早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

量子系における"時間演算子"の数学的基礎と波束の長時間挙動

Mathematical Foundation of "Time Operators" and Long-Time Behavior of Wave Packets in Quantum Systems

申 請 者
宮本 学
Manabu Miyamoto

物理学及応用物理学　　量子力学基礎論

2002 年 12 月

量子力学の確立と共に量子論は飛躍的な進歩を遂げてきた. 学術的な進歩もさることながら, その技術面への貢献は計り知れない. この進展は現在において益々その高まりを見せ, 中でも量子情報や量子コンピュータといった分野に始まる量子情報技術の展開に注目が集まっている. 同時に, このような状況を契機に, 量子力学の抱える基礎的問題への関心も高まりつつある. そこでは, 観測行為に関る問題や, 量子状態を効率的に制御する際に必要とされるデコヒーレンス抑制の問題等が, 従来のような学術的観点からだけでなく, 技術的側面からも重要となるからである. 量子系の状態制御を考えるとき, 観測問題やデコヒーレンスの問題の解決に加え, 量子系の時間発展に関する深い知識が必要不可欠である. しかし, そこにもまた様々な基礎的問題が存在する. 例えば, 時間とエネルギーの不確定性関係の理解, 粒子の到着時間の量子論的記述, トンネル時間の記述, 不安定量子系の短時間および長時間領域での崩壊様式の理解などである. 観測問題やデコヒーレンスの問題を含め, これらの問題の解決による量子論の総合的な理解の進展が一層望まれていると考えられる.

本論文では, 量子論における "時間" に関する基礎的問題から二つの課題を扱う.

第一の課題は時間とエネルギーの不確定性関係と深い関連を持つ時間演算子である. 時間とエネルギーの不確定性関係は, 位置と運動量の不確定性関係と違い, それが量子力学の数学的枠組から演繹的に導出されていないという特殊性を持つ. したがって, その物理的意味も導出の仕方に依存している. 実際, 時間とエネルギーの不確定性関係を, エネルギーの測定精度とその測定に要する時間の関係と理解する場合もあれば, エネルギー準位幅と状態の遷移時間との関係と見る場合もある. "時間演算子" は, 時間とエネルギーの不確定性関係からこのような曖昧さを取り去り, 位置と運動量の不確定性関係と同じ立場に置く目的で考案された. それは, ハミルトニアン H と正準交換関係を満たす形式的な演算子 T として導入される.

$$TH - HT = i \tag{1}$$

このとき, 位置と運動量の不確定性関係と同様に, 時間とエネルギーの不確定性関係を演繹的に導出できる. しかし, この様な T はエネルギーをずらす演算子の生成子となるため, H が下に有界である場合に矛盾と成り得る事が Pauli(1958) により指摘された. この様な状況から, T を数学的に矛盾なく導入できるかどうかは疑問視されてきた. その一方で, 数学的に厳密なアプローチが為されてきた訳ではない. 時間演算子が提案されて 70 年以上が経つ現在, 数学的に厳密なアプローチが為されても良い時期ではないだろうか. そこで本論文では, von Neumann により整備された公理論的量子力学に基づいて, 時間演算子の諸性質を明らかにする.

もう一つの課題は初期波束の特性と波束の長時間領域でのベキ減衰との関連である. 近年, 1 次元自由粒子系において, 長時間での波束のベキ減衰の様式が初期波束により異なる事が, Unnikrishnan(1998), Lillo と Mantegna(2000), そして

Damborenea 等 (2002) により報告された．彼等は具体例を示すに留まり，したがって一般的な初期波束に関する結果ではなかった．そこで本論文では，長時間での波束の漸近展開を求めることでその一般化を目指した．

二つの研究は一見すると全く別物のように見えるかもしれないが，実はそこに深い関連性が隠されている．本論文の構成は以下の通りである．

第 1 章は序論である．上述の二つの研究の生じた背景と我々の研究目的，そして二つの研究の関連性について述べる．

第 2 章では時間演算子を扱う．具体的には以下の関係式を導入し，それを満たす二つの演算子 T と H のスペクトルや不確定性関係を調べる．

$$Te^{-itH} = e^{-itH}(T+t), \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

ただし，H は自己共役演算子，T は対称演算子であることを仮定する．対称演算子とは自己共役演算子を一般化したものである．量子情報理論の言葉で言い換えれば，T を POVM (Positive Operator Valued Measure) で記述される演算子として扱う事を意味する．実は，この拡張により Pauli の批判は回避可能となる．また，厳密には正準交換関係 (1) と上の関係式は同値ではない．この点も，Pauli の批判を回避できる理由である．さらに，Aharonov と Bohm(1961) により提唱された演算子，$T_0 = \frac{1}{4}(QP^{-1} + P^{-1}Q)$，と 1 次元自由粒子系のハミルトニアン $H_0 = P^2$ が，関係式 (2) を満たすことが示される．ここで，Q と P はそれぞれ位置演算子と運動量演算子である．また，P^{-1} は P の自己共役な逆演算子である．したがって，関係式 (2) を調べることは，T_0 の定性的性質を厳密な視点から調べることに他ならない．T と H が関係式 (2) を満たすとき，H は絶対連続である事が示される．このことは，関係式 (2) を満たす H で記述される系は散乱状態だけから成る事を意味する．また，H が非負であれば，T と H の不確定性関係において最小不確定性状態が存在しない事も証明される．この結果は Wigner(1972) や Baute 等 (2000) の結果の精密化となっている．さらに，T_0 と H_0 を波動演算子でユニタリー変換すれば，ポテンシャル系でも時間演算子を構成できる可能性を指摘する．

我々は，時間演算子と量子ダイナミクスとの関連を模索することで，時間演算子の物理的意味の理解を目指すという大胆な試みも行う．その結果として，関係式 (2) から，演算子 T と初期状態 ψ の生存確率 $|\langle\psi, e^{-itH}\psi\rangle|^2$ は以下の不等式

$$\frac{4\,(\Delta T)_\psi^2\,\|\psi\|^2}{t^2} \geq |\langle\psi, e^{-itH}\psi\rangle|^2, \qquad \forall t \in \mathbf{R}\backslash\{0\} \tag{3}$$

を満たす事が示される．ここで，$(\Delta T)_\psi$ は状態 ψ における T の不確定性 (標準偏差) である．この不等式は，H と関係式 (2) を満たす T が存在すれば，生存確率は長時間において t^{-2} より速く減衰する事を主張する．また，上の不等式から，生存確率が半分になる時刻の最大値 τ_h が，不等式 $2\sqrt{2}\,(\Delta T)_\psi\,\|\psi\| \geq \tau_h$ を満たす事を示

せる．この事と生存確率の物理的意味から，時間の不確定性 $(\Delta T)_\psi$ は，初期状態から初期状態と区別できる別の状態への遷移時間の目安を与えている事が分かる．

ここで，二つの研究の関連性を明らかにしよう．不等式 (3) が意味を持つのは $(\Delta T)_\psi$ が発散しない場合である．1次元自由粒子系において，この条件は初期波束の運動量分布に関する次の条件と等価である．

$$(\Delta T_0)_\psi < \infty \Leftrightarrow \hat{\psi}(k) = O(k^2) \quad (k \to 0). \tag{4}$$

この事実は，不等式 (3) と合わせると，初期波束 ψ のゼロ運動量付近での振る舞いが $\hat{\psi}(k) = O(k^2)$ であれば，生存確率は t^{-2} より速く減衰することを導く．一方，例えばガウス波束を初期波束とすると，生存確率は t^{-1} で減衰する事が知られている．このことは，より一般的な問題として，初期波束の特性と波束の長時間での振る舞いがどの様に関係しているのかという二つ目の課題を提起している．

そこで第3章では，1次元自由波束の長時間における振る舞いが，初期波束のゼロ運動量近傍での振る舞いによりどのように特徴付けられるかを調べるため，我々は長時間での波束の漸近展開を試みる．特に，初期波束 ψ が $\hat{\psi}(k) = O(k^m)$ $(k \to 0$, $m = 0, 1, \ldots)$ を満たす状況下で，波束は漸近的に次の様に展開される事が示される．

$$\psi(x,t) = (-1)^{\overline{m}-1}\frac{\Gamma(\overline{m}+1/2)}{\pi(it)^{\overline{m}+1/2}}(G_{2\overline{m}}\psi)(x) + O(t^{-\overline{m}-3/2}) \quad (t \to \infty). \tag{5}$$

ここで，$\overline{m} = (m+1)/2$ (m:奇数)，または $m/2$ (m:偶数) である．また，展開係数 $(G_{2\overline{m}}\psi)(x)$ は初期波束 $\hat{\psi}(k)$ の $k = 0$ での微係数で陽に書き下せる．この結果を使えば，長時間 $(t \to \infty)$ での生存確率の漸近公式は次の様に求まる．

$$|\langle \psi, e^{-itH_0}\psi \rangle|^2 = \frac{\Gamma(m+1/2)^2}{(m!)^4 t^{2m+1}}|\hat{\psi}^{(m)}(0)|^4 + O(t^{-2m-2}) \quad (t \to \infty). \tag{6}$$

ここで重要な事は，二つの漸近公式における t のベキの値が，初期波束のゼロ運動量付近での振る舞い (整数 m) によって決定されている点である．また，二つの公式における t のベキの値が，互いに異なる点 (一般には $2m+1 \neq 2\overline{m}+1$) も興味深い．我々は，時間発展に関して量子力学に内在する新たな構造を垣間見たのかもしれない．ただし，ガウス波束といった急減少関数に対しては十分有効であるものの，この漸近展開が任意の初期波束に対して適用できるとは限らないことには注意が必要である．さらに，これらの議論を高次元に拡張することも可能である．

第4章では1次元自由粒子系に関するこれらの議論を1次元 (短距離型) ポテンシャル系へと拡張する．そこでは，ベキ減衰に対し，初期波束のゼロ運動量付近の振る舞いと系のゼロエネルギー共鳴の効果とが拮抗する形で影響を及ぼし合うという特殊な構造も見られる．

第5章ではこれらの研究で得られた成果をまとめ，今後の展望が述べられる．