

早稲田大学大学院理工学研究科

# 博士論文概要

## 論文題目

Statistical Higher Order Asymptotic Theory and Its Applications  
to Analysis of Financial Time Series

統計的高次漸近理論とその金融時系列解析への応用

申請者

玉置 健一郎

Kenichiro TAMAKI

数理科学専攻 数理統計学研究

2005年11月

申請者は数理統計学における高次漸近理論の研究を行ってきた。まず、高次漸近理論について説明する。数理統計学において、推定・検定問題は非常に古典的なテーマであり、尤度を用いた推定や検定などの様々な統計量が提案されている。それらの「よさ」を測る基礎になるのは分布であるが、一般に正確な分布を求めるのは難しい。そこで、正確な分布を標本数のオーダー(1次, 2次, ...)で近似して「よさ」を議論する漸近理論が発展してきた。しかしながら、一般的に1次の意味で最適な統計量は無数に構成できる。それ故、その中でさらに「よい」統計量の議論をするために高次の漸近理論を考えることが必要となる。さらに、これらの諸結果は社会科学や経済の分野に応用可能である。特に、金融工学分野では、時系列解析の応用が期待されている。

まず、局外母数が存在する場合の検定問題に関する結果について述べる。一般的に検定の性質は局外母数に依存する。申請者は多変量解析、時系列解析を含む非常に広いセッティングにおいて、検定統計量の検出力の2次近似を導いた。母数  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ , ( $\theta_1 \in \mathbf{R}^p$ ,  $\theta_2 \in \mathbf{R}^q$ ) に対して、仮説検定  $H: \theta_1 = \theta_{10}$  を考える。よく知られている検定を含む統計量のクラス  $S$  を提案し、次を示した。

定理 1.  $\{c_N\}$  は  $N \rightarrow \infty$  のとき  $c_N \rightarrow \infty$  となる適当な列、 $\varepsilon$  は任意の正数とする。このとき、 $\theta = \theta_0 + c_N^{-1}\varepsilon$  ( $\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20})$ ) の下での  $S \in S$  の分布関数は次のように漸近展開できる。

$$P_{\theta_0 + c_N^{-1}\varepsilon}[S < z] = G_{p,\Delta}(z) + c_N^{-1} \sum_{j=0}^3 m_j G_{p+2j,\Delta}(z) + o(c_N^{-1}),$$

ここに、 $G_{\mu,v}(\cdot)$  は自由度  $\mu$  で非心度  $v$  の非心  $\chi^2$  の分布関数、 $\Delta$  と  $m_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) はモデルと  $\varepsilon$  と  $S$  に依存する量であらわされる係数である。

この定理に基づいて、検出力に対する局外母数の影響、高次の検出力比較、最適性等の議論が出来る。このとき、検出力の局外母数に影響される量は Fisher 情報量に基づく量と尤度比検定統計量のバイアスであらわされる。また、Mukerjee により提案された尤度比検定統計量のバイアス調整した検定統計量が最適であることを示した。

申請者は統計的高次漸近理論を金融工学におけるコールオプションの価格評価理論に応用した。離散型のブラック・ショールズモデルでは価格過程の対数収益率が独立に同一正規分布に従うことが仮定されている。しかしながら、実証分析の立場からブラック・ショールズモデルは実際の金融データを十分に記述できないことが知られている。申請者は、時系列解析の観点から、対数収益率が定常非正規過程に従うとして、コールオプションの価格を高次まで評価し、非正規性、従属性が与える影響を明らかにした。

まず、オプションについて説明する。価格過程を  $\{S_t\}$  とすると、行使価格  $K$  のヨーロッパ型コールオプションは、満期日  $T$  に、 $X_T^* = \max(S_T - K, 0)$  を請求できる証券と考え

ることができる。ブラック・ショールズモデルでは、割引価格過程がマルチンゲールになるように測度変換をおこなうが、常にマルチンゲール性を満たすとは限らない。それ故、このオプション価格を  $C = \exp(-r\tau)E_{T_0}(X_T^*)$  で評価する。ここで、 $r$  は安全利子率で満期日まで一定とし、 $T_0$  は現在時刻、 $\tau = T - T_0$  である。

価格過程  $\{S_t\}$  の対数収益率  $X_j$  を次のように定義する。

$$\log S_{T_0+j\Delta} - \log S_{T_0+(j-1)\Delta} = \Delta\mu + \Delta^{1/2}X_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad N = \tau/\Delta.$$

このとき、満期における価格  $S_T$  は次のように書ける。

$$S_T = S_{T_0} \exp \left\{ \tau\mu + \left( \frac{\tau}{N} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^N X_j \right\}.$$

以下は、 $N^{-1/2} \sum_{j=1}^N X_j$  の Edgeworth 展開を用いて示された。

定理 2. ヨーロッパ型コールオプションは次のように評価できる。

$$\begin{aligned} C = G_0 &+ \frac{(2\pi)^{1/2}}{6} N^{-1/2} \frac{f_{X,3}}{(f_{X,2})^{3/2}} G_3 - \frac{1}{4\pi} N^{-1} \frac{f'_{X,2}}{f_{X,2}} G_2 \\ &+ \frac{\pi}{12} N^{-1} \frac{f_{X,4}}{(f_{X,2})^2} G_4 + \frac{\pi}{36} N^{-1} \frac{(f_{X,3})^2}{(f_{X,2})^3} G_6 + o(N^{-1}), \end{aligned}$$

ここで、 $G_j$  ( $j = 0, 2, 3, 4, 6$ ) は適当な係数、 $f_{X,j}$  ( $j = 2, 3, 4$ ) は周波数 0 での  $j$  次のキウムラントスペクトル、 $f'_{X,2} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} |u| \text{cum}[X_t, X_{t+u}]$  である。

対数収益率が独立のとき、 $f'_{X,2} = 0$  となり、正規分布に従うとき  $f_{X,3} = f_{X,4} = 0$  となる。この定理に基づいて、オプション評価式における従属性と非正規性の影響を調べることができる。 $\{X_j\}$  が独立同一分布に従う正規過程で、さらにマルチンゲール性を満たすように測度変換を行うと、1 次の項  $G_0$  がブラック・ショールズの公式と一致する。よって、定理 2 はブラック・ショールズの公式の拡張である。実際の株価データを用いて推定すると、オプション評価式は従属性や非正規性に強く影響されていることがわかる。それ故、オプション評価では、従属性や非正規性を十分に考慮すべきである。

多くの経済データはトレンド要素を内包しており、このような場合のデータ解析には、線形回帰モデルが用いられる。時系列回帰は経済分野のみならず、様々な分野で応用されている。それ故、次の時系列線形回帰モデルにおける高次最適推測問題を研究した。

$$y(t) = \beta x(t) + u(t), \quad t = 1, \dots, N,$$

ここで、 $x(t)$  は既知、 $\beta$  は回帰係数、 $u(t)$  は定常な残差とする。 $\beta$  の推定量として、Hannan により提案されたセミパラメトリック推定量  $\hat{\beta}$  を考える。 $\hat{\beta}$  は  $u(t)$  の分散が母数化され

ていない場合でも構成でき、漸近的に BLUE と同等という意味で 1 次最適である。申請者は  $\hat{\beta}$  の高次の Edgeworth 展開を導いた。

定理 3.

$$P[D_N(\hat{\beta} - \beta) \leq z] = \int_{-\infty}^z \phi(w, \mathcal{I}^{-1}) \left[ 1 + N^{-1/2} C_1 H_1(w, \mathcal{I}^{-1}) + \frac{1}{6} N^{-1/2} C_2 H_3(w, \mathcal{I}^{-1}) \right] dw + o(N^{-1/2}),$$

ここで、 $D_N$  は標準化係数、 $\phi(\cdot, V)$  は平均 0 分散  $V$  の正規分布の密度関数、 $\mathcal{I}^{-1}$  は BLUE の漸近分散、 $C_j$  ( $j = 1, 2$ ) は適当な係数、 $H_k(\cdot, V)$  ( $k = 1, 3$ ) は  $k$  次の Hermite 多項式である。

この定理より、 $\hat{\beta}$  が 2 次最適になるための条件が明らかになる。さらに、 $\hat{\beta}$  は、非母数的推定量の基本量に依存しない母数的推定量と同じ一貫性を持つ特異なセミパラメトリック推定量であることを明らかにした。

近年、Dahlhaus により局所定常過程という重要な非定常過程が提案され、漸近最適理論が構築された。実証分析の立場から現実の多くのデータは非定常であることが知られているので、この理論は非常に有益である。まず、正規局所定常過程の定義を述べる。

定義 1. 正規確率過程列  $X_{t,N}$  ( $t = 1, \dots, N$ ) が伝達関数行列  $A_{\theta,t,N}^\circ$ 、平均値関数ベクトル  $\mu_\theta(t/N)$  をもつ局所定常過程とは、表現

$$X_{t,N} = \mu_\theta\left(\frac{t}{N}\right) + \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda t) A_{\theta,t,N}^\circ(\lambda) d\xi(\lambda)$$

をもつことである。さらに、 $A_{\theta,t,N}^\circ(\lambda)$  が  $A_\theta(t/N, \lambda)$  で十分近似でき、 $A_\theta(u, \lambda)$  と  $\mu_\theta(u)$  は  $u$  に関して連続とする。以後、 $f_\theta(u, \lambda) = |A_\theta(u, \lambda)|^2$  を時変スペクトル密度関数ということにする。

申請者は、正則条件の下での  $\theta$  の高次最適推測問題において、次を示した。

定理 4. AMU になるように修正した最尤推定量は 2 次最適である。

さらに、 $A_{\theta,t,N}^\circ(\lambda)$  を高次の項まで近似する場合において、初項の時変スペクトルのみに基づく最尤推定量が真の時変スペクトルに基づく最尤推定量と同等になるという高次の頑健性の条件を導いた。また、最尤推定量の高次の性質が時変量に依存しない十分条件を明らかにし、非定常性の影響を議論した。

## 研 究 業 績

種 類 別	題名、発表・発行掲載誌名、発表・発行年月、連名者（申請者含む）
論文	Tamaki, K. and Taniguchi, M., Higher Order Asymptotic Option Valuation for Non-Gaussian Dependent Returns, <i>Journal of Statistical Planning and Inference</i> (掲載決定)
論文	Tamaki, K., Second Order Asymptotic Properties of a Class of Test Statistics under the Existence of Nuisance Parameters, 2005, <i>Scientiae Mathematicae Japonicae</i> , 61(1), 119-143
講演	Second order properties of locally stationary processes, 2005年9月、日本数学会、2005年度秋季総合分科会、岡山大学
講演	Second order optimality for estimators in time series regression models, 2005年9月、日本数学会、2005年度秋季総合分科会、岡山大学
講演	Second order optimality for estimators in time series regression models, 2005年9月、日本統計学会、2005年度統計関連学会連合大会、広島大学
講演	Second order optimality for estimators in time series regression models, 2005年7月、国際会議「25th European Meeting of Statisticians」、University of Oslo
講演	Higher Order Asymptotic Option Valuation for Non-Gaussian Dependent Returns, 2005年3月、日本数学会、2005年度春季総合分科会、日本大学
講演	Higher Order Asymptotic Option Valuation for Non-Gaussian Dependent Returns, 2004年11月、科学研究費シンポジウム「統計的漸近理論」、東京大学

## 研 究 業 績

種 類 別	題名、発表・発行掲載誌名、発表・発行年月、連名者（申請者含む）
講演	Second Order Asymptotic Properties of a Class of Test Statistics under the Existence of Nuisance Parameters、2004年11月、科学研究費シンポジウム「統計的推定方式に関する理論とその応用」、秋田大学
講演	Second Order Asymptotic Properties of a Class of Test Statistics under the Existence of Nuisance Parameters、2004年9月、日本数学会、2004年度秋季総合分科会、北海道大学
その他 (論文)	Tamaki, K., Second order properties of locally stationary processes、2005、 <i>Preprint</i>
その他 (論文)	Tamaki, K., Second order optimality for estimators in time series regression models、2005（投稿中）