

早稲田大学大学院理工学研究科

博士論文審査報告書

論 文 題 目

多数桁計算における高速
アルゴリズムの研究

Studies on Fast Algorithms for
High-precision Computation

申 請 者

氏 名

後 保 範
Yasunori Ushiro

専攻・研究指導
(課程内のみ)

2005年3月

本論文では、多数桁で構成される計算システムの基となる高速アルゴリズムを確立し、その有効性を評価することを考えている。多数桁の高速アルゴリズムとして、Cooley-Tukey によって 1965 年に考案された高速フーリエ変換 (FFT) を用いた多数桁乗算が有名である。FFT を使用すると n 桁乗算の計算量が大幅に削減できる。しかし、FFT は本来、信号処理や偏微分方程式を数値的に高速に解くために考案された計算法であり、多数桁乗算を目的としたものではない。そのため、FFT を使用した多数桁乗算は計算過程が直感的に把握しにくく、多数桁乗算への見通しが悪いと見ることもできる。また、FFT を使用した多数桁乗算は、途中変換でメモリを多く消費する欠点がある。しかも、FFT による多数桁乗算の高速化だけでは系統的に閉じた多数桁計算アルゴリズムを構成することができない。

本研究は、多数桁計算を系統的に閉じること、及び FFT の多数桁乗算での問題点を解決するアルゴリズムとして、高速剰余変換 (FMT)、分割有理数化法 (DRM 法) 及び多倍長精度の高速行列乗算法に関する研究成果を纏めたものである。更に、これらの適用例として、多数桁分割乗算及び 2002 年 11 月に達成した、10 進 1 兆 2 4 1 1 億桁の円周率世界記録の研究成果についても述べている。

高速剰余変換 (FMT) は FFT と結果的に同じ計算式となるが、FFT に剰余理論を取り込み、多数桁乗算を目的に考案したもので、途中変換の意味が明確で多数桁乗算への各種応用における見通しが FFT より優れている。DRM 法は、入力桁数が $O(1)$ の有理数級数、及び n 桁実数での n 桁級数値の高速計算アルゴリズムを示したものである。また、DRM 法が連分数や基底変換にも適用可能なことを示している。多倍長精度の高速行列乗算は、多数桁を係数とする連立一次方程式、及び固有値問題の数値解を高速に求めるための基礎研究である。高速剰余変換による多数桁分割乗算は、FMT で提案した分割乗算を具体的計算で示し、実際に入出力を使用して分割数に計算量が依存しないことを、数値実験結果として実証したものである。円周率の 1 兆 2 4 1 1 億桁の世界記録達成は、同一メモリ量 (1 T バイト) の計算機を使用して、前回の記録約 2 0 6 1 億桁を 6 倍更新したときの工夫点、及び概要を記述したものである。

以下に各章ごとの概要を述べ、評価を加えることにする。

第 1 章「はじめに」では、本研究の目的、概要及び構成について述べている。

第 2 章「高速剰余変換による多数桁乗算」では、高速剰余変換 (FMT) の定義と多数桁乗算への応用について述べている。本章では高速フーリエ変換 (FFT) に剰余理論を取り込んだ高速剰余変換 (Fast Modulo Transformation, FMT) を定義し、多数桁乗算への応用として、複素 FMT の直接利用、巡回乗算、

2 段階 FMT 及び分割乗算を考案している。複素 FMT の直接利用により、多数桁乗算に実 FFT を利用していたのを、半分の要素の複素 FMT で計算可能とし、分散メモリ計算機で性能が発揮し易くした。FMT では ± 1 だけでなく自然数 \pm で巡回する乗算を可能にした。2 段階 FMT による乗算では、1 兆桁の乗算で FFT による乗算と比較してメモリ使用量を約 $1/7$ に削減する効果を得ている。

第 3 章「分割有理数化法による級数の多数桁計算」では、無限級数関数の多数桁関数値の高速計算法について述べている。多数桁関数で表される（円周率）や α （自然対数）等の数学定数は無限級数で入力値が $O(1)$ 桁の有理数である。一方、多数桁関数の計算を系統的に閉じるには、入力値が結果と同一精度の桁数の必要がある。そこで、入力値の桁数が $O(1)$ 桁と短い有理数の場合に有効な計算法と、入力値が結果と同一の桁数の場合に有効な計算法を考案している。第 1 の方法は、有理級数の和の計算にトーナメント方式を適用し通分で有理数化し、多数桁除算で目的の桁数の実数にする方法である。これは、FFT 又は FMT による多数桁の乗算の高速化と合わせて効果を発揮する。第 2 の方法は多数桁精度の入力値 V を、加法定理で分解し、結果を再結合して V の関数値を計算する方法である。二つの計算方法を合わせて分割有理数化法（Divide and Rationalize Method, DRM 法）と名付けている。本方法は各種関数値の計算でよく知られる Brent のアルゴリズムより適用範囲が広く、連分数の計算や基底変換にも適用可能で、これまで知られているアルゴリズムより単純で分かり易い特長を持つと言える。

第 4 章「多倍長精度の高速行列乗算」では、多倍長精度の値を要素に持つ行列乗算の高速化法と数値実験結果を述べている。多数桁の乗算には入力値を一定の桁数に分割し筆算方式（定義方式）で計算する方法以外に、中国剰余定理（百五減算）及び FFT を使用する方式がある。しかし、多数桁乗算でこれらの方法が筆算方式より高速となるのは、数百桁と計算桁数が長いときである。一方、多数桁の値を係数とする n 次元の行列乗算にこれらの方式を適用する場合は、それらの線形性が利用可能である。この点に着目して、 n 次元の行列乗算に利用すると、中国剰余定理及び FFT の適用回数を $O(n^3)$ から $O(n^2)$ に削減して、多数桁の乗算が可能となる。行列乗算において、中国剰余定理は 4 倍精度から筆算方式より高速になり、計算桁数が長くなると FFT が有利になることを示している。

第 5 章「多数桁の分割乗算」では、第 2 章の FMT の適用例としてファイル I/O を使用した、多数桁分割乗算の具体的計算方法と数値実験結果を述べている。本章で提案している分割乗算法は、FMT を複数個に分割して計算しても、分割しないときと同じ計算量にする方法と、ダイレクト I/O により必要なデー

タを非連続に入出力して、総 I/O 量を分割数に依存させなくする方法で構成している。ファイル I/O を使用した多数桁の分割乗算は、使用計算機のメモリ容量を越えた桁数の乗算をする場合に必要となる。FFT を使用した多数桁乗算を m 分割すると、計算量は分割しないときの m 倍になり、ファイル I/O 量の総量も分割しないときの m 倍になると言われている。本研究では、この常識を覆し、分割しても計算量及びファイル I/O の総量が増加しないアルゴリズムを考案し、数値実験結果でそれを実証している。

第 6 章「1.2 兆桁 計算の世界記録」では、第 3 章の適用例として 10 進 1 兆 2 4 1 1 億桁の円周率世界記録達成について述べている。本計算は、DRM 法の有効性を実際の大規模計算で確認するために実施したもので、1 プロセッサによる基本プログラムは申請者が一人で作成している。本記録は、同一メモリ容量 (1 T バイト) の計算機を使用して、前回の記録約 2 0 6 1 億桁を 6 倍更新している。そのため、の計算公式を算術幾何平均 (AGM 法、ガウス・ルジャンドル公式) から Arctan 公式に変更し、DRM 法と 2 段階 FMT による多数桁乗算を適用して実施している。この計算では、DRM 法の基底変換の適用性を評価することも目的とし、16 進数の を計算し、10 進数に変換する方式を採用している。

第 7 章「おわりに」では、まとめと今後の方針を述べている。

以上が本論文の各章の概要であるが、これらの成果は科学技術計算において重要な役割となりつつある多数桁計算に対して、全体システムとして閉じる種々の高速計算アルゴリズムを新たに提案し、一部は大規模な数値実験でその有効性を実証しており、情報科学における数値解析分野の発展に貢献したものと見える。よって、本論文を博士 (工学) 早稲田大学の学位論文として認める。

平成 17 年 2 月

審査員

主査	早稲田大学教授	工学博士 (早稲田大学)	大石進一
	早稲田大学客員教授	理学博士 (広島大学)	山本哲朗
	早稲田大学教授	工学博士 (東京大学)	高橋大輔
	早稲田大学助教授	博士 (工学) 早稲田大学	柏木雅英