist $Q_x > 0, \alpha > 0, q_\theta > 0$ and $q_\psi > 0$ which satisfy the following inequalities,

$$\begin{bmatrix} A(\theta)Q_x + Q_x A'(\theta) + \alpha Q_x & B(\theta) \\ B'(\theta) & -\alpha W \end{bmatrix} \leq 0, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & Q_x h' \\ hQ_x & q_\theta \end{bmatrix} \geq 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} 2Q_x & 0 & 2Q_x A'(\theta)h' \\ 0 & 2W^{-1} & 2W^{-1}B'(\theta)h' \\ 2hA(\theta)Q_x & 2hB(\theta)W^{-1} & q_\psi \end{bmatrix} \geq 0, \quad (16)$$

$$\forall \theta \in [-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}].$$

Then the domain of $\theta_x(x(t))$ and that of $\dot{\theta}_x(x(t))$ are given as follows,

$$\Theta \subset [-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}], \quad (17)$$

$$\Psi \subset [-\sqrt{q_\psi}, \sqrt{q_\psi}]. \quad (18)$$

Though the domain of $\theta_x(x(t))$ and that of $\dot{\theta}_x(x(t))$ are characterized as inequality conditions in **Theorem 3**, it is not easy to obtain solutions which satisfy the inequality conditions (14), (15) and (16). The main difficulties are that the inequalities (14) and (16) are the bilinear matrix inequalities which depend on the parameter θ and the domain of θ depends on the unknown parameter q_θ . As for the parameter dependence, we will discuss this problem later (See **Remark 7**). As for the nonlinearity of (14) and (16) and the dependence of the unknown parameter q_θ , we put aside this problem by adopting a recursive calculation as follows.

Corollary 4. Assume that there exist $Q_x > 0, \alpha > 0, q_\theta > 0$ and $q_\psi > 0$ which satisfy the following inequalities for given $\tilde{Q}_x > 0, \tilde{q}_\theta > 0$ and $\tilde{q}_\psi > 0$,

$$\begin{bmatrix} A(\theta)Q_x + Q_x A'(\theta) + \alpha \tilde{Q}_x & B(\theta) \\ B'(\theta) & -\alpha W \end{bmatrix} \leq 0, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & Q_x h' \\ hQ_x & \tilde{q}_\theta \end{bmatrix} \geq 0, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} 2Q_x & 0 & 2Q_x A'(\theta)h' \\ 0 & 2W^{-1} & 2W^{-1}B'(\theta)h' \\ 2hA(\theta)Q_x & 2hB(\theta)W^{-1} & \tilde{q}_\psi \end{bmatrix} \geq 0, \quad (21)$$

$$Q_x \leq \bar{Q}_x, \quad (22)$$

$$q_\theta \leq \bar{q}_\theta, \quad (23)$$

$$q_\psi \leq \bar{q}_\psi, \quad (24)$$

$$\forall \theta \in [-\sqrt{\bar{q}_\theta}, \sqrt{\bar{q}_\theta}].$$

Then the domain of $\theta_x(x(t))$ and that of $\hat{\theta}_x(x(t))$ are given as follows,

$$\Theta \subset [-\sqrt{\bar{q}_\theta}, \sqrt{\bar{q}_\theta}], \quad (25)$$

$$\Psi \subset [-\sqrt{\bar{q}_\psi}, \sqrt{\bar{q}_\psi}]. \quad (26)$$

Remark 5. **Corollary 4** implies that the domains $[-\sqrt{\bar{q}_\theta}, \sqrt{\bar{q}_\theta}]$ and $[-\sqrt{\bar{q}_\psi}, \sqrt{\bar{q}_\psi}]$ are included in the domains $[-\sqrt{\bar{q}_\theta}, \sqrt{\bar{q}_\theta}]$, $[-\sqrt{\bar{q}_\psi}, \sqrt{\bar{q}_\psi}]$ respectively. Thus, using **Corollary 4** recursively, we can expect to obtain the smaller domains.

Remark 6. From **Theorem 3**, the system Σ_{LSS}^1 is described as the linear system with a scalar scheduling parameter given as follows,

$$\dot{x} = A(\theta(t))x + B(\theta(t))w(t),$$

$$\Sigma_{LS}^1 : \theta(t) \in [-\sqrt{\bar{q}_\theta}, \sqrt{\bar{q}_\theta}], \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (27)$$

$$\hat{\theta}(t) \in [-\sqrt{\bar{q}_\psi}, \sqrt{\bar{q}_\psi}], \quad \forall t \in [0, \infty).$$

where w is constrained to (5). Thus semi-global L^2 gain analysis for the nonlinear system Σ_{LSS}^1 is characterized by L^2 gain analysis for linear system with a scalar scheduling parameter (27).

Remark 7. Since system parameters A, B are given as (2), the inequality conditions (19) and (21) in **Corollary 4** can be written in the form of the parameter dependent LMI condition,

$$F_0(Q_u) + f_1(\hat{\theta})F_1(Q_u) + \dots + f_r(\hat{\theta})F_r(Q_u) < 0, \quad (28)$$

where $\hat{\theta}$ is the parameter that satisfies

$$\hat{\theta} \in \hat{\theta}, \quad \hat{\theta} = \{[\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2 \ \dots \ \hat{\theta}_s] \mid \hat{\theta}_i \in [\hat{\theta}_i^{\min}, \hat{\theta}_i^{\max}]\}.$$

In **Corollary 4**, $s = 1$. $f_i : R^s \rightarrow R$ is a continuous function of $\hat{\theta}$, and a symmetric matrix function F_i depends affinely on the unknown matrix Q_u . It is shown in (Azuma *et al.*, 1997) that this type of parameter dependent LMI can be reduced to a finite number of parameter independent LMIs. Thus solutions to the conditions in **Corollary 4** can be computed by using CAD tools, e.g., LMLAB(Gahinet *et al.*, 1995).

4. SEMI-GLOBAL L^2 GAIN ANALYSIS

In this section, we consider the semi-global L^2 gain analysis of linear systems with a scalar self-scheduling parameter Σ_{LSS} . We define the internal stability of Σ_{LSS} and the semi-global L^2 gain of Σ_{LSS} as follows.

Definition 8. Let $\hat{\Sigma}_{LSS}$ be the following linear system with a scalar self-scheduling parameter,

$$\hat{\Sigma}_{LSS} : \begin{cases} \dot{x} = A(\theta_x(x))x, \\ \theta_x(x) = hx, \end{cases}$$

and let \mathcal{E} be a set defined as follows,

$$\mathcal{E} = \{x \in R^n \mid x'Px \leq 1\},$$

where P is a positive definite matrix. The system Σ_{LSS} is said to be internally stable in the stability region \mathcal{E} if all trajectories of $\hat{\Sigma}_{LSS}$ starting from an initial state within \mathcal{E} converge to the equilibrium point $x = 0$ of $\hat{\Sigma}_{LSS}$.

Definition 9. If the system Σ_{LSS} is internally stable, the L^2 gain of Σ_{LSS} is defined by

$$G(\Sigma_{LSS}) = \sup_{\substack{w \in L^2 \cap \mathcal{W} \\ w \neq 0}} \frac{\|z\|_{L^2}}{\|w\|_{L^2}},$$

and called the semi-global L^2 gain. Note that \mathcal{W} denotes the constraint set of the disturbance w .

We evaluate the semi-global L^2 gain for Σ_{LSS} by using the result of L^2 gain analysis for linear systems with scheduling parameters (Watanabe *et al.*, 1994) (Wu *et al.*, 1995), which is summarized as follows.

Lemma 10. (Watanabe *et al.*, 1994) (Wu *et al.*, 1995) Consider the linear system with a scalar scheduling parameter given as follows,

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta(t))x + B(\theta(t))w(t), \quad x(0) = 0, \\ z = C(\theta(t))x + D(\theta(t))w(t), \\ \theta(t) \in [\alpha_1, \alpha_2], \quad \forall t \in [0, \infty), \\ \hat{\theta}(t) \in [\beta_1, \beta_2], \quad \forall t \in [0, \infty). \end{cases} \quad (29)$$

This system is internally stable and the L^2 gain of this system is less than γ if there exists a continuously differentiable matrix function $Q(\theta)$ such that

$$Q(\theta) > 0, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} A'(\theta)Q(\theta) + Q(\theta)A(\theta) & & & & \\ +\rho \frac{dQ}{d\theta}(\theta) & Q(\theta)B(\theta) & C'(\theta) & & \\ B'(\theta)Q(\theta) & -\gamma^2 I & D'(\theta) & & \\ C(\theta) & D(\theta) & -I & & \end{bmatrix} < 0, \quad (31)$$

$$\forall \theta \in [\alpha_1, \alpha_2], \quad \rho = \beta_1, \beta_2.$$

Remark 11. Inequalities in **Lemma 10** can be written as in the form of the parameter dependent LMI condition (28) (Azuma *et al.*, 1997). Thus we can compute $Q(\theta)$ which satisfies (30) and (31) for all $\theta \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

Combining **Lemma 10** with **Theorem 3**, we have the next theorem.

Theorem 12. Assume that there exist $Q_x > 0, \alpha > 0, q_\theta > 0, q_\psi > 0$ and a continuously differentiable matrix function $Q(\theta)$ which satisfy the following inequalities,

$$\begin{bmatrix} A(\theta)Q_x + Q_x A'(\theta) + \alpha Q_x & B(\theta) \\ B'(\theta) & -\alpha W \end{bmatrix} \leq 0, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & Q_x h' \\ h Q_x & q_\theta \end{bmatrix} \geq 0, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} 2Q_x & 0 & 2Q_x A'(\theta) h' \\ 0 & 2W^{-1} & 2W^{-1} B'(\theta) h' \\ 2h A(\theta) Q_x & 2h B(\theta) W^{-1} & q_\psi \end{bmatrix} \geq 0, \quad (34)$$

$$Q(\theta) > 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} A'(\theta)Q(\theta) + Q(\theta)A(\theta) & Q(\theta)B(\theta) & C'(\theta) \\ \pm \left(\sqrt{q_\psi} \frac{dQ}{d\theta}(\theta) \right) & -\gamma^2 I & D'(\theta) \\ B'(\theta)Q(\theta) & D(\theta) & -I \\ C(\theta) & & \end{bmatrix} < 0, \quad (36)$$

$$\forall \theta \in [-\sqrt{q_\theta}, \sqrt{q_\theta}],$$

where the notation $\pm(\cdot)$ indicates $+(\cdot)$ and $-(\cdot)$ in the inequality.

Then the linear system with a scalar self-scheduling parameter Σ_{LSS} is internally stable in the stability region \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M} = \{x \mid x' Q_x^{-1} x \leq 1\},$$

and the semi-global L^2 gain is less than γ .

Corollary 13. Assume that there exist $Q_x > 0, \alpha > 0, q_\theta > 0, q_\psi > 0$ and a continuously differentiable matrix function $Q(\theta)$ which satisfy the following inequalities for given $\bar{Q}_x > 0, \bar{q}_\theta > 0$ and $\bar{q}_\psi > 0$,

$$\begin{bmatrix} A(\theta)Q_x + Q_x A'(\theta) + \alpha \bar{Q}_x & B(\theta) \\ B'(\theta) & -\alpha W \end{bmatrix} \leq 0, \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & Q_x h' \\ h Q_x & \bar{q}_\theta \end{bmatrix} \geq 0, \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} 2Q_x & 0 & 2Q_x A'(\theta) h' \\ 0 & 2W^{-1} & 2W^{-1} B'(\theta) h' \\ 2h A(\theta) Q_x & 2h B(\theta) W^{-1} & \bar{q}_\psi \end{bmatrix} \geq 0, \quad (39)$$

$$Q_x \leq \bar{Q}_x, \quad (40)$$

$$q_\theta \leq \bar{q}_\theta, \quad (41)$$

$$q_\psi \leq \bar{q}_\psi, \quad (42)$$

$$Q(\theta) > 0, \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} A'(\theta)Q(\theta) + Q(\theta)A(\theta) & Q(\theta)B(\theta) & C'(\theta) \\ \pm \left(\sqrt{\bar{q}_\psi} \frac{dQ}{d\theta}(\theta) \right) & -\gamma^2 I & D'(\theta) \\ B'(\theta)Q(\theta) & D(\theta) & -I \\ C(\theta) & & \end{bmatrix} < 0, \quad (44)$$

$$\forall \theta \in [-\sqrt{\bar{q}_\theta}, \sqrt{\bar{q}_\theta}].$$

where the notation $\pm(\cdot)$ indicates $+(\cdot)$ and $-(\cdot)$ in the inequality.

Then the linear system with a scalar self-scheduling parameter Σ_{LSS} is internally stable in the stability region \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M} = \{x \mid x' Q_x^{-1} x \leq 1\},$$

and the semi-global L^2 gain is less than γ .

5. NUMERICAL EXAMPLE

Consider the following linear system with a scalar self-scheduling parameter,

$$\dot{x} = \{-1 - e^{\theta_x(x)}\}x + \{1 + 0.5\theta_x(x)\}w(t),$$

$$x(0) = 0,$$

$$\Sigma_p: z = \{2\theta_x(x)\}x + 0.2w,$$

$$\theta_x(x) = x,$$

(45)

where the disturbance w is constrained to the following form,

$$w(t) \in \{w \mid w'w \leq 1\}, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

We evaluate the semi-global L^2 gain of this system by using our approach. We restricted $Q(\theta)$ in **Corollary 13** to the following two types,

Case 1) $Q(\theta) = Q_0 + \exp(\theta)Q_1$,

Case 2) $Q(\theta) = Q_0$.

In **Case 1**, we evaluated γ (the semi-global L^2 gain of this system), Θ (the domain of the self-scheduling parameter) and Ψ (the domain of the time variation of the self-scheduling parameter) by using **Corollary 13** recursively. We obtained the following results,

$$\gamma = 0.378,$$

$$\Theta = [-0.503, 0.503], \quad \Psi = [-2.589, 2.589].$$

In **Case 2**, we evaluated γ and Θ because the semi-global L^2 gain in **Case 2** does not depend on Ψ .

$$\gamma = 0.677, \quad \Theta = [-0.503, 0.503].$$

These results show that we can evaluate less conservative semi-global L^2 gain in **Case 1** than in **Case 2**, namely, conservativeness of the evaluation of semi-global L^2 gain is improved by considering the domain of the time variation of the self-scheduling parameter.

The simulation results are shown in Figure 1, where the disturbance w was given as Figure 2. These figures show that the trajectories of the self-scheduling parameter $\theta_x(x(t))$ and its time variation $\dot{\theta}_x(x(t))$ are included in Θ and Ψ respectively. Note that $Q(\theta)$ in **Case 1** or **Case 2** depends on the semi-global L^2 gain but not the domain of the self-scheduling parameter and that of its time variation.

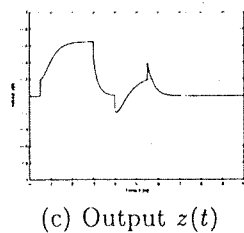
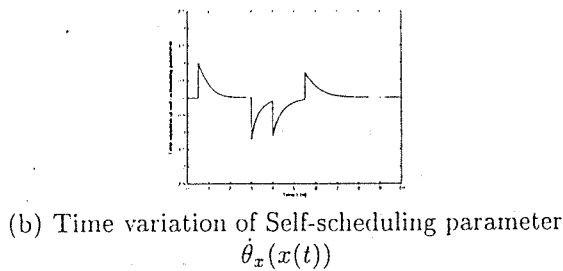
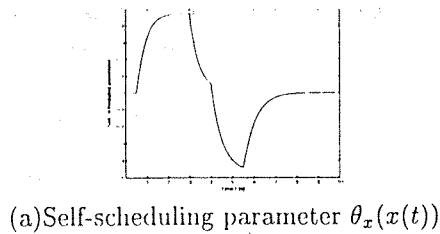


Fig. 1. Simulation results

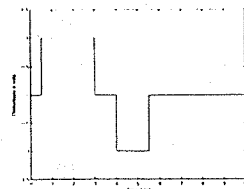


Fig. 2. Disturbance $w(t)$ constrained to \mathcal{W}

6. CONCLUSION

In this paper, we considered semi-global L^2 gain analysis for a class of nonlinear systems, which are described as linear systems with self-scheduling parameters. We proposed first the technique of evaluating the domain of the self-scheduling parameter and the time variation of the self-scheduling parameter. By using this technique, we next established the approach together with the feasible computation algorithms to semi-global L^2 gain analysis for the class of nonlinear systems. The approach was demonstrated in a numerical example.

We focus on semi-global L^2 gain analysis; our approach can be extended to the semi-global state feedback H^∞ controller design, which is discussed in (Azuma *et al.*, 1998).

7. REFERENCES

- Apkarian, P., P. Gahinet and G. Becker (1995). Self-scheduled H^∞ control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica* Vol. 31, No. 9, 1251-1261.
- Azuma, T., R. Watanabe and K. Uchida (1997). An approach to solving parameter-dependent LMI conditions based on finite number of LMI conditions. *In Proc. of ACC* pp. 510-514.
- Azuma, T., R. Watanabe and K. Uchida (1998). Semi-global state feedback H^∞ control of nonlinear systems - an approach via linear systems with self-scheduling parameters -. *In Proc. of ACC*.
- Becker, G., D. Philbrick A. Packard and G. Balas (1993). Control of parametrically-dependent linear systems : A single quadratic lyapunov approach. *In Proc. of ACC* pp. 2795-2799.
- Bourlès, H. and F. Colledani (1995). W-stability and local input-output stability results. *IEEE Control Systems Magazine* Vol. 40, No. 6, 1102-1108.
- Boyd, S., E. Feron L. El Ghaoui and V. Balakrishnan (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Vol. 15. SIAM studies in applied mathematics.
- Gahinet, P., A. J. Laub A. Nemirovski and M. Chilali (1995). LMI control toolbox for use with MATLAB.
- Grantham, W. J. (1980). Estimating controllability boundaries for uncertain systems. In: *Lecture Notes on Biomathematics*. Springer-Verlag.
- Packard, A. (1994). Gain scheduling via linear fractional transformations. *Syst. & Control Letters* Vol. 22, No.2, 79-92.
- Rehm, A. and F. Allgow (1997). Self-scheduled nonlinear output feedback H_∞ -control of a class of nonlinear systems. *In Proc. of ACC* pp. 386-390.
- Sato, Y., R. Watanabe and K. Uchida (1998). Semi-global L^2 gain analysis for kth-degree systems based on reachable sets analysis. *In Proc. of ACC*.
- Shamma, J. S. and M. Athans (1992). Gain scheduling: Potential, hazards and possible remedie. *IEEE Control Systems Magazine* Vol. 12, 101-107.
- Summer, D. (1985). Lyapunov approximation of reachable sets for uncertain linear systems. *Int. J. Control* Vol. 41, 1235-1243.
- Watanabe, R., K. Uchida and M. Fujita (1996). Analysis of output reachable sets for quadratic systems(in japanese). *In Proc. of DST Symposium* pp. 193-198.
- Watanabe, R., M. Fujita K. Uchida and E. Shimemura (1994). L^2 gain and H^∞ control of linear systems with scheduling parameter. *In Proc. of 33rd IEEE CDC* pp. 1412-1414.
- Wu, F., A. Packard and G. Becker (1995). Induced L^2 -norm control for LPV system with bounded parameter variation rates. *In Proc. of ACC* pp. 2379-2383.

ゲインスケジューリング — 適応/非線形制御への展開

内田 健康*・渡辺 亮**

1. はじめに

ゲインスケジューリングは、動作点の移動に伴い動特性が変化する非線形システムに対する実際的な制御手法である。これまで用いられてきたゲインスケジューリングの方法は、1) 非線形システムから、いくつかの動作点において線形化モデルを導き、2) 各線形化モデルに対して線形制御則を設計し、3) 線形制御則を補間(スケジューリング)する、というステップからなる。最後に得られるスケジューリングされた制御則を、スケジューリング制御則(scheduled controller)と呼んでいる。近年、LPVシステム(Linear Parameter Varying system)と呼ばれるスケジューリングパラメータを持つ線形系によるモデリング¹²⁾とロバスト制御理論の最近の成果とが結びついた新しいゲインスケジューリングが提案されている。新しいゲインスケジューリングは、非線形システムからLPVシステムを導くステップと、LPVシステムに対して線形制御則を設計するステップからなる。新しいゲインスケジューリングでは、スケジューリングパラメータを(そしてLPVシステムを)決定してから制御則を決定するという順になるため、伝統的なゲインスケジューリングのステップ(上記1), 2), 3))とは順番が逆になるが、基本的な考え方は変わっていない。新しいゲインスケジューリングのもう一つの特徴は、制御性能の評価に L^2 ゲインが用いられる点である。本稿の第1の目標は、この新しいゲインスケジューリングの概要を、筆者らが提案してきた手法を中心に紹介することである。

ゲインスケジューリングは、オンラインで得られるスケジューリングパラメータの値に応じて調整される制御則を与えることから、ひとつの適応制御と考えることができる²⁾。またスケジューリングパラメータは、たとえば動作点の変化を反映するように選ばれるから、多くの場

合に出力や状態に依存するパラメータであり、ゲインスケジューリングは非線形制御と考えることもできる¹²⁾。ゲインスケジューリングは、冒頭にも述べたように、もともと非線形システムに対する制御手法である。本稿の第2の目標は、ゲインスケジューリングから適応制御への最近の展開を、またゲインスケジューリングの非線形制御への新しい展開を紹介することによって、新しいゲインスケジューリングの特徴と可能性を議論することである。

以下、 I は単位行列、 X' は行列 X の転置を、 $X > 0$ ($X \geq 0$)は行列 X が正定(半正定)であることを意味する。

2. スケジューリングパラメータを持つ線形システムとスケジューリング制御問題

2.1 スケジューリングパラメータを持つ線形システム(LPVシステム)

新しいゲインスケジューリングの出発点は、制御対象をスケジューリングパラメータを持つ線形システムでモデル化することである。そのモデルは、つぎのように与えられる。

$$(\Sigma_0) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_0(\theta(t))x(t) + B_0(\theta(t))u(t) \\ y(t) &= C_0(\theta(t))x(t) \end{aligned}$$

$x(t)$ は状態、 $u(t)$ は入力、そして $y(t)$ は出力である。 $\theta(\cdot) = \{\theta(t), t \in [0, \infty)\}$ がスケジューリングパラメータであり、その値の取り得る範囲、さらにはその変化率の変動幅について事前におおよその推定ができる。そこで $\theta(t)$ は区間 $[0, 1]$ でその値をとるものとし、さらにその変化率はつぎのような範囲にあることがわかっているものと仮定する。

$$\left| \frac{d}{dt}\theta(t) \right| \leq \nu_{\max}$$

このようなスケジューリングパラメータ $\theta(\cdot)$ のクラスを Θ と表す。

* 早稲田大学 理工学部

** 石川島播磨重工業(株) 制御技術部

(現在、大阪大学 大学院 工学研究科)

Key Words: gain scheduling, LPV system, LMI, adaptive control nonlinear, control.

LPV システムにおいては、スケジューリングパラメータは形式的には外生信号と見なされるが、一般には、状態、出力などの内生信号にも依存する¹²⁾。なお本稿ではスケジューリングパラメータはスカラーとするが、ベクトルの場合への一般化は容易である⁴⁾。

2.2 スケジューリング制御問題

LPV システム (Σ_0) に制御則の設計のための重み関数を併せた一般化 LPV システムを導入しよう。

$$\begin{aligned}
 (\Sigma) \quad \frac{d}{dt}x(t) &= A(\theta(t))x(t) + B_1(\theta(t))w(t) \\
 &\quad + B_2(\theta(t))u(t), \quad x(0) = 0 \\
 z(t) &= C_1(\theta(t))x(t) + D_{12}(\theta(t))u(t) \\
 y(t) &= C_2(\theta(t))x(t) + D_{21}(\theta(t))w(t)
 \end{aligned}$$

$x(t)$ は状態、 $u(t)$ は制御入力、 $w(t)$ は外乱、 $z(t)$ は被制御出力、そして $y(t)$ は観測出力である。スケジューリングパラメータ $\theta(\cdot)$ はクラス Θ に属する。ここで初期状態は零と仮定しているが、これは以下に述べる L^2 ゲインによって制御性能を評価するためである。

スケジューリングパラメータは一般に制御対象の動作に伴って定まるもので、オンラインで与えられ、事前に与えられるものではない。したがって、LPV システム (Σ) に対する制御則の設計において、LPV システム (Σ) をいわゆる線形時変システムと見なして線形時変システムに対する標準的な制御設計法を適用することはできない。また、制御則のパラメータへの依存性は、オンラインでその値が与えられることに矛盾しないように、因果律を満たすものでなければならない。したがって、許容される制御則をつぎの形式で考える。

$$\begin{aligned}
 (\Gamma) \quad \frac{d}{dt}x_c(t) &= A_c(\theta(t))x_c(t) + B_c(\theta(t))y(t), \\
 x_c(0) &= 0 \\
 u(t) &= C_c(\theta(t))x_c(t)
 \end{aligned}$$

(とくに状態が観測できる場合、状態フィードバック制御則 $u(t) = C_c(\theta(t))x(t)$ と考える。) これがスケジューリング制御問題である。スケジューリング制御問題は“一般化 LPV システム (Σ) に対して制御則 (Γ) を構成し、閉ループシステム $(\Sigma\Gamma)$ を (内部) 安定化して要求される制御性能を実現することである”

新しいゲインスケジューリングでは、閉ループシステム $(\Sigma\Gamma)$ の制御性能を L^2 ゲインで評価する。 L^2 ゲインは、パラメータ $\theta(\cdot)$ を固定することに、つぎのように定義される。

$$G(\Sigma\Gamma) := \sup_{w \in L^2, w \neq 0} \frac{\|z\|_{L^2}}{\|w\|_{L^2}}$$

L^2 ゲインによる制御性能評価の妥当性については、ロ

バスト制御に関する近年の成果の中で認められてきている。なお閉ループシステムが時不変の場合には、 L^2 ゲイン $G(\Sigma\Gamma)$ は w から z までの伝達関数の H^∞ ノルムと一致する。以下では、パラメータ $\theta(\cdot)$ にかかわらず、ある値以下の L^2 ゲイン $G(\Sigma\Gamma)$ を保証するスケジューリング制御問題を考える。

本節の最後に、ゲインスケジューリングとロバスト制御の関係に触れておきたい。スケジューリングパラメータ $\theta(\cdot)$ が未知であって観測できないものであれば、実現できる制御則はパラメータ $\theta(\cdot)$ に依存することは許されない。すなわち、制御則 (Γ) の係数行列 (A_c, B_c, C_c) がパラメータ $\theta(\cdot)$ の値に依存することは許されない。この場合は未知パラメータ $\theta(\cdot)$ を含む線形システム (Σ) に対するロバスト制御問題と考えることができる。したがって、本来まったく別の問題であるが、数学的な形式から見ればスケジューリング制御問題はロバスト制御問題の一般化である。

3. スケジューリングパラメータに依存するリアプノフ関数に基づくスケジューリング制御の構成法

いま LPV システム (Σ) の状態 $x(t)$ とスケジューリング制御則 (Γ) の状態 $x_c(t)$ を併せて $x_a(t) := (x(t)', x_c(t)')$ (状態フィードバック制御則に対しては $x_a(t) := x(t)$) として、閉ループシステム $(\Sigma\Gamma)$ をつぎのように表す。

$$\begin{aligned}
 (\Sigma\Gamma) \quad \frac{d}{dt}x_a(t) &= A_a(\theta(t))x_a(t) + B_a(\theta(t))w(t), \\
 x_a(0) &= 0 \\
 z(t) &= C_a(\theta(t))x_a(t)
 \end{aligned}$$

閉ループシステム $(\Sigma\Gamma)$ の軌道に沿って、スケジューリングパラメータに依存するリアプノフ関数

$$V(t) = x_a(t)' Q(\theta(t)) x_a(t)$$

の変化を考えることによってつぎの結果が示される。すなわち、ある正定数 γ に対して、スケジューリングパラメータの値域 $[0, 1]$ 上で定義されたリカッチ微分不等式

$$\begin{aligned}
 -\nu_{\max} \frac{d}{d\theta} Q(\theta) + A_a(\theta)' Q(\theta) + Q(\theta) A_a(\theta) \\
 + \frac{1}{\gamma^2} Q(\theta) B_a(\theta) B_a(\theta)' Q(\theta) \\
 + C_a(\theta)' C_a(\theta) < 0
 \end{aligned}$$

を満たす解 $Q(\theta)$ が存在し、各 θ で $Q(\theta) > 0$ および $dQ(\theta)/d\theta \leq 0$ が成立すれば、クラス Θ のすべてのスケジューリングパラメータ $\theta(\cdot)$ に対して閉ループシステム $(\Sigma\Gamma)$ は安定であり $G(\Sigma\Gamma) \leq \gamma$ が保証される¹⁵⁾。このとき、スケジューリングパラメータ $\theta(t)$ の変化を無視して

$Q(\theta)$ を定数行列に限定する方法⁶⁾と比較して、性能 γ の保守性が改良されることは明らかであるが、参考文献15)では、実際に大幅な改良がなされた数値実験が報告されている。なお条件 $dQ(\theta)/d\theta \leq 0$ は、微分項の前の符号を変えたもう一本のリカッチ微分不等式を導入することによって取り除くことができる²¹⁾。また、 $Q(\theta)$ を求めると同時にリカッチ微分不等式を満たす $(A_c(\theta), B_c(\theta), C_c(\theta))$ を求めることによって、スケジューリング制御則 (Γ) を得ることができる(状態フィードバックの場合¹⁶⁾、出力フィードバックの場合^{13), 17)}を参照)。

ここでは、リカッチ微分不等式を解くことによって、スケジューリング制御を構成できることを述べた。しかしながら、この不等式は $[0,1]$ 上のパラメータ θ に依存するため実際には無限個の不等式であり、この不等式を解くことは一般には容易なことではない。4. に、この問題を克服する試みを紹介する。

4. スケジューリングパラメータに依存するリカッチ微分不等式の有限個のLMI条件に基づく解法

ここでは、有限個のLMIを解くことによって、スケジューリングパラメータに依存するリカッチ微分不等式の解を求める方法²⁰⁾を紹介する。なお係数行列が θ のアフィン関数で与えられる場合に限定すれば、ここで紹介する方法とは異なる有限個のLMI条件による方法がある⁷⁾。

いま閉ループシステム $(\Sigma\Gamma)$ の係数行列 $(A_a(\theta), B_a(\theta), C_a(\theta))$ が、つぎのようにスケジューリングパラメータ θ の p 次の多項式行列で表現できると仮定する。

$$A_a(\theta) = \sum_{k=0}^p \theta^k A_k, \quad B_a(\theta) = \sum_{k=0}^p \theta^k B_k, \\ C_a(\theta) = \sum_{k=0}^p \theta^k C_k$$

これは、 θ に関して連続な係数行列に対しては実用上は十分に正当化できる仮定である。このとき、解 $Q(\theta)$ を θ に関するつぎの q 次の多項式行列の形式で求めよう。

$$Q(\theta) = \sum_{k=0}^q \theta^k Q_k$$

まず上記のリカッチ微分不等式条件をLMIの形式に書き直す。その結果は、 $[0,1]$ 上で定義される行列関数 $Q(\theta)$ に関する線形不等式

$$\begin{bmatrix} -Q(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{d\theta}Q(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R(Q(\theta), \frac{d}{d\theta}Q(\theta)) & Q(\theta)B_a(\theta) \\ 0 & 0 & B_a(\theta)'Q(\theta) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

ここで

$$R(Q(\theta), \frac{d}{d\theta}Q(\theta)) := -\nu_{\max} \frac{d}{d\theta}Q(\theta) + A_a(\theta)'Q(\theta) \\ + Q(\theta)A_a(\theta) + C_a(\theta)'C_a(\theta)$$

となる。この不等式は、先の多項式行列の表現を代入し整理すると、つぎのような形式に書き直すことができる。

$$\sum_{k=0}^{p+q} \theta^k F_k(Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_q) < 0$$

ここで $F_k(Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_q)$, $k=0, 1, 2, \dots, p+q$ は $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_q$ に関してアフィン形式の行列関数である。問題はこの不等式を解いて定数行列 $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_q$ を求めることであるが、この不等式は θ に関する多項式行列不等式であるから、依然として無限個の不等式を解く必要がある。渡辺らは、この無限個の不等式を解くためには、つぎの有限個のLMIを解いて $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_q$ を求めれば十分であることを示した²⁰⁾。

$$\sum_{k=0}^{p+q} r_{ik} F_k(Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_q) < 0, \quad i=1, 2, \dots, m$$

ここで $r_{i0}=1$, $i=1, 2, \dots, m$ であり、 $[r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{ip+q}]'$, $i=1, 2, \dots, m$ は、曲線 $\{[\theta, \theta^2, \dots, \theta^{p+q}] | \theta \in [0, 1]\}$ を含む $p+q$ 次元の凸多面体の頂点を表す。

スケジューリング制御則 (Γ) を求めるためには、以上の手順の中で係数行列 $(A_c(\theta), B_c(\theta), C_c(\theta))$ を θ に関する適当な次数の多項式関数と仮定し、有限個のLMI条件を導いた段階で標準的なLMIに基づく制御設計法を適用すればよい。このようにして、スケジューリングパラメータの変化率を考慮した制御則 (Γ) が、有限個のLMIを解くことによって与えられることになる。この方法では、保守性の少ない結果を得るためには、上記の凸多面体をできるだけ小さく構成することが重要である。そのような凸多面体を構成するための一つの系統的な方法も提案されている³⁾。

以上の手法は、閉ループシステム $(\Sigma\Gamma)$ の係数行列 $(A_a(\theta), B_a(\theta), C_a(\theta))$ がスケジューリングパラメータ θ の連続関数行列の場合へ、また、スケジューリングパラメータ θ がベクトルの場合への一般化も可能である⁴⁾。

5. ゲインスケジューリングによる適応制御へのアプローチ

ここでは、a) ロバスト制御、b) ゲインスケジューリング、c) 適応制御の類似点と相違点について考えてみたい。そのために、LPVシステム (Σ) の特別な場合として、状態が観測できる場合 $y(t) = x(t)$ そしてパラメータ $\theta(t)$ が定数 θ である場合を取り上げる。すなわち、システム (Σ) は $[0,1]$ にある定数 θ をパラメータとする線形システムの集合であり、制御則 (Γ) は状態フィードバック制御則とする。

a) θ が未知で観測できない場合、システムの集合 (Σ) に含まれるすべてのシステムに対して、 θ に依存しない単一の制御則 C_c を構成するのがロバスト制御である。ロバスト制御は、4. までに述べたゲインスケジューリングの特別な場合として構成できる。

b) θ の値がオンラインでわかる場合、システムの集合 (Σ) に含まれるすべてのシステム (すべての θ) に対して制御則 $C_c(\theta)$ を事前に計算しておき、 θ の値がわかった時点で対応する制御則を用いるのがゲインスケジューリングである。

c) θ が未知で観測できない場合、ロバスト制御とは異なり、観測出力からパラメータ θ を推定し、その推定値 ρ に基づいて制御則を調整するのが適応制御の考え方である。ここでは、システム (Σ) において、係数行列 ($A(\theta)$, $B_1(\theta)$, $B_2(\theta)$) が θ のアフィン関数

$$A(\theta) = A_0 + \theta A_1, \quad B_1(\theta) = B_{10} + \theta B_{11}, \\ B_2(\theta) = B_{20} + \theta B_{21}$$

であり、しかも状態に加えて外乱も観測できる場合に限定して、ゲインスケジューリングに基づく適応制御の構成法を紹介しよう。まずスケジューリング (状態フィードバック) 制御問題を解く。すなわち、 $[0,1]$ のすべての θ に対するリカッチ微分不等式 (ここでは ν_{max} はひとつの設計パラメータであり適当に設定してよいが、あとで推定値 $\rho(t)$ の変化率の絶対値の上限として用いる) の解 $Q(\theta)$ およびスケジューリング制御則 $C_c(\theta)$ を求める。いま θ の真値を θ^* とする。 θ^* は未知で観測できないため制御則 $C_c(\theta^*)$ を選ぶことができない。そこで、つぎに観測出力 (ここでは状態と外乱) に基づいて θ^* を推定して推定値 $\rho(t)$ を構成する。最後に、制御則を $C_c(\rho(t))$ と定める。これが適応制御則となる。閉ループシステムはつぎのような構成になる。

$$(\Lambda) \quad \frac{d}{dt} x(t) = \{A(\theta^*) + B_2(\theta^*)C_c(\rho(t))\}x(t) \\ + B_1(\theta^*)w(t), \quad x(0) = 0 \\ z(t) = \{C_1(\theta^*) + D_{12}(\theta^*)C_c(\rho(t))\}x(t)$$

残された問題は推定値 $\rho(t)$ を求めること、そして構成された閉ループシステムの性能を確認することである。そのために、すでに得られている正定行列関数 $Q(\theta)$ および適当に選んだ正定数 α を用いてつぎのリアプノフ関数を考える。

$$V(t) = x(t)'Q(\rho(t))x(t) + \alpha(\rho(t) - \theta^*)^2$$

閉ループシステムの軌道に沿って $V(t)$ の変化率を計算し、 $Q(\theta)$ はリカッチ微分不等式の解であることを用いると、つぎのことが示される。すなわち、推定値 $\rho(t)$ が

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{1}{\alpha} \{A_1x(t) + B_{11}w(t) \\ + B_{21}C_c(\rho(t))x(t)\}'Q(\rho(t))x(t)$$

を満たし、しかも推定値 $\rho(\cdot)$ がクラス Θ に属するとき、閉ループシステム (Λ) は安定であり $G(\Lambda) \leq \gamma$ を満足する。このとき、上記の非線形微分方程式が推定値 $\rho(t)$ を与える推定方程式となる。なお、この推定方程式によって得られる推定値 $\rho(\cdot)$ がクラス Θ に属するとは限らないため、一般には推定方程式および制御則の修正が必要である^{8),22)}。

ここで紹介した適応制御の構成法は、パラメータの推定値 $\rho(t)$ の変化率の上限値 ν_{max} を考慮することによって、これまでに提案されている方法^{8),22)} を一般化したものである。

6. ゲインスケジューリングによる非線形制御へのアプローチ

ゲインスケジューリングがもとの非線形システムに対してその制御性能を保証するのは、LPVシステムがもとの非線形システムの“良い”近似となっている場合である^{12),18)}。“良い”近似とは何か、非線形制御手法としてのゲインスケジューリングを完結させるためにはこの間に答えなければならないが、一般的に答えることは容易ではない。一方、LPVシステムとして表現できる非線形システムに焦点を絞り、ゲインスケジューリングの方法による非線形制御手法を確立しようという試みがある。ここでは、この試みを紹介する。

スケジューリングパラメータ $\theta(t)$ が内生信号とくに状態 $x(t)$ に依存し、 $\theta(t) = h(x(t))$ である場合を考えよう。このとき、2. で述べたスケジューリング制御問題は、非線形システム (Σ) に対して非線形制御則 (Γ) を構成する非線形制御問題となる。ここでも議論を簡単にするために、制御則 (Γ) として状態フィードバックの場合を考えよう。閉ループシステム ($\Sigma\Gamma$) は、つぎのように記述される非線形システムとなる。

$$\begin{aligned}
 (\Sigma\Gamma) \quad & \frac{d}{dt}x(t) = A_a(h(x(t)))x(t) \\
 & + B_a(h(x(t)))w(t), \quad x(0) = 0 \\
 & z(t) = C_a(h(x(t)))x(t)
 \end{aligned}$$

ここで、もしも $h(x(t))$ および $dh(x(t))/dt$ の値域が与えられれば、3. と 4. の解析/設計手法は、そのままこの非線形制御問題に適用できる。ただし、閉ループシステム $(\Sigma\Gamma)$ は非線形システムであるから、その L^2 ゲイン性能は、十分小さな絶対値を持った外乱に対して（すなわち局所的な意味で）保証されるだけである。したがって検討すべき問題は、つぎの二つとなる。

P1) $\theta(t)=h(x(t))$ で定義される $\theta(t)$ の値域およびその変化率 $d\theta(t)/dt$ の値域をいかに評価するか。

P2) 非線形閉ループシステム $(\Sigma\Gamma)$ に対して L^2 ゲイン性能を保証する外乱の大きさをいかに評価するか。

変化率 $d\theta(t)/dt = dh(x(t))/dt$ はシステム (Σ) の右辺を用いて表現できる。そこで、問題 P1 を解決するために、表面的には変化率を消去してしまい、 $x(t)$ の値域を設定し（すなわち $\theta(t)$ の値域を評価し）、解析/設計を行い、その結果に基づいて値域を修正するという繰返し手法が提案されている¹⁰⁾。しかしながら、この方法では問題 P2 に対して明確な解答を与えるのは難しい。最近、問題 P1 と P2 を同時に解決するために、状態あるいは出力の可到達集合解析^{19),11)} に基づくアプローチが展開されている⁵⁾；その出発点となるのは、外乱の大きさを制限し、たとえば

$$W = \{w(t)'w(t) \leq \sigma\}$$

を満たす外乱だけを想定することである。 σ は適当に選ばれた正定数である。このとき、非線形閉ループシステム $(\Sigma\Gamma)$ に対して、 $x(0)=0$ を初期状態とする状態 $x(t), 0 \leq t < \infty$ が到達できる領域 Ω (可到達集合) は、つぎのように評価される。すなわち、行列不等式

$$\begin{bmatrix} A_a(h(x))'P + PA_a(h(x)) + \lambda P & PB_a(h(x)) \\ B_a(h(x))'P & \lambda\sigma^{-1}I \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\forall x \in \{x'Px \leq 1\}$$

および $P > 0$ を満たす定数行列 P および正定数 λ が存在するとき、 $\Omega \subset \{x'Px \leq 1\}$ が成立する。問題 P1 はこの結果を用いて解決できる。さらに、3. で示した L^2 ゲインに関する不等式条件を加えて、これらの条件を“同時に”解くことによって、クラス W に属する外乱に対する非線形システム $(\Sigma\Gamma)$ の L^2 ゲインの値を γ 以下にすることができる。このようにして、問題 P2 に対しても一つの解答を与えることができる。なお、上記の不等式は線形ではないが、逐次的な手順を加えることによって、

線形行列不等式として扱うことができる。また、不等式がパラメータに依存するため無限次元となる問題に対しては、再び 4. の手法を適用することができる。

7. おわりに

本稿では、LPV システムによる記述を基礎とする新しいゲインスケジューリングの考え方を紹介し、適応制御そして非線形制御への展開の可能性を議論した。

本稿では触れなかったが、スケジューリング制御問題の解を得るためのアドホックな方法としてパラメータ凍結法 (frozen parameter method)¹²⁾がある。また、LPV システムがスケジューリングパラメータに関する線形分数変換として与えられる場合には、ロバスト制御問題における LMI アプローチを直接的に一般化した解法がある^{1),9)}。これらの解法については、それぞれ原論文あるいは解説^{13),14)}を参照していただきたい。

(1997年12月10日受付)

参考文献

- 1) P. Apkarian and P. Gahinet: A convex characterization of parameter-dependent H^∞ controllers; *Proc. of the 32nd CDC*, pp. 1654-1659 (1993)
- 2) K. J. Astrom and B. Wittenmark: *Adaptive Control, 2nd Edition*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1995)
- 3) 東, 渡辺, 内田: 有限個の LMI 条件に基づいたスケジューリングパラメータを持つ線形システムの解析における凸包の構成法; 第 25 回制御理論シンポジウム予稿集, pp. 73-78 (1996)
- 4) T. Azuma, R. Watanabe and K. Uchida; An approach to solving parameter-dependent LMI conditions based on finite number of LMI conditions; *Proc. of 1997 ACC*, pp. 510-514 (1997)
- 5) 東, 渡辺, 内田: 非線形システムの準大域的な L^2 ゲイン解析—自己スケジューリングパラメータを持つ線形システムに基づくアプローチ—; 第 20 回 DST シンポジウム予稿集, pp. 149-154 (1997)
- 6) G. Becker and A. Packard: Robust performance of linear parametrically-varying systems using parametrically-dependent linear feedback; *Sys. Contr. Lett.*, Vol. 23, pp. 205-215 (1994)
- 7) P. Gahinet, P. Apkarian and M. Chilali: Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 41, pp. 436-442 (1996)
- 8) W. M. Lu and A. Packard, Adaptive H_∞ -control for nonlinear systems: a dissipation theoretical approach, Preprint (1996)
- 9) A. Packard: Gain scheduling via linear fractional transformations; *Sys. Contr. Lett.*, Vol. 22, pp. 79-92 (1994)
- 10) 佐々木, 内田: 拡張 2 次形式リアブノフ関数による非線形システムの L_2 ゲイン解析—線形行列不等式による凸解析アプローチ—; 第 25 回制御理論シンポジウム予稿集, pp. 83-88 (1996) (計測自動制御学会論文集, Vol. 33, pp. 352-358 (1997))
- 11) 佐藤, 渡辺, 内田: 可到達集合解析に基づく k 次システム

- の準大域的な L^2 ゲイン解析；第 26 回制御理論シンポジウム予稿集，pp. 93-98 (1997)
- 12) J. S. Shamma and M. Athans: Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants; *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 35, pp. 898-907 (1990)
- 13) 内田：ゲインスケジューリング；計測と制御，Vol. 34, pp. 182-187 (1995)
- 14) 内田，渡辺，藤田：ゲインスケジューリングの新しい展開；電気学会論文誌 C, Vol. 116-C, pp. 1085-1088 (1996)
- 15) 渡辺，内田，藤田，示村：Scheduling Parameter を持つ線形システムの L^2 ゲイン；第 22 回制御理論シンポジウム予稿集，pp. 181-186 (1993)
- 16) 渡辺，内田，示村，藤田：Scheduling Parameter を持つ線形システムの H^∞ 制御；第 16 回 DST シンポジウム予稿集，pp. 1-6 (1993) (計測自動制御学会論文集，Vol. 31, pp. 481-488 (1995))
- 17) R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita and E. Shimemura; L^2 gain and H^∞ control of linear systems with scheduling parameter; *Proc. of the 33rd CDC*, pp. 1412-1414 (1994)
- 18) 渡辺，内田，藤田：自己スケジューリングパラメータを持つアフィンシステムの安定性；第 18 回 DST シンポジウム予稿集，pp. 151-156 (1995)
- 19) 渡辺，内田，藤田：2 次近似システムに対する可到達集合の解析；第 25 回制御理論シンポジウム予稿集，pp. 5-10 (1996)
- 20) R. Watanabe, K. Uchida and M. Fujita: A new LMI approach to analysis of linear systems with scheduling parameter based on finite number of LMI conditions; *Proc. of the 35th CDC*, pp. 1663-1665 (1996)
- 21) F. Wu, X. H. Yang, A. Packard and G. Becker: Induced L_2 -norm control for LPV system with bounded parameter variation rates; *Proc. of 1995 ACC*, pp. 2379-2383 (1995)
- 22) X. H. Yang, F. Wu and A. Packard: Adaptive control of full information problem; *Proc. of 1995 ACC*, pp. 3371-3372 (1995)

不確かなパラメータとスケジューリングパラメータを持つ線形システムに対するロバスト H_∞ 制御*

東 剛人**・渡辺 亮***・内田 健康**

Robust H_∞ Control for Linear Systems with Uncertain Parameters and Scheduling Parameters*

Takehito AZUMA**, Ryo WATANABE*** and Kenko UCHIDA**

In this paper, we consider a scheduled robust H_∞ control problem via state feedback controllers in linear systems with uncertain parameters and scheduling parameters. Controllers are characterized by parameter dependent Linear Matrix Inequalities (LMIs), and a feasible approach to solving parameter dependent LMIs is proposed. A numerical example of fuel diverter and return valve of turbofan engines is discussed.

1. はじめに

あるクラスの非線形システムはパラメータに依存した線形システムとして記述することができる^{7),13)}. パラメータに依存した線形システムは, スケジューリングパラメータを持つ線形システムあるいは LPV (Linear Parameter Varying) システムと呼ばれ, このようなシステムに対する様々なコントローラ的设计手法が提案されている^{3),6),8),9),10),16)}. これらの手法を用いた場合, パラメータがすべてオンラインで入手できれば, 設計されたコントローラをもとの非線形システムに適用し閉ループ系を構成することができる. しかし, パラメータの中にオンラインで入手できないものがある場合や, 推定値しか得られないものがある場合には, このコントローラをもとの非線形システムに適用し閉ループ系を構成することができない. また, 閉ループ系を構成できる場合でも設計仕様どおりの制御性能が期待できない.

本論文では, まず, 不確かなパラメータとスケジューリングパラメータを持つ線形システム

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t), \delta(t))x(t) + B(\theta(t), \delta(t))w(t) \\ z(t) &= C(\theta(t), \delta(t))x(t) \end{aligned}$$

を導入する. ここで, $\theta(t)$ がスケジューリングパラメータを表し, オンラインでは入手できないパラメータや推定値しか得られないパラメータを不確かなパラメータ $\delta(t)$ で表している. また, 各システムパラメータへの θ および δ の依存には連続性のみを仮定し, δ に関しては特別な構造 (例えば, 線形分数変換として表される構造) を仮定しない. つぎに, この不確かなパラメータとスケジューリングパラメータを持つ線形システムに対し, あるクラスの不確かさに対して閉ループ系の内部安定性と L^2 ゲインに関する一定の制御性能を保証するスケジューリングコントローラ (scheduled controller) の設計問題, すなわちスケジューリングロバスト H_∞ 制御問題について考察する. ここでは, スケジューリングロバスト H_∞ コントローラをパラメータに依存した線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality: LMI) 条件の解で構成する. 最後に, このパラメータ依存 LMI 条件の解法を与える. とくに, パラメータ依存 LMI 条件の解法に必要な凸多面体の新しい構成法を提案する.

本論文の構成は以下のようになっている. 2. では本論文で用いる記号および用語を定義する. 3. では不確かなパラメータとスケジューリングパラメータを持つ線形シ

* 原稿受付 1997年9月8日

** 早稲田大学 理工学部 電気電子情報工学科 Department of Electrical, Electronics and Computer Engineering, Waseda University; Okubo 3-4-1, Shinjuku, Tokyo 169-0072, JAPAN

*** 大阪大学 大学院 工学研究科 電子制御機械工学専攻 Department of Computer-Controlled Mechanical Systems, Graduate School of Engineering, Osaka University; Yamadaoka 2-1, Suita city, Osaka 565-0871, JAPAN

Key Words: gain scheduling, scheduled robust H_∞ control, parameter dependent LMIs.

システムを導入し、スケジューリングロバスト H_∞ 制御問題について考察する。4. ではパラメータ依存 LMI 条件の解法を与える。5. では数値例を示す。

2. 準備

ここでは、本論文で用いる記号および用語を定義する。本論文では次の記号を用いる。 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す。 $\|\cdot\|_{L^2}$ は 2 乗可積分空間 L^2 のノルムを表し、次式で定義する。

$$\|x\|_{L^2} = \left(\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in L^2$$

また、本論文で用いる用語を以下で定義する。

【定義 1】 $V(x, \eta)$ は $R^n \times R^s$ の領域

$$M = \{(x, \eta) \in R^n \times R^s \mid \|x\| < K_1, \|\eta\| < K_2, K_1 > 0, K_2 > 0\}$$

で定義された実数値をとる連続微分可能な関数とする。 $\|x\| < K_1$ で定義された x の実数値連続関数 $w(x)$ で

$$w(0) = 0, w(x) > 0 (x \neq 0)$$

であるようなものが存在して、つねに

$$V(x, \eta) \geq w(x)$$

が成立するとき、 $V(x, \eta)$ は正定値であるという。また、 $-V(x, \eta)$ が正定値であるとき、 $V(x, \eta)$ は負定値であるという。

【定義 2】 $Q(\eta)$ を R^s の領域 $\|\eta\| < K_2$ で定義され $R^n \times R^n$ に値をとる連続微分可能な行列関数とする。このとき、

$$V(x, \eta) = x' Q(\eta) x, (x, \eta) \in M$$

で定義された関数 $V(x, \eta)$ が正定値のとき、 $Q(\eta)$ は正定であるといい、次のように表現する。

$$Q(\eta) > 0$$

また、 $-Q(\eta)$ が正定であるとき、 $Q(\eta)$ は負定であるという。

3. スケジューリングロバスト H_∞ 制御

3.1 不確かなパラメータとスケジューリングパラメータを持つ線形システム

ここでは、以下の不確かなパラメータとスケジューリングパラメータを持つ線形システムに対し、あるクラスの不確かさに対して閉ループ系の内部安定性と L^2 ゲイ

ンに関する制御性能を保証する状態フィードバックコントローラ的设计問題について考察する。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t), \delta(t))x(t) + B_1(\theta(t), \delta(t))w(t) \\ \Sigma: \quad &+ B_2(\theta(t), \delta(t))u(t), x(0) = 0 \quad (1) \\ z(t) &= C(\theta(t), \delta(t))x(t) + D(\theta(t), \delta(t))u(t) \end{aligned}$$

Σ において $x(t) \in R^n$ は状態、 $z(t) \in R^l$ は被制御量、 $w(t) \in R^{m_w}$ は外部入力、 $u(t) \in R^m$ は制御入力を表す。 $\theta(t)$ は Σ のスケジューリングパラメータであり、

$$\begin{aligned} (1) \quad &\theta(t) \in \Theta, \forall t \in [0, \infty) \\ (2) \quad &\dot{\theta}(t) \in \Psi, \forall t \in [0, \infty) \end{aligned}$$

を満たすものとする。ただし、 $\Theta \subset R^s$ は有界閉集合であり、 $\Psi \subset R^s$ は $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{L_\psi}\} (L_\psi \geq s+1)$ を頂点に持つ凸多面体である。

$$\Psi = \left\{ \sum_{i=1}^{L_\psi} \lambda_i \psi_i \mid \sum_{i=1}^{L_\psi} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

$\delta(t)$ は不確かさを表すパラメータであり、

$$\delta(t) \in \Delta, \forall t \in [0, \infty)$$

を満たすものとする。ただし、 $\Delta \subset R^d$ は有界閉集合である。また、 Σ の各システムパラメータ A, B_1, B_2, C, D は (θ, δ) に関して連続であるとする。したがって、 (θ, δ) が有界であることから、各システムパラメータは有界である。

3.2 有界実性の解析

ここでは、 Σ において $u(t) = 0$ とした以下のシステムが内部安定かつ有界な L^2 ゲインを有する（有界実である）ための十分条件について考察する。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t), \delta(t))x(t) + B_1(\theta(t), \delta(t))w(t), \\ \Sigma_a: \quad &x(0) = 0 \quad (2) \\ z(t) &= C(\theta(t), \delta(t))x(t) \end{aligned}$$

システム Σ_a の内部安定性と L^2 ゲインを次で定義する。

【定義 3】 システム Σ_a が内部安定とは、次の微分方程式の零解が指数漸近安定であるときをいう。

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t), \delta(t))x(t)$$

【定義 4】 システム Σ_a が内部安定のとき、 Σ_a の L^2 ゲイン $G(\Sigma_a)$ を次で定義する。

$$G(\Sigma_a) = \sup_{w \in L^2, w \neq 0} \frac{\|z\|_{L^2}}{\|w\|_{L^2}}$$

システム Σ_a において、スケジューリングパラメータ θ はオンラインで入手可能であり、不確かなパラメータ δ

は入手不可能であることを考慮し、システム Σ_a に対するリアプノフ関数の候補として以下のスケジューリングパラメータに依存した汎関数

$$V(x(t), \theta(t)) = x'(t)Q(\theta(t))x(t) \quad (3)$$

を考えると、 Σ_a の有界実性に関して次が成立する。ここでは、任意の $\delta \in \Delta$ に対する Σ_a のロバスト安定性は2次安定条件²⁾で保証する。

【補題1】 システム Σ_a が任意の $\delta \in \Delta$ に対し内部安定であり、かつ γ 以下の L^2 ゲインを有するための十分条件は、以下の不等式を満たす $R^n \times R^n$ に値をとる対称かつ連続微分可能な行列関数 $Q(\theta)$ が存在することである。

$$Q(\theta) > 0 \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} A'(\theta, \delta)Q(\theta) + Q(\theta)A(\theta, \delta) & & & \\ + \sum_{i=1}^s \theta_i \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}(\theta) & C'(\theta, \delta) & Q(\theta)B_1(\theta, \delta) & \\ C(\theta, \delta) & -I & 0 & \\ B_1'(\theta, \delta)Q(\theta) & 0 & -\gamma^2 I & \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

$$\forall \theta \in \Theta, \forall \dot{\theta} \in \Psi, \forall \delta \in \Delta$$

(証明) まず、上記の条件式が成立するとき、次の微分方程式

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t), \delta(t))x(t) \quad (6)$$

が任意の $\delta \in \Delta$ に対し指数漸近安定であることを示す。ここでは、(3)式がリアプノフ関数であることを示す。

$\theta \in \Theta$ において $Q(\theta)$ が正定であることから、

$$\exists c_1 > 0 \text{ s.t.} \\ c_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x(t), \theta(t))$$

また、(6)式の解軌道に沿って(3)式を時間微分すると以下が成立する。ここでは、(5)式に Schur Complement の補題⁴⁾を用いていることに注意する。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(x(t), \theta(t)) \\ &= x'(t)[A'(\theta(t), \delta(t))Q(\theta(t)) \\ & \quad + Q(\theta(t))A(\theta(t), \delta(t)) + \frac{dQ}{dt}(\theta(t))]x(t) \\ & < x'(t)[-C'(\theta(t), \delta(t))C(\theta(t), \delta(t)) \\ & \quad - \gamma^{-2}Q(\theta(t))B_1(\theta(t), \delta(t)) \\ & \quad \quad B_1'(\theta(t), \delta(t))Q(\theta(t))]x(t) \\ & \leq 0, \forall \theta \in \Theta, \forall \delta \in \Delta \end{aligned} \quad (7)$$

したがって、(3)式はリアプノフ関数となり、(6)式は任意の $\delta \in \Delta$ に対し指数漸近安定すなわち内部安定である。

また、 $B_1(\theta, \delta)$ 、 $C(\theta, \delta)$ の有界性から Σ_a の w, z に対して次が成立する。

$$z \in L^2, \forall w \in L^2 \quad (8)$$

したがって、評価関数 J

$$J = \|z\|_{L^2}^2 - \gamma^2 \|w\|_{L^2}^2, w \in L^2, \gamma > 0$$

は有界であり、任意の $\theta \in \Theta, \delta \in \Delta$ に対し以下が成立する。

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty [z'(t)z(t) - \gamma^2 w'(t)w(t)] dt \\ &= \int_0^\infty [z'(t)z(t) - \gamma^2 w'(t)w(t) \\ & \quad + \frac{d}{dt} \{x'(t)Q(\theta(t))x(t)\}] dt \\ & \quad - x'(\infty)Q(\theta(\infty))x(\infty) \\ & < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

したがって、システム Σ_a は γ 以下の L^2 ゲインを有する。□

ここで、 θ の許容領域 Ψ が $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{L_\psi}\}$ を頂点に持つ凸多面体であることを考慮すると、システム Σ_a の有界実性に関して次が成立する。

【定理1】 システム Σ_a が任意の $\delta \in \Delta$ に対し内部安定かつ γ 以下の L^2 ゲインを有するための十分条件は、すべての $\psi_k (k=1, 2, \dots, L_\psi)$ に対し、以下の不等式を満たす $R^n \times R^n$ に値をとる対称かつ連続微分可能な行列関数 $Q(\theta)$ が存在することである。

$$Q(\theta) > 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} A'(\theta, \delta)Q(\theta) + Q(\theta)A(\theta, \delta) & & & \\ + \sum_{i=1}^s \psi_{ki} \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}(\theta) & C'(\theta, \delta) & Q(\theta)B_1(\theta, \delta) & \\ C(\theta, \delta) & -I & 0 & \\ B_1'(\theta, \delta)Q(\theta) & 0 & -\gamma^2 I & \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

$$\forall \theta \in \Theta, \forall \delta \in \Delta$$

(証明) Schur Complement の補題⁴⁾を用いると、(11)式は任意の $\xi, \xi \neq 0$ に対し

$$\begin{aligned} & \xi' [A'(\theta, \delta)Q(\theta) + Q(\theta)A(\theta, \delta) + C'(\theta, \delta)C(\theta, \delta) \\ & \quad + \gamma^{-2}Q(\theta)B_1(\theta, \delta)B_1'(\theta, \delta)Q(\theta) + \sum_{i=1}^s \psi_{ki} \frac{\partial Q}{\partial \theta_j}(\theta)] \xi < 0 \end{aligned} \quad (12)$$

が成立することと等価である。内積 $\langle *, * \rangle$ を用いると(12)式は以下のようになる。

$$\xi' F(\theta, \delta) \xi + \langle \psi_k, f(\xi, \theta) \rangle < 0$$

ただし,

$$F(\theta, \delta) = A'(\theta, \delta)Q(\theta) + Q(\theta)A(\theta, \delta) + C'(\theta, \delta)C(\theta, \delta) + \gamma^{-2}Q(\theta)B_1(\theta, \delta)B_1'(\theta, \delta)Q(\theta)$$

$$f(\xi, \theta) = \left[\xi' \frac{\partial Q}{\partial \theta_1}(\theta) \xi \quad \xi' \frac{\partial Q}{\partial \theta_2}(\theta) \xi \quad \dots \quad \xi' \frac{\partial Q}{\partial \theta_s}(\theta) \xi \right]'$$

である。ここで,

$$\sum_{k=1}^{L_\psi} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0$$

を満たす λ_k を用い, すべての $\psi_k (k=1, 2, \dots, L_\psi)$ に対し (12) 式が成立することを考慮すると, 以下が成立する。

$$\sum_{k=1}^{L_\psi} \lambda_k [\xi' F(\theta, \delta) \xi + \langle \psi_k, f(\xi, \theta) \rangle] < 0$$

$$\Leftrightarrow \xi' F(\theta, \delta) \xi + \langle \sum_{k=1}^{L_\psi} \lambda_k \psi_k, f(\xi, \theta) \rangle < 0 \quad (13)$$

Ψ のすべての要素 θ が $\psi_k (k=1, 2, \dots, L_\psi)$ の凸結合

$$\theta = \sum_{k=1}^{L_\psi} \lambda_k \psi_k, \sum_{k=1}^{L_\psi} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0$$

で表すことができることを考慮すると, (13) 式は任意の $\theta \in \Theta, \theta \in \Psi, \delta \in \Delta$ に対して (5) 式が成立することを示している。したがって, 補題 1 より定理が成立する。□

3.3 コントローラ的设计

ここでは, システム Σ に対して構成した閉ループ系が, あるクラスの不確かさに対し

- 内部安定であり,
- γ 以下の L^2 ゲインを有する

ような状態フィードバックコントローラ的设计問題について考察する。

スケジューリングパラメータ θ がオンラインで入手可能であることを考慮し, システム Σ に対する状態フィードバックコントローラとして次を考える。

$$\Gamma: u(t) = K(\theta(t))x(t) \quad (14)$$

ただし, $K(\theta)$ は θ に関して連続であるとする。

このコントローラを用いると閉ループ系 $\Sigma\Gamma$ は以下のようになる。

$$\dot{x}(t) = A_\alpha(\theta(t), \delta(t))x(t) + B_1(\theta(t), \delta(t))w(t), x(0) = 0 \quad (15)$$

$$z(t) = C_\alpha(\theta(t), \delta(t))x(t)$$

ただし,

$$A_\alpha(\theta(t), \delta(t)) = A(\theta(t), \delta(t)) + B_2(\theta(t), \delta(t))K(\theta(t)) \quad (16a)$$

$$C_\alpha(\theta(t), \delta(t)) = C(\theta(t), \delta(t)) + D(\theta(t), \delta(t))K(\theta(t)) \quad (16b)$$

システム Σ に対するスケジューリングロバスト H_∞ 状態フィードバックコントローラが存在するための十分条件は以下で与えられる。

【定理 2】 任意の $\delta \in \Delta$ に対し閉ループ系 $\Sigma\Gamma$ が内部安定でありかつ γ 以下の L^2 ゲインを有するような状態フィードバックコントローラ Γ が存在するための十分条件は, すべての $\psi_k (k=1, 2, \dots, L_\psi)$ に対し, 以下の不等式を満たす $R^n \times n$ に値をとる対称かつ連続微分可能な行列関数 $Y(\theta)$, および $R^m \times n$ に値をとる連続な行列関数 $W(\theta)$ が存在することである。

$$Y(\theta) > 0 \quad (17)$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c} Y(\theta)A'(\theta, \delta) \\ + A(\theta, \delta)Y(\theta) \\ + B_2(\theta, \delta)W(\theta) \\ + W'(\theta)B_2'(\theta, \delta) \\ - \sum_{i=1}^s \psi_{ki} \frac{\partial Y}{\partial \theta_i}(\theta) \\ C(\theta, \delta)Y(\theta) \\ + D(\theta, \delta)W(\theta) \\ B_1'(\theta, \delta) \end{array} \right) & \begin{array}{cc} Y(\theta)C'(\theta, \delta) & B_1(\theta, \delta) \\ + W'(\theta)D'(\theta, \delta) & \end{array} \\ & \begin{array}{cc} -I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{array} \end{array} \right] < 0, \quad (18)$$

$$\forall \theta \in \Theta, \forall \delta \in \Delta$$

このとき, 状態フィードバックコントローラ Γ のゲインは以下で与えられる。

$$K(\theta(t)) = W(\theta(t))Y^{-1}(\theta(t)) \quad (19)$$

(証明) Schur Complement の補題⁴⁾を用いることにより, (18) 式は以下のようにになる。

$$Y(\theta)A'(\theta, \delta) + A(\theta, \delta)Y(\theta) + B_2(\theta, \delta)W(\theta) + W'(\theta)B_2'(\theta, \delta) + \{Y(\theta)C'(\theta, \delta) + W'(\theta)D'(\theta, \delta)\} \{C(\theta, \delta)Y(\theta) + D(\theta, \delta)W(\theta)\} + \gamma^{-2}B_1(\theta, \delta)B_1'(\theta, \delta) - \sum_{i=1}^s \psi_{ki} \frac{\partial Y}{\partial \theta_i}(\theta) < 0$$

左右から $Y^{-1}(\theta)(=Q(\theta))$ を乗じ, (16) 式, (19) 式を用いると, 次が得られる。

$$\begin{aligned}
 & A'_a(\theta, \delta)Q(\theta) + Q(\theta)A_a(\theta, \delta) + C'_a(\theta, \delta)C_a(\theta, \delta) \\
 & + \gamma^{-2}Q(\theta)B_1(\theta, \delta)B'_1(\theta, \delta)Q(\theta) \\
 & - \sum_{i=1}^s \psi_{ki}Q(\theta) \frac{\partial Q^{-1}}{\partial \theta_i}(\theta)Q(\theta) < 0 \quad (20)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$- \sum_{i=1}^s \psi_{ki}Q(\theta) \frac{\partial Q^{-1}}{\partial \theta_i}(\theta)Q(\theta) = \sum_{i=1}^s \psi_{ki} \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}(\theta)$$

であることを考慮し Schur Complement の補題⁴⁾を用いると、(20)式より任意の $\theta \in \Theta, \delta \in \Delta$ に対し (11)式が成立する。したがって、定理 1 より、閉ループ系 ΣF は任意の $\delta \in \Delta$ に対し内部安定であり、かつ γ 以下の L^2 ゲインを有する。□

(注意 1) (19)式で与えられるコントローラを実装する場合には、あらかじめいくつかの θ に対してテーブルを用意しその間は線形補間等を用いて補間し、コントローラを構成する。あるいは、上記のように線形補間せずに、いくつかの θ に対するテーブルにおいて最小自乗法などを用いて (19)式を行列多項式で近似し、その行列多項式を用いてコントローラを構成することも可能である。

4. パラメータ依存 LMI 条件の解法

4.1 パラメータ依存 LMI 条件

ここでは、定理 1 (または定理 2)におけるパラメータに依存した線形行列不等式条件 (Linear Matrix Inequality: LMI) の解法について考察する。

Σ_a においてシステムパラメータが以下で与えられるものを Σ'_a とする。

$$A(\theta, \delta) = A_0 + a_1(\theta, \delta)A_1 + \cdots + a_{L_a}(\theta, \delta)A_{L_a} \quad (21a)$$

$$B_1(\theta, \delta) = B_0 + b_1(\theta, \delta)B_1 + \cdots + b_{L_b}(\theta, \delta)B_{L_b} \quad (21b)$$

$$C(\theta, \delta) = C_0 + c_1(\theta, \delta)C_1 + \cdots + c_{L_c}(\theta, \delta)C_{L_c} \quad (21c)$$

$$a_i, b_i, c_i : R^s \times R^d \rightarrow R, \Theta \times \Delta \text{ において連続}$$

ここで、スケジューリングパラメータ θ および不確かなパラメータ δ の各許容領域 Θ, Δ は以下のように与えられるものとする。

$$\Theta = \{[\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_s]' \mid \theta_i \in [\theta_i^{\min}, \theta_i^{\max}]\}$$

$$\Delta = \{[\delta_1 \ \delta_2 \ \cdots \ \delta_d]' \mid \delta_i \in [\delta_i^{\min}, \delta_i^{\max}]\}$$

また、定理 1 の解 $Q(\theta)$ としては以下のものを考える。

$$Q(\theta) = Q_0 + q_1(\theta)Q_1 + \cdots + q_{L_q}(\theta)Q_{L_q} \quad (22)$$

$$q_i : R^s \rightarrow R, \Theta \text{ において連続微分可能}$$

$$Q_i : Q_i \in R^{n \times n}, Q'_i = Q_i, \text{ 未知行列}$$

このとき、(21), (22)式を (10), (11)式に代入することにより、定理 1 (定理 2 の場合も同様) の条件は、以下の形式の複数本のパラメータ依存 LMI 条件として記述される。

パラメータ依存 LMI 条件：

$$F_{10}(Q_u) + f_1(\bar{\theta})F_{11}(Q_u) + \cdots + f_r(\bar{\theta})F_{1r}(Q_u) < 0$$

$$F_{20}(Q_u) + f_1(\bar{\theta})F_{21}(Q_u) + \cdots + f_r(\bar{\theta})F_{2r}(Q_u) < 0$$

⋮

$$F_{\rho 0}(Q_u) + f_1(\bar{\theta})F_{\rho 1}(Q_u) + \cdots + f_r(\bar{\theta})F_{\rho r}(Q_u) < 0 \quad (23)$$

ここで、 Q_u は $(Q_1, Q_2, \dots, Q_{L_q})$ を表し、 $\rho = L_\psi + 1$ である。 r は L_a, L_b, L_c および L_q により決定される (具体的な計算は参考文献 1) を参照のこと)。 $\bar{\theta}$ は (θ, δ) を表し、ここでは以下のように記述することとする。ただし、 $\bar{s} = s + d$ である。

$$\bar{\theta} \in \bar{\Theta}, \bar{\Theta} = \{[\bar{\theta}_1 \ \bar{\theta}_2 \ \cdots \ \bar{\theta}_{\bar{s}}]' \mid \bar{\theta}_i \in [\bar{\theta}_i^{\min}, \bar{\theta}_i^{\max}]\}$$

また、 $f_i : R^{\bar{s}} \rightarrow R$ は $\bar{\Theta}$ において連続な関数であり、 F_i は対称かつ未知行列 Q_u に対しアフィンな行列関数である。

4.2 有限個の LMI 条件への還元

(23)式の解 Q_u は、 $\bar{\theta} \in \bar{\Theta}$ を固定することに得られる無限個の LMI 条件を満たす解として求めることができる。この無限個の LMI 条件を満たす解を数値計算により求めることは不可能であるが、以下の定理を用いることによりこの無限個の LMI 条件は有限個の LMI 条件に還元され、任意の $\bar{\theta} \in \bar{\Theta}$ に対し (23)式を満たす解 Q_u を数値計算により求めることができる。

【定理 3】¹⁾ 曲面 T

$$T = \{[f_1(\bar{\theta}) \ f_2(\bar{\theta}) \ \cdots \ f_r(\bar{\theta})]' \mid \bar{\theta} \in \bar{\Theta}\} \quad (24)$$

を内部に含む凸多面体の頂点を $\{p_1, p_2, \dots, p_q\} (q \geq r + 1)$ とする。すべての $p_i (i = 1, 2, \dots, q)$ に対して以下の LMI 条件を満たす解 Q_u は任意の $\bar{\theta} \in \bar{\Theta}$ に対し (23)式を満たす。

$$F_{10}(Q_u) + p_{i1}F_{11}(Q_u) + \cdots + p_{ir}F_{1r}(Q_u) < 0$$

$$F_{20}(Q_u) + p_{i1}F_{21}(Q_u) + \cdots + p_{ir}F_{2r}(Q_u) < 0$$

⋮

$$F_{\rho 0}(Q_u) + p_{i1}F_{\rho 1}(Q_u) + \cdots + p_{ir}F_{\rho r}(Q_u) < 0 \quad (25)$$

ただし、 p_{ij} は p_i の第 j 要素を表す。

定理 3 は、(23)式の解が存在するための十分条件を与

えているだけであり、曲面 T を内部に含む凸多面体の構成によっては得られる解が保守的になることが考えられる。そこで、 T を内部に含む最小凸集合 (T の凸包) を導入すると、(23) 式の解の存在に関して次が成立する。

【定理 4】¹⁾ 曲面 T の凸包を $C_o(T)$ とする。次の三つの条件は等価である。

- (1) 任意の $\bar{\theta} \in \bar{\Theta}$ に対して (23) 式を満たす解が存在する。
- (2) T 上の任意の点に対して (25) 式を満たす解が存在する。
- (3) $C_o(T)$ に含まれる任意の点に対して (25) 式を満たす解が存在する。

(注意 2) $C_o(T)$ 内部の点が境界上の 2 点の凸結合で表すことができるので、(3) の条件は以下のように言い換えることができる。

- (4) $C_o(T)$ の境界上の任意の点に対して (25) 式を満たす解が存在する。

したがって、 $C_o(T)$ の境界にできるだけ近い頂点を持つ凸多面体を構成することにより、定理 3 を用いて保守性の少ない解を得ることができる。

4.3 凸多面体の構成法

ここでは、定理 4 を考慮し、定理 3 における曲面 T を内部に含む凸多面体を構成するための基本的な考え方と具体的な構成法を示す。

まず、凸多面体を構成するための基本的な考え方を示す。 $C_o(T)$ の境界にできるだけ近い頂点を持つ凸多面体を構成するため、以下のようにして曲線 T を内部に含む凸多面体を構成する。

Step 1 $\bar{\Theta}$ を d^s 個の領域 $\{\bar{\Theta}_1, \bar{\Theta}_2, \dots, \bar{\Theta}_{d^s}\}$ に分割し ($\bar{\Theta}$ の各次元を d 個に分割する。以下 d を分割数と呼ぶ。) 各 $\bar{\Theta}_i$ に対して曲面 T_i を以下のように定義する。

$$T_i = \{ [f_1(\bar{\theta}) \ f_2(\bar{\theta}) \ \dots \ f_r(\bar{\theta})]' \mid \bar{\theta} \in \bar{\Theta}_i \} \quad (26)$$

Step 2 T_i を内部に含む多面体 R_i を構成する。 (R_i の具体的な構成法は後で考察する。)

Step 3 Step 2 で構成した多面体 $\{R_1, R_2, \dots, R_{d^s}\}$ の凸包を H とする。

$$H = C_o(R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_{d^s}) \quad (27)$$

上記において、多面体 R_i が曲線 T_i を内部に含む、 $\{R_1, R_2, \dots, R_{d^s}\}$ の凸包 H は凸多面体となるので、 H は T を内部に含む凸多面体となる。また、分割数を大きくし、 T_i を内部に含む多面体 R_i を適切に構成することにより、この凸多面体は $C_o(T)$ に漸近していく。

(注意 3) 定理 3 における凸多面体の頂点 p_i ($i =$

$1, 2, \dots, q$) は、多面体 R_i ($i = 1, 2, \dots, d^s$) の頂点の中に含まれている。定理 3 では、凸多面体の頂点 p_i ($i = 1, 2, \dots, q$) だけでなく、その内部の点に対して (25) 式を解いても得られる結果は変わらないので、 R_i ($i = 1, 2, \dots, d^s$) のすべての頂点に対して (25) 式を解けばよい。

つぎに、多面体 R_i の具体的な構成法を示す。まず、我々がすでに提案している構成法を示す。

【構成法 1】¹⁾ 曲線 T_i に対し以下の 2 点を対角に持つ超直方体を R_i とする。

$$r_1 = \left[\min_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}_i} f_1(\bar{\theta}) \quad \min_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}_i} f_2(\bar{\theta}) \quad \dots \quad \min_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}_i} f_r(\bar{\theta}) \right]'$$

$$r_2 = \left[\max_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}_i} f_1(\bar{\theta}) \quad \max_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}_i} f_2(\bar{\theta}) \quad \dots \quad \max_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}_i} f_r(\bar{\theta}) \right]'$$

R_i は T_i を内部に含む。

この構成法では、 T_i が有界であれば R_i を構成することができるが、 R_i の頂点の数は 2^r 個となり、 r が大きいほど解くべき LMI 条件は多くなる。計算時間や計算誤差を考慮すると、LMI 条件の数は少ないことがのぞまれるが、保守性の少ない解を得るには分割数を大きくしなくてはならなく、これは LMI 条件の増加につながる。したがって、 T_i を内部に含む多面体の頂点の数はできるだけ少なくすることが必要とされる。

そこで、以下では新しい構成法を提案し、曲面 T_i が以下の仮定を満足する場合には、 $r+1$ 個の頂点を持つ多面体 R_i を構成できることを示す。

(仮定 1) 任意の $\bar{\theta} \in \bar{\Theta}_i$ に対して、(26) 式で与えられる曲線 T_i が以下を満たす。

$$\frac{f_1(\bar{\theta}) - \min f_1(\bar{\theta})}{\max f_1(\bar{\theta}) - \min f_1(\bar{\theta})} \geq \frac{f_2(\bar{\theta}) - \min f_2(\bar{\theta})}{\max f_2(\bar{\theta}) - \min f_2(\bar{\theta})} \geq \dots \geq \frac{f_r(\bar{\theta}) - \min f_r(\bar{\theta})}{\max f_r(\bar{\theta}) - \min f_r(\bar{\theta})} \geq 0 \quad (28)$$

ここで、 \min, \max はそれぞれ

$$\min_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}_i}, \max_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}_i}$$

を表す。

【構成法 2】 仮定 1 を満たす曲線 T_i に対し、次で与えられる頂点 $\{p_i^0, p_i^1, \dots, p_i^r\}$ を持つ多面体を R_i とする。

$$p_i^0 = \left[\min f_1(\bar{\theta}) \quad \min f_2(\bar{\theta}) \quad \dots \quad \min f_r(\bar{\theta}) \right]' \quad (29a)$$

$$p_i^j = p_i^{j-1} + \{ \max f_j(\bar{\theta}) - \min f_j(\bar{\theta}) \} e_j \quad (j = 1, 2, \dots, r-1) \quad (29b)$$

$$p_i^r = p_i^{r-1} + \{ \max f_r(\bar{\theta}) - \min f_r(\bar{\theta}) \} e_r = \left[\max f_1(\bar{\theta}) \quad \max f_2(\bar{\theta}) \quad \dots \quad \max f_r(\bar{\theta}) \right]' \quad (29c)$$

ここで, e_1, e_2, \dots, e_r は R^r の自然基底である. (r 本のベクトル $\{p_i^j - p_i^0\} (j=1, 2, \dots, r)$ が線形独立になることから, H_i は R^r における凸多面体となることに注意する.)

【定理 5】 構成法 2 において, R_i は T_i を内部に含む.

(証明) R_i が T_i を内部に含むことを示すため, ここでは R_i が R^r における凸多面体であることに注目して, T_i 上の点

$$T(\bar{\theta}) = [f_1(\bar{\theta}) \ f_2(\bar{\theta}) \ \dots \ f_r(\bar{\theta})]', \bar{\theta} \in \bar{\Theta}_i \quad (30)$$

を R_i の頂点 $\{p_i^0, p_i^1, \dots, p_i^r\}$ の線形結合で表し, 係数の和が 1 かつ各係数が 0 以上になることを示す.

$T(\bar{\theta})$ は自然基底 e_1, e_2, \dots, e_r を用いると以下のように記述できる.

$$\begin{aligned} T(\bar{\theta}) &= f_1(\bar{\theta})e_1 + f_2(\bar{\theta})e_2 + \dots + f_r(\bar{\theta})e_r \\ &= p_i^0 - p_i^0 + f_1(\bar{\theta})e_1 + f_2(\bar{\theta})e_2 + \dots + f_r(\bar{\theta})e_r \\ &= p_i^0 + \{f_1(\bar{\theta}) - \min f_1(\bar{\theta})\}e_1 \\ &\quad + \{f_2(\bar{\theta}) - \min f_2(\bar{\theta})\}e_2 \\ &\quad + \dots + \{f_r(\bar{\theta}) - \min f_r(\bar{\theta})\}e_r \end{aligned}$$

ここで, (29) 式を用いると, $T(\bar{\theta})$ は以下のような $p_i^j (j=0, 1, \dots, r)$ の線形結合で表される.

$$\begin{aligned} T(\bar{\theta}) &= p_i^0 + \sum_{j=1}^r \{f_j(\bar{\theta}) - \min f_j(\bar{\theta})\} \\ &\quad \{ \max f_j(\bar{\theta}) - \min f_j(\bar{\theta}) \}^{-1} \{p_i^j - p_i^{j-1}\} \\ &= [1 - \{f_1(\bar{\theta}) - \min f_1(\bar{\theta})\} \\ &\quad \{ \max f_1(\bar{\theta}) - \min f_1(\bar{\theta}) \}^{-1}] p_i^0 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{r-1} [\{f_j(\bar{\theta}) - \min f_j(\bar{\theta})\} \\ &\quad \{ \max f_j(\bar{\theta}) - \min f_j(\bar{\theta}) \}^{-1} \\ &\quad - \{f_{j+1}(\bar{\theta}) - \min f_{j+1}(\bar{\theta})\} \\ &\quad \{ \max f_{j+1}(\bar{\theta}) - \min f_{j+1}(\bar{\theta}) \}^{-1}] p_i^j \\ &\quad + \{f_r(\bar{\theta}) - \min f_r(\bar{\theta})\} \\ &\quad \{ \max f_r(\bar{\theta}) - \min f_r(\bar{\theta}) \}^{-1} p_i^r \quad (31) \end{aligned}$$

さらに, $T(\bar{\theta}) = \sum_{j=0}^r \lambda_j(\bar{\theta}) p_i^j$ とおくと, $\sum_{j=0}^r \lambda_j(\bar{\theta}) = 1$ が成立し, 仮定 1 より任意の $\bar{\theta} \in \bar{\Theta}_i$ に対し $\lambda_j(\bar{\theta}) \geq 0$ ($j=0, 1, \dots, r$) が成立する. したがって, R_i は T_i を内部に含む. \square

5. 数値例

5.1 一般化プラント

ここでは, 以下の不確かなパラメータとスケジューリングパラメータを持つ線形システム Σ_p

$$\begin{aligned} \Sigma_p: \quad \dot{x}_p(t) &= 2\delta(t)u(t) \\ y_p(t) &= \exp(\theta(t)/3) x_p(t) \\ \theta(t) &\in [-1, 1], \forall t \in [0, \infty) \\ \delta(t) &\in [0.75, 1], \forall t \in [0, \infty) \end{aligned}$$

を考える. このシステムはジェットエンジンの燃料流量制御弁¹⁴⁾のモデルを表している. ここで, $\theta(t)$ が Σ_p のスケジューリングパラメータであり, 状態 $x_p(t)$ でスケジューリングされる. $\delta(t)$ は不確かさを表すパラメータである.

このシステムに対し, Fig. 1 の閉ループ系 (W_3 は積分器) を構成し,

- 仕様 1 任意の不確かさに対し閉ループ系が内部安定,
- 仕様 2 出力 y_p に加わる外乱に対して制御入力が大きく変動しない,
- 仕様 3 定常状態において出力 y_p と指令値 r の偏差が 0, を満たす状態フィードバックコントローラ $K(\theta)$ の設計を考える.

上記三つの制御仕様を考慮し, 一般化プラントを Fig. 2 のように設定した. Fig. 2 において, w_2, z_2 は仕様 2 に, w_3, z_3 は仕様 3 に対応している. また, 仕様 1 に対しては提案手法を用いる. 任意の不確かさ $\delta \in [0.75, 1]$ に対し $[w_2' \ w_3']$ から $[z_2' \ z_3']$ までの L^2 ゲインが 1 以下となるような状態フィードバックコントローラを定理 2 に基づいて設計する.

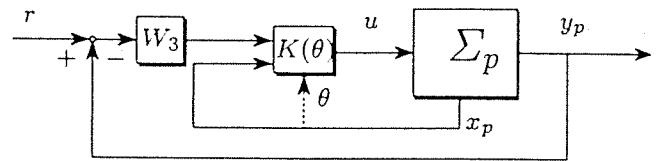


Fig. 1 Closed loop system

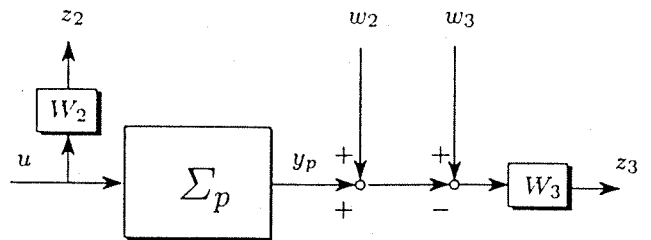


Fig. 2 Generalized plant

重み W_2, W_3 および $\dot{\theta}$ の許容領域はそれぞれ以下のよ
うに設定した。

$$W_2 = 0.456, W_3 = \frac{1.000}{s}, \dot{\theta} \in [-15.0, 15.0]$$

また、定理 2 の解 $Y(\theta), W(\theta)$ として以下のもの

$$Y(\theta) = Y_0 + \exp(\theta/3) Y_1, W(\theta) = W_0$$

を考え、4. の手法を用いて実際に計算した。この数値例
では、定理 3 で定義された曲面 T は

$$T = \{[\exp(\theta/3) \exp(2\theta/3) \delta]' \mid \theta \in [-1, 1], \delta \in [0.75, 1]\}$$

となり、このままでは、構成法 2 を用いて T を内部に含
む凸多面体を構成することができない。そこで、 T が θ
のみに依存した項と δ のみに依存した項に分けることが
できることを考慮し、 θ のみに依存した項

$$\bar{T} = \{[\exp(\theta/3) \exp(2\theta/3)]' \mid \theta \in [-1, 1]\}$$

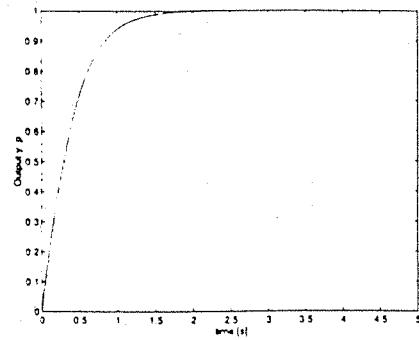
に対しては構成法 2 を用いることで、曲面 T を内部に
含む凸多面体を構成した。

指令値を $r=1$ とした場合のシミュレーション結果を
Fig. 3 に示す。実線は $\delta=1$ 、破線は $\delta=0.75$ の場合を表
している。Fig. 3 では、出力 $y_p(t)$ 、状態 $x_p(t)(=\theta(t))$ 、ス
ケジューリングパラメータの時間微分値 $\dot{\theta}(t)(=2\delta(t)u(t))$
は不確かさ δ にかかわらず波形は一致している。不確か
さ $\delta \in [0.75, 1]$ に対して閉ループ系はロバスト安定であ
り、出力 $y_p(t)$ は指令値 r に追従している。

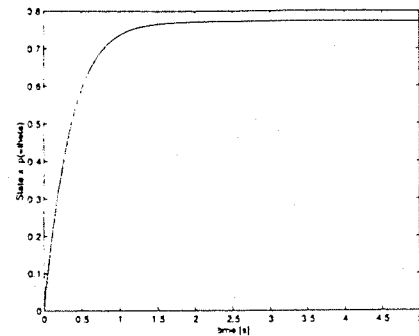
また、Fig. 3 より、 $\theta(t)$ および $\dot{\theta}(t)$ がそれぞれ領域
 $\Theta = [-1, 1]$ および $\Psi = [-15.0, 15.0]$ に含まれている。
これは、本設計手法が燃料流量制御弁のモデルに対する
設計法として妥当であったことを示している。なお、一
般の非線形システムに対して本手法を適用する場合の理
論的な取り扱いについては、参考文献 13) で考察されて
いる。

6. おわりに

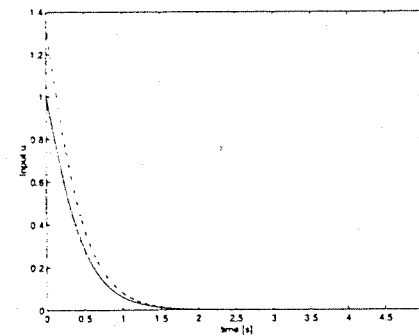
本論文では、不確かなパラメータとスケジューリング
パラメータを持つ線形システムを導入し、このシステム
に対するスケジューリングロバスト H_∞ 制御について考
察した。ここでは、スケジューリングロバスト H_∞ コ
ントローラをパラメータ依存 LMI 条件の解で構成する手
法を与えた。また、パラメータ依存 LMI 条件の解法にお
ける凸多面体の新しい構成法を提案した。



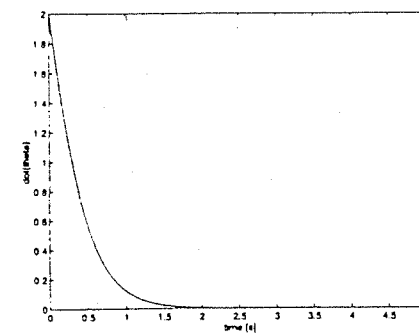
(a) Output $y_p(t)$



(b) State $x_p(t)(=\theta(t))$



(c) Input $u(t)$



(d) $\dot{\theta}(t)$

Fig. 3 Simulation(Reference $r=1$)

参考文献

- 1) T. Azuma, R. Watanabe and K. Uchida: An approach to solving parameter dependent LMI conditions based on finite number of LMI conditions; *Proc. of American Control Conference*, pp. 510-514 (1997)
- 2) B. R. Barmish: Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain systems; *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 46, pp. 399-408 (1985)
- 3) G. Becker, A. Packard, D. Philbrick and G. Balas: Control of parametrically-dependent linear systems: A single quadratic Lyapunov approach; *Proc. of American Control Conference*, pp. 2795-2799 (1993)
- 4) S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: Linear matrix inequalities in system and control theory; *SIAM, Studies in Applied Mathematics*, Vol. 15 (1994)
- 5) P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali: *LMI Control Toolbox For Use with MATLAB*, The Math Works, Inc (1995)
- 6) A. Packard: Gain scheduling via linear fractional transformations; *Systems & Control Letters*, Vol. 22, No. 2, pp. 79-92 (1994)
- 7) J. S. Shamma and M. Athans: Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants; *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, Vol. 35, pp. 898-907 (1990)
- 8) J. S. Shamma and M. Athans: Gain scheduling: Potential hazards and possible remedies; *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 12, pp. 101-107 (1992)
- 9) R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita and E. Shimemura: L^2 gain and H^∞ control of linear systems with scheduling parameter; *Proc. of 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1412-1414 (1994)
- 10) F. Wu, A. Packard and G. Becker: Induced L^2 -norm control for LPV system with bounded parameter variation rates; *Proc. of American Control Conference*, pp. 2379-2383 (1995)
- 11) 東, 渡辺, 内田: 有限個の LMI 条件に基づいたスケジューリングパラメータを持つ線形システムの解析における凸包の構成法; 第 25 回制御理論シンポジウム予稿集, pp. 73-78 (1996)
- 12) 東, 渡辺, 内田: 有限個の LMI 条件によるパラメータ依存 LMI 条件の解法; 計測自動制御学会論文集 (投稿中)
- 13) 東, 渡辺, 内田: 非線形システムの準大域的な L^2 ゲイン解析—自己スケジューリングパラメータを持つ線形システムに基づくアプローチ—; 第 20 回 Dynamical System Theory シンポジウム予稿集, pp. 149-154 (1997)
- 14) 渡辺, 黒崎, 内田, 藤田, 示村: 燃料流量制御弁の状態フィードバック H_∞ 制御; 第 23 回制御理論シンポジウム予稿集, pp. 323-328 (1994)
- 15) 渡辺: 線形制御則による実システムのロバスト制御に関する研究, 第 4 章 “ゲインスケジューリング”; 早稲田大学学位 (博士) 論文 (1995)
- 16) 渡辺, 内田, 藤田, 示村: スケジューリングパラメータを持つ線形システムの H^∞ 制御; 計測自動制御学会論文集, Vol. 31, No. 4, pp. 481-488 (1995)
- 17) 渡辺, 内田, 藤田: 有限個の LMI 条件に基づいたスケジューリングパラメータを持つ線形システムの解析; 制御理論シンポジウム予稿集, pp. 9-14 (1995)

2次システムに対する状態可到達集合の解析†

渡辺 亮*・内田 健康**・藤田 政之***

Analysis of State Reachable Sets for Quadratic Systems

Ryo WATANABE*, Kenko UCHIDA** and Masayuki FUJITA***

For a nonlinear/linear system the disturbance to which is restricted to a finite domain, the reachable domain in the state space from a given initial state is called a state reachable set. Though some theoretical approaches have been proposed on investigating state reachable sets, it is difficult to evaluate the state reachable set actually for general nonlinear systems by using these approaches directly.

In this paper, we introduce a quadratic system based on a quadratic approximation for nonlinear systems. Then we propose an approach based on linear matrix inequalities to investigate the reachable set of the quadratic system the disturbance to which is restricted to inside of a unit disc. In numerical case study, we demonstrate efficacy of the proposed approach by evaluating the state reachable set actually for a given quadratic system.

Key Words: state reachable set, quadratic system, quadratic approximation, linear matrix inequality

1. はじめに

状態変数表現が次で与えられる非線形システムに対し、その準大域的な解析問題を考えてみる。

$$\dot{x} = [A + E\Delta(x)F]x + Bw(t), \quad x(0) = 0. \quad (1)$$

ここで、準大域的とは、システムに加わる外乱 w が、あらかじめ与えられた有界な集合 W に次で制約されていることを意味する。

$$w(t) \in W, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2)$$

この場合、(1) 式の状態変数表現から、 $\Delta(x)$ を時変なパラメータ変動 $\Delta(t)$ と見なし、線形ロバスト解析手法²⁾を適用することが考えられる。しかしながら、そのためには外乱 w が (2) 式で制約されている場合における $\Delta(x)$ の可到達領域の境界を、 $\Delta(t)$ の上界としてあらかじめ評価しておく必要がある。 $\Delta(x)$ の可到達領域は、システムの状態 x の可到達領域が与えられればその評価が可能となることから、解くべき問題は次のように一般化される。

問題^{4) 6)} 加わる外乱 w が与えられた集合 W によって

$$w(t) \in W, \quad \forall t \in [0, \infty),$$

で制約されている非線形システム

$$\dot{x} = f(x, w(t)),$$

に対し、その状態 x が初期状態 $x(0) = x_0$ から到達可能な領域を評価せよ。

この問題は、文献^{4) 6)}等で状態可到達集合の解析問題と呼ばれている。Grantham and Vincent⁵⁾、および Grantham⁶⁾は、上記の問題に対し、Reachability Maximum Principle⁵⁾と Lyapunov Approach⁶⁾と名付けられた二つの理論的な解法を与えた。しかしながら、これらの手法を直接用いて、一般的な非線形システムに対する状態可到達集合を実際に評価することは困難で、対象を線形システムに限定した場合^{7) 1)}や、特別な非線形システム⁶⁾に対する幾つかの計算法は与えられているものの、十分であるとは言えない。

本稿では、はじめに (1) 式のタイプの状態変数表現を有する非線形システムとして、非線形システムに対する2次近似から導かれる2次システムを導入する。次に、加わる外乱が円領域に拘束されている2次システムに対し、線形行列不等式 (LMI) 条件に基づいた状態可到達集合の評価法を与える。また、提案手法の有効性を数値計算によって検証する。以降、2節では2次システムを導入する。3節では状態可到達集合の解析に関する従来の結果をまとめ、4節ではLMI条件に基づいた線形システムに対する状態可到達集合の解析法を与える。5節では、4節の手法を応用した2次システムに対する状態可到達集合の解析法を与える。

† 第25回制御理論シンポジウムで発表 (1996・5)

* 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘 2-1

** 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

*** 金沢大学工学部 金沢市小立野 2-40-20

* Graduate School of Engineering, Osaka University, Suita

** School of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo

*** Faculty of Engineering, Kanazawa University, Kanazawa (Received July 7, 1997)

(Revised June 24, 1998)

2. 2次システム

2次システムを次で定義する.

$$\dot{x} = [A + H\Delta(x)]x + Bw(t), \quad x(0) = 0. \quad (3)$$

ここで, $x \in R^n$ は状態, $w \in R^m$ は外乱を表すものとする. $H \in R^{n \times n^2}$ は $H_k \in R^{n \times n}$, $k = 1, 2, \dots, n$ に対して次で定義されるものとする.

$$H = [H_1, H_2, \dots, H_n].$$

また, $\Delta(x) \in R^{n^2 \times n}$ は次で定義されるものとする.

$$\Delta(x) = \begin{bmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{bmatrix}. \quad (4)$$

なお, (3) 式で定義されるシステムを2次システムと呼ぶ根拠については, 付録を参照のこと.

3. 状態可到達集合に関する従来の結果

3.1 問題の設定

次の非線形システムを考える.

$$\dot{x} = f(x, w(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (5)$$

ここで, $x \in R^n$ は状態, $w \in R^m$ は外乱とする. また, 外乱 w は予め与えられた集合 $W \subset R^m$ に対し, 次のように拘束されているものとする.

$$w(t) \in W, \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (6)$$

[定義] $\xi \in R^n$ に対し, (6) 式の条件を満たす外乱 w で時間 $T \in [0, \infty)$ で $x(T) = \xi$ となるものが存在するとき, ξ は x_0 から状態可到達であるという.

[定義] x_0 からの状態可到達集合 $\mathcal{R}(x_0)$ を次で定義する.

$$\mathcal{R}(x_0) = \{\xi \in R^n : \xi \text{ は } x_0 \text{ から状態可到達}\}.$$

問題 外乱に対する拘束(6)式を有する非線形システム(5)式に対し, その状態可到達集合 $\mathcal{R}(x_0)$ を評価せよ.

3.2 非線形システムに対する結果

前節の問題に対して従来提案されているアプローチは, Reachability Maximum Principle⁵⁾に基づく手法と, Lyapunov Approach と呼ばれる手法の2つに大きく分けることができる. ここでは, Grantham によって文献⁶⁾で与えられた Lyapunov Approach を示す. なお, Lyapunov Approach を含む状態可到達集合の解析に関する従来の結果が文献³⁾にまとめられている.

<定理1>⁶⁾ C^1 関数 $V: R^n \rightarrow R$ が存在し, 次の条件を満たしているものとする.

- 1) $V(x_0) \leq 1$,
- 2) $\{\xi : V(\xi) \leq 1\} \subseteq \{\xi : V(\xi) \leq k\}, \quad \forall k > 1$,
- 3) $\{\xi : \dot{V}(\xi, \omega) \geq 0, \omega \in W\} \subset \{\xi : V(\xi) \leq 1\}$.

このとき, (5) 式, および (6) 式で定義される非線形システムの状態可到達集合 $\mathcal{R}(x_0)$ は次を満たす.

$$\mathcal{R}(x_0) \subset \{\xi \in R^n : V(\xi) \leq 1\}.$$

ここで $\dot{V}(x, w)$ は次で与えられるものとする.

$$\dot{V}(x, w) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right] f(x, w).$$

3.3 線形システムに対する結果

対象とするシステムを線形時不変システム

$$\dot{x} = Ax + Bw(t), \quad x(0) = 0, \quad (7)$$

また, 外乱 w への拘束 W が, 単位行列 I に対して次で与えられる場合を考える.

$$W = \mathcal{E}(I), \quad (8)$$

ここで, $\mathcal{E}(\cdot)$ は次で定義されるものとする.

[定義] $P > 0$ に対し, $\mathcal{E}(P)$ を次で定義する.

$$\mathcal{E}(P) = \{\xi : \xi' P \xi \leq 1\}.$$

このとき, 定理1は次のように記述される.

<定理2>⁷⁾¹⁾ 正定対称行列 $P \in R^{n \times n}$ が存在し, 任意の $x \in R^n$, $x' P x \geq 1$, および任意の $w \in W$ に対して, 次の条件を満たしているものとする.

$$x'(A'P + PA)x + x'PBw + w'B'Px \leq 0.$$

このとき, (7) 式, および (8) 式で定義される線形システムの状態可到達集合 $\mathcal{R}(0)$ は次を満たす.

$$\mathcal{R}(0) \subset \mathcal{E}(P).$$

文献¹⁾では, 定理2に S -procedure を適用することで, 双線形行列不等式 (BMI) 条件に基づいた状態可到達集合の評価を与えた.

<定理3>¹⁾ 正定対称行列 $P \in R^{n \times n}$, および非負の実数 α が存在し, 次の条件を満たしているものとする.

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + \alpha P & PB \\ B'P & -\alpha I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (9)$$

このとき, (7) 式, および (8) 式で定義される線形システムの状態可到達集合 $\mathcal{R}(0)$ は次を満たす.

$$\mathcal{R}(0) \subset \mathcal{E}(P).$$

4. 線形システムの状態可到達集合

4.1 状態可到達集合の評価手順

状態可到達集合の解析では, 与えられたシステム, および外乱への拘束に対する状態可到達集合を, いかに小さく評価するかが問題となる. ここでは, (7) 式, および (8) 式で定義される線形システムに対し, 定理3から導かれる次の定理を用いた状態可到達集合の評価手順を与える.

〔定理4〕 正定対称行列 $\bar{Q} \in R^{n \times n}$ に対し, 正定対称行列 $Q \in R^{n \times n}$, および非負の実数 α が存在し, 次の条件を満たしているものとする.

$$\begin{bmatrix} QA' + AQ + \alpha\bar{Q} & B \\ B' & -\alpha I \end{bmatrix} \leq 0, \\ Q \leq \bar{Q}.$$

このとき, (7) 式, および (8) 式で定義される線形システムに対する状態可到達集合 $\mathcal{R}(0)$ は次を満たす.

$$\mathcal{R}(0) \subset \mathcal{E}(P), \quad P = Q^{-1}.$$

(注意) 定理4の条件を満たす Q が存在すれば, $Q \leq \bar{Q}$ より次が成立することに注意する.

$$\mathcal{E}(Q^{-1}) \subset \mathcal{E}(\bar{Q}^{-1}). \quad (10)$$

(10) 式は, 定理4によって評価される状態可到達集合の上限 $\mathcal{E}(P)$ が, \bar{Q} によって定まる楕円領域 $\mathcal{E}(\bar{Q}^{-1})$ の内部に存在することを示している. 従って, 定理4は \bar{Q} によってあらかじめ与えられた楕円領域内において状態可到達集合の上限 $\mathcal{E}(P)$ を評価している, と解釈することができる.

状態可到達集合の評価手順として次を与える.

評価手順

- 手順1: 適当な $\gamma > 0$ に対し, \bar{Q} を $\bar{Q} = \gamma I$ で与える. また, $i = 1$ とする.
- 手順2: \bar{Q} に対し, 次の条件を満たす $Q_i > 0, \alpha \geq 0$ を求める.

$$\begin{bmatrix} Q_i A' + A Q_i + \alpha \bar{Q} & B \\ B' & -\alpha I \end{bmatrix} \leq 0, \\ Q_i \leq \bar{Q}.$$

• 手順3

- Q_i が収束した場合: $P = Q_i^{-1}$ とし, 終了.
- Q_i が収束していない場合: \bar{Q} を $\bar{Q} = Q_i$ で与える. $i = i + 1$ とし, 手順2へ.

(注意) A が安定ならば, 1回目の評価において手順2が可解となる γ が必ず存在することに注意する. また, i 回目の評価において手順2の条件を満たす Q_i が存在するならば, $\bar{Q} = Q_i$ であることから, $i + 1$ 回目の評価において手順2の条件を満たす Q_{i+1} が必ず存在する (例えば $Q_{i+1} = Q_i$). 従って, 上記の評価手順は任意に繰り返すことが可能である.

(注意) 上記の評価手順で得られる $\{Q_i : i = 1, 2, \dots\}$ は, 任意の i に対して次を満たすことに注意する.

$$Q_{i+1} \leq Q_i.$$

各 Q_i が正定であることから, $\{Q_i : i = 1, 2, \dots\}$ は下に有界な単調減少列であり, 従って収束する.

(注意) 任意の i に対して $Q_{i+1} \leq Q_i$ であることから,

$$\mathcal{E}(Q_{i+1}^{-1}) \subset \mathcal{E}(Q_i^{-1}).$$

これは, $i + 1$ 回目の評価で得られる状態可到達集合の上限

が, i 回目の評価で得られる状態可到達集合の上限の内部に存在していることを示している.

4.2 数値例

システムの状態変数表現を次で与える.

$$\dot{x} = Ax + Bw(t).$$

A , および B は次で与えられているものとする.

$$A = \begin{bmatrix} -4.3670 & -0.88740 \\ 7.1800 & -7.8410 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4.7060 \\ 2.3520 \end{bmatrix}.$$

また, 外乱 w に対する拘束 W を次で与える.

$$W = \mathcal{E}(I).$$

図1に上記システムに加えた外乱 w と状態 $x = [x_1, x_2]'$ を, また, 図2に前節の評価手順によって得られた \mathcal{E} を示す. 図2における一点破線は, 図1における, 状態 $x = [x_1, x_2]'$ の軌跡を表す. なお, 計算の繰り返し回数は30回, また, 手順1における \bar{Q} として次を与えた.

$$\bar{Q} = 10I.$$

最終的に得られた Q , および α は次の通りである.

$$Q = \begin{bmatrix} 0.80958 & 0.91441 \\ 0.91441 & 1.2547 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 4.1559.$$

5. 2次システムの状態可到達集合

5.1 状態可到達集合の評価

(3) 式で定義される2次システムに対し, 外乱 w に対する拘束が次で与えられているものとする.

$$W = \mathcal{E}(I). \quad (11)$$

〔補題1〕 正定対称行列 $P \in R^{n \times n}$, および非負の実数 α が存在し, 任意の $\xi \in \mathcal{E}(P)$ に対して次の条件を満たしているものとする.

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} [A + H\Delta(\xi)]' P \\ + P[A + H\Delta(\xi)] + \alpha P \end{pmatrix} & PB \\ B' P & -\alpha I \end{bmatrix} \leq 0.$$

このとき, (3) 式, および (11) 式で定義される2次システムの状態可到達集合 $\mathcal{R}(0)$ は次を満たす.

$$\mathcal{R}(0) \subset \mathcal{E}(P).$$

(証明) 補題の条件を満たす正定対称行列 $P \in R^{n \times n}$ と非負の実数 α が存在するならば, 定理3の証明と同様の手順で, 次で与えられる時変なパラメータ変動を有する線形システム

$$\dot{x} = [A + H\Delta(\xi(t))]x + Bw, \quad \xi(t) \in \mathcal{E}(P),$$

の状態可到達集合 $\mathcal{R}(0)$ が

$$\mathcal{R}(0) \subset \mathcal{E}(P),$$

を満たすことが示される. ■

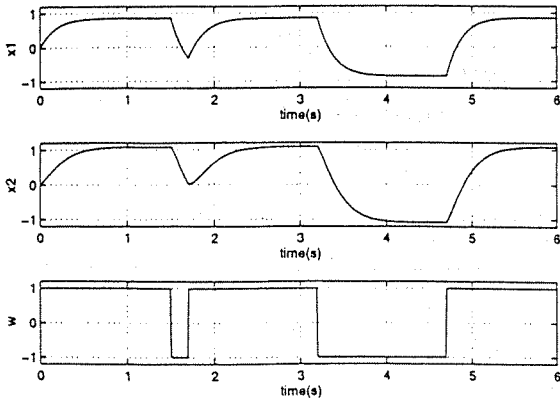


Fig. 1 時間応答

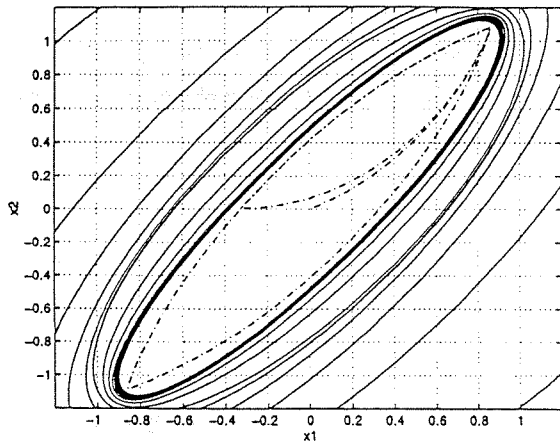


Fig. 2 状態可到達集合の上限

[補題2] 任意の正定対称行列 $P \in R^{n \times n}$, 任意の $\xi \in \mathcal{E}(P)$, および任意の $\beta \in R^n, \beta_j > 0$ に対して, 次が成立する.

$$\begin{aligned} & \Delta'(\xi)H'P + PH\Delta(\xi) \\ & \leq \sum_{j=1}^n \beta_j PH_j P^{-1} H_j' P + [\text{diag}(\beta)]^{-1}. \end{aligned}$$

(証明) P , および β に対し, $\tilde{P}(\beta)$ を次で定義する.

$$\tilde{P}(\beta) = \text{diag} [\beta_1^{-1} P, \beta_2^{-1} P, \dots, \beta_n^{-1} P].$$

このとき次が成立する.

$$\begin{aligned} 0 & \leq \left[\tilde{P}^{-\frac{1}{2}}(\beta)H'P - \tilde{P}^{\frac{1}{2}}(\beta)\Delta(\xi) \right]' \\ & \quad \times \left[\tilde{P}^{-\frac{1}{2}}(\beta)H'P - \tilde{P}^{\frac{1}{2}}(\beta)\Delta(\xi) \right] \\ & = PH\tilde{P}^{-1}(\beta)H'P + \Delta'(\xi)\tilde{P}(\beta)\Delta(\xi) \\ & \quad - \Delta'(\xi)H'P - PH\Delta(\xi). \end{aligned}$$

この関係と $\xi \in \mathcal{E}(P)$ より次を得る.

$$\begin{aligned} & \Delta'(\xi)H'P + PH\Delta(\xi) \\ & \leq PH\tilde{P}^{-1}(\beta)H'P + \Delta'(\xi)\tilde{P}(\beta)\Delta(\xi) \\ & = \sum_{j=1}^n \beta_j PH_j P^{-1} H_j' P + \xi' P \xi \cdot [\text{diag}(\beta)]^{-1} \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \beta_j PH_j P^{-1} H_j' P + [\text{diag}(\beta)]^{-1}.$$

〔定理5〕 正定対称行列 $Q \in R^{n \times n}$, 非負の実数 α , および $\beta \in R^n, \beta_j > 0$ が存在して, 次の条件を満たしているものとする.

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} QA' + AQ + \alpha Q \\ + \sum_{j=1}^n \beta_j H_j Q H_j' \end{array} \right) & B & Q \\ B' & -\alpha I & 0 \\ Q & 0 & -\text{diag}(\beta) \end{bmatrix} \leq 0.$$

このとき, (3) 式, および (11) 式で定義される2次システムの状態可到達集合 $\mathcal{R}(0)$ は次を満たす.

$$\mathcal{R}(0) \subset \mathcal{E}(P), \quad P = Q^{-1}.$$

(証明) 補題2より, 任意の $\xi \in \mathcal{E}(P)$ に対して次が成立する.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} [A + H\Delta(\xi)]' P \\ + P[A + H\Delta(\xi)] + \alpha P \end{array} \right) & PB \\ B' P & -\alpha I \end{bmatrix} \\ & \leq \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} A' P + PA + \alpha P \\ + \sum_{j=1}^n \beta_j PH_j P^{-1} H_j' P \\ + [\text{diag}(\beta)]^{-1} \end{array} \right) & PB \\ B' P & -\alpha I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

上式の右辺が半負定であるための必要十分条件は次で与えられる.

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} QA' + AQ + \alpha Q \\ + \sum_{j=1}^n \beta_j H_j Q H_j' \\ + Q[\text{diag}(\beta)]^{-1} Q \end{array} \right) & B \\ B' & -\alpha I \end{bmatrix} \leq 0.$$

5.2 状態可到達集合の評価手順

ここでは, 定理5より導かれる次の定理を用いた状態可到達集合の評価手順を与える.

〔定理6〕 正定対称行列 $\bar{Q} \in R^{n \times n}$ に対し, 正定対称行列 $Q \in R^{n \times n}$, 非負の実数 α , および $\beta \in R^n, \beta_j > 0$ が存在し, 次の条件を満たしているものとする.

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} QA' + AQ + \alpha \bar{Q} \\ + \sum_{j=1}^n \beta_j H_j \bar{Q} H_j' \end{array} \right) & B & Q \\ B' & -\alpha I & 0 \\ Q & 0 & -\text{diag}(\beta) \end{bmatrix} \leq 0,$$

$$Q \leq \bar{Q}.$$

このとき, (3) 式, および (11) 式で定義される2次システムに対する状態可到達集合 $\mathcal{R}(0)$ は次を満たす.

$$\mathcal{R}(0) \subset \mathcal{E}(P), \quad P = Q^{-1}.$$

定理6を用いることにより, 4.1節で示した線形システムに

対する状態可到達集合の評価手順と同様の手順で、2次システムに対する状態可到達集合の上限を評価することができる。

評価手順

- 手順 1: $\gamma > 0$ に対し、 $\bar{Q} = \gamma I$ で与える。また、 $i = 1$ とする。
- 手順 2: \bar{Q} に対し、次の条件を満たす $Q_i > 0, \alpha \geq 0$, および $\beta, \text{diag}(\beta) > 0$, を求める。

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} Q_i A' + A Q_i + \alpha \bar{Q} \\ + \sum_{j=1}^n \beta_j H_j \bar{Q} H_j' \end{array} \right) & B & Q_i \\ B' & -\alpha I & 0 \\ Q_i & 0 & -\text{diag}(\beta) \end{bmatrix} \leq 0, \\ Q_i \leq \bar{Q}.$$

- 手順 3
 - Q_i が収束した場合: $P = Q_i^{-1}$ とし、終了。
 - Q_i が収束していない場合: $\bar{Q} = Q_i$ で与える。 $i = i + 1$ とし、手順 2 へ。

(注意) 2次システムでは線形システムの場合とは異なり、1回目の評価において手順2が可解となる γ が存在するとは限らない。しかしながら、上記の評価手順の有効性を確認するためにおこなった幾つかの数値計算では、その状態可到達集合が有界と考えられる場合、ある程度大きな γ を与えれば、何回かの繰り返し後に手順2が可解となることが確認された。次節ではその一例を示す。

(注意) 線形システムに対する場合と同様に、 i 回目の評価において手順2の条件を満たす Q_i が存在するならば、 $i+1$ 回目の評価において手順2の条件を満たす Q_{i+1} が必ず存在する。

(注意) i_0 回目の評価において手順2の条件を満たす Q_{i_0} が存在した場合、上記の評価手順で得られる $\{Q_i : i = i_0, i_0 + 1, \dots\}$ は、任意の $i \in \{i_0, i_0 + 1, \dots\}$ に対して次を満たす。

$$Q_{i+1} \leq Q_i.$$

各 Q_i が正定であることから、 $\{Q_i : i = i_0, i_0 + 1, \dots\}$ は下に有界な単調減少列であり、従って収束する。

(注意) i_0 回目の評価において手順2の条件を満たす Q_{i_0} が存在した場合、任意の $i \in \{i_0, i_0 + 1, \dots\}$ に対して $Q_{i+1} \leq Q_i$ であることから、

$$\mathcal{E}(Q_{i+1}^{-1}) \subset \mathcal{E}(Q_i^{-1}).$$

これは、 $i+1$ 回目の評価で得られる状態可到達集合の上限が、 i 回目の評価で得られる状態可到達集合の上限の内部に存在していることを示している。

5.3 数値例

システムの状態変数表現を次で与える。

$$\dot{x} = \left[A + \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \right] x + Bw(t).$$

A, H_1, H_2, B は次で与えられているものとする。

$$A = \begin{bmatrix} -4.3670 & -0.88740 \\ 7.1800 & -7.8410 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9.4120 \\ 4.7040 \end{bmatrix}, \\ H_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

また、外乱に対する拘束を次で与える。

$$W = \mathcal{E}(I).$$

図3に上記システムに加えた外乱 w と状態 $x = [x_1, x_2]'$ を、また、図4に前節の手順によって得られた \mathcal{E} を示す。図4における一点破線は、図3における、状態 $x = [x_1, x_2]'$ の軌跡を表す。なお、計算の繰り返し回数は50回、また、手順1における \bar{Q} として次を与えた。

$$\bar{Q} = 30I.$$

最終的にえられた Q, α , および β は次の通りである。

$$Q = \begin{bmatrix} 7.1071 & 9.0813 \\ 9.0813 & 13.824 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 2.9875, \\ \beta = \begin{bmatrix} 10.467 \\ 11.088 \end{bmatrix}$$

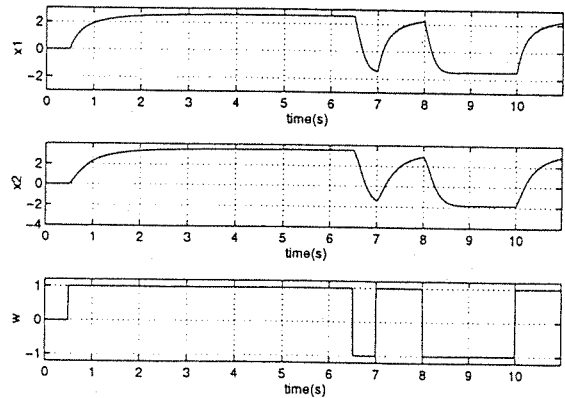


Fig. 3 時間応答

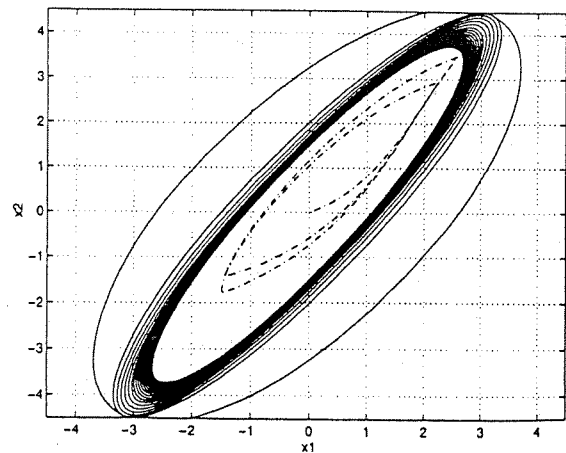


Fig. 4 状態可到達集合の上限

(注意) この例では、2回目の評価で手順2が可解となった。

(注意) 本稿で提案した2次システムに対する状態可到達集合の解析手法は、(3)式における2次項、 $\Delta(x)$ をパラメータ変動 $\Delta(t)$ として扱っているため、その評価が保守的となる傾向がある。実際、我々が試した幾つかの数値例では、(3)式におけるA行列の固有値の実部が小さい場合等に、状態可到達集合の評価が保守的になる傾向が見られた。しかしながら、上記に示した数値例は、提案手法が保守性の少ない評価を与える場合があることを示している。

6. 終りに

本稿では、非線形システムに対する2次近似から導かれるシステム、2次システムを導入、外乱が円領域に拘束されている2次システムに対し、LMI条件に基づいた状態可到達集合の解析手法を与えた。また、その有効性を数値計算により確認した。なお、今後の課題として、本稿で提案した手法に基づいた2次近似システムに対する有界実性の解析があげられる。

参考文献

- 1) S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, SIAM, 1994.
- 2) L. El Ghaoui and G. Scorletti, Control of Rational System using Linear-fractional Representations and Linear Matrix Inequalities, Automatica, Vol.32, No.9, pp.1273-1284, 1996.
- 3) J. E. Gayek, A Survey of Techniques for Approximating Reachable and Controlable Sets, In Proc. of 30th IEEE Conference on Decision and Control, pp.1724-1729, Brighton, 1991.
- 4) B. S. Gho, Stability, Vulnerability, and Persistence of Complex Ecosystem, Ecol. Modeling, Vol.1, pp.105-116, 1975.
- 5) W. J. Grantham and T. L. Vincent, A Controllability Minimum Principle, J. Optim. Th. Applic., Vol.17, pp.93-114, 1975.
- 6) W. J. Grantham, Estimating Controllability Boundaries for Uncertain Systems, Lecture Notes on Biomathematics, Vol.40, pp.151-162, Springer-Verlag, 1980.
- 7) D. Summers, Lyapunov Approximation of Reachable Sets for Uncertain Linear Systems, Int. J. Control, Vol.41, pp.1235-1243, 1985.

〈付 録〉

A. 非線形システムの2次近似

次の非線形システムを考える。

$$\dot{x} = f(x) + Bw(t), \quad x(0) = 0. \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $x \in R^n$ は状態、 $w \in R^m$ は外乱を表す。また、多変数ベクトル値関数 $f: R^n \rightarrow R^n$ は原点で解析的かつ $f(0) = 0$ であるものとする。

$f(x)$ に対し、行列関数 $A(x) \in R^{n \times n}$ を次で定義する。

$$A_{ij}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$A_{ij}(x)$ は $A(x)$ の (i, j) 成分を表すものとする。また、 $A(x)$ に対し、行列関数 $H_k(x) \in R^{n \times n}$, $k = 1, 2, \dots, n$ を次で定

義する。

$$H_k(x) = \frac{\partial A}{\partial x_k}(x).$$

このとき、 $f(x)$ の原点におけるテイラー展開は次で与えられる。

$$f(\xi) = A(0)\xi + \left[H_1(0)\xi \quad \dots \quad H_n(0)\xi \right] \xi + (\text{3次以上の項}).$$

これより、(A.1)式で定義される非線形システムの原点における2次近似は次で与えられる。

$$\dot{\xi} = [A(0) + H(0)\Delta(\xi)]\xi + Bw(t).$$

ここで、 $H(x) \in R^{n \times n^2}$, $\Delta(\xi) \in R^{n^2 \times n}$ は次で定義されるものとする。

$$H(x) = \begin{bmatrix} H_1(x) & H_2(x) & \dots & H_n(x) \end{bmatrix},$$

$$\Delta(\xi) = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \xi \end{bmatrix}.$$

実用化が見えてきたゲインスケジューリング

渡辺 亮*・内田 健康**

*大阪大学大学院工学研究科 大阪府吹田市山田丘 2-1
 **早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1
 *Graduate School of Engineering, Osaka University
 **School of Science and Engineering, Waseda University
 *E-mail: watanabe@mech.eng.osaka-u.ac.jp
 **E-mail: kuchida@uchi.elec.waseda.ac.jp

キーワード：ゲインスケジューリング (gain scheduling), 実システム (actual system), H^∞ ノルム (H^∞ norm), 安定性 (stability), JL 0001/99/3401-0031 © 1998 SICE

1. はじめに

近年, その理論的な研究が進められているゲインスケジューリングの新しい設計法^{1),2),7),9),18)}は, スケジューリングパラメータに依存したコントローラ的设计問題を図1に示される枠組で議論する. この枠組について, 従来のゲインスケジューリングとなら変わるころがない, そのような制御はすでに実用化されている, との感想を抱かれる読者は多いと思われるが, その感想はまさに正しいのであって, 図1の枠組は, 従来経験的に用いられてきたゲインスケジューリングの枠組そのものなのである.

では, 近年研究が進められているゲインスケジューリングの設計法はどこが“新しい”のかといえば, それは, 制御対象をスケジューリングパラメータをもつ線形システム, またはLPV (Linear Parameter Varying) システムと呼ばれる線形時変システム⁹⁾としてとらえ, 制御系の内部安定性と H^∞ ノルム (L^2 誘導ノルム) の意味での制御性能を保証するコントローラを系統的に設計する点である. このことは一方で, ゲインスケジューリングの新しい設計法が, スケジューリングパラメータに依存したコントローラを1回の手順で設計することを意味しており, いくつかの平衡状態において固定コントローラをそのつど設計し, これらを補間することでコントローラを構成した従来のゲインスケジューリングと比べた場合, 十分に新しいといえる. また, 従来の設計において考慮することが困難であった, 制御系の安定性や制御性能に関しても保証されることから, この点においてもまた, 十分に新しい設計法であるといえる.

本解説では, このゲインスケジューリングの新しい設計法について, 実用化, 理論的な特徴, および実際の制御問題への適用という3つの観点から, その可能性について考察することにする.

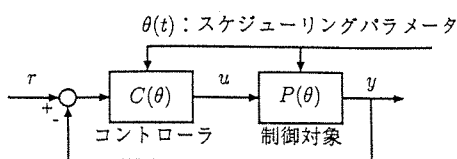


図1 ゲインスケジューリング

2. “実用化が見えてきた”とは

2.1 実用化への準備

“実用化が見えてきた”ゲインスケジューリングという言葉葉を“実用化の準備が整った”ゲインスケジューリングととらえた場合, その判定を下すにあたって以下の項目を検討する必要があると思われる.

- ・経験的に有効性が認められている制御手法か.
- ・系統的な設計法が与えられているか.
- ・実際の設計に用いるソフトウェアが存在するか.
- ・制御技術者の興味を引いているか.

第1の項目, “ゲインスケジューリングの有効性が経験的に認められているか”に関しては改めて述べる必要もないであろう. 現在のように理論が整備されていなかった時代からゲインスケジューリングがさまざまな分野で経験的に用いられ, その有効性が認められてきたことは広く知られた事実である. また逆に, 経験的な意味ですでに実用化されているという事実から, ゲインスケジューリングという制御手法がもつ能力の高さを鑑みることができる.

第2の項目における“系統的な設計法”とは, 1) 対象とするモデルのクラス, 2) 制御系に対する仕様, が明確で, 与えられたモデルに対して仕様を満足するコントローラの実現が, 現時点で存在する数値計算法で可能な設計法を意味するものとする. ゲインスケジューリングの新しい設計法として提案されているいくつかの手法^{1),2),7),9),18)}は, “スケジューリングパラメータをもつ線形システム”を対象に, 制御系の“内部安定性と H^∞ ノルム (L^2 誘導ノルム)”に関する仕様を満たすコントローラを与える設計法である. また, 制御系設計に広く適用されはじめた数値計算法である凸最適化⁹⁾に基づいて実際に設計することが可能であることから, ゲインスケジューリングの新しい設計法は, 上述の意味における“系統的な設計法”であるといえる.

第3の項目としてあげたソフトウェアについては, 制御系設計用CADとして広く普及しているMATLABに対して, 凸最適化をおこなうパッケージがLMIツールボックス⁹⁾としてすでに供給されている. LMIツールボックスは文献^{1),2)}に基づく設計法を関数として含んでおり, また, 文献^{7),9),18)}の設計法についても, MATLAB上でのプログラム⁹⁾が必要であるものの, 上記ツールボックスを用いて

実際に設計することが可能である。

最後の項目である，“制御技術者の興味を引いているか”に関しては，ここ何年かのシンポジウム等で，ゲインスケジューリングの新しい設計法の理論やその応用に関する発表がしばしば見られることから，制御技術者の興味を十分に引いているものと思われる。

以上を考え合わせてみると，ゲインスケジューリングの新しい設計法は，実用化の準備が十分に整っていると結論してもよいと思われる。真の実用化へ向けた課題として残されているのは，さまざまな実システムに対する有効性の検証である。ゲインスケジューリングの新しい設計法がこれらの検証に耐えうるならば，実システムに対する有効な設計法の1つとして根付いていくものと考えられる。

注意 本来ならば，“新しい設計法の理解へ至る道は平坦か”を第5の項目として加えるべきだが，“もっと勉強してほしい”と主張する一部の理論家と“もっとわかりやすく説明してほしい”と主張する一部の応用家との間で交わされる永遠の論争に一石を投じてしまうおそれがあるため省略した。

2.2 定性的な結果と定量的な結果

常微分方程式の解に関する結果としてよく知られているものに，つぎの2つの結果がある¹⁴⁾。

定理1 つぎの微分方程式を考える。

$$\dot{x} = Ax. \quad (1)$$

A は n 次の正方行列であるものとする。このとき，任意の $t_0 \in R, x_0 \in R^n$ に対し， $t = t_0$ において x_0 を通る(1)式の解はつねにただ1つ存在し，その定義域は R 全体である。

定理2 $t = t_0$ において x_0 を通る(1)式の解は，つぎで与えられる。

$$x = e^{A(t-t_0)} x_0.$$

定理1は，線形常微分方程式に対するCauchy-Peanoの存在定理，極大延長解の存在定理，およびCauchy-Lipschitzの一意性定理をあわせて述べたものである。一方，定理2は線形常微分方程式の解を具体的に与える結果である。

定理1と定理2は，共に微分方程式の解に関する結果であるにもかかわらず，その性格は大きく異なる。定理1が解の“質”に関する主張であるのに対し，定理2は解の“形”に関する主張である。この性格の違いを表わすために，定理1を微分方程式の解に関する定性的な結果，定理2を微分方程式の解に関する定量的な結果と呼ぶことにする。

制御理論を上述の定性的，および定量的という2つの観点から眺めた場合，制御理論における定性的な結果とは，なんらかの意味で実システムの制御に対する“理解を深める結果”であると考えられる。なお，制御理論に対する理解を深める結果というものも存在するが，ここではふれない。一方，制御理論における定量的な結果とは，具体的に与えられた制御対象のモデルに対し，なんらかの意味で“よい”制御係数を具体的に求める手法についての結果である

と考えられる。実用という言葉を非常に狭い意味で捉えた場合，実用的な結果とは必然的に定量的な結果を意味することになるが，定性的な結果と定量的な結果の優劣を問う議論にあまり意味がないことは明らかであろう。

一方，制御理論のなかには，定性的な側面と定量的な側面の両方を合わせもつ理論が存在する。その1つが(H^∞ 制御理論に基づいた)線形ロバスト制御理論である。本解説の主題であるゲインスケジューリングの新しい設計法は，定量的である一方，線形ロバスト制御理論と同様に定性的な側面もち合わせている。なお，ゲインスケジューリングの新しい設計法が持つ定性的な側面については，次節で述べることにする。

注意 上記の議論は，システム理論はすべて定性的，設計理論はすべて定量的というように，理論を2つに分類することを意図したものではない。

3. ゲインスケジューリングの新しい設計法

本節では，ゲインスケジューリングの新しい設計法の理論的な特徴について簡単にまとめる。詳細に関しては文献¹⁵⁾⁻¹⁷⁾，およびその参考文献を参照のこと。

3.1 制御対象のモデル

ゲインスケジューリングの新しい設計法は，スケジューリングパラメータをもつ線形システム，またはLPV (Linear Parameter Varying) システムと呼ばれるつぎの線形時変システムを対象としている⁵⁾。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p(\theta(t))x + B_p(\theta(t))u(t), \quad x(0) = 0, \\ z &= C_p(\theta(t))x. \end{aligned} \quad (2)$$

$\theta(t)$ はつぎの条件を満たすパラメータで，スケジューリングパラメータと呼ばれている。

- 1) $\theta(t) \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}], \quad \forall t \in [0, \infty)$,
- 2) $|\dot{\theta}(t)| \leq \nu_{\max}, \quad \forall t \in [0, \infty)$.

ゲインスケジューリングが経験的に用いられてきた理由の1つに，制御の現場において実感される1) 平衡状態の移動に伴う動特性の連続的な変化，2) 動特性の変化に対応するパラメータの存在，等の実システムの性質を，その制御へ積極的に取り入れるべきだという直観がある。(2)式で与えられるスケジューリングパラメータをもつ線形システムは $\theta(t)$ にその動特性が依存するシステムであり， $\theta(t)$ は条件1), 2)より値域が有界かつ変化率が制限されたパラメータである。したがって，スケジューリングパラメータをもつ線形システムとは，系統的な設計(2.1節)の可能性が存在する制御理論の領域において実現された，1), 2)の性質を有するモデルであると考えられる。また，このことは，ゲインスケジューリングの新しい設計法がもつ定性的な側面(2.2節)を示唆しているといえる。

3.2 制御系に対する仕様

ゲインスケジューリングの新しい設計法において，制御

系が満たすべき仕様として要求される性質はつきの2つである。

- ・制御系が内部安定
- ・制御系の H^∞ ノルム (L^2 誘導ノルム) が1未満

ここで、“制御系”とは制御対象のモデル、コントローラ、および重みその他から構成される拡大された制御系を意味するものとする。

拡大された制御系に対して上記の仕様を課す設計の枠組は、 H^∞ 制御理論以降に提案されたさまざまな設計法において見受けられる枠組であるが、その大きな理由として、1) 制御系の解析に関する結果を設計に結び付けることが比較的容易(場合によっては直接的に可能)である、2) ロバスト性の解析がノルム解析に帰着される、という理論を構成するうえでの事情をあげることができる。しかしながら、上記の枠組に基づいた設計法を用いることで“設計者の意図を制御系に反映させることが従来の設計法と比べて容易になった”という、線形ロバスト制御理論のさまざまな応用例を通して得られた実感が存在することも事実である。ゲインスケジューリングの新しい設計法における制御系設計の枠組は、これらの事情を鑑みたまものであるといえる。

3.3 コントローラ的设计

スケジューリングパラメータをもつ線形システムは線形時変システムの1つであることから、仕様(3.2節)を満たすコントローラ的设计問題は、つぎに示すタイプの微分不等式に対し、その正定解 $P(\theta(t))$ を求める問題に帰着される^{7),9),18)}。

$$A'(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) + C'(\theta(t))C(\theta(t)) + P(\theta(t))B(\theta(t))B'(\theta(t))P(\theta(t)) + \frac{d\theta}{dt}(t) \frac{dP}{d\theta}(\theta(t)) < 0.$$

上記は $d\theta/dt(t)$ を含んでいることから、その解を求めるためには、スケジューリングパラメータ $\theta(t)$ の過去から未来へわたる変化をあらかじめすべて知っておく必要がある。

ゲインスケジューリングの新しい設計法では、この非現実的な前提を取り除くために $\theta(t)$ の変化率がある定数 ν_{max} によって $|\dot{\theta}(t)| < \nu_{max}$ と制限されていることに着目、上記の微分不等式をつぎの2つの微分不等式に帰着させる。

$$A'(\theta)P(\theta) + P(\theta)A(\theta) + C'(\theta)C(\theta) + P(\theta)B(\theta)B'(\theta)P(\theta) \pm \nu_{max} \frac{dP}{d\theta}(\theta) < 0.$$

上記は θ に関する連立微分不等式であることから、 $\theta(t)$ の値域に関する情報が与えられれば解くには十分である。このことは、ゲインスケジューリングの新しい設計法が(線形時変システムを対象としているにもかかわらず)スケジューリングパラメータの現在の値にのみ依存するコントローラを与える理由を示している。

3.4 問題点

3.1節で述べたように、ゲインスケジューリングの新しい設計法は(2)式に示されるスケジューリングパラメータをもつ線形システムを対象としていることから、実システムへの適用を考えた場合、なんらかの手段によって実システムを(2)式の形で記述する必要がある。非線形である実システムを(2)式の形で厳密に記述することが、特別な場合を除いて困難であることは誰の目にも明らかであろう。しかしながら、ゲインスケジューリングの新しい設計法はこの問題に関して多くを語っていない。

この問題に対する責任は、その内容から考えて明らかに理論側が負うべきものである。したがって、応用側における1つの現実的な対処法は、(2)式の表現が実システムの制御を目的としたそれなりの根拠(3.1節)をもったフィクションであると割り切ることである。割り切ったうえで、本末転倒ではあるが、ゲインスケジューリングの新しい設計法が“自分のプラント”の制御に役立つような、スケジューリングパラメータをもつ線形システムとしての“自分のプラント”のモデル化手法を確立することが重要であると思われる。

4. ジェットエンジンの推力制御問題への適用

本節では、ゲインスケジューリングの新しい設計法をジェットエンジンの推力制御へ適用した例について述べる。前節の終りで述べたように、実際の制御問題を扱う場合、制御対象をどのような手段でスケジューリングパラメータをもつ線形システムとして記述するかが大きな問題となる。そこで、以降では2軸再燃ターボファンエンジンの非線形モデル⁹⁾を対象に、適用の実際を設計用モデルの問題を中心に述べることにする。

4.1 制御の目的と制御系の構成

2軸再燃ターボファンエンジンの概観を図2に示す。

ジェットエンジン制御の目的は、パイロットのスロットル操作に応じて要求される推力を迅速に設定し維持することにある。しかしながら飛行状態における推力の計測が困難であるため、一般に空気流量とエンジン圧力比 E_{PR} の積が推力パラメータとして用いられている¹⁰⁾。空気流量はファン回転数 N_L の関数として与えられ、 E_{PR} はエンジン

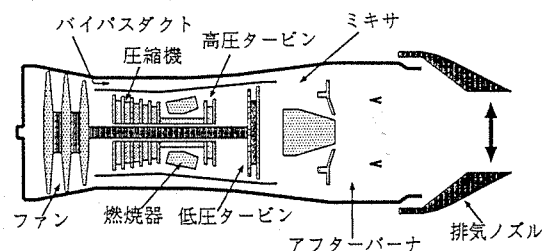


図2 2軸再燃ターボファンエンジン

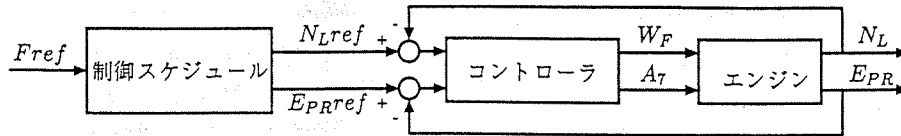


図3 推力制御系の構成

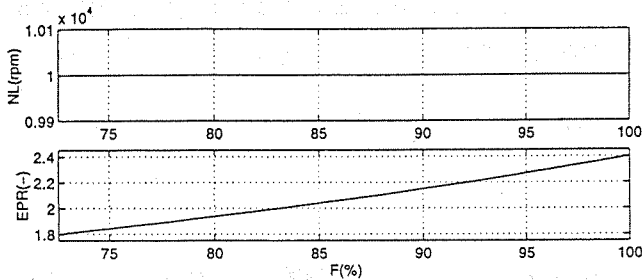


図4 制御スケジュール

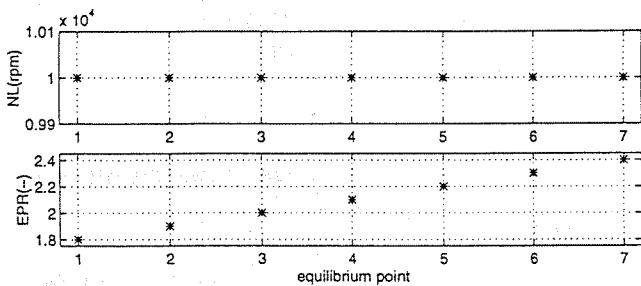


図5 同定を行う平衡状態

入口圧力 P_0 と出口圧力 P_7 の比として $E_{pr} = P_7/P_0$ で与えられる。 N_L と E_{PR} が計測可能なパラメータであることを鑑み、推力制御を図3に示される制御系で実現することを考える。図3の制御系において W_F と A_7 はそれぞれ2軸再熱ターボファンエンジンへの制御入力である燃料流量と排気ノズル面積を表す。図3の制御系は、パイロットがスロットル操作によって要求する推力指令値 F_{ref} を、 N_L 指令値 N_{Lref} と E_{PR} 指令値 E_{PRref} に変換することで、推力制御の実現を図るものである。なお、推力制御の詳細に関しては文献¹¹⁾を参照のこと。

ここで、図3の制御系において要求された推力を実現する N_L と E_{PR} の組合せが一意でないことに注意する。一方、2軸再熱ターボファンエンジンは排気ノズル面積が可変であることから、その開閉によって E_{PR} を調整、最も遅い動特性の一つである N_L をほぼ一定に保ちながら推力を変化させることが可能である。このことを鑑み、高推力領域における制御スケジュールとして図4を用いる。

4.2 システム同定に基づいたモデリング

本節の冒頭で述べたように、ゲインスケジューリングの新しい設計法を実際の制御問題へ適用する場合、制御対象をスケジューリングパラメータをもつ線形システムとしてどのように記述するかが大きな問題となる。以降では、“われわれの経験(3.4節)”においてその有効性が強く実感された手法である、パラメトリックなシステム同定に基づくモデル化手法について述べる。

パラメトリックなシステム同定では、同定をおこなう平衡状態、および平衡状態の近傍における状態変数表現をあらかじめ定めておく必要がある。同定をおこなう平衡状態は図4を鑑み、図5で定めた。また、平衡状態の近傍における状態変数表現は、2軸再熱ターボファンエンジンにおける支配的なダイナミクスや被制御量、および推力制御の実現方法を鑑み、つぎで与えた。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

ここで、 $x' = [N_H, N_L, 882.53 \times E_{PR}]$ 、 $u' = [W_F, A_7]$ 、 $y' = [N_L, E_{PR}]$ であるものとする。圧縮機回転数 N_H を状態変数に含めた理由として、 N_H はファン回転数 N_L と並び、2軸再熱ターボファンエンジンにおける支配的な(最も遅い)ダイナミクスの一つであることがあげられる。

同定の手順は次のとおりである。1) 図5の各平衡状態に

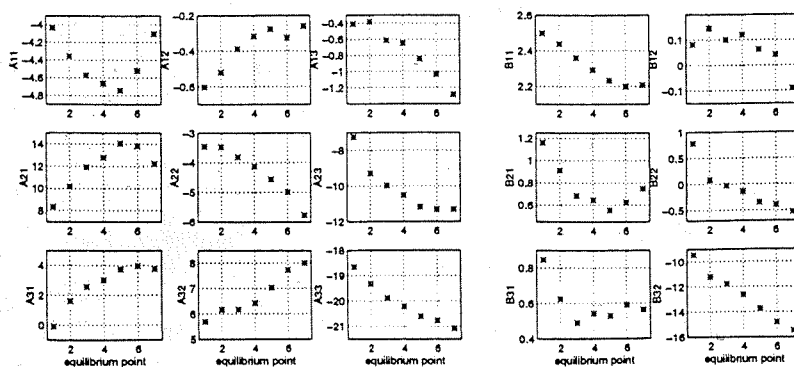


図6 A行列とB行列の同定結果

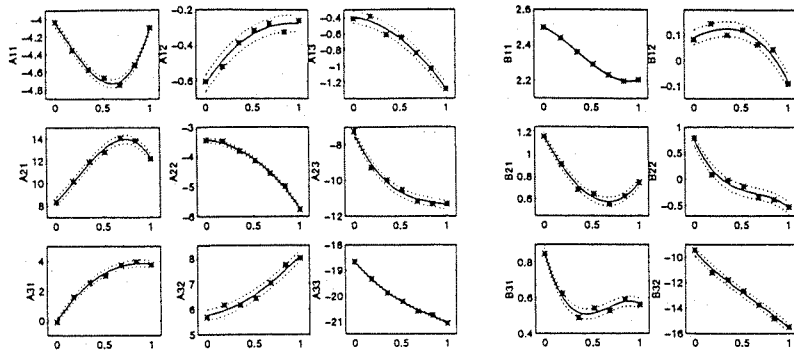


図7 $A(\theta), \Delta A, B(\theta), \Delta B$

において、非線形モデルの W_F と A_7 に微小な振幅をもつ M 系列信号¹²⁾を印可、入出力データを計測する。2) 計測データを用いて、最尤法¹³⁾に基づくパラメトリックな同定を行う。パラメトリックな同定により評価された各平衡状態における A 行列と B 行列を図6に示す。

図6に示されるパラメトリックな同定結果に基づき、2軸再熱ターボファンエンジンを状態変数表現が次で与えられるシステムとしてモデル化する。

$$\dot{x} = [A(\theta(t)) + \Delta A(t)]x + [B(\theta(t)) + \Delta B(t)]u,$$

$$y = Cx.$$

ここで、 $\Delta A(t), \Delta B(t)$ はそれぞれ $A(\theta)$ 行列と $B(\theta)$ 行列の時変なパラメータ変動を表わすものとする。

上記のモデルを具体的に評価するには、スケジューリングパラメータ $\theta(t)$ をあらかじめ決めておく必要がある。こ

こでは、圧縮機回転数 N_H をその値域が $[0, 1]$ となるように正規化した値を $\theta(t)$ とした。これは、 N_H が2軸再熱ターボファンエンジンにおける支配的なダイナミクスの1つであることを鑑みたものである。また、設計に用いる $A(\theta), B(\theta)$ は、図6の結果を θ に関する3次の行列多項式

$$A(\theta) = A_0 + \theta A_1 + \theta^2 A_2 + \theta^3 A_3,$$

$$B(\theta) = B_0 + \theta B_1 + \theta^2 B_2 + \theta^3 B_3,$$

で最小二乗近似することによって評価した。一方、パラメータ変動 $\Delta A(t), \Delta B(t)$ の最大値は、各平衡状態における $A(\theta), B(\theta)$ の値と同定結果の差の最大値として評価した。以上より得られた $A(\theta), \Delta A, B(\theta), \Delta B$ を図7に示す。図7において、実線が $A(\theta), B(\theta)$ を、点線がパラメータ変動 $\Delta A(t), \Delta B(t)$ の最大値 $\Delta A, \Delta B$ を、*印が各平衡状態における同定結果を表わす。

4.3 コントローラ的设计と制御性能の評価

前節で求めた2軸再熱ターボファンエンジンのモデルに対し、文献^{18), 7), 9)}の手法に基づいてつぎの2つの仕様を満たすコントローラを設計した。1) 時変なパラメータ変動 $\Delta A(t), \Delta B(t)$ に対して制御系が内部安定。2) ファン回転数 N_H とエンジン圧力比 E_{PR} が指令値に追従。設計の詳細に関しては文献^{19), 20)}に述べられているのでそちらを参照のこと。

得られたコントローラの性能を2軸再熱ターボファンエンジンの非線形モデル⁶⁾を用いたシミュレーションで評価した。エンジン圧力比指令値 E_{PRref} に、 $E_{PRref} = 2.0$ から $E_{PRref} = 2.2$ へのステップ入力を $t = 1$ で印加した場合の応答を図8に示す。図8より、制御入力の立ち上がりが若干振動的であるものの、被制御量の応答は十分満足のいくものであることが確認される。

5. おわりに

本解説では、近年その理論的/応用的研究が進められているゲインスケジューリングの新しい設計法について、実用化、理論の特徴、および実際の制御問題への適用という3つの観点から、その可能性を考察した。また、実際の制御問

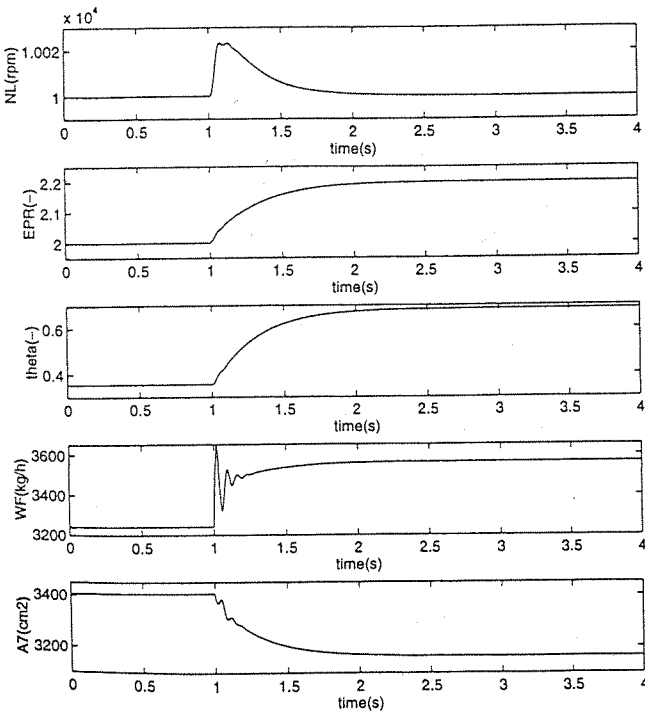


図8 制御系の応答

題への適用に関しては、モデル化の問題に特に注目して解説を加えた。本解説でゲインスケジューリングの新しい設計法について興味をもたれた読者は、文献^{15)~17)}、およびその参考文献に目を通されることを強くお勧めする。

最後に、個人的な経験から得た感想を述べる事が許されるならば、ゲインスケジューリングの新しい設計法は、制御対象のモデル化やコントローラの設計を通して設計者の意図を実際の制御系に反映させることが十分に可能な“面白い”設計法であるということをつけ加えておきたい。

(1998年10月13日受付)

参考文献

- 1) P. Apkarian and P. Gahinet: A Convex Characterization of Gain-Scheduled H^∞ Controllers, IEEE Transactions on Automatic Control, 40, 853/864 (1995)
- 2) G. Becker and A. Packard: Robust Performance of Linear Parametrically-Varying Systems Using Parametrically Dependent Linear Feedback, Systems and Control Letters, 23, 205/215 (1994)
- 3) S. Boyd, El. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, SIAM (1994)
- 4) P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali: LMI Control Toolbox for Use with MATLAB, The MathWorks, inc. (1995)
- 5) J. S. Shamma, M. Athans: Gain Scheduling: Potential, Hazards, and Possible Remedies, IEEE Control Systems Magazine, 12, 101/107 (1992)
- 6) R. J. Szuch and K. Seldner: Real-Time Simulation of F 100-PW-100 Turbofan Engine Using the Hybrid Computer, NASA TMX-3261 (1975)
- 7) R. Watanabe, K. Uchida, M. Fujita and E. Shimemura: L^2 Gain and H^∞ Control of Linear Systems with Scheduling Parameter, Proc. of 33rd IEEE Conference on Decision and Control, 1412/1414 (1994)
- 8) R. Watanabe, K. Uchida and M. Fujita: A New LMI Approach to Analysis of linear systems with Scheduling Parameter—Reduction to Finite Number of LMI Conditions—, Proc. of 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1663/1665 (1996)
- 9) F. Wu, X. H. Yang and A. Packard: Induced L^2 Norm Control for LPV Systems with Bounded Parameter Variation Rates, Proc. of American Control Conference, 2379/2384 (1995)
- 10) 松岡: 航空工学講座 11 ジェットエンジン 構造編 第二版, 日本航空技術協会 (1992)
- 11) 森(編): H^∞ 制御の実プラントへの応用, 第4章 ジェットエンジン制御への応用, 計測自動制御学会 (1995)
- 12) 森下, 小畑: 信号処理, 計測自動制御学会 (1982)
- 13) 相良, 秋月, 中溝, 片山: システム同定, 計測自動制御学会 (1981)
- 14) 齊藤: 常微分方程式, 岩波講座 基礎数学, 岩波書店
- 15) 内田: ゲインスケジューリング, 計測と制御, 34-3, 182/187 (1995)
- 16) 内田, 渡辺, 藤田: ゲインスケジューリングの新しい展開, 電気学会論文誌, C 116-10, 1085/1088 (1996)
- 17) 内田, 渡辺: ゲインスケジューリング—適応/非線形への展開—, システム/制御/情報, 42-6, 306/311 (1998)
- 18) 渡辺, 内田, 藤田, 示村: スケジューリングパラメータを持つ線形システムの H^∞ 制御, 計測自動制御学会論文集, 31-4, 481/488 (1995)
- 19) 渡辺, 内田, 藤田: スケジュールド H^∞ 制御の先端応用, SICE '95 予稿集, 859/860 (1995)
- 20) 渡辺, 黒崎, 内田, 藤田: ゲインスケジューリングを用いたジェットエンジンの推力制御, SICE '96 予稿集, 875/876 (1996)