

早稲田大学大学院理工学研究科

博士論文審査報告書

論文題目

Statistical Higher Order Asymptotic Theory and Its
Applications to Analysis of Financial Time Series

(統計的高次漸近理論とその金融時系列解析への応用)

申請者

玉置 健一郎

Kenichiro Tamaki

数理科学専攻 数理統計学研究

2006年 2月

数理統計学において、推定・検定問題は非常に古典的なテーマであり、尤度を用いた推定や検定などの様々な統計量が提案されている。それらの「よさ」を測る基礎になるのは分布であるが、一般に正確な分布は求めるのは難しい。そこで、正確な分布を標本数のオーダー（1次, 2次, ...）で近似して「よさ」を議論する漸近理論が発展してきた。しかしながら、一般的に1次の意味で最適な統計量は無数に構成できる。それ故、その中でさらに「よい」統計量の議論をするために高次の漸近理論を考えることが必要となる。本論文では、様々なモデルに対する高次漸近理論を構築することを目標として、検定、時系列回帰モデルの母数の推定、局所定常過程における母数の推定問題に関する高次漸近理論の研究を行った。さらに、高次漸近理論を金融工学分野に応用し、オプションの価格の評価も行った。

本論文の諸結果は4章(2~5章)で構成されている。以下、第2章から順に各章の研究の概要を記し、最後にその評価を述べる。

まず、第2章では、局外母数が存在する場合の検定問題に関する結果が与えられている。一般的に検定の性質は局外母数に依存する。申請者は多変量解析、時系列解析を含む非常に広いセッティングにおいて、検定統計量の検出力の2次近似を導いた。母数 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, ($\theta_1 \in \mathbf{R}^p, \theta_2 \in \mathbf{R}^q$) に対して、仮説検定 $H: \theta_1 = \theta_{10}$ を考える。よく知られている検定を含む統計量のクラス S を提案し、次を示した。

定理1. $\{c_N\}$ は $N \rightarrow \infty$ のとき $c_N \rightarrow \infty$ となる適当な列、 ε は任意の正数とする。このとき、 $\theta = \theta_0 + c_N^{-1}\varepsilon$ の下での $S \in \mathcal{S}$ の分布関数は次のように漸近展開できる。

$$P_{\theta_0 + c_N^{-1}\varepsilon}[S < z] = G_{p,\Delta}(z) + c_N^{-1} \sum_{j=0}^3 m_j G_{p+2j,\Delta}(z) + o(c_N^{-1}), \quad (\text{ED})$$

ここに、 $G_{\mu,\nu}(\cdot)$ は自由度 μ で非心度 ν の非心 χ^2 の分布関数、 Δ と m_j ($j = 0, 1, 2, 3$) はモデルと ε と S に依存する量であらわされる係数である。

この定理に基づいて、検出力に対する局外母数の影響、高次の検出力比較、最適性等の議論が出来る。このとき、検出力の局外母数に影響される量は Fisher 情報量に基づく量と尤度比検定統計量のバイアスであらわされる。また、Mukerjee により提案された尤度比検定統計量のバイアス調整した検定統計量が最適であることを示した。

第3章では、統計的高次漸近理論を金融工学におけるコールオプションの価格評価理論に応用している。離散型のブラック・ショールズモデルでは価格過程の対数収益率が独立に同一正規分布に従うことが仮定されている。しかしながら、実証分析の立場からブラック・ショールズモデルは実際の金融データを十分に記述できないことが知られている。申請者は、時系列解析の観点から、対数収益率が定常非正規過程に従うとしてコールオプションの価格を高次まで評価し、非正規性、従属性が与える影響を明らかにした。

まず、オプションについて説明する。価格過程を $\{S_t\}$ とすると、権利行使価格 K のヨーロッパ型コールオプションは、満期日 T に、 $X_T^* = \max(S_T - K, 0)$ を請求できる証券と考えることができる。ブラック・ショールズモデルでは、割引価格過程がマルチンゲールになるように測度変換をおこなうが、常にマルチンゲール性を満たすとは限らない。それ故、このオプション価格を $C = \exp(-r\tau)E_{T_0}[X_T^*]$ で評価する。ここで、 r は安全利率で満期日まで一定とし、 T_0 は現在時刻、 $\tau = T - T_0$ である。

価格過程 $\{S_t\}$ の対数収益率 X_j を次のように定義する。

$$\log S_{T_0+j\Delta} - \log S_{T_0+(j-1)\Delta} = \Delta\mu + \Delta^{1/2}X_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad N = \tau/\Delta. \quad (\text{S})$$

このとき、満期における価格 S_T は次のように書ける。

$$S_T = S_{T_0} \exp \left\{ \tau \mu + \left(\frac{\tau}{N} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^N X_j \right\}.$$

以下は、 $N^{-1/2} \sum_{j=1}^N X_j$ の Edgeworth 展開を用いて示された。

定理 2. ヨーロッパ型コールオプションは次のように評価できる。

$$\begin{aligned} C = G_0 &+ \frac{(2\pi)^{1/2}}{6} N^{-1/2} \frac{f_{X,3}}{(f_{X,2})^{3/2}} G_3 - \frac{1}{4\pi} N^{-1} \frac{f'_{X,2}}{f_{X,2}} G_2 \\ &+ \frac{\pi}{12} N^{-1} \frac{f_{X,4}}{(f_{X,2})^2} G_4 + \frac{\pi}{36} N^{-1} \frac{(f_{X,3})^2}{(f_{X,2})^3} G_6 + o(N^{-1}), \end{aligned} \quad (C)$$

ここで、 G_j ($j = 0, 2, 3, 4, 6$) は適当な係数、 $f_{X,j}$ ($j = 2, 3, 4$) は周波数 0 での j 次のキュムラントスペクトル、 $f'_{X,2} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} |u| \text{cum}[X_t, X_{t+u}]$ である。

対数収益率が独立のとき、 $f'_{X,2} = 0$ となり、正規分布に従うとき $f_{X,3} = f_{X,4} = 0$ となる。この定理に基づいて、オプション評価式における従属性と非正規性の影響を調べることができる。 $\{X_j\}$ が独立同一分布に従う正規過程で、さらにマルチンゲール性を満たすように測度変換を行うと、1 次の項 G_0 がブラック・ショールズの公式と一致する。よって、定理 2 はブラック・ショールズの公式の拡張になっている。実際の株価データを用いて推定を行い、オプション評価式は従属性や非正規性に強く影響されていることを明らかにした。それ故、オプション評価では、従属性や非正規性を十分に考慮すべきである。

第 4 章では、時系列回帰モデルにおける母数の推定問題を扱っている。多くの経済データはトレンド要素を内包しており、このような場合のデータ分析には、線形回帰モデルが用いられる。時系列回帰は経済分野のみならず、様々な分野で応用されている。申請者は、次の時系列線形回帰モデルにおける高次最適推測問題の研究を行った。

$$y(t) = \beta x(t) + u(t), \quad t = 1, \dots, N,$$

ここで、 $x(t)$ は既知、 β は回帰母数、 $u(t)$ は定常な残差とする。 β の推定量として、Hannan により提案されたセミパラメトリック推定量 $\hat{\beta}$ を考える。 $\hat{\beta}$ は残差 $u(t)$ の共分散が母数化されていない場合でも構成でき、漸近的に最良線形不偏推定量 (BLUE) と同等という意味で 1 次最適である。申請者は $\hat{\beta}$ の高次の Edgeworth 展開を導いた。

定理 3.

$$\begin{aligned} P[D_N(\hat{\beta} - \beta) \leq z] &= \int_{-\infty}^z \phi(w, \mathcal{I}^{-1}) \left[1 + N^{-1/2} C_1 H_1(w, \mathcal{I}^{-1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} N^{-1/2} C_2 H_3(w, \mathcal{I}^{-1}) \right] dw + o(N^{-1/2}), \end{aligned} \quad (B)$$

ここで、 D_N は標準化係数、 $\phi(\cdot, V)$ は平均 0 共分散 V の正規分布の密度関数、 \mathcal{I}^{-1} は BLUE の漸近分散、 C_j ($j = 1, 2$) は適当な係数、 $H_k(\cdot, V)$ ($k = 1, 3$) は k 次の Hermite 多項式である。

この定理より、 $\hat{\beta}$ が 2 次最適になるための条件が明らかになる。さらに、 $\hat{\beta}$ は、非母数的推定量の基本量に依存しない母数的推定量と同じ一貫性を持つ特異なセミパラメトリック推定量であることが明らかに

された。

近年、Dahlhaus により局所定常過程という重要な非定常過程が提案され、漸近最適理論が構築された。実証分析の立場から現実の多くのデータは非定常であることが知られているので、この理論は非常に有益である。第 5 章では、局所定常過程の最尤推定量 (MLE) の高次の性質を明らかにしている。まず、正規局所定常過程の定義を述べる。

定義 1. 正規確率過程列 $X_{t,N}$ ($t = 1, \dots, N$) が伝達関数行列 $A_{\theta,t,N}^\circ$ 、平均値関数ベクトル $\mu_\theta(t/N)$ をもつ局所定常過程とは、表現

$$X_{t,N} = \mu_\theta\left(\frac{t}{N}\right) + \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda t) A_{\theta,t,N}^\circ(\lambda) d\xi(\lambda)$$

をもつことである。ここで、 $A_{\theta,t,N}^\circ(\lambda)$ が $A_\theta(t/N, \lambda)$ で $o(1/N)$ オーダーで近似でき、 $A_\theta(u, \lambda)$ と $\mu_\theta(u)$ は u に関して連続とする。以後、 $f_\theta(u, \lambda) = |A_\theta(u, \lambda)|^2$ を時変スペクトル密度関数ということにする。

このとき、正則条件の下での θ の高次最適推測問題において、次を示した。

定理 4. 2 次 AMU 推定量になるように修正した最尤推定量は 2 次最適である。

さらに、 $A_{\theta,t,N}^\circ(\lambda)$ が高次の項まで近似できる場合において、初項の時変スペクトルのみに基づく最尤推定量が真の時変スペクトルに基づく最尤推定量と同等になるという高次の頑健性の条件を導いている。また、最尤推定量の高次の性質が時変量に依存しない十分条件を明らかにし、非定常性の影響を議論した。

以上、本論文の重要な貢献を順に要約すると、

(第 2 章) 局外母数が存在する場合において、検定統計量のクラスに対する検出力の 2 次近似を与え、局外母数の影響、高次の検出力比較、最適性を議論した。

(第 3 章) 統計的高次漸近理論を金融工学におけるコールオプションの価格評価理論に応用した。離散型ブラック・ショールズモデルが仮定している対数収益率の独立性と正規性をはずして、時系列解析の観点から、オプション価格の高次評価をし、従属性、非正規性が与える影響を明らかにした。

(第 4 章) 時系列線形回帰モデルにおける高次最適推測問題を議論し、Hannan 推定量の特異な性質を明らかにした。

(第 5 章) 正規局所定常過程の高次の性質を研究し、最尤推定量の 2 次最適性、さらに、高次の頑健性の条件を与えた。

これらの研究成果は今まで見られなかったオリジナルな結果であり、今後の統計解析理論の発展に大きく貢献するものと思われる。とりわけ、従属な場合も含む様々なモデルにおいて高次漸近理論を構築し、さらに、時系列解析理論を金融工学分野に適用したことは特筆すべきことである。よって本論文は博士 (理学) の学位論文として相応しいものであると認める。

2006 年 1 月

審査員

(主査)	早稲田大学教授	工学博士 (大阪大学)	谷口 正信
(副査)	早稲田大学教授	理学博士 (大阪市立大学)	鈴木 武
(副査)	早稲田大学助教授	博士 (理学) 早稲田大学	井上 淳