早稲田大学大学院理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

量子系における“時間演算子”の数学的基礎と波束の長時間挙動

Mathematical Foundation of “Time Operators” and Long-Time Behavior of Wave Packets in Quantum Systems

申　請　者

宮本 学

Manabu Miyamoto

物理学及応用物理学専攻・量子力学基礎論研究

2003年　3月

量子力学において“時間”が特異な位置を占めていることはよく知られている．時間は明らかに実験で測定される観測量である．しかし量子力学の枠内においては，他の位置変数や運動量変数が自己共役な演算子として表現される力学変数であるのに対して，時間はあくまでc数のパラメータに過ぎないのである．古典力学では時間とエネルギーが正準変換によって互いに共役な正準変数となり得るから，素朴にはエネルギーすなわちハミルトニアンと正準交換関係を満たす演算子が量子力学で時間に対応する演算子と考えられる．

通常，ハミルトニアンと正準交換関係を満たす演算子を“時間演算子”と定義するが，そのような演算子が存在すれば，いわゆる時間とエネルギーの間の不確定性関係式は，ちょうど位置と運動量の場合と同じように，演算子間の代数関係から直接導出されることになる．従来，時間とエネルギーの間の不確定性関係式をめぐっては，エネルギーの測定精度とその測定に要する時間精度の関係，あるいはエネルギー準位幅と状態遷移時間との関係，さらには力学変数の期待値の時間変動率とエネルギー不確定性の関係など，様々に解釈されてきた．こういった時間の不確定性をめぐる多様な解釈は，時間変数が量子力学において単なるパラメータに過ぎないという事実と密接に関係している．実際，時間演算子が存在すれば，時間とエネルギーの間の不確定性関係式の導出に付きまとっていた曖昧さは払拭されることになる．また，“粒子到着時間”や“滞在時間”など，古典的には明確な意味を持ちながら量子力学の枠内にはその明確な計算処方が存在していない量の取り扱いに対しても，新しい視点をもたらしてくれる可能性が期待される．しかし，その一方で，古くはPauliが指摘したように，ハミルトニアンと正準交換関係を満たす演算子が存在した場合には，エネルギーを任意にずらすような演算子が構成可能であって，エネルギーの有界性（すなわち真空の安定性）や離散エネルギー系の存在と矛盾してしまうと思われてきた．このような観点からいわゆる時間演算子の存在は疑問視され，これまでは真剣に議論されてこなかった．

しかし量子力学の枠組みの中で時間という基本的物理量が占める役割を明確にする上でも，上述のような演算子をきちんと調べておくことは意味のあることである．本論文では，von Neumann によって整備された公理論的量子力学に基礎を置き，ハミルトニアンと正準交換関係を満たす演算子，すなわち時間演算子の数学的構造およびその物理的帰結が明らかにされる．また，時間演算子と量子系のダイナミクスを結び付けるひとつの不等式の導出を契機として，波動関数（波束）の長時間極限での漸近的振る舞いと初期波束との関係を精査し直し，波動関数の漸近的冪減衰の指数に関して得られた知見が報告される．

本論文は５つの章から構成されている．以下，順を追ってその概要と評価を述べる．

第１章は序論であり，本研究の背景と目的が明らかにされる．また，時間演算子はハミルトニアンとの正準交換関係を通して量子系のダイナミクスと密接に関

連し得ることが指摘され，本研究の全体像も概観される．

第2章では時間演算子の数学的構造が明らかにされるとともに，その物理的帰結のひとつとして時間演算子の分散を含んだ形の不等式が導出される．本論文の主要部分のひとつである．まず，Hilbert空間上の自己共役演算子であるハミルトニアンHと“弱Weyl関係式”を満たす対称演算子としてTを導入する．ある演算子がハミルトニアンと弱Weyl関係式を満たすということは，時刻tにおけるHeisenberg描像での演算子が時刻0での演算子からc数tだけずれることを意味している．また，Tをオブザーバブルとしての自己共役演算子ではなく，より一般的な対称演算子として導入することで，冒頭に述べたようなPauliの批判を回避できる余地が生まれることになる．Pauliの批判は，正準交換関係と，演算子を生成子とするような指数関数型演算子間の関係式（Weyl関係式あるいは弱Weyl関係式）とを素朴に同一視することに基づいており，数学的厳密性を欠いていたのである．両者は数学的には厳密に区別されなければならない．ハミルトニアンHと弱Weyl関係式を満たすTはHと正準交換関係を満たす，したがって時間演算子であることが示される．一方，Tを生成子とする演算子$e^{i\epsilon T}$ $(\epsilon \in \mathbf{R})$は，$T$が自己共役演算子の場合にはWeyl関係式を満たしてエネルギーをずらす演算子となるが，自己共役でない場合には一般にはそうならないことが示される．演算子を厳密な数学的枠組みの中できちんと位置付けることによって，時間演算子がどのような条件の下で考えられ得るか，またこれまで時間演算子をめぐる批判の中で見過ごされてきていた点を明確にしたことは特に強調されてよい成果である．

弱Weyl関係式の存在は量子系のスペクトルに関してもいつくかの知見をもたらす．すなわち，ハミルトニアンと弱Weyl関係式を満たすような対称演算子（時間演算子）が存在するような系では束縛状態は存在せず散乱状態だけから成ること，ハミルトニアンが非負であればTとHの不確定性関係式において最小不確定性状態は存在しないことが数学的に証明される．また，時間演算子の初期状態における分散と初期状態の生存確率との間にはひとつの不等式が成立し，生存確率はt^{-2}で抑えられることが明らかにされる．このことは，時間演算子を許すような初期波束のダイナミクスが限定されたものになることを明確に示しており，時間演算子の物理的内容を考える上でも興味深い．

時間演算子の具体例としては1次元自由粒子系でのAharonov–Bohm演算子$T_0 = (QP^{-1} + P^{-1}Q)/4$が知られている．運動量演算子$P$の逆演算子$P^{-1}$は自己共役となることが示され，$T_0$は自由ハミルトニアン$H_0 = P^2$と弱Weyl関係式を満たすので，確かに時間演算子と呼べる演算子である．自由粒子系とポテンシャル系とは波動演算子を用いて関係付けられるから，具体的な表式が分かっているT_0を波動演算子で変換すれば，ポテンシャル系での時間演算子も具体的に構成できる可能性がある．

時間演算子の分散を含む不等式が意味を持つのは，時間演算子が定義できかつ

その分散が有限となるような波動関数（波束）に限定されるが，特に1次元自由波束の場合，その条件は運動量空間原点近傍での波束の振る舞いが $\psi(k) \sim O(k^2)$ となることを要求している．言い換えればこの不等式は，運動量空間原点近傍で $\psi(k) \sim O(k^2)$ と振る舞う波束の長時間極限における生存確率が t^{-2} と同じかそれよりも速く減衰することを意味している．よく知られたGauss型波束の生存確率が t^{-1} で減衰する事実と照らし合わせると，このことは波動関数の長時間極限での振る舞いと初期波動関数の（特に運動量空間原点近傍での）性質とが密接に関係していることを予想させる．このこと自体はエネルギーと時間との間の素朴な不確定性関係式から期待されることではあるが，第3章では，新たに導出された1次元自由波束の長時間極限における漸近展開式を用いて，両者の関係が定量的に示される．すなわち，運動量空間原点近傍の振る舞いが $\psi(k) = O(k^m)(m = 0, 1, \ldots)$ で特徴付けられる1次元自由波束は，漸近的に $t^{-[\frac{m+1}{2}]-\frac{1}{2}}$ で，一方その生存確率は t^{-2m-1} で減衰することが明らかにされる．両者の冪が（奇数の m に対しては）異なる $(2[\frac{m+1}{2}] + 1 \neq 2m + 1)$ ことは興味深い．

第4章では，第3章で展開された1次元自由波束に対する議論が束縛状態を許さないような短距離型ポテンシャル系に拡張され，自由波束に対して導出されたのと同様な漸近展開公式が導出される．得られた漸近展開公式の有効性は，Schrödinger方程式の数値解と直接比較して確認される．また，運動量原点近傍での波束の振る舞いと波束の漸近的冪減衰指数との定量的関係は，単純な1次元ポテンシャル系でも成立していることが確認される．

最後の第5章では本研究全体のまとめと今後の展望が述べられている．

要約すると，本研究では，まずハミルトニアンと正準交換関係を満たす時間演算子を厳密な数学的枠組みの中で位置付け，その数学的構造を明らかにした．その過程で，時間演算子をめぐる批判が数学的にはどのように解決され得るのかを示し，量子力学の枠内で時間演算子が占め得る位置を明示した．さらに，時間演算子の分散を含む不等式の導出を契機として，量子系の漸近的振る舞いを運動量空間の初期波束によって定量的に特徴付けた．これらの成果は，量子力学の基礎研究において従来見過ごされてきた点に新たな光を当てており，今後のこの分野の発展に対する貢献は顕著である．よって本論文は博士（理学）の学位にふさわしいものと認める．

2003年2月

審査員	主査	早稲田大学教授	理学博士（早大）	中里弘道
		早稲田大学教授	理学博士（早大）	大場一郎
		早稲田大学教授	理学博士（東大）	大谷光春