

## 第3章 カオス的な力によって駆動する ニューロンモデルの構築

- 3.1 はじめに
- 3.2 カオス的な力によって駆動する1つの調和振動子
- 3.3 カオス的な力によって結合した2つの調和振動子
- 3.4 まとめ

### 3.1 はじめに

カオス[47]にはランダムノイズにはないコヒーレントな性質があることが知られているが、まだこの性質についてはあまりよく解明されていない。ストレンジアトラクタには無限個の不安定な周期軌道が存在しているが[49]、分岐パラメータを変化させることにより、この不安定な周期軌道が安定になったり、逆に安定な周期軌道が不安定になったりする[70]。つまり、分岐パラメータが変化し安定な周期軌道が不安定になった場合、安定な周期軌道は不安定な周期軌道としてストレンジアトラクタの中に存在している。カオス的な振動はランダムノイズのように見えるが、それとは異なり決定論的で、不安定な周期軌道から影響を受けているのである。

本研究では、このコヒーレントな性質を有するカオス的な外力を受け振動する調和振動子を、ニューラルネットワークのニューロンとして用いることとした。カオス的な外力は分岐パラメータによって周期的にもカオス的にも変化する。ここで、外力がカオス的に変化する場合、周期的な振動をしようとする調和振動子とカオス的な振動をする外力とが影響し合うため、これまでとは異なる振舞いが期待できる。さらに、カオス的な外力の分岐パラメータを調和振動子の位置によって変調するという、全く新しいモデルを提案した。これによって、調和振動子の位置が分岐パラメータを変調し、カオス的な外力の力学的性質を変えることができる。つまり、調和振動子自身がカオス的な外力の性質をコントロールすることが可能となる。ニューラルネットワークに複数のパターンを記憶させ連想記憶問題に適用する場合、あるパターンを想起している間はニューロンが周期的な振舞いをし、他のパターンを想起するまでの間はニューロンがカオス的な振舞いをすると、非常に効率の良いパフォーマンスが実現する。

従って、カオス的な力によって駆動する調和振動子をニューロンとして用いることは非常に有効であると考えられる。

本章では、このような調和振動子が1つの系と、カオス的な力によって結合している2つの調和振動子の系を考え、ニューロンとして有効な振舞いが現れるのかどうかについて調査した。

## 3.2 カオス的な力によって駆動する1つの調和振動子

### 3.2.1 モデル

まず、周期的な外力によって駆動する調和振動子について説明する。時刻  $t$  における調和振動子の位置を  $x(t)$  とすると、調和振動子の運動方程式は次のようになる。

$$\ddot{x}(t) + k_h \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = E_f(t) \quad (3.1)$$

ここで、 $k_h$  は減衰定数、 $\omega_0$  は固有振動数である。周期的な外力  $E_f(t)$  を  $C_1 \cos \omega t$  とすると式(3.1)は

$$\ddot{x}(t) + k_h \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = C_1 \cos \omega t \quad (3.2)$$

となる。この式を  $x(t)$  について解くと

$$x(t) = e^{-\mu t} \left( C_1 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t \right) + \frac{C_3}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (k_h \omega)^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (3.3)$$

$$\tan \delta = \frac{k_h \omega}{-\omega^2 + \omega_0^2}, \quad \mu = \frac{k_h}{2}$$

となるが、外力を加えてから充分長い時間が経つと式(3.3)の第1項は減衰して第2項のみ残る。

$$x(t) = \frac{C_3}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + (k_h \omega)^2}} \cos(\omega t - \delta) \quad (3.4)$$

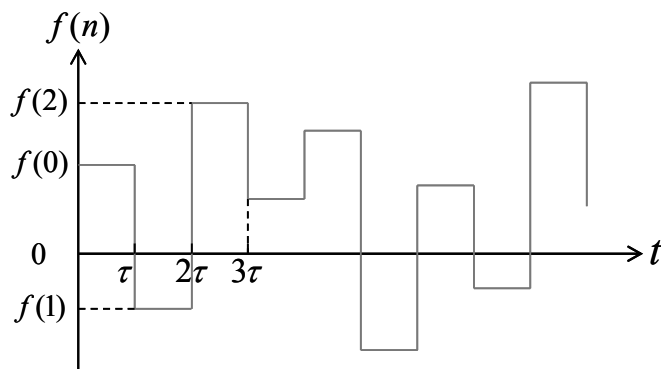


Fig.3.1 Chaotic External Force

従って、調和振動子の振幅は外力の振動数  $\omega$  によって変化し、 $\omega$  が  $\omega_0$  と近い値をとるときに共振を起こす。しかし、本研究では、式(3.1)の  $E_f(t)$  を Fig.3.1 のように振幅が時間間隔  $\tau$  でカオス的に変化する力とし、

$$E_f(t) = \frac{K}{\sqrt{\tau}} y(n) \quad \text{for } n\tau \leq t < (n+1)\tau \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (3.5)$$

と定義した[71][72]。  $y(n)$  は写像  $F(y;r)$  を  $n$  回繰り返したカオス時系列で、

$$y(n+1) = F(y(n);r) \quad (-0.5 \leq y(n) \leq 0.5) \quad (3.6)$$

である。前述した通り、外力が周期的な力であれば、調和振動子と外力の周波数が近い値をとるとき共振現象が見られる。しかし、カオスは周波数が無限大の振動であるため、共振は発現しないものと考えられる。ここで、カオス時系列  $y(n)$  は、 $-0.5 \leq y(n) \leq 0.5$  の範囲で振幅が変化するので、 $K$  はカオス的な力  $E_f(t)$  の大きさを自由に定めることのできるコントロールパラメータである。そして、 $1/\sqrt{\tau}$  は時間間隔  $\tau$  が小さいとき有限な拡散係数を得るために必要である[73]。また、本研究では、カオス時系列としてロジスティックマップを用いた。

$$y(n+1) = r(n)(0.5 - y(n))(0.5 + y(n)) - 0.5 \quad (0.0 \leq r(n) \leq 4.0) \quad (3.7)$$

ここで、 $r(n)$  は分岐パラメータである。ロジスティックマップでは Fig.3.2(a) に示した通り、 $r(n) < 1.0$  のとき安定な固定点  $-0.5$  に収束し、 $1.0 < r(n) < 3.0$  のときある 1 点に収束する。しかし、 $r(n)$  が  $3.0$  より大きくなると、安定な固定点が不安定になり、別の安定な 2 点を交互にとり、すなわち 2 周期を示す。さらに  $r(n)$  の値を大きくすると、

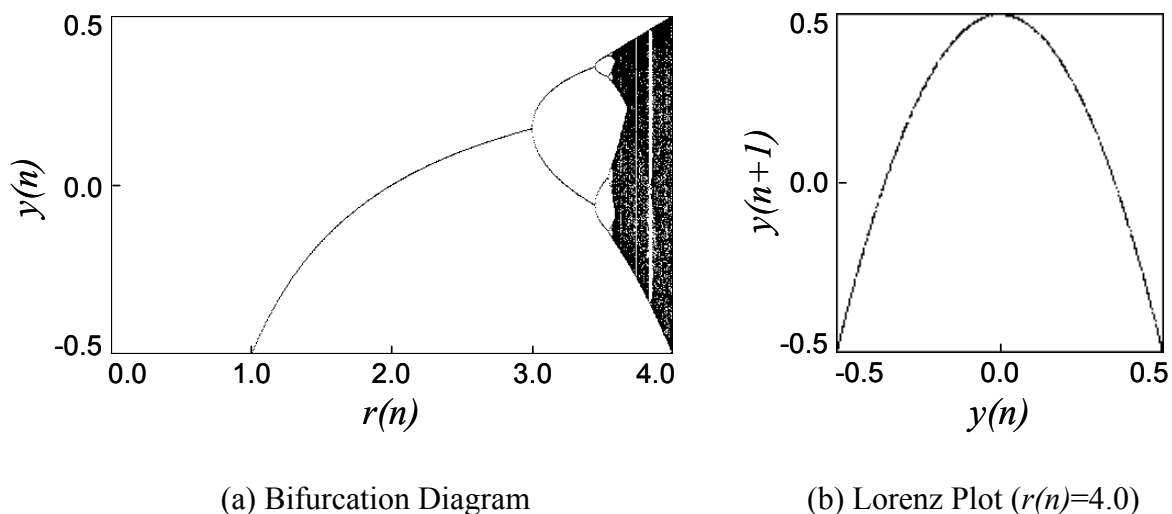


Fig.3.2 Logistic Map

周期は2倍に増加していき、約3.56を超えると無限周期となり、カオス的な振舞いが現れる。このように、分岐パラメータ  $r(n)$  を制御することによって、 $y(n)$  は周期的にもカオス的にも変化する。また、カオス的な外力  $E_f(t)$  は Fig.3.1 のように時間間隔  $\tau$  で段階的に変化することから、 $x(t)$  を  $y(n)$  の関数と見ることができる。そこで、本モデルを時間間隔  $\tau$  毎にストロボ的に観測すると、式(3.1)および式(3.5)-(3.7)より、時刻  $t = n\tau$  における調和振動子の位置  $x(n)$  と速度  $v(n) = dx(n)/dt$  は、次のような漸化式で表すことができる。

$$x(n+1) = \left( 1 - \left( \frac{\mu}{\omega} \sin \omega\tau + \cos \omega\tau \right) a \right) \frac{Ky(n)}{(\omega^2 + \mu^2)\sqrt{\tau}} + \left( \frac{\mu}{\omega} \sin \omega\tau + \cos \omega\tau \right) ax(n) + \frac{\sin \omega\tau}{\omega} av(n) \quad (3.8)$$

$$v(n+1) = \frac{Ky(n)}{\omega\sqrt{\tau}} a \sin \omega\tau - \frac{\omega^2 + \mu^2}{\omega} ax(n) \sin \omega\tau - \left( \frac{\mu}{\omega} \sin \omega\tau - \cos \omega\tau \right) av(n) \quad (3.9)$$

ここで、 $\omega$ 、 $\mu$ 、 $a$  は

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}, \quad \mu = \frac{k_h}{2}, \quad a = e^{-\mu\tau} \quad (3.10)$$

と定義した。また、 $\omega$  を

$$\omega = \frac{2\pi}{T\tau} \quad (3.11)$$

とおくと、 $T$ は時間間隔  $\tau$ を単位とした調和振動子の周期となる。ここで、Fig.3.2 をもう1度見てみると、カオスの領域の中に  $y(n)$ が周期的になるウインドウと呼ばれる領域があることがわかる。従って、 $T$ が整数であれば、調和振動子の周期が  $T\tau$ に近い値のとき、調和振動子は周期  $T$ のウインドウにおけるカオス的な外力  $E_f(t)$ と共振を起こすと考えられる。さらに、本研究では、分岐パラメータ  $r(n)$ が調和振動子の位置  $x(n)$ によって変調する新しいモデルを提案した。

$$r(n) = 4 - b + b \cos^2 \beta x(n) \quad (0.0 \leq b \leq 4.0) \quad (3.12)$$

$b$  および  $\beta$ はコントロールパラメータである。このようにおくことによって、調和振動子自身がカオス時系列の力学的性質をコントロールすることができ、共振の有無を決定することが可能となる。ここで、ロジスティックマップの分岐パラメータの大きさを  $0.0 \leq r(n) \leq 4.0$ に制限するため、三角関数を用いたが、異なる式によって変調することも可能である。しかし、このようなモデルをニューラルネットワークのニューロンとして用いるのであれば、あるパターンを想起するための周期的な振舞いと他のパターンへ移行するためのカオス的な振舞いの両者が必要となる。そこで、共振が起き調和振動子の振幅が大きくなり続けた場合においても、分岐パラメータが変化し続け、周期的およびカオス的な振動の両者が現れるよう変調しなければならない。

以上のように、ここでは、分岐パラメータ変調を通して、Fig.3.3 のように  $x(n) \rightarrow r(n) \rightarrow y(n) \rightarrow E_f(t) \rightarrow x(n+1) \rightarrow \dots$ と決定されていく。つまり、系自身がカオス時系列  $y(n)$ の力学自体を変化させる新しいフィードバック機構が組み込まれている。

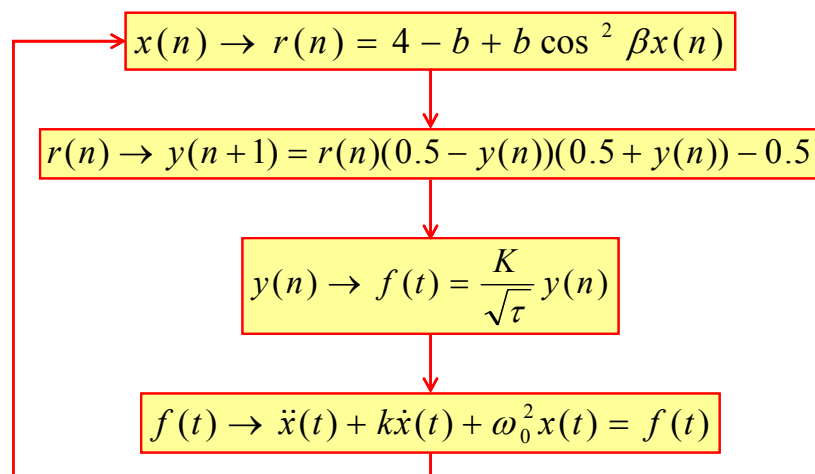


Fig.3.3 New Type of Feed-Back Mechanism

### 3.2.2 パラメータ依存性

次に、理論的に  $\beta$ ,  $\tau$ ,  $T$ ,  $b$  の各パラメータの依存性について調べ、それぞれ調和振動子にどのような影響を与えるか考える。

#### (1) パラメータ $\beta$

$\beta x(n) = m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) のとき  $r(n) \approx 4.0$  となり、 $E_f(t)$  はカオス的振動をする。一方、 $\beta x(n) = (2m+1)\pi/2$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) のとき  $r(n)$  は  $4-b$  と表される。このとき、 $3.0 \leq b \leq 4.0$  であれば  $y(n)$  は安定な固定点  $-0.5$  に収束するが、 $b=0.0$  であれば  $r(n) \approx 4.0$  となり、 $E_f(t)$  はカオス的な振動をする。

#### (2) パラメータ $\tau$

$\tau$  が非常に大きい場合、式(3.5)より  $E_f(t)$  の振幅は小さくなり、また、 $\tau$  の間に過渡状態が終わり定常状態に達するため、調和振動子の振幅は非常に小さくなる。さらに、式(3.8)および式(3.9)において  $a \approx 0.0$  と近似できるため、次のように書き変えることができる。

$$x(n+1) = \frac{Ky(n)}{(\omega^2 + \mu^2)\sqrt{\tau}} \quad (3.13)$$

$$v(n+1) = 0 \quad (3.14)$$

つまり、 $\tau$  が非常に大きいときは、 $x(n+1)$  は  $v(n)$  に依存しなくなり、 $y(n)$  と同じ振舞いをする。一方、 $\tau$  が非常に小さい場合、式(3.8)と式(3.9)をテーラー展開すると

$$x(n+1) = x(n) + \tau v(n) \quad (3.15)$$

$$v(n+1) = \sqrt{\tau}Ky(n) - (\omega^2 + \mu^2)\tau x(n) + (1 - 2\mu\tau)v(n) \quad (3.16)$$

となる。このとき、調和振動子が定常状態に達する前にカオス的な外力  $E_f(t)$  が変化してしまうため、調和振動子は非常に複雑な振舞いを示すと考えられる。

#### (3) パラメータ $T$

$T$  が非常に大きいとき、式(3.11)より  $\omega$  は非常に小さい値となる。よって、 $\mu$  および  $\tau$  も小さい値となれば、式(3.8)と式(3.9)より調和振動子の振幅は非常に大きくなる。同様に、 $T$  が非常に小さい場合  $\omega$  が非常に大きくなるので、 $\mu$  と  $\tau$  も大きければ調和振動子の振幅は非常に小さくなる。

#### (4) パラメータ $b$

まず、 $b$  が 0 に近い値をとるとき、分岐パラメータを  $r(n) \approx 4.0$  と近似することができ、 $E_f(t)$  はカオス的な振動をする。また、 $b$  がほぼ 4.0 であるとき、 $r(n) \approx 4 \cos^2 \beta x(n)$  となる。このとき、 $0 \leq \cos^2 \beta x(n) \leq 1/4$  であれば  $y(n)$  は安定な固定点 -0.5 に収束し、 $\cos^2 \beta x(n) = 1$  であれば、 $r(n) \approx 4.0$  となり、 $E_f(t)$  はカオス的な振動をする。

### 3.2.3 シミュレーション結果

$T=3.0$  のとき、調和振動子は周期  $3\tau$  の周期的な振動をしようとするが、カオス的な外力  $E_f(t)$  は  $r(n)$  の値によってはカオス的な振動をしようとするため、調和振動子と外力との間に競争が起こり、これまで見られなかった振る舞いが現れるのではないかと期待できる。また、 $-0.5 \leq y(n) \leq 0.5$  であるため、 $K=1.0$  のときの各  $\tau$  における  $E_f(t)$  の変域は、式(3.5)より次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 -5.0 \leq E_f(t) \leq 5.0 & \quad \text{for } \tau=0.01 \\
 -3.16 \leq E_f(t) \leq 3.16 & \quad \text{for } \tau=0.1 \\
 -0.5 \leq E_f(t) \leq 0.5 & \quad \text{for } \tau=1.0 \\
 -0.224 \leq E_f(t) \leq 0.224 & \quad \text{for } \tau=5.0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

各パラメータの値および初期値は、 $\mu=0.005$ ,  $x(0)=2.5$ ,  $v(0)=0.0$ ,  $y(0)=0.2$  とおいた。Fig.3.4-3.13 の(a)と(b)は、それぞれ横軸を  $b$  とし  $18000 \leq n \leq 20000$  の値をプロットした  $x(n)$  と  $y(n)$  の分岐図、(c)と(d)は、ある  $b$  における  $x(n)$  と  $y(n)$  の時間変化、(e)と(f)は、ある  $b$  における  $x(n)$  と  $y(n)$  のローレンツプロットを示している。

#### (1) $\beta$ 依存性

Fig.3.4-3.7 は  $T=3.0$ ,  $\tau=1.0$  のときの  $\beta$  依存性 ( $\beta=0.01, 0.1, 1.0, 10.0$ ) を表している。まず、 $\beta=0.01$  のときは Fig.3.4(a)(b) より、外力、調和振動子ともほぼ周期的な振動を示さないことがわかる。特に、 $b=1.0$  では、Fig.3.4(d) のようなカオス的な外力に調和振動子の周期的な要素が打ち消されてしまい、Fig.3.4(c) のように調和振動子もカオス的な振動をする。しかし、Fig.3.5(a)(b) からわかる通り、 $\beta=0.1$  では、 $y(n)$  がカオス的な振動をしているにも関わらず、 $x(n)$  が周期的な振動をしている領域が存在する。これは、カオス的な振動が調和振動子によって抑えられていることを意味している。また、このとき  $-0.5 \leq E_f(t) \leq 0.5$  であるが、Fig.3.5(c) では  $x(n)$  が周期的な振動をしている間に約 10.0 と非常に大きな振幅となっており、共振が起きている。3.2.1 項で述べ

た通り，周期的な振動をする調和振動子とカオス的な振動をする外力との間に共振が起こることはこれまで予想されてこなかったが，カオスのコヒーレントな性質が解明されていない現状において，この性質を解くための非常に新しい発見であると思われる．また， $\beta=1.0$  では，調和振動子は  $b \leq 0.5$  においてカオス的な振動をしているが， $b$  が大きくなるにつれてゆらぎが減少し，周期的な振動へと変化している (Fig.3.6(a))． $2.5 \leq b \leq 3.1$  において再びゆらぎが見られるが，このときは Fig.3.6(c) のように準周期的な振動が観測された． $\beta=10.0$  では， $b \leq 2.7$  のときカオス的な振動が現れ，それ以降は周期的な振動をする (Fig.3.7(a))．Fig.3.7(c) に  $b=0.2$  におけるカオス的な振動を示す．

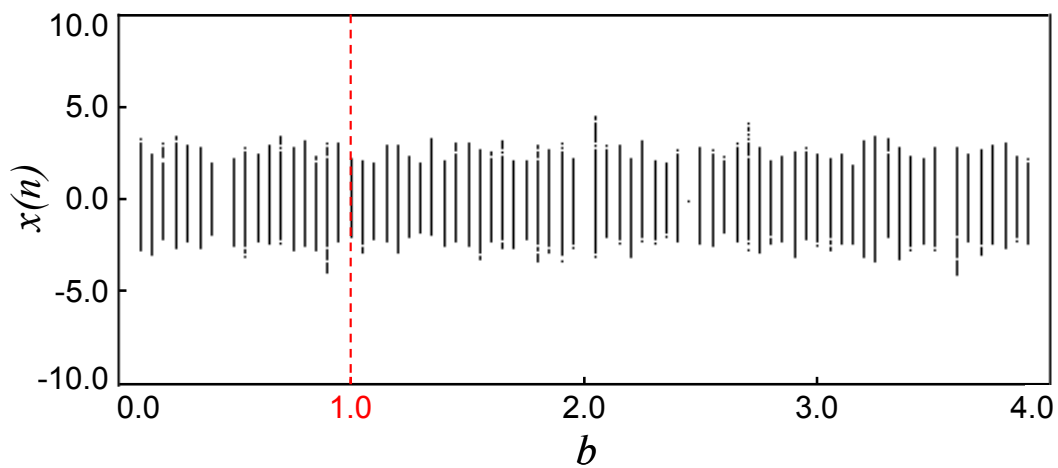
## (2) $\tau$ 依存性

Fig.3.8-3.10 は， $T=3.0$ ， $\beta=1.0$  のときの  $\tau$  依存性 ( $\tau=0.01, 0.1, 5.0$ ) を表している．これらより  $\tau$  が大きいほど  $x(n)$  の振幅は大きくなることがわかるが，これは前項で述べたことと逆の結果であり，大変興味深い．詳しく見てみると， $\tau=0.01$  のときは Fig.3.8(a) より調和振動子は 0 に収束するか Fig.3.8(c) のような準周期的な振動をしていることがわかる．このとき Fig.3.8(d) のように，外力  $y(n)$  が周期 3 とカオス的な振動が交互に現れる間欠性カオス的な振動をしているため，調和振動子にわずかなゆらぎを与えているものと思われる．また， $\tau=0.1$  の場合 Fig.3.9(a) に見られる通り， $x(n)$  は  $b$  の値にほとんど関係なく周期 3 の振動を示すが， $2.8 \leq b \leq 3.1$  においては Fig.3.9(c) のような準周期的な振動をする．ここでは，調和振動子の周期的な振動の方が外力に大きな影響を与え，外力も Fig.3.9(d) のような準周期的な振動となる． $\tau=5.0$  のときは  $0.0 \leq b \leq 2.9$  において Fig.3.10(c) のようなカオス的な振動が見られた．

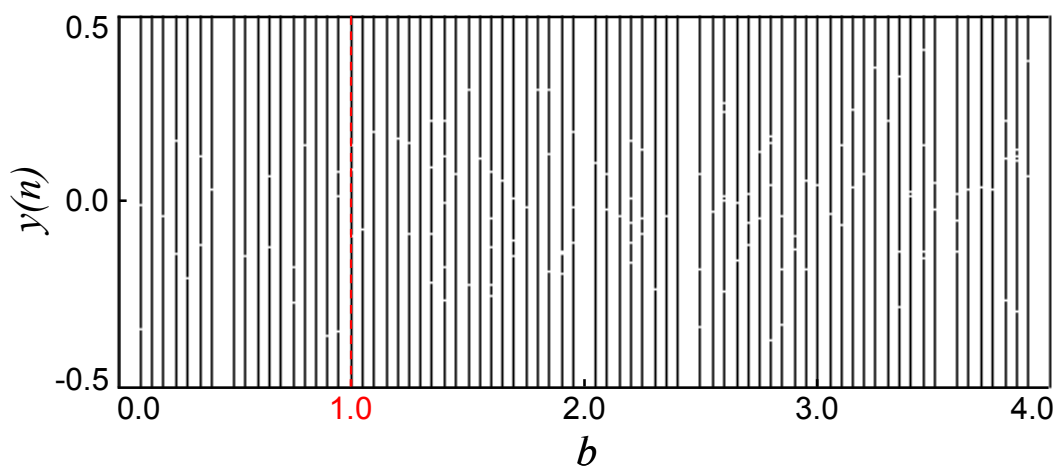
## (3) $T$ 依存性

Fig.3.11-3.13 では， $\tau=1.0$ ， $\beta=1.0$  のときの  $T$  依存性 ( $T=4.0, 5.0, 10.0$ ) を示した．まず， $T=4.0$  の Fig.3.11(a) においては， $b \leq 0.5$  で調和振動子がカオス的な振動をしているが， $b$  が大きくなるにつれてゆらぎが減少し，周期的な振動へと変化する．しかし， $b=1.0$  付近では外力がカオス的な振動と化し (Fig.3.11(b))，調和振動子に影響を与えるため，Fig.3.11(c) のような間欠性カオス的な振動が現れるが，周期的な振動をしている際とカオス的な振動をしている際の振幅の差はほとんど見られない．一方， $T=5.0$  においても， $b$  が 0.0 から大きくなると共に調和振動子に見られるゆらぎが減少し，カオス的な振動から間欠性カオス的な，周期的振動になるが (Fig.3.12(a))，Fig.3.12(c) に示した間欠性カオス的な振動では，周期的な振動をしている際の方が振幅が大きくなっている．同様に  $T=10.0$  のときも間欠性カオス的な振動が確認できるが，Fig.3.13(c) よりカオス的な振動をしている際の振幅の方が大きくなっていることがわかる．



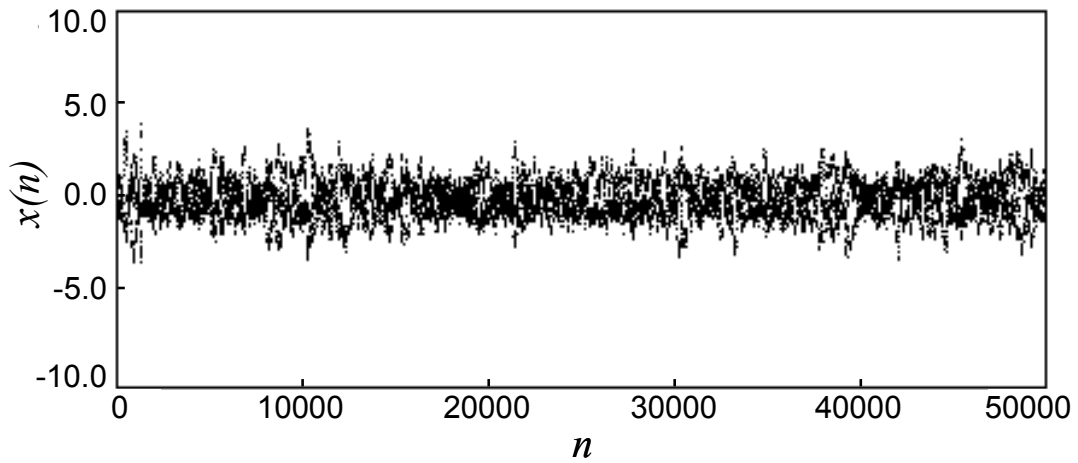


(a) Bifurcation Diagram of  $x(n)$

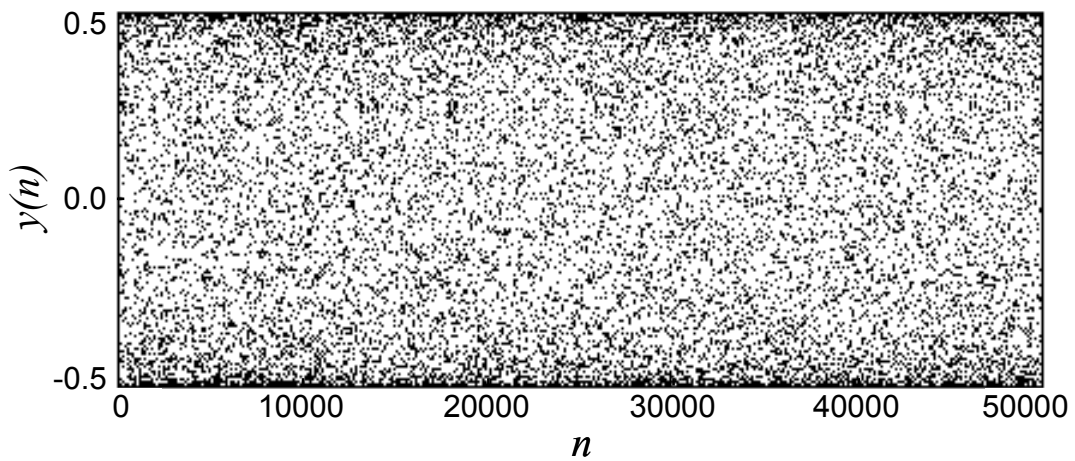


(b) Bifurcation Diagram of  $y(n)$

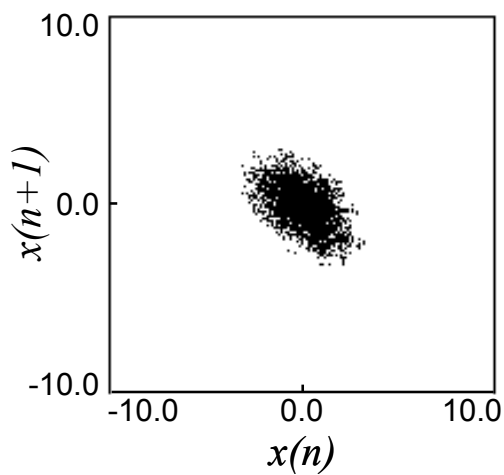
Fig.3.4 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=0.01$ )



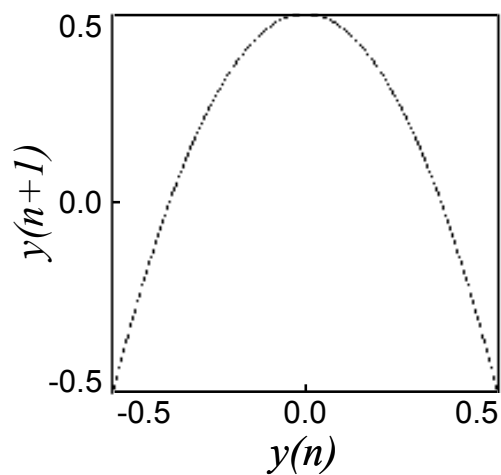
(c) Time Evolution of  $x(n)$  ( $b=1.0$ )



(d) Time Evolution of  $y(n)$  ( $b=1.0$ )

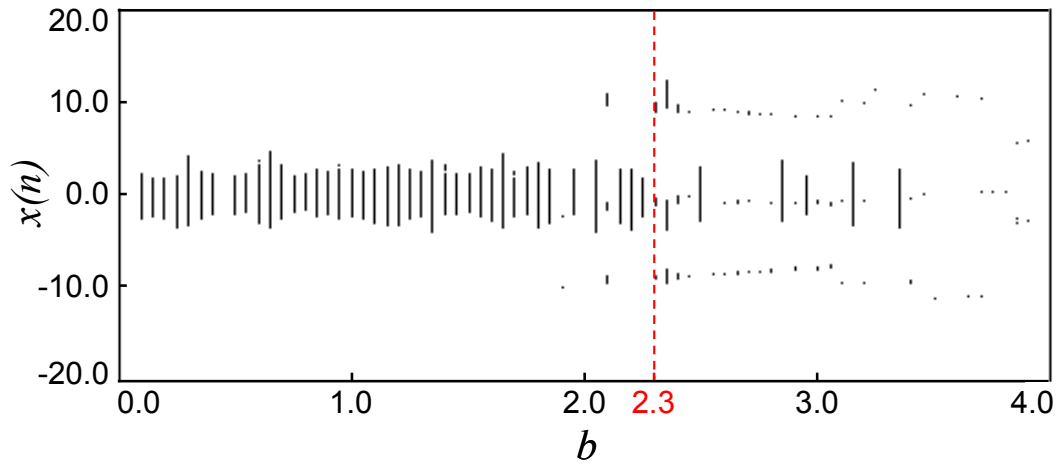


(e) Lorenz Plot of  $x(n)$  ( $b=1.0$ )

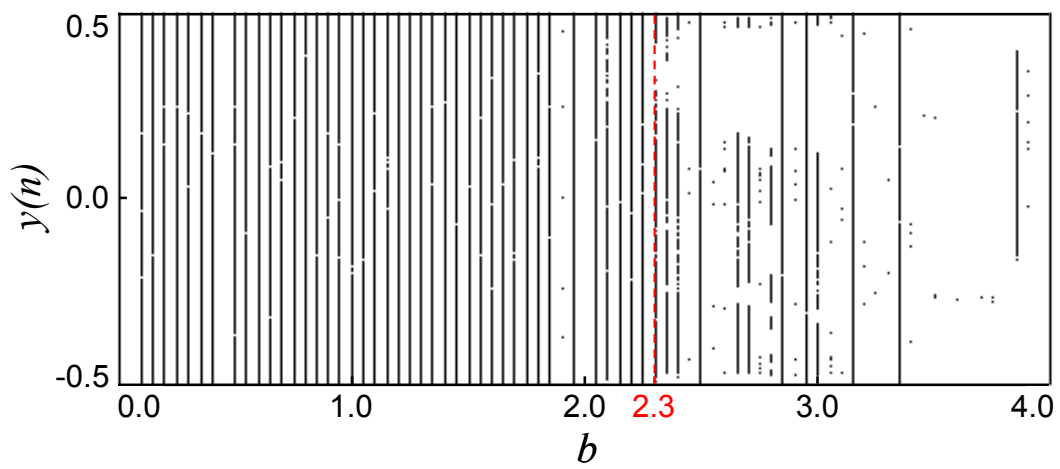


(f) Lorenz Plot of  $y(n)$  ( $b=1.0$ )

Fig.3.4 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=0.01$ )

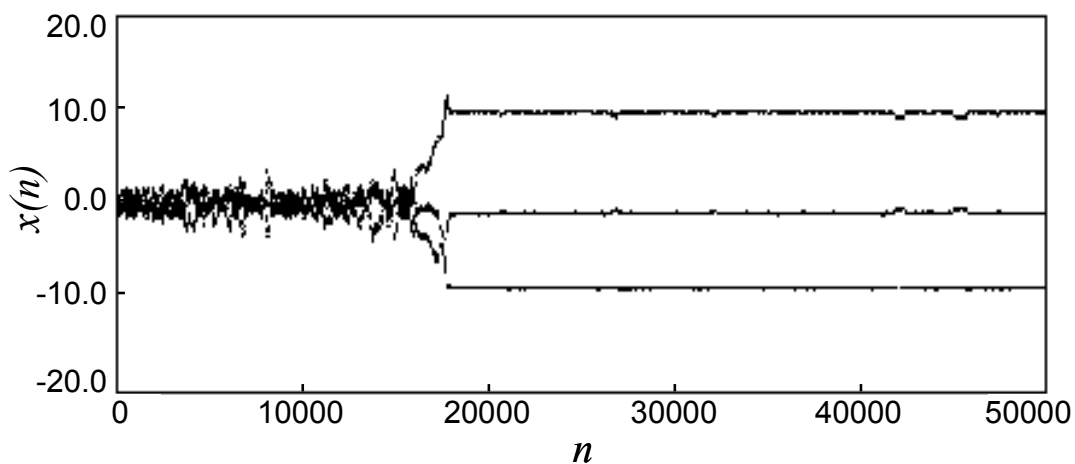


(a) Bifurcation Diagram of  $x(n)$

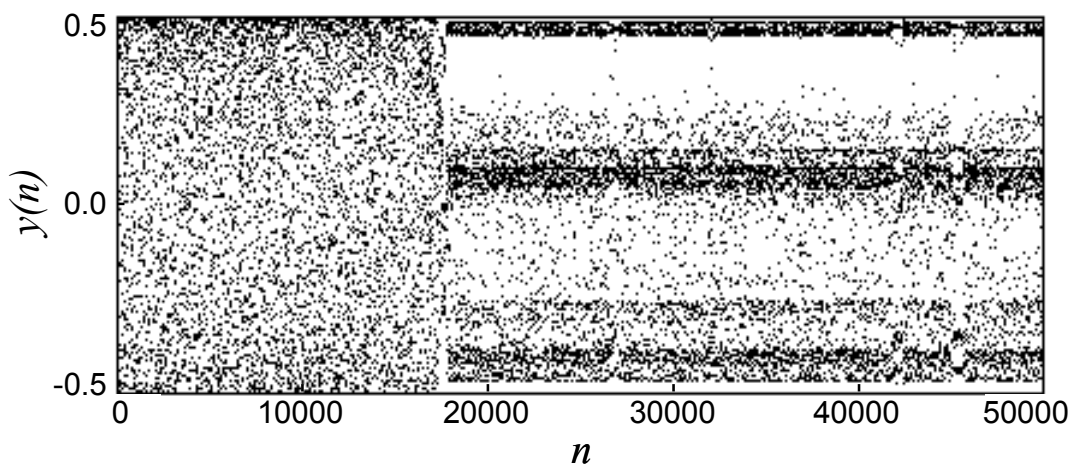


(b) Bifurcation Diagram of  $y(n)$

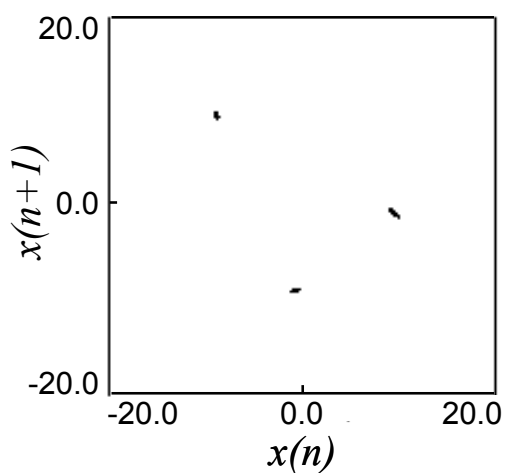
Fig.3.5 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=0.1$ )



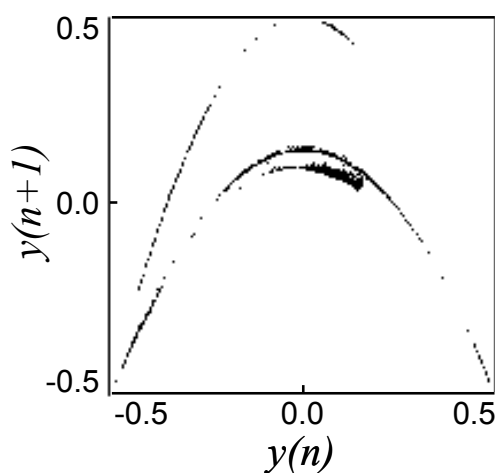
(c) Time Evolution of  $x(n)$  ( $b=2.3$ )



(d) Time Evolution of  $y(n)$  ( $b=2.3$ )

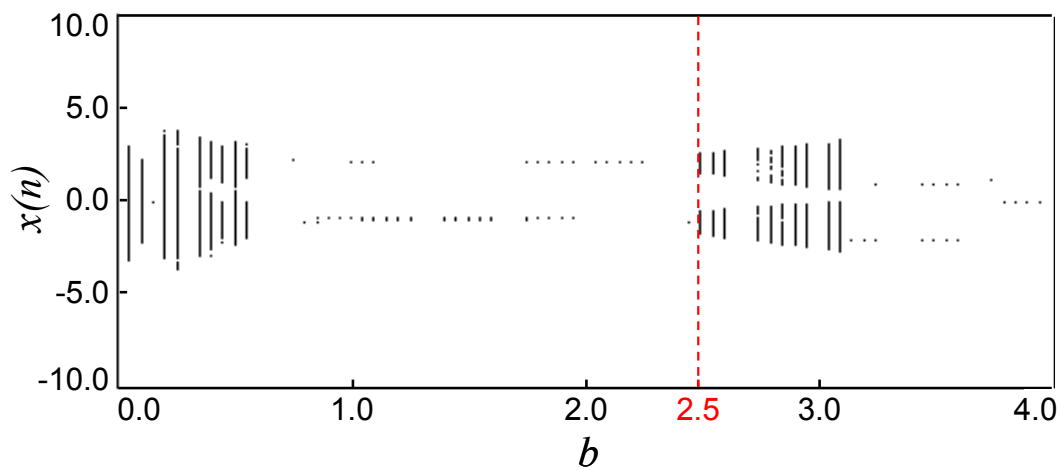


(e) Lorenz Plot of  $x(n)$  ( $b=2.3$ )

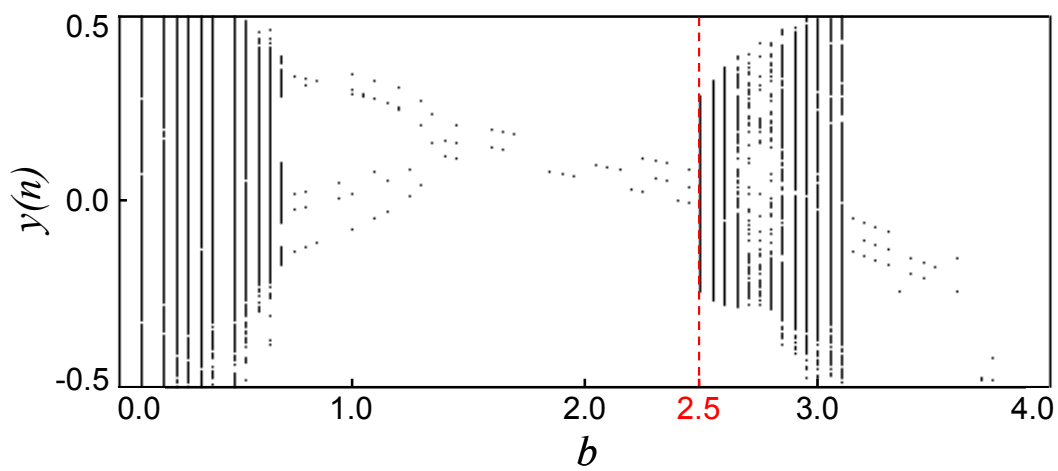


(f) Lorenz Plot of  $y(n)$  ( $b=2.3$ )

Fig.3.5 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=0.1$ )

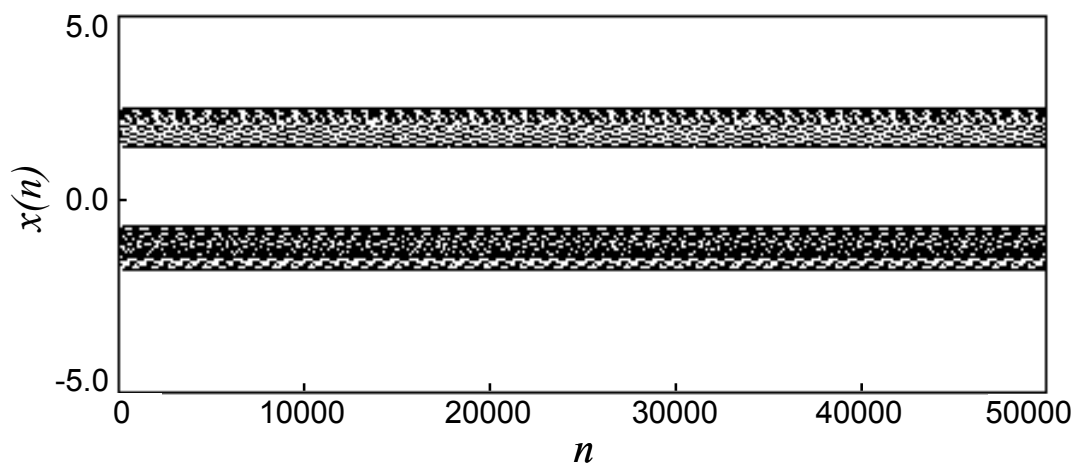


(a) Bifurcation Diagram of  $x(n)$

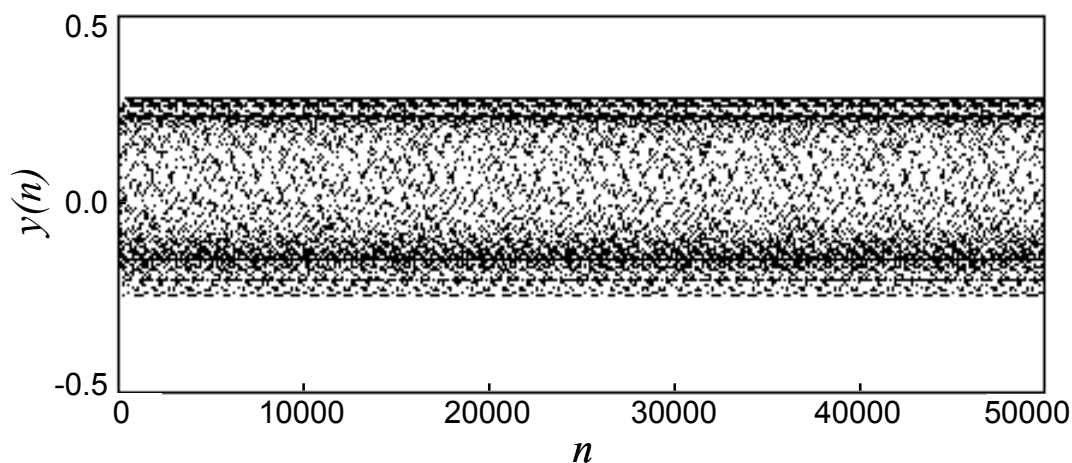


(b) Bifurcation Diagram of  $y(n)$

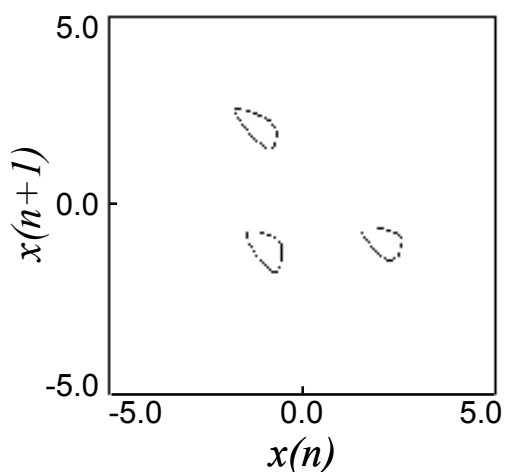
Fig.3.6 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=1.0$ )



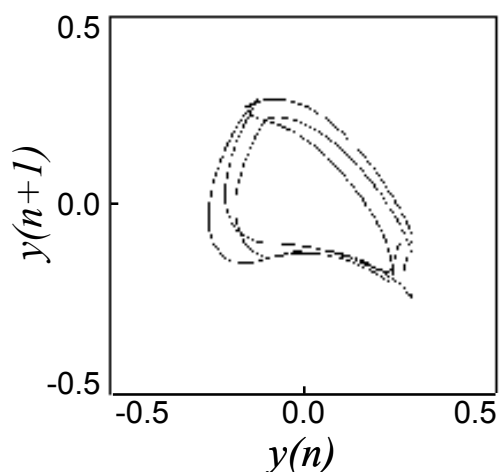
(c) Time Evolution of  $x(n)$  ( $b=2.5$ )



(d) Time Evolution of  $y(n)$  ( $b=2.5$ )

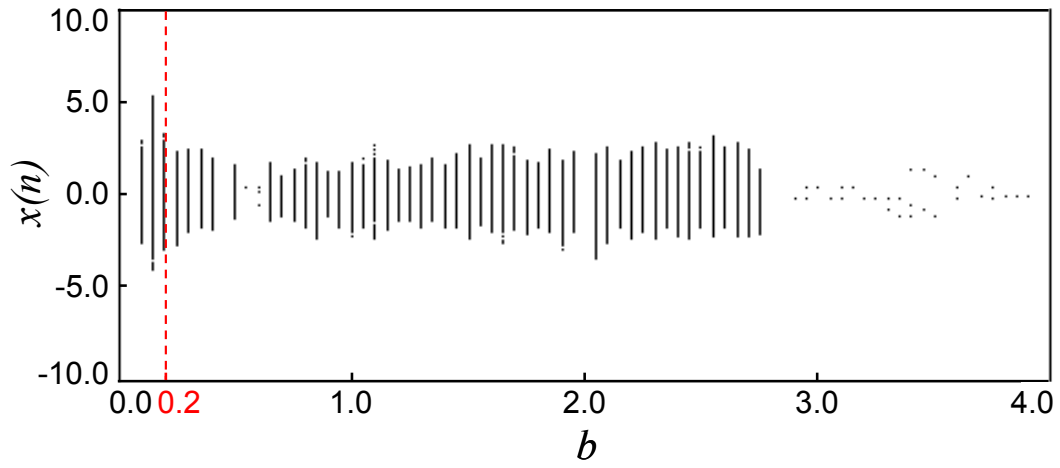


(e) Lorenz Plot of  $x(n)$  ( $b=2.5$ )

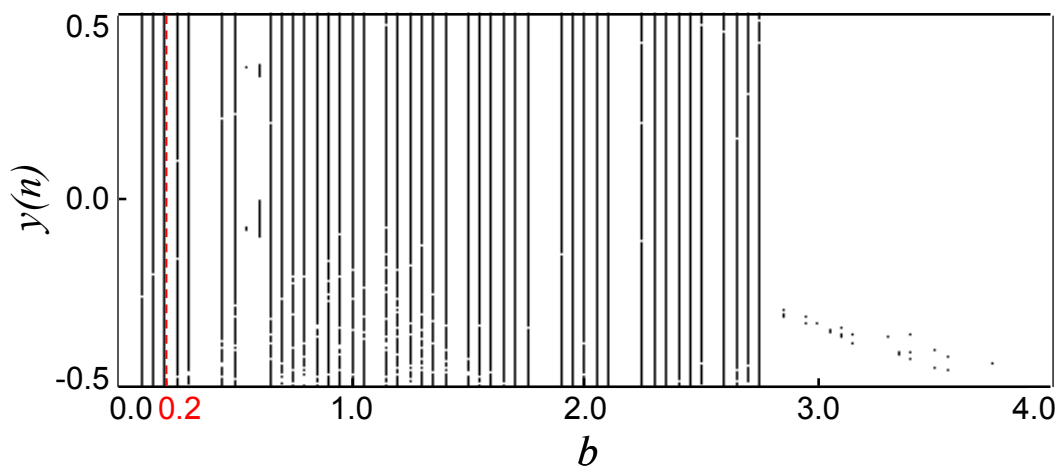


(f) Lorenz Plot of  $y(n)$  ( $b=2.5$ )

Fig.3.6 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=1.0$ )

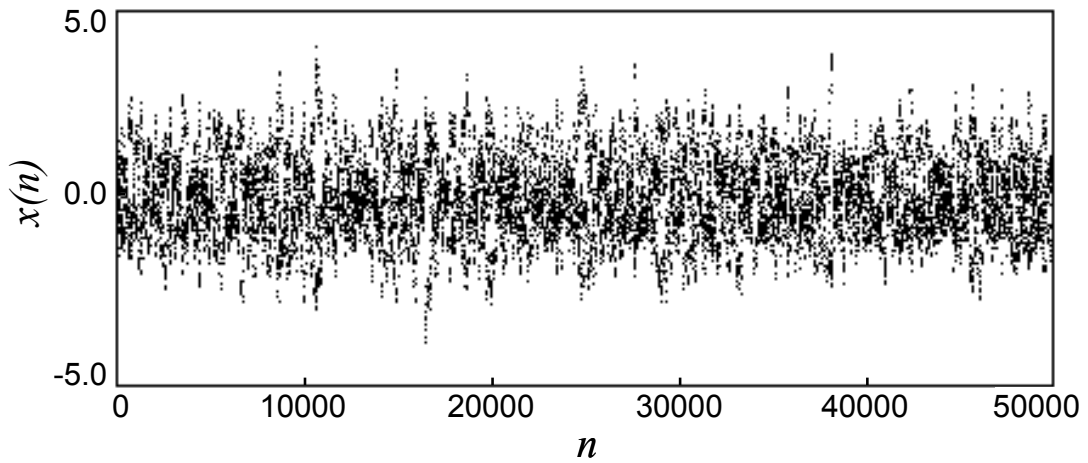


(a) Bifurcation Diagram of  $x(n)$

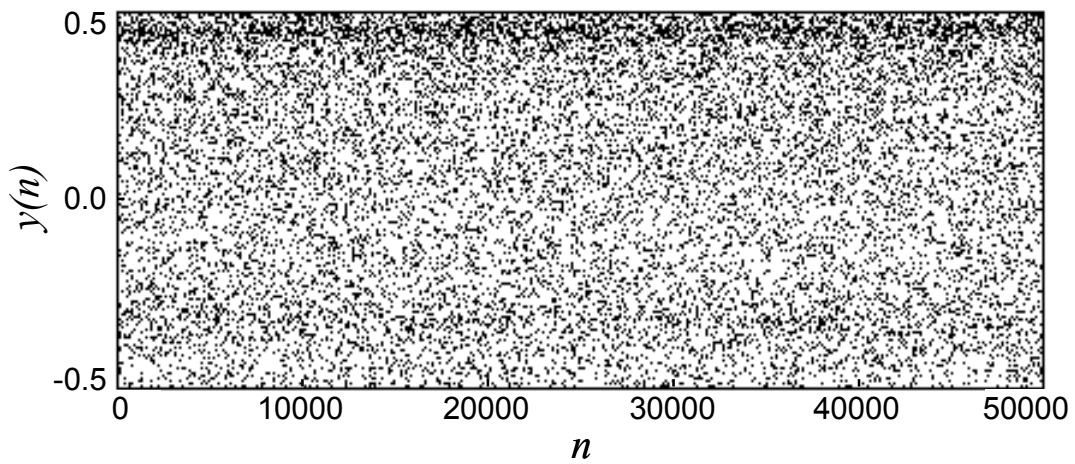


(b) Bifurcation Diagram of  $y(n)$

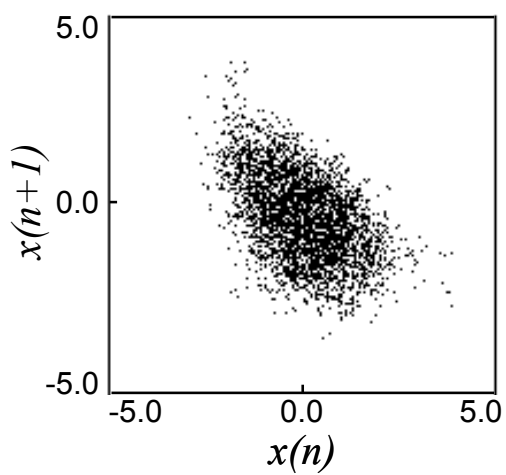
Fig.3.7 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=10.0$ )



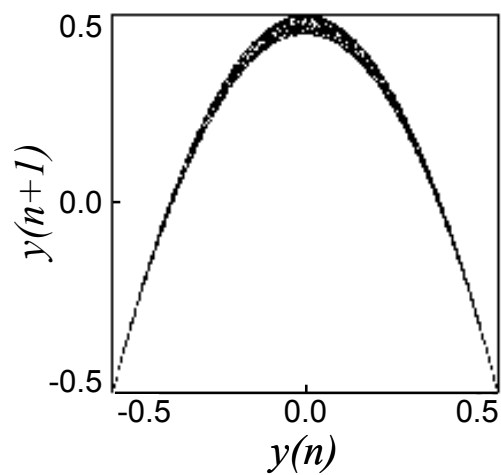
(c) Time Evolution of  $x(n)$  ( $b=0.2$ )



(d) Time Evolution of  $y(n)$  ( $b=0.2$ )



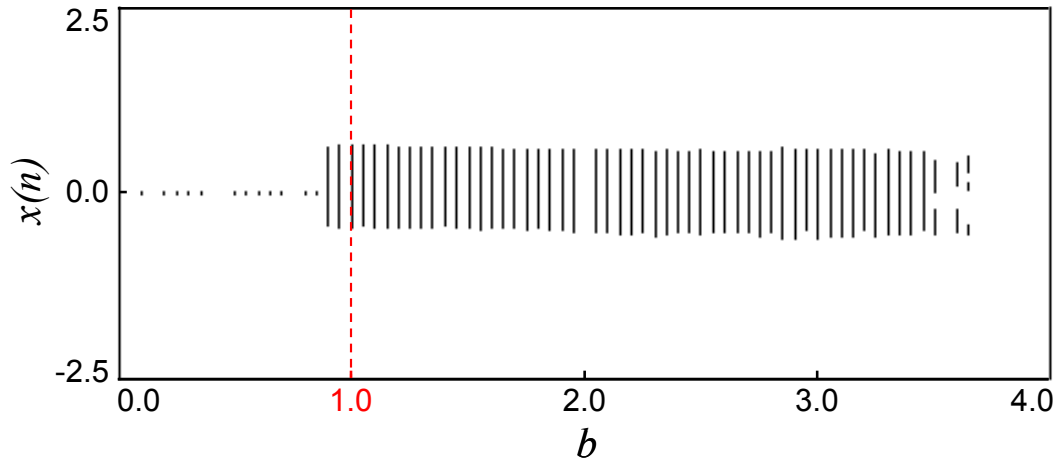
(e) Lorenz Plot of  $x(n)$  ( $b=0.2$ )



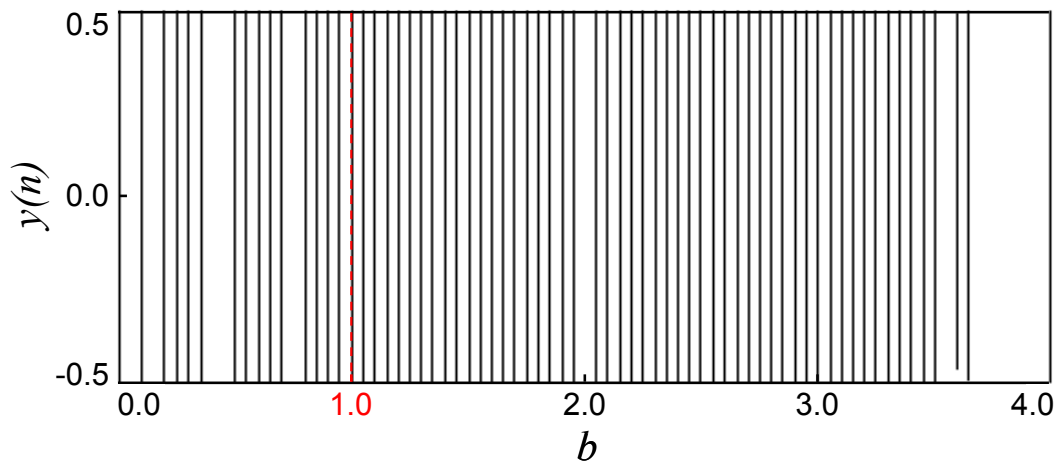
(f) Lorenz Plot of  $y(n)$  ( $b=0.2$ )

Fig.3.7 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=10.0$ )



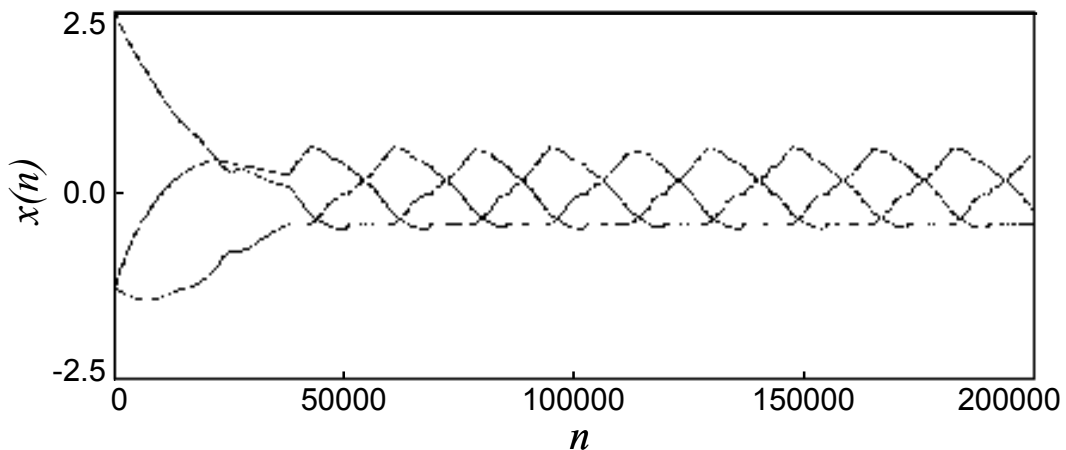


(a) Bifurcation Diagram of  $x(n)$

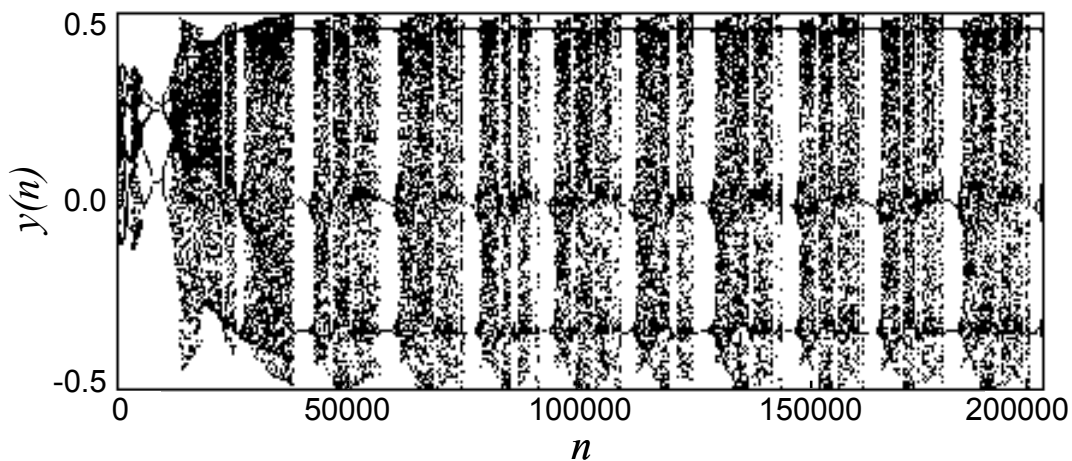


(b) Bifurcation Diagram of  $y(n)$

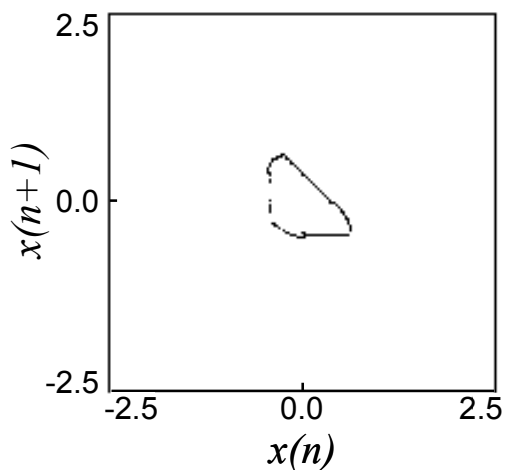
Fig.3.8 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=0.01$ ,  $\beta=1.0$ )



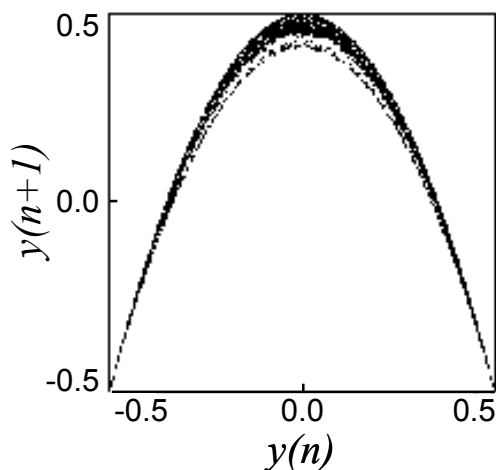
(c) Time Evolution of  $x(n)$  ( $b=1.0$ )



(d) Time Evolution of  $y(n)$  ( $b=1.0$ )

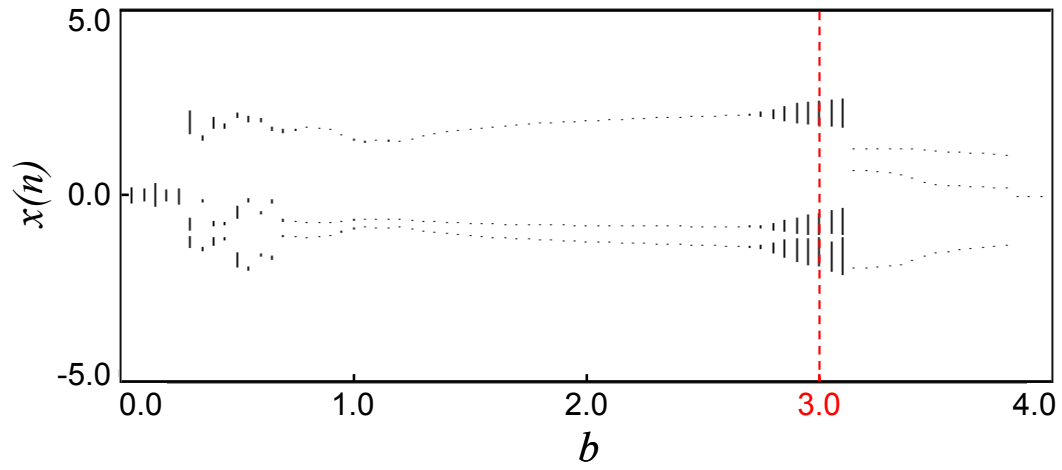


(e) Lorenz Plot of  $x(n)$  ( $b=1.0$ )

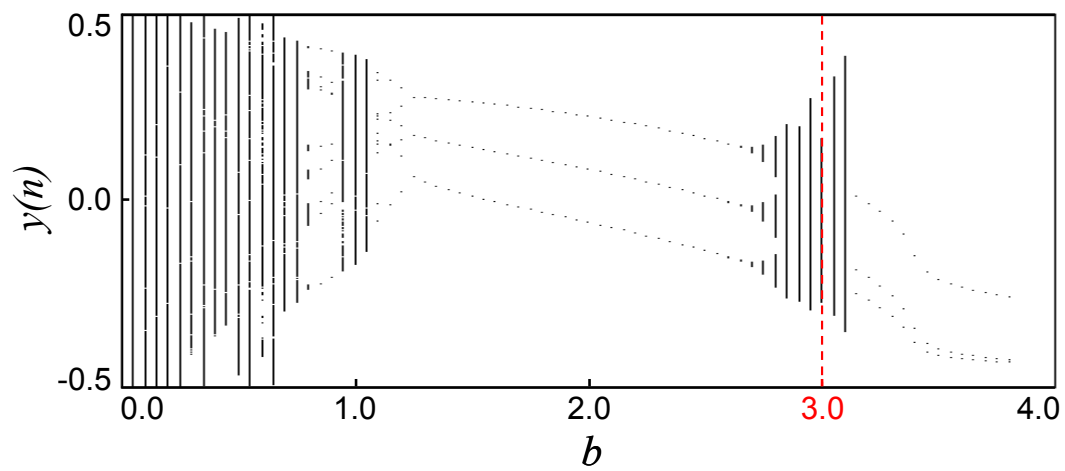


(f) Lorenz Plot of  $y(n)$  ( $b=1.0$ )

Fig.3.8 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=0.01$ ,  $\beta=1.0$ )

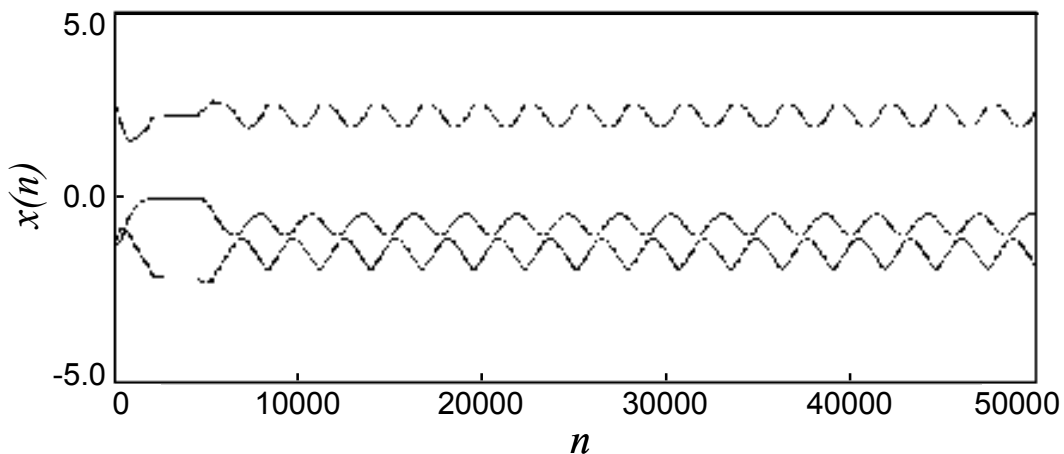


(a) Bifurcation Diagram of  $x(n)$

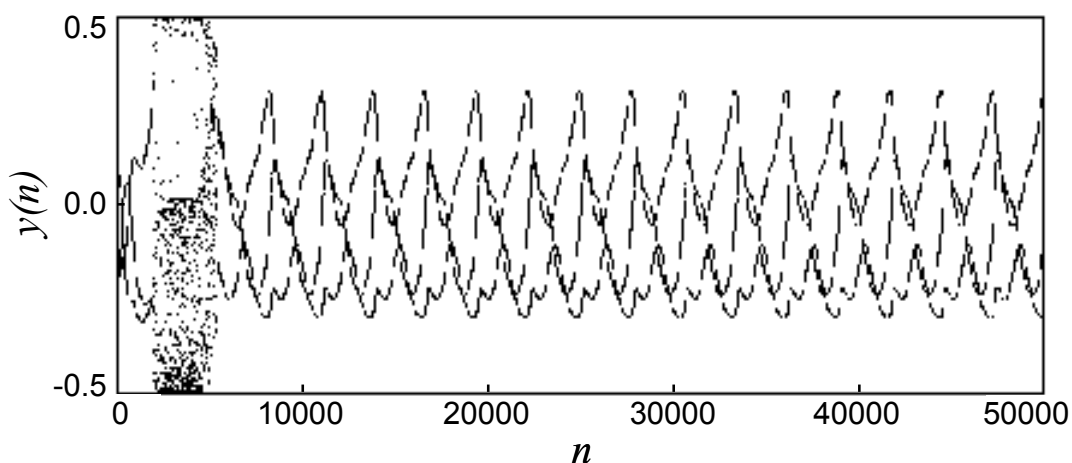


(b) Bifurcation Diagram of  $y(n)$

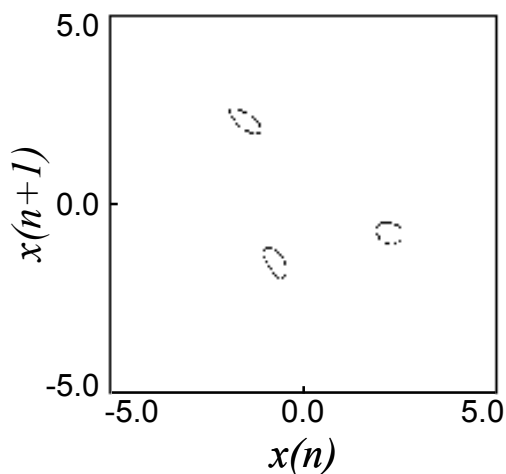
Fig.3.9 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=0.1$ ,  $\beta=1.0$ )



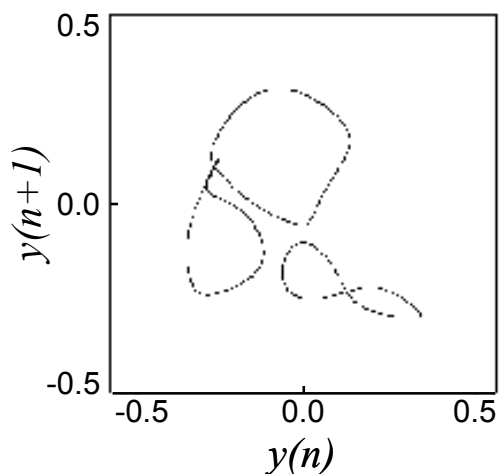
(c) Time Evolution of  $x(n)$  ( $b=3.0$ )



(d) Time Evolution of  $y(n)$  ( $b=3.0$ )

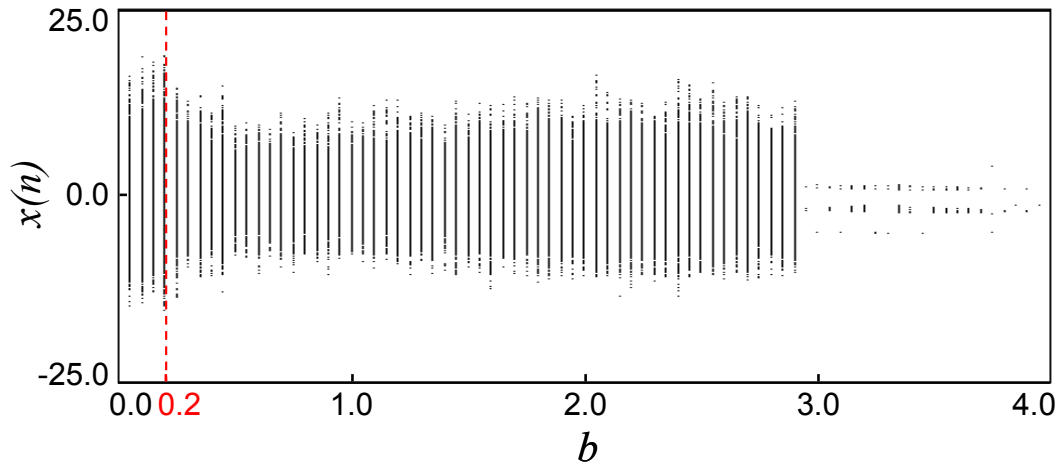


(e) Lorenz Plot of  $x(n)$  ( $b=3.0$ )

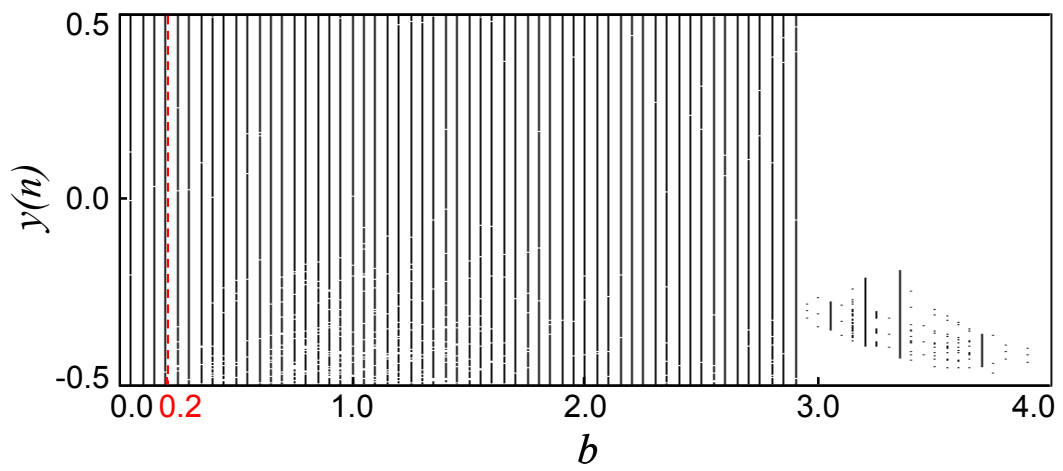


(f) Lorenz Plot of  $y(n)$  ( $b=3.0$ )

Fig.3.9 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=0.1$ ,  $\beta=1.0$ )

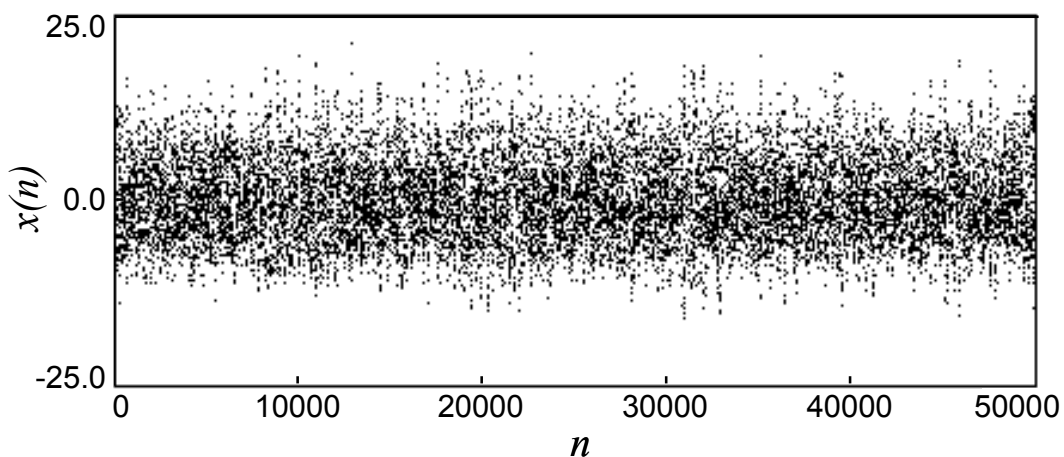


(a) Bifurcation Diagram of  $x(n)$

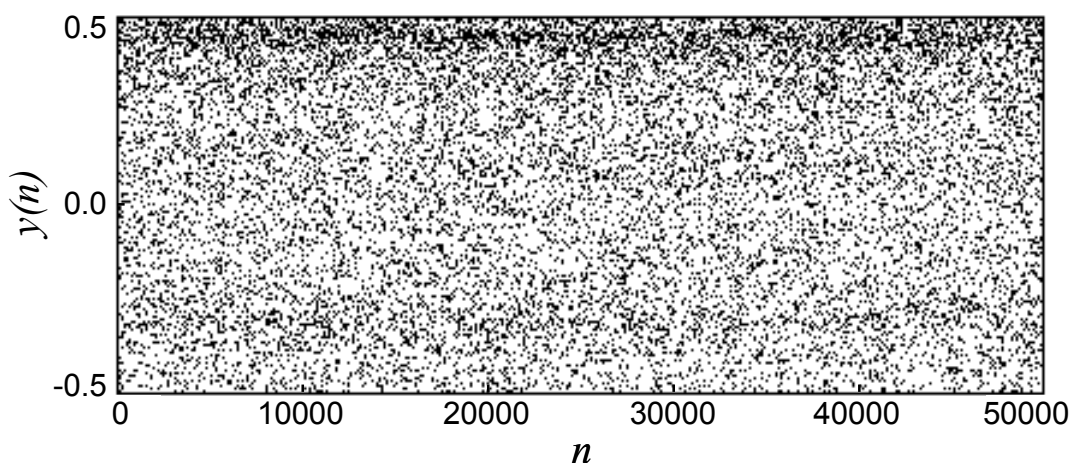


(b) Bifurcation Diagram of  $y(n)$

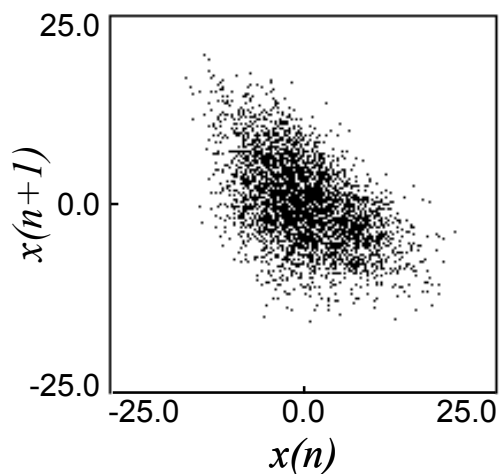
Fig.3.10 Simulation Result ( $T=3.0, \tau=5.0, \beta=1.0$ )



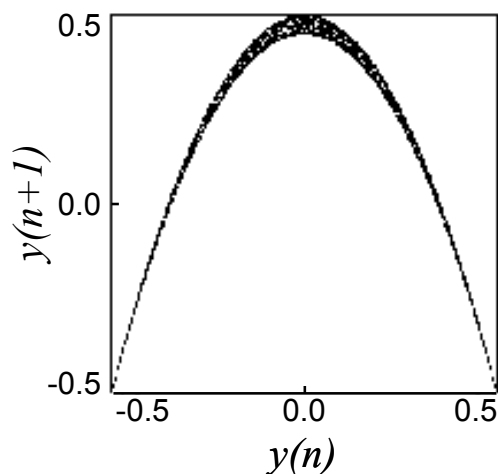
(c) Time Evolution of  $x(n)$  ( $b=0.2$ )



(d) Time Evolution of  $y(n)$  ( $b=0.2$ )

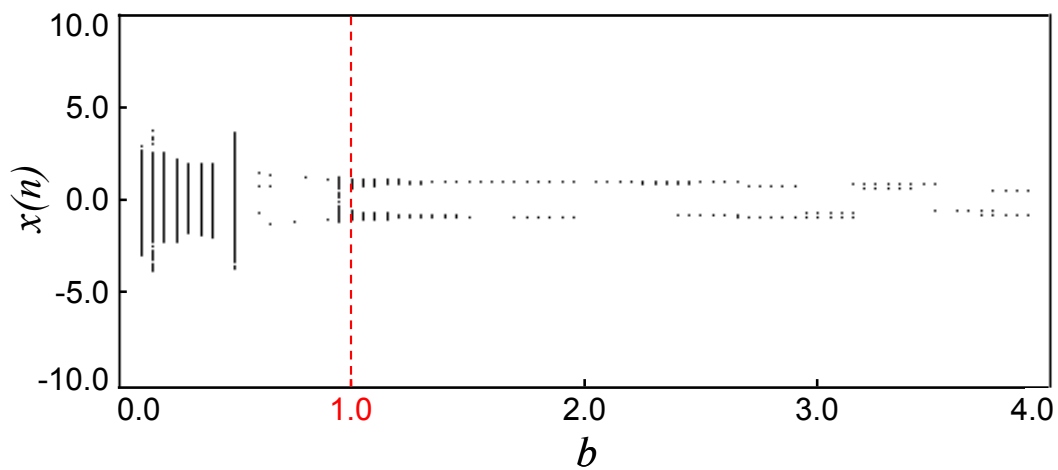


(e) Lorenz Plot of  $x(n)$  ( $b=0.2$ )

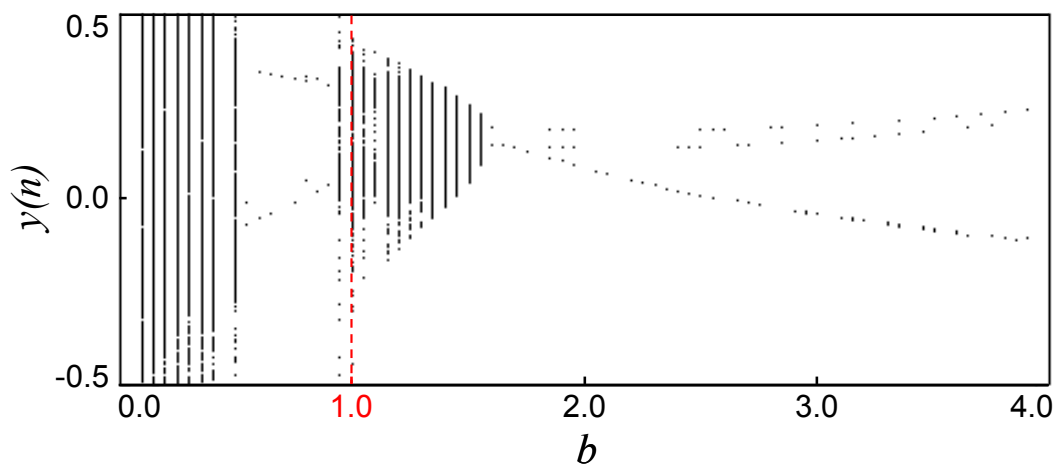


(f) Lorenz Plot of  $y(n)$  ( $b=0.2$ )

Fig.3.10 Simulation Result ( $T=3.0$ ,  $\tau=5.0$ ,  $\beta=1.0$ )

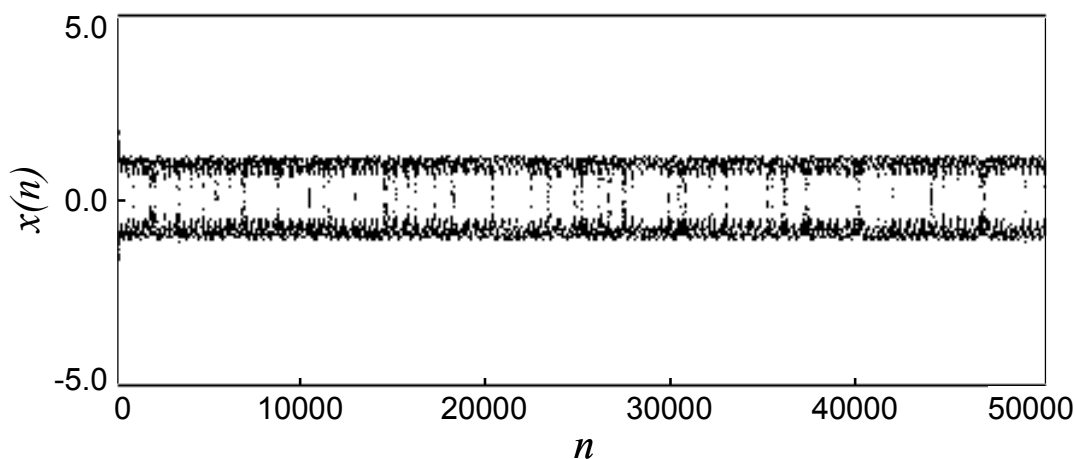


(a) Bifurcation Diagram of  $x(n)$

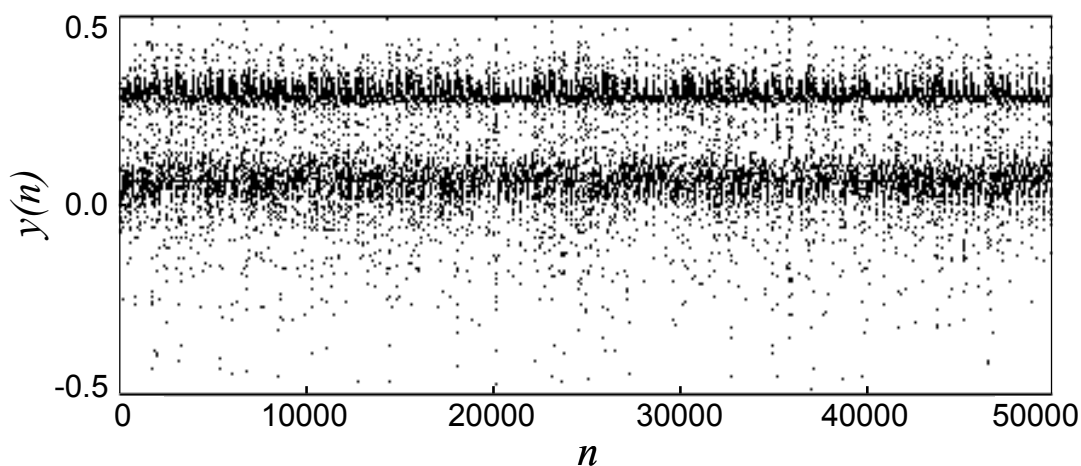


(b) Bifurcation Diagram of  $y(n)$

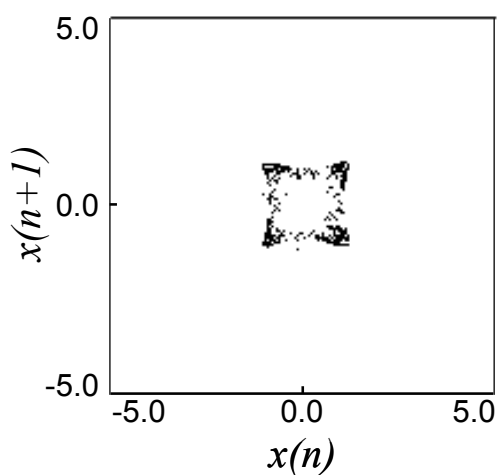
Fig.3.11 Simulation Result ( $T=4.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=1.0$ )



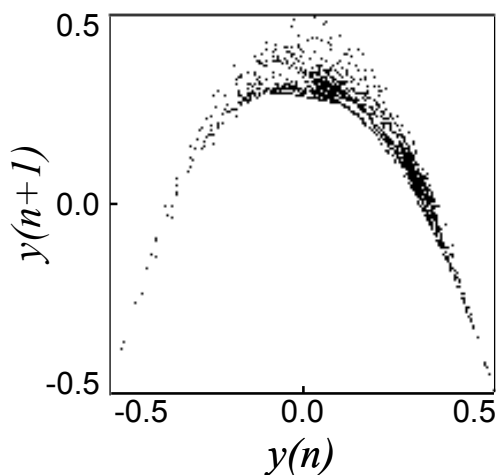
(c) Time Evolution of  $x(n)$  ( $b=1.0$ )



(d) Time Evolution of  $y(n)$  ( $b=1.0$ )



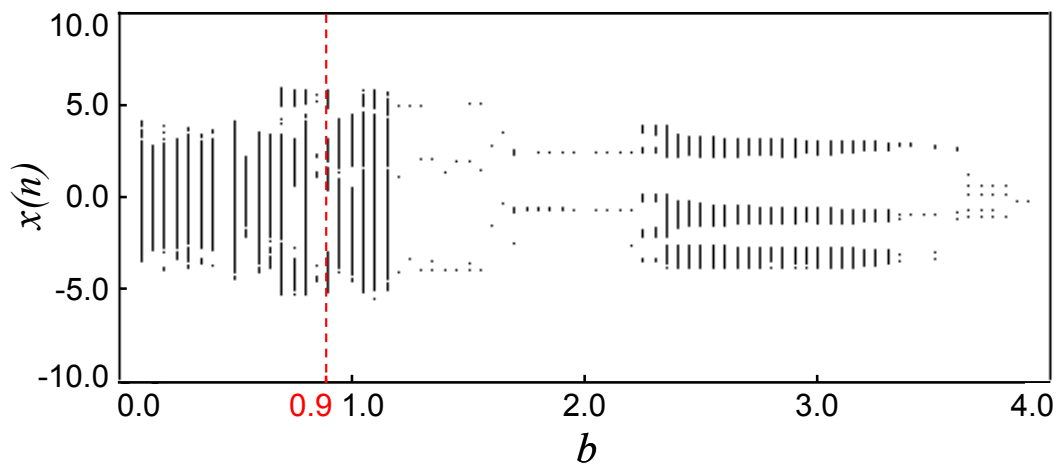
(e) Lorenz Plot of  $x(n)$  ( $b=1.0$ )



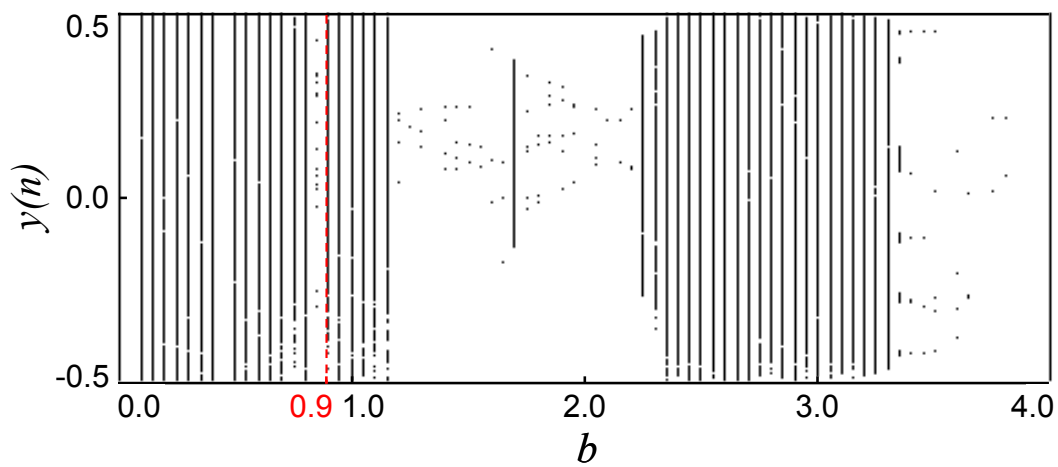
(f) Lorenz Plot of  $y(n)$  ( $b=1.0$ )

Fig.3.11 Simulation Result ( $T=4.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=1.0$ )



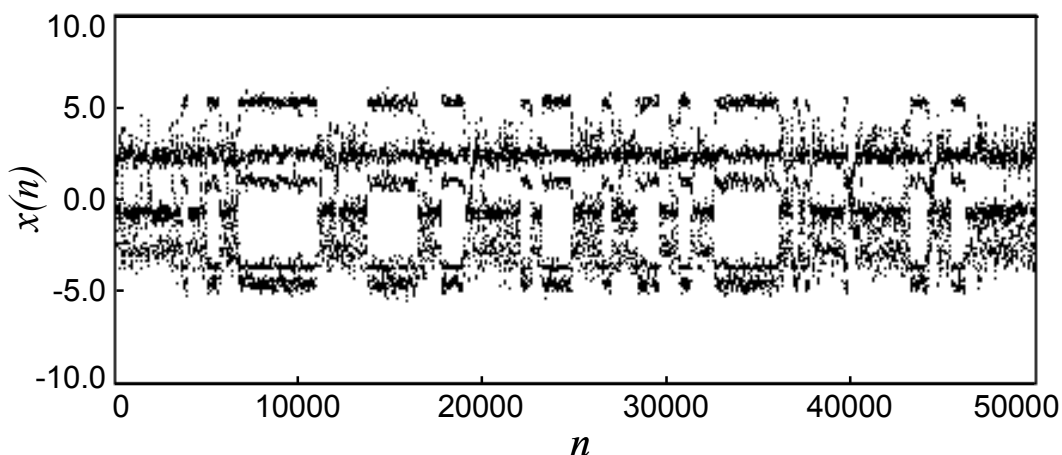


(a) Bifurcation Diagram of  $x(n)$

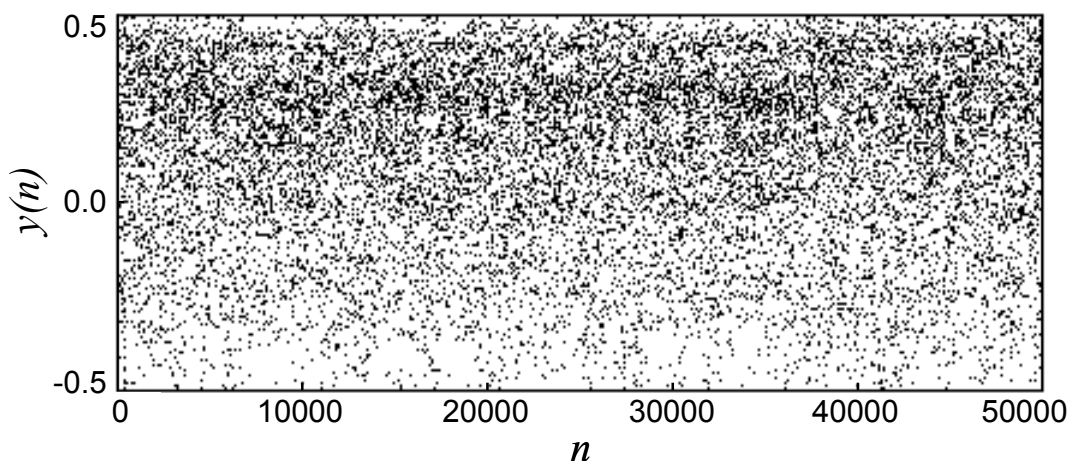


(b) Bifurcation Diagram of  $y(n)$

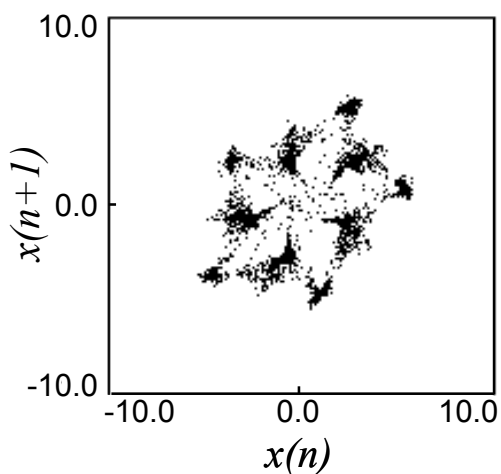
Fig.3.12 Simulation Result ( $T=5.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=1.0$ )



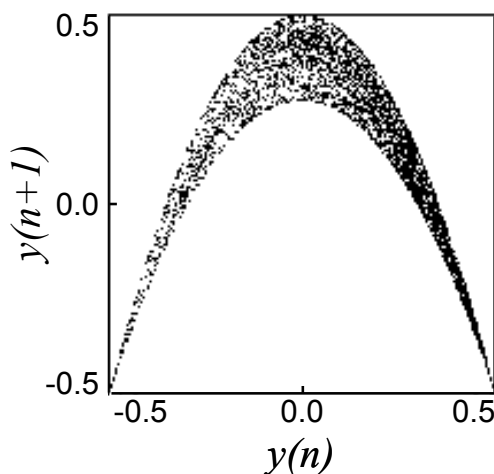
(c) Time Evolution of  $x(n)$  ( $b=0.9$ )



(d) Time Evolution of  $y(n)$  ( $b=0.9$ )

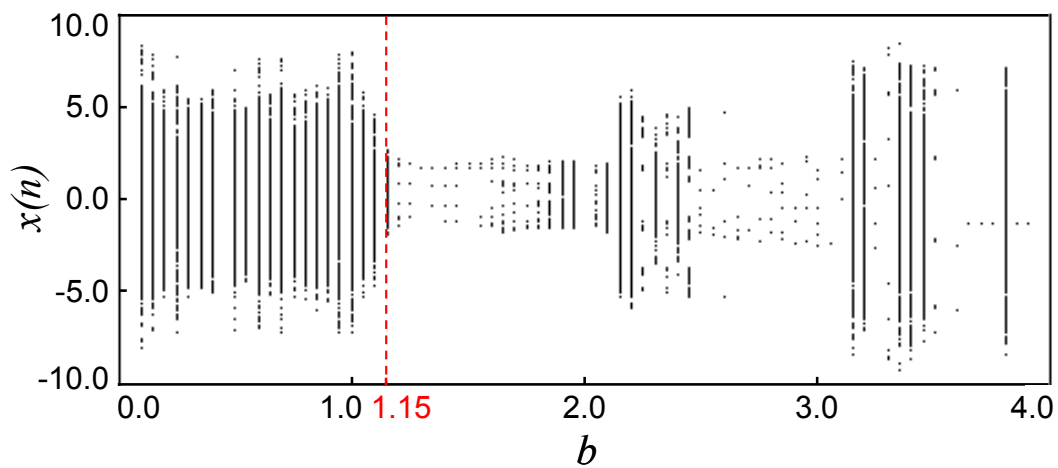


(e) Lorenz Plot of  $x(n)$  ( $b=0.9$ )

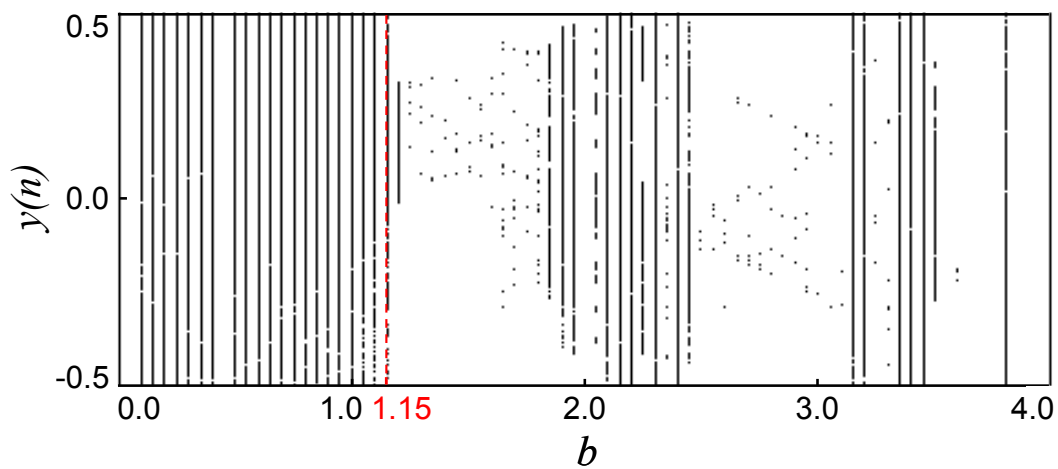


(f) Lorenz Plot of  $y(n)$  ( $b=0.9$ )

Fig.3.12 Simulation Result ( $T=5.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=1.0$ )

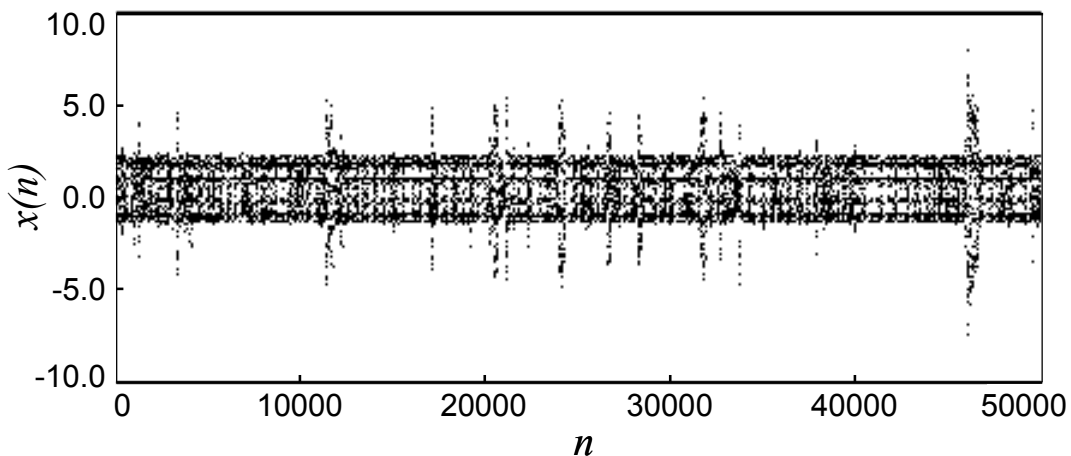


(a) Bifurcation Diagram of  $x(n)$

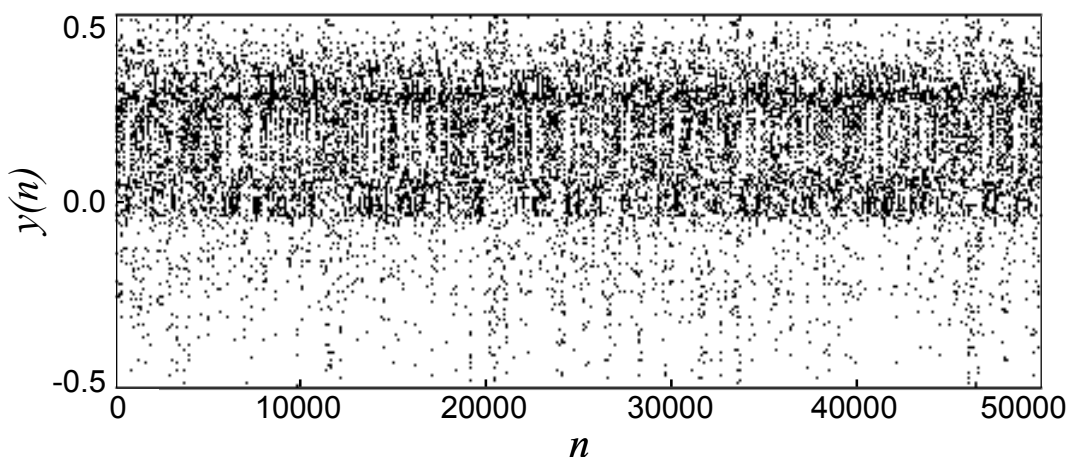


(b) Bifurcation Diagram of  $y(n)$

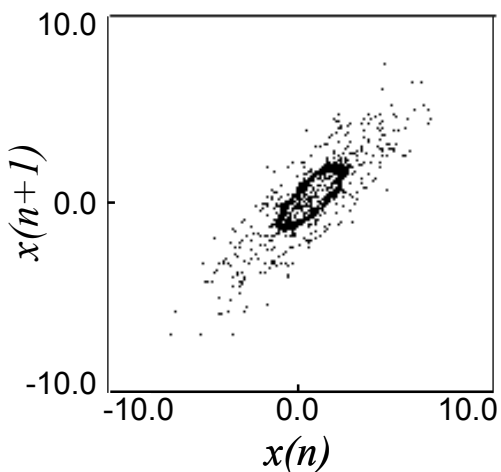
Fig.3.13 Simulation Result ( $T=10.0, \tau=1.0, \beta=1.0$ )



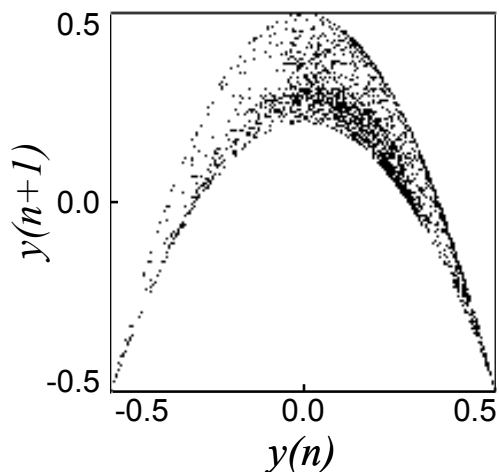
(c) Time Evolution of  $x(n)$  ( $b=1.15$ )



(d) Time Evolution of  $y(n)$  ( $b=1.15$ )



(e) Lorenz Plot of  $x(n)$  ( $b=1.15$ )



(f) Lorenz Plot of  $y(n)$  ( $b=1.15$ )

Fig.3.13 Simulation Result ( $T=10.0$ ,  $\tau=1.0$ ,  $\beta=1.0$ )

### 3.3 カオス的な力によって結合した2つの調和振動子

#### 3.3.1 モデル

ここでは、カオス的な力で結合された2つの調和振動子（振動子1, 振動子2）、つまりニューロンが2つの系について述べる。先に、次のような線形結合された場合について説明する。

$$\ddot{x}_1(t) + \omega^2 x_1(t) = \omega'^2 (x_2(t) - x_1(t)) \quad (3.18)$$

$$\ddot{x}_2(t) + \omega^2 x_2(t) = -\omega'^2 (x_2(t) - x_1(t)) \quad (3.19)$$

ここで、右辺は2つの調和振動子の相互作用を表しており、調和振動子の位置  $x_i(t)$  ( $i=1,2$ )は

$$x_1(t) = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \cos \omega_2 t \quad (3.20)$$

$$x_2(t) = C_1 \cos \omega_1 t - C_2 \cos \omega_2 t \quad (3.21)$$

$$\text{ただし, } \omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega^2 + 2\omega'^2}$$

となる。つまり、それぞれ2つの単振動を合成した振舞いを示す。ここで、 $x_1(0)=C$ ,  $x_2(0)=0.0$ ,  $v_1(0)=0.0$ ,  $v_2(0)=0.0$  という初期条件を与えると  $C_1=C_2=C/2$  が成り立ち、

$$x_1(t) = C \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (3.22)$$

$$x_2(t) = -C \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \quad (3.23)$$

を得ることができる。これらは、 $\omega_1 \neq \omega_2$  のとき、振動子1の振幅が大きく振動子2の振幅は小さくなる、あるいは、振動子1の振幅が小さく振動子2の振幅は大きくなるうなり現象を起こす。また、式(3.18)と式(3.19)では保存力のみ作用を受けるため、力学的エネルギーは保存される。

$$\frac{1}{2} (v_1^2(t) + v_2^2(t)) + (\omega^2 - \omega'^2) (x_1^2(t) + x_2^2(t)) + \omega'^2 x_1(t)x_2(t) = E_d \quad (3.24)$$

ここで減衰項を加えた場合、力学的エネルギーは減衰するため、充分長い時間が経過すると振動しなくなる。しかし、本研究では2つの調和振動子をカオス的な力によって結合し、減衰項も加えた。

$$\ddot{x}_1(t) + k_h \dot{x}_1(t) + \omega_1^2 x_1(t) = E_{f_{-1}}(t) \quad (3.25)$$

$$\ddot{x}_2(t) + k_h \dot{x}_2(t) + \omega_2^2 x_2(t) = E_{f_{-2}}(t) \quad (3.26)$$

これは非保存系であるが、減衰項を加えてもカオス的な力よりエネルギーが抽入されるため、調和振動子は振動し続けることが可能である。\$E\_{f\_{-i}}(t)\$および \$y\_i(t)\$ (\$i=1,2\$)を式(3.5), 式(3.7)と同様に

$$E_{f_{-1}}(t) = \frac{K}{\sqrt{\tau}} y_1(n) \quad \text{for } n\tau \leq t < (n+1)\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.27)$$

$$E_{f_{-2}}(t) = \frac{K}{\sqrt{\tau}} y_2(n) \quad (3.28)$$

$$y_1(n+1) = r_1(n)(0.5 - y_1(n))(0.5 + y_1(n)) - 0.5 \quad (0.0 \leq r_1(n) \leq 4.0) \quad (3.29)$$

$$y_2(n+1) = r_2(n)(0.5 - y_2(n))(0.5 + y_2(n)) - 0.5 \quad (0.0 \leq r_2(n) \leq 4.0) \quad (3.30)$$

とおくと、\$x\_i(n)\$, \$v\_i(n)\$は次のようになる。

$$x_i(n+1) = \left( 1 - \left( \frac{\mu}{\omega} \sin \omega\tau + \cos \omega\tau \right) a \right) \frac{Ky_i(n)}{(\omega^2 + \mu^2)\sqrt{\tau}} + \left( \frac{\mu}{\omega} \sin \omega\tau + \cos \omega\tau \right) ax_i(n) + \frac{\sin \omega\tau}{\omega} av_i(n) \quad (3.31)$$

$$v_i(n+1) = \frac{Ky_i(n)}{\omega\sqrt{\tau}} a \sin \omega\tau - \frac{\omega^2 + \mu^2}{\omega} ax_i(n) \sin \omega\tau - \left( \frac{\mu}{\omega} \sin \omega\tau - \cos \omega\tau \right) av_i(n) \quad (3.32)$$

ただし、 $\omega = \frac{2\pi}{T\tau}$ ,  $\mu = \frac{k}{2}$ ,  $a = e^{-\mu\tau}$

また、それぞれの分岐パラメータはもう一方の調和振動子の位置によって変調することとした。

$$r_1(n) = 4 - b + b \cos^2 \beta x_2(n) \quad (0.0 \leq b \leq 4.0) \quad (3.33)$$

$$r_2(n) = 4 - b + b \cos^2 \beta x_1(n) \quad (3.34)$$

以上のように、本モデルでは、振動子 1 の位置 \$x\_1(n)\$が、振動子 2 の分岐パラメータ \$r\_2(n)\$を変調することによって、カオス時系列 \$y\_2(n)\$の力学的性質が変化し、振動子 2 の外力に影響を与える。さらに、この外力を受けた振動子 2 の位置 \$x\_2(n)\$が振動子 1 の分岐パラメータ \$r\_1(n)\$を変調するフィードバック機構が組み込まれている。

### 3.3.2 シミュレーション結果

$-0.5 \leq y_i(n) \leq 0.5$  であるので、 $K=1.0$  のときの各  $\tau$  における  $E_{f_i}(t)$  の変域は、式(3.27) および式(3.28)より次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 -3.16 &\leq E_{f_i}(t) \leq 3.16 && \text{for } \tau=0.1 \\
 -0.791 &\leq E_{f_i}(t) \leq 0.791 && \text{for } \tau=0.4 \\
 -0.707 &\leq E_{f_i}(t) \leq 0.707 && \text{for } \tau=0.5 \\
 -0.559 &\leq E_{f_i}(t) \leq 0.559 && \text{for } \tau=0.8
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

また、 $\mu=0.005$  とし、初期値は次のようにおいた。

$$\begin{aligned}
 x_1(0) &= 2.0, \quad v_1(0) = 1.0, \quad y_1(0) = 0.4 \\
 x_2(0) &= 1.0, \quad v_2(0) = 3.0, \quad y_2(0) = 0.3
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

Fig.3.14-3.17 の(a)と(b)は、それぞれ  $18000 \leq n \leq 20000$  の値をプロットした  $x_i(n)$  の分岐図と  $y_i(n)$  の分岐図、(c)と(d)はある  $b$  における  $x_i(n)$  の時間変化を示している。

まず、Fig.3.14(a)では、 $0.0 \leq b \leq 3.6$  において調和振動子はカオス的な振動をしているが、特に  $b=3.5$  のときは、Fig.3.14(c)より振動子1と振動子2の振幅が交互に大きくなったり小さくなったりするうなりが現れていることが確認できる。また、 $b=3.55$  においては、振動子1の振幅は大きく振動子2の振幅は小さくなっている (Fig.3.14(d))。さらに、ここでは  $-3.16 \leq E_{f_i}(t) \leq 3.16$  であるのに対して、調和振動子の振幅が非常に大きくなっているため、共振も起きていると言える。

次に Fig.3.15 では、 $\tau$  の値を 0.1 から 0.4 に変化させたときの振舞いを示した。Fig.3.15(c)より  $b=3.4$  の場合、三角波のようなゆらぎが付加されており、このゆらぎの振幅が交互に大きくなったり、小さくなったりしていることがわかる。また、Fig.3.15(d)を見ると、 $b=3.7$  のときは間欠性カオス的な振動をしていて、振動子1の振幅は小さく、振動子2の振幅は大きくなっている。

Fig.3.16 の場合、各振動子が  $b$  の値に関係なくほとんどカオス的な振動をしていて (Fig.3.16(a))、 $b=1.3$  ではうなり現象を観測することができた (Fig.3.16(c))。しかし、 $3.2 \leq b \leq 3.35$ 、 $3.6 \leq b \leq 3.65$  においては、Fig.3.16(d)のように非常に大きな周期を有する振動が確認された。

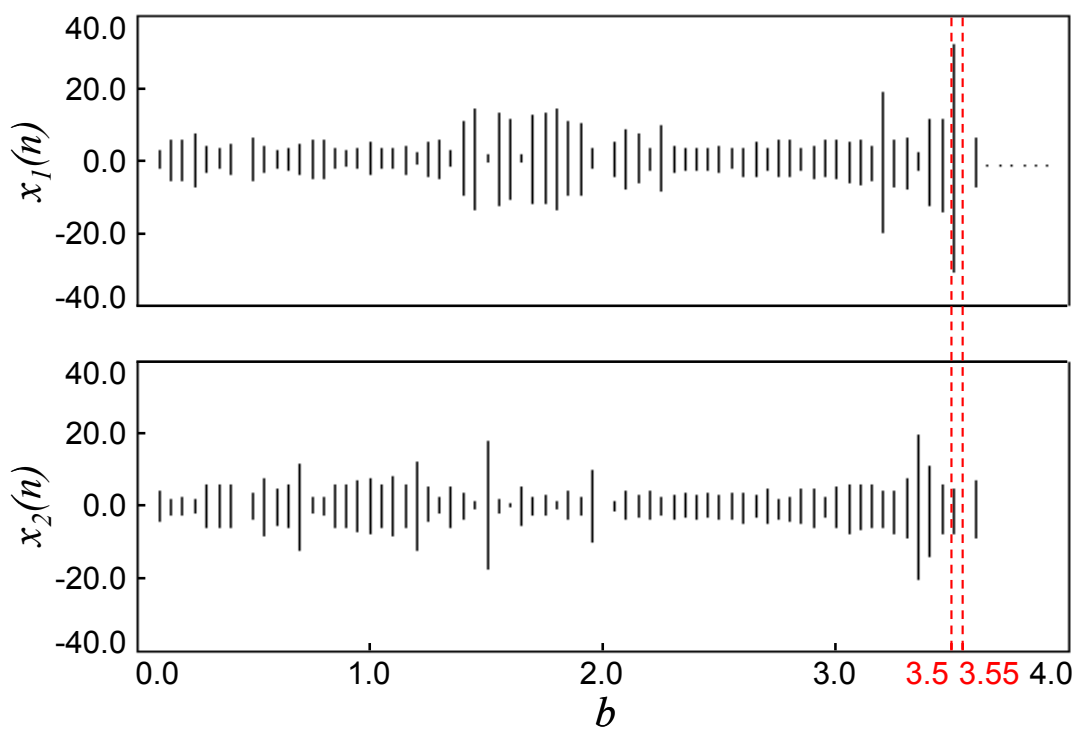
Fig.3.17 では、全く新しいタイプの振動が見られた。Fig.3.17(c)より  $b=3.2$  の場合、準周期的な振動をしていて、振動子1の振幅は大きく振動子2の振幅は小さくなって

いることがわかる. しかし,  $b=3.7$  においては, 振動子 1 は一定の値  $0.559$  に収束しており, 振動子 2 はカオス的な振動をしている (Fig.3.17(d)).

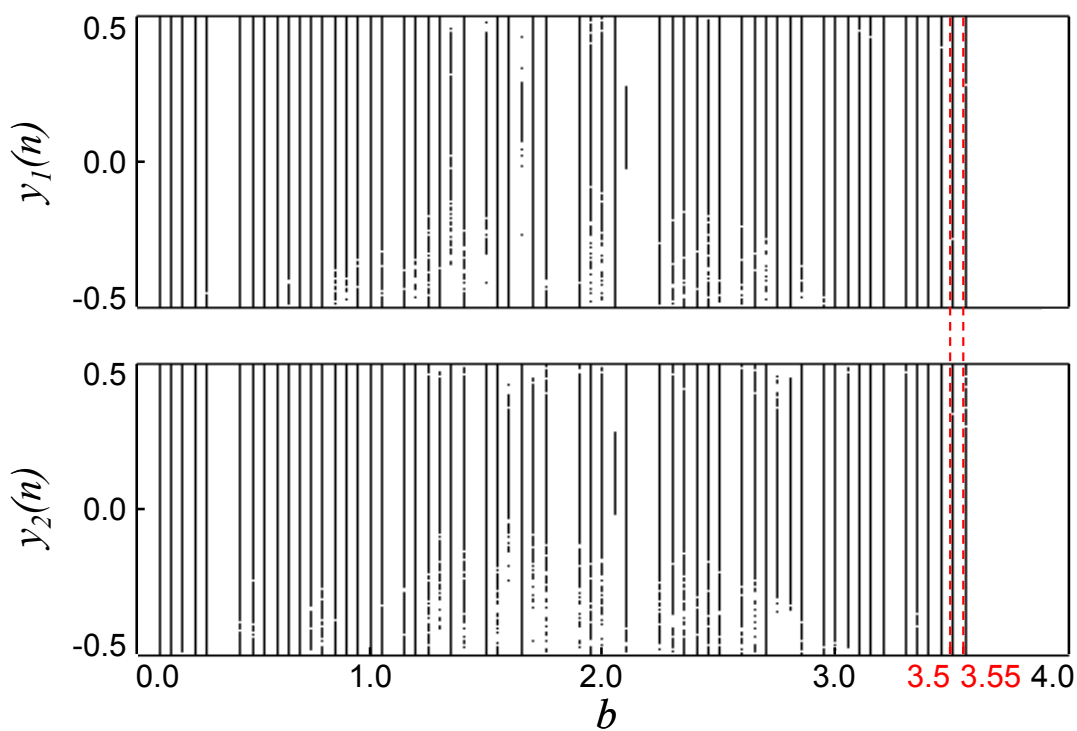
これらの振動は 3 つのタイプに分類することができる. まず 1 つ目は, Fig.3.14(c), Fig.3.16(c)のように, 振動子 1 と振動子 2 の振幅が交互に大きくなったり小さくなったりするうなりが起きているものである. 2 つ目は, 2 つの調和振動子のうち, どちらか一方の振幅が大きく, もう一方の振幅が小さいときで, Fig.3.14(d)や Fig.3.15(d)の波形がこれに相当する. そして 3 つ目は, どちらか一方がカオス的な振動をしていて, もう一方がある値に収束している, Fig.3.17(d)の波形である.

また, 波形に注目すると, カオス的, 間欠性カオス的, 準周期的, 周期的といったように様々な振動が見られ, この項においてもこの系がニューラルネットワークのニューロンとして有効であることが確認された. これらの振動は  $E_{f_i}(t)$ の変域に対して振幅が非常に大きくなっており, 特に 1 つ目のタイプにおいては, うなり現象と共振現象が同時に起こっている. さらに, ロジスティックマップにおいて,  $y_i(n)$ は  $0.0 \leq r_i(n) \leq 1.0$  のとき固定点  $-0.5$  に収束する. 3 つ目のタイプの場合,  $r_i(n)$ が長い間この範囲内にあるため, 固定点から抜け出せなくなり, 一方の調和振動子がある値に収束するものと思われる.



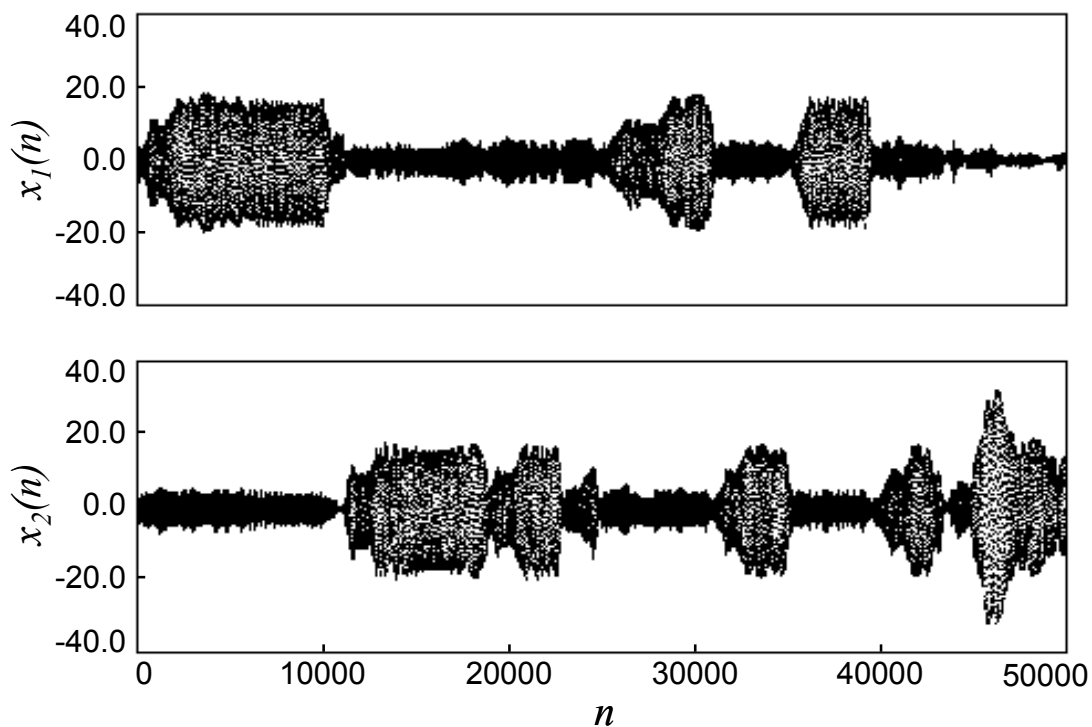


(a) Bifurcation Diagram of  $x_i(n)$

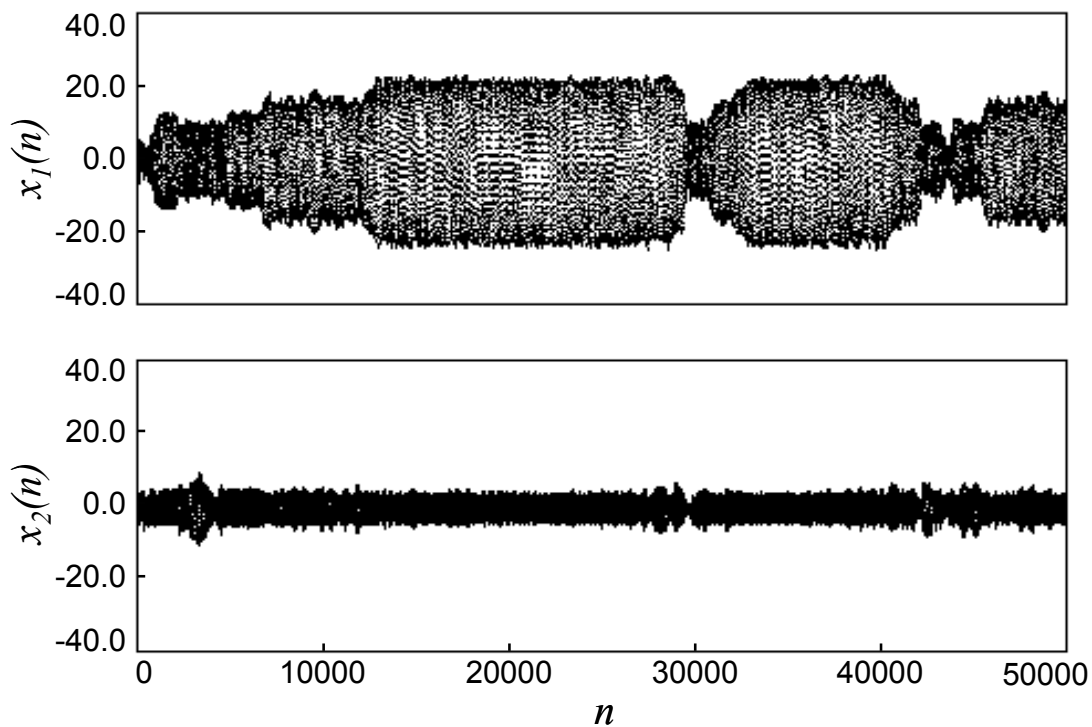


(b) Bifurcation Diagram of  $y_i(n)$

Fig.3.14 Simulation Result ( $\omega_0=1.0, \tau=0.1, \beta=0.5$ )

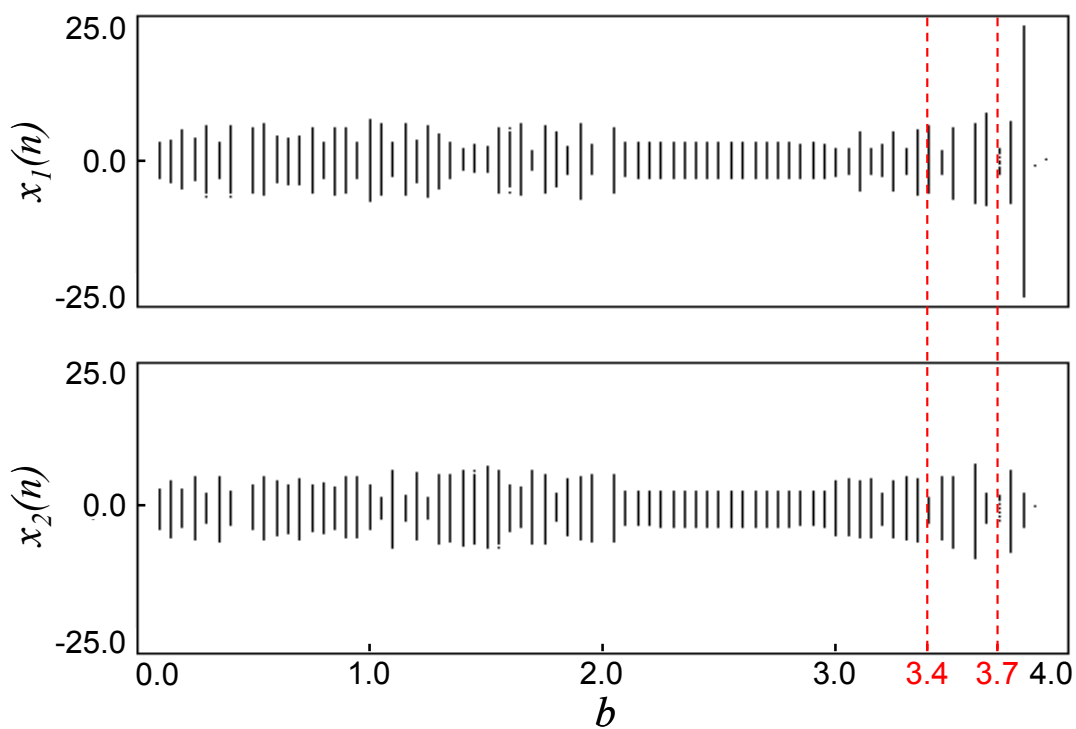


(c) Time Evolution of  $x_i(n)$  ( $b=3.5$ )

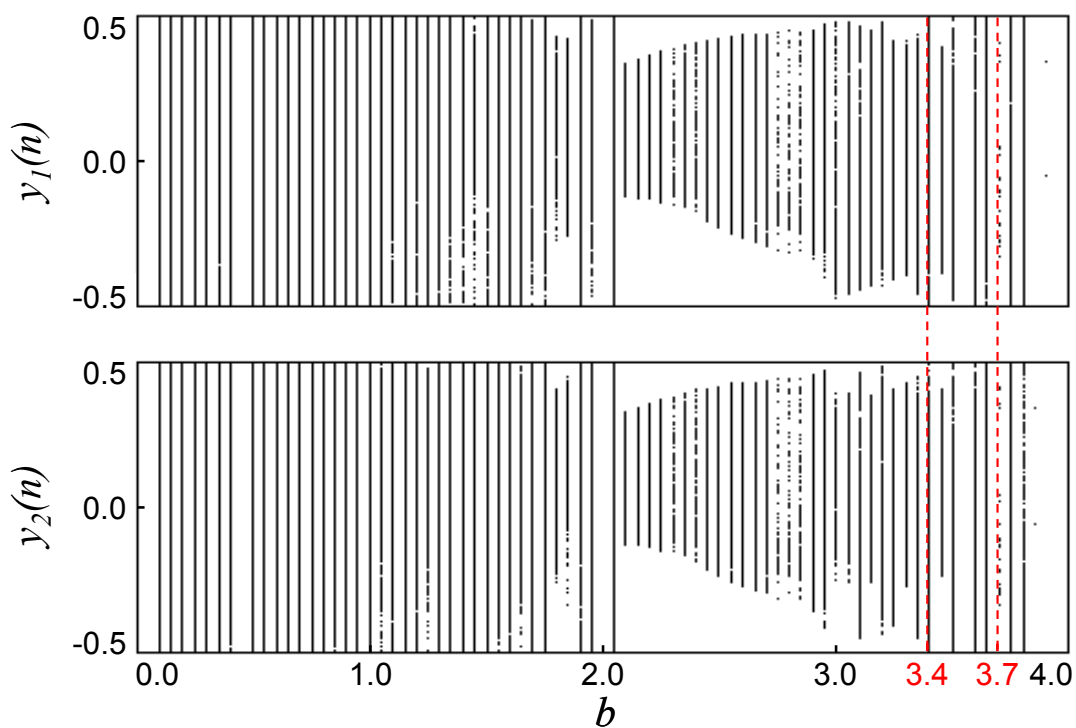


(d) Time Evolution of  $x_i(n)$  ( $b=3.55$ )

Fig.3.14 Simulation Result ( $\omega_0=1.0, \tau=0.1, \beta=0.5$ )

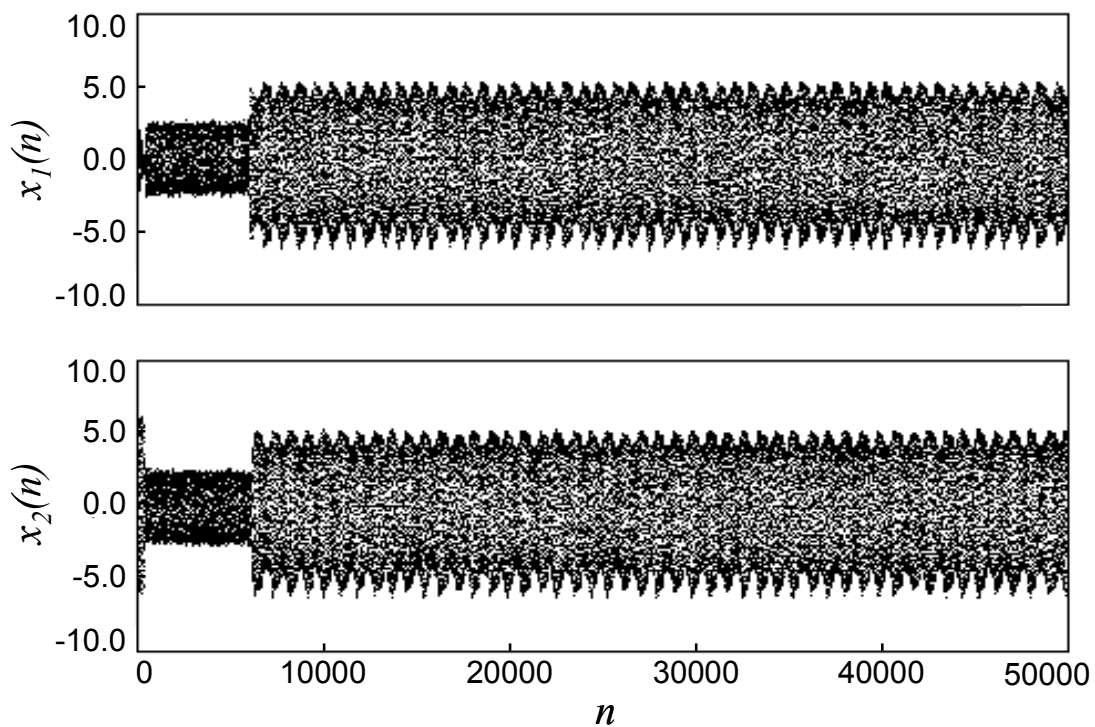


(a) Bifurcation Diagram of  $x_i(n)$

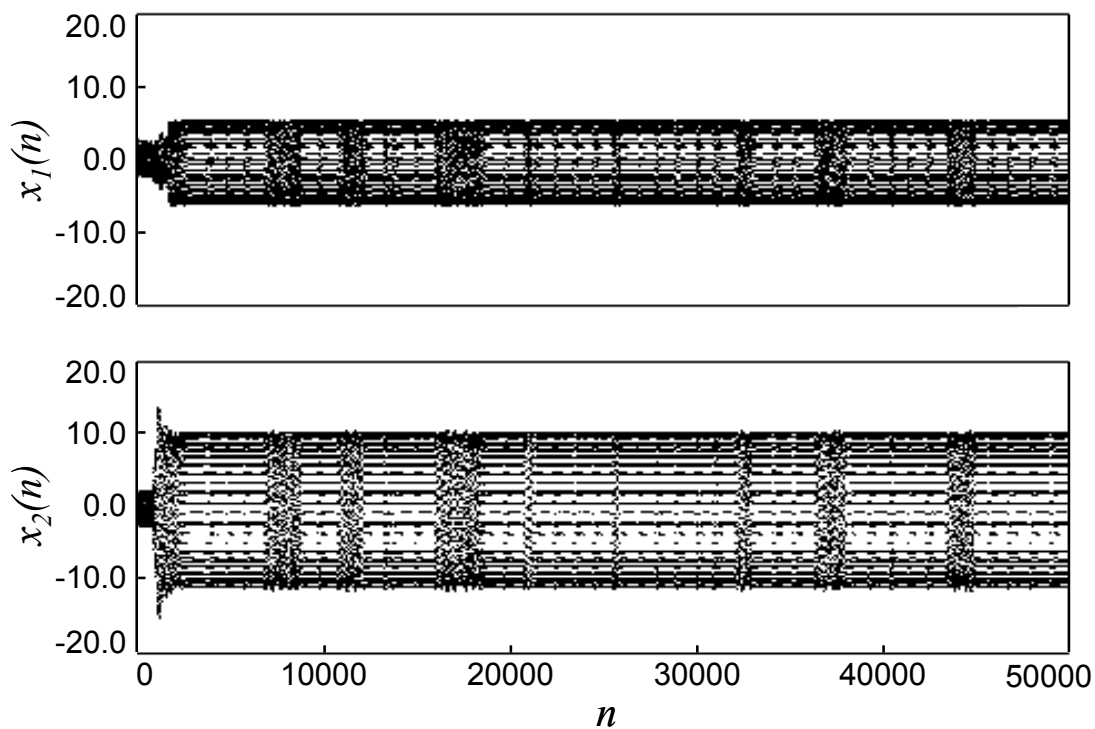


(b) Bifurcation Diagram of  $y_i(n)$

Fig.3.15 Simulation Result ( $\omega_0=1.0, \tau=0.4, \beta=0.5$ )

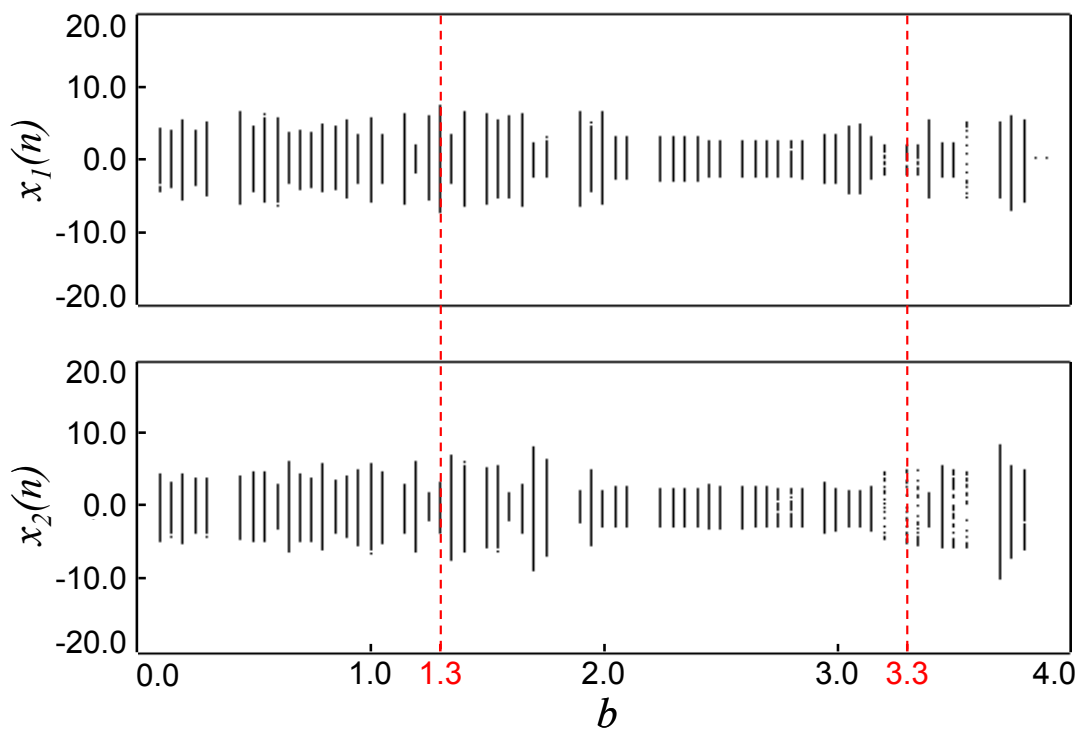


(c) Time Evolution of  $x_i(n)$  ( $b=3.4$ )

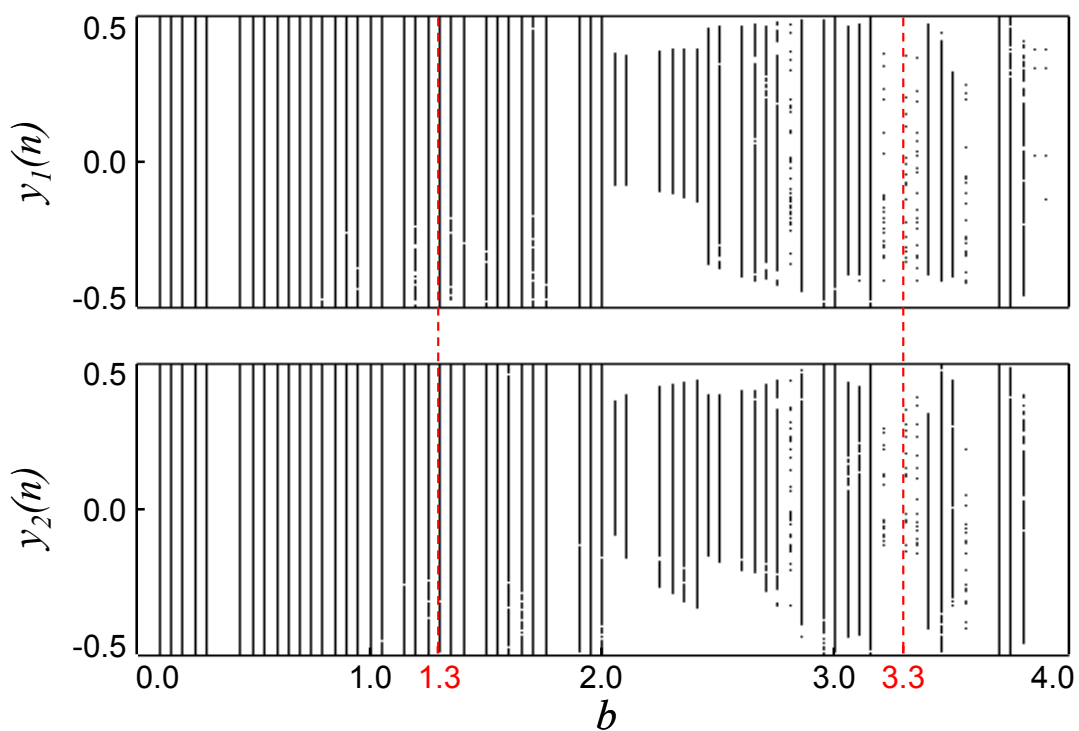


(d) Time Evolution of  $x_i(n)$  ( $b=3.7$ )

Fig.3.15 Simulation Result ( $\omega_0=1.0, \tau=0.4, \beta=0.5$ )

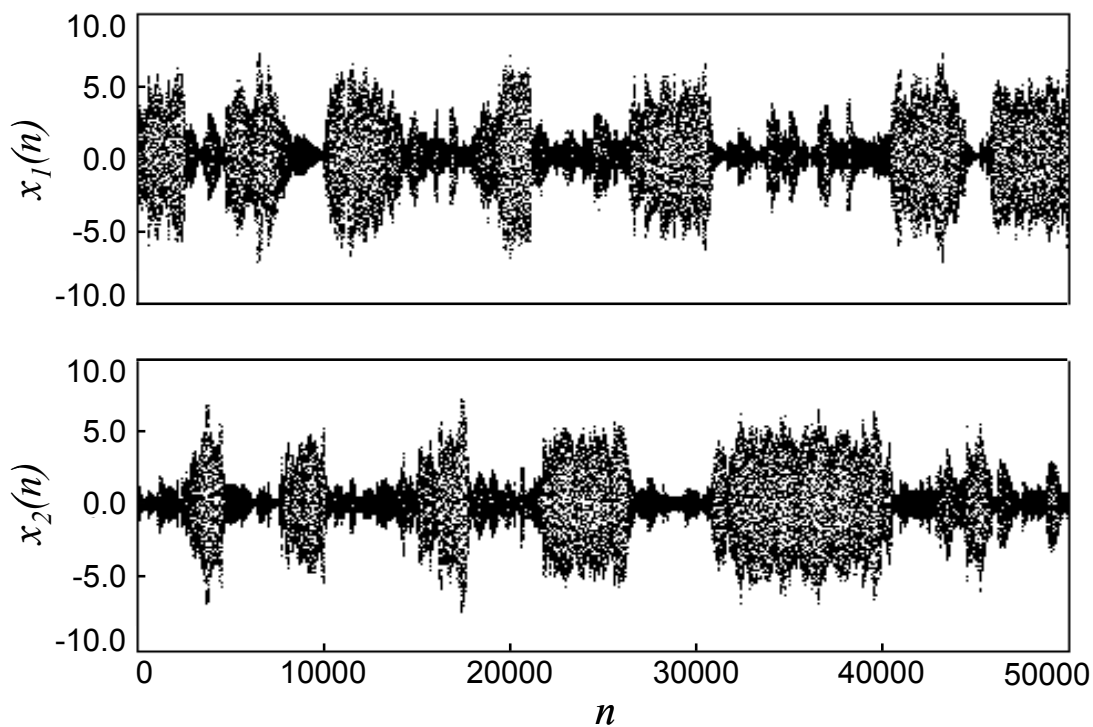


(a) Bifurcation Diagram of  $x_i(n)$

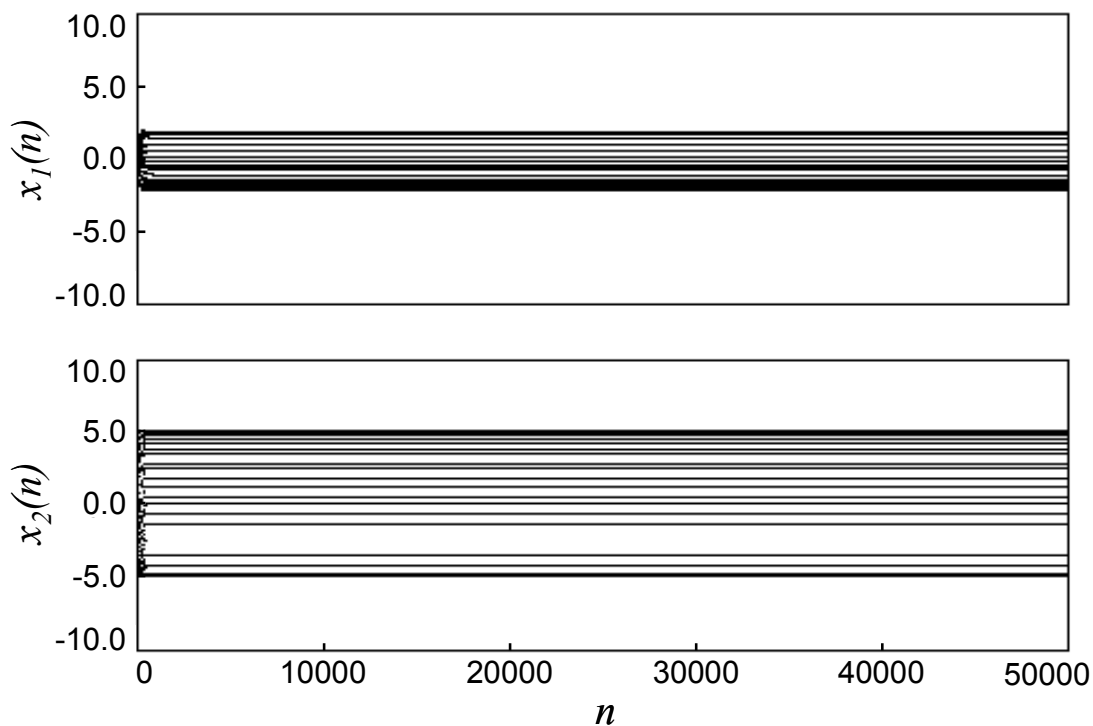


(b) Bifurcation Diagram of  $y_i(n)$

Fig.3.16 Simulation Result ( $\omega_0=1.0, \tau=0.5, \beta=0.5$ )

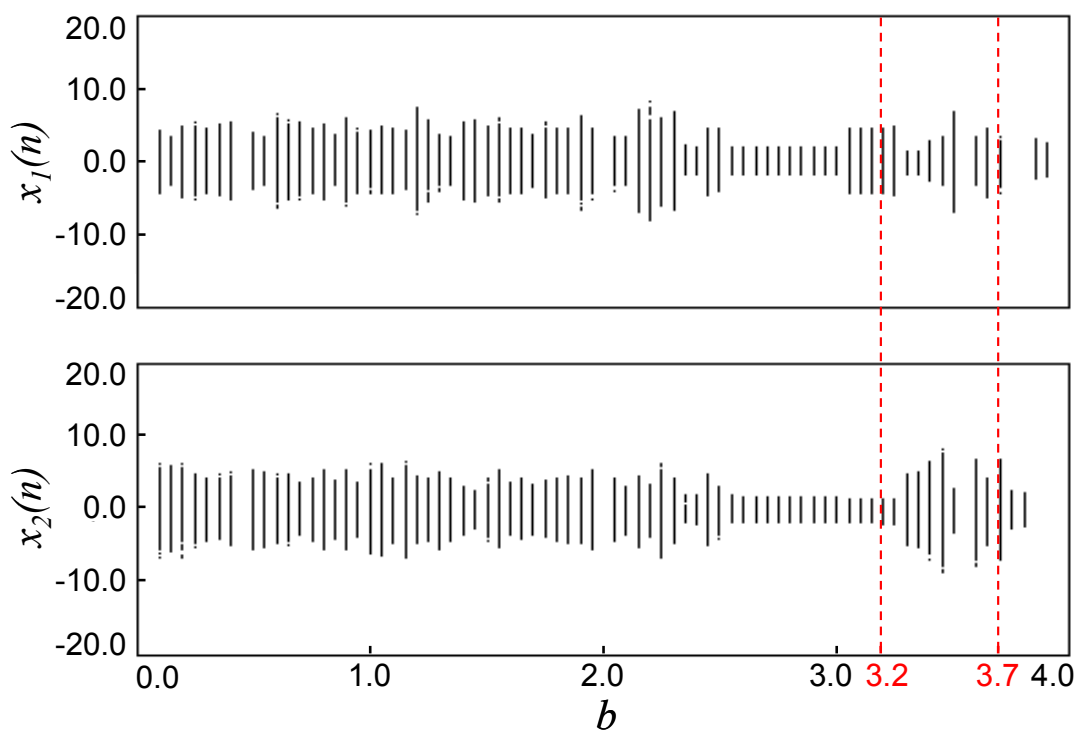


(c) Time Evolution of  $x_i(n)$  ( $b=1.3$ )

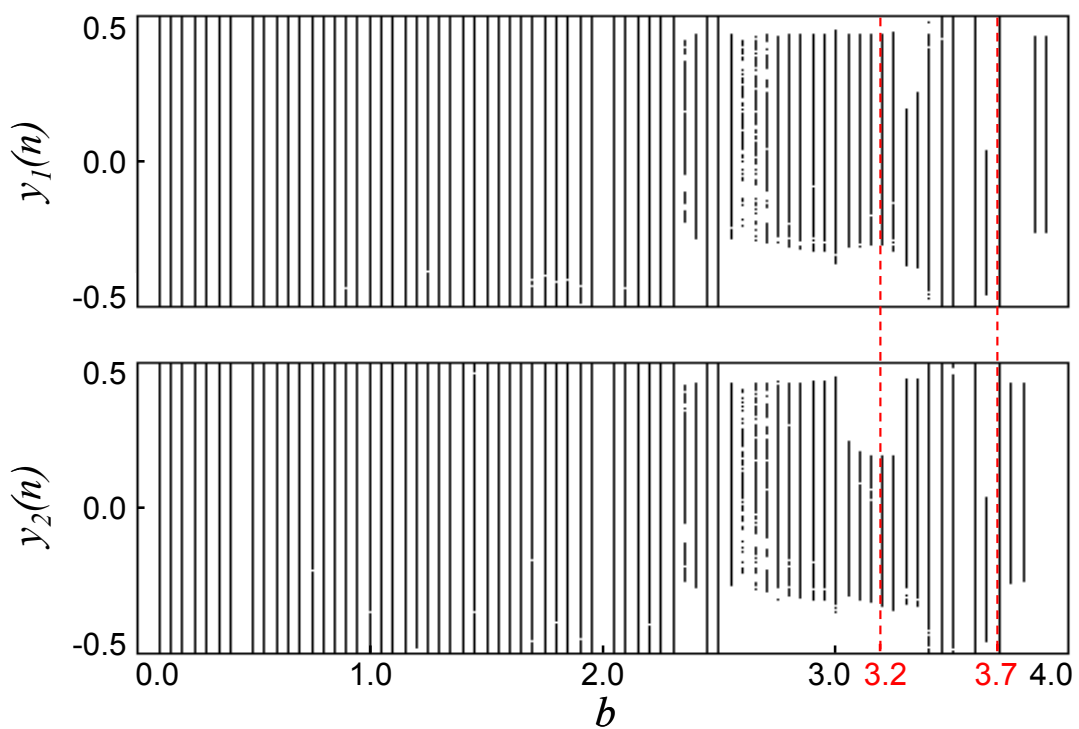


(d) Time Evolution of  $x_i(n)$  ( $b=3.3$ )

Fig.3.16 Simulation Result ( $\omega_0=1.0, \tau=0.5, \beta=0.5$ )

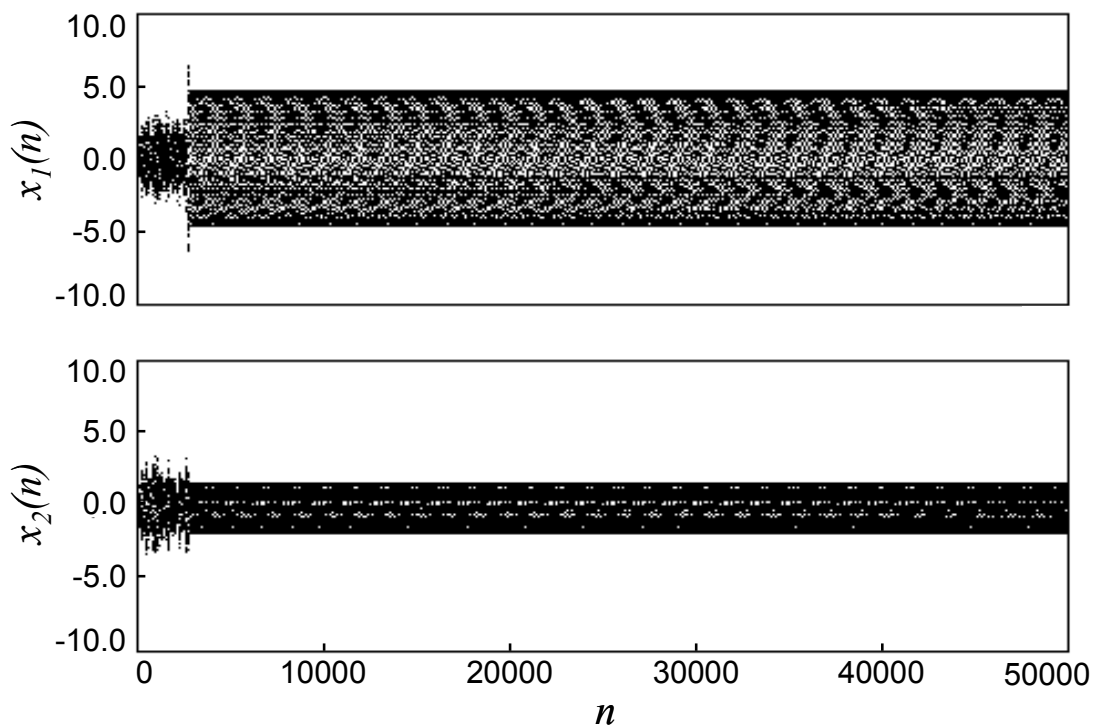


(a) Bifurcation Diagram of  $x_i(n)$

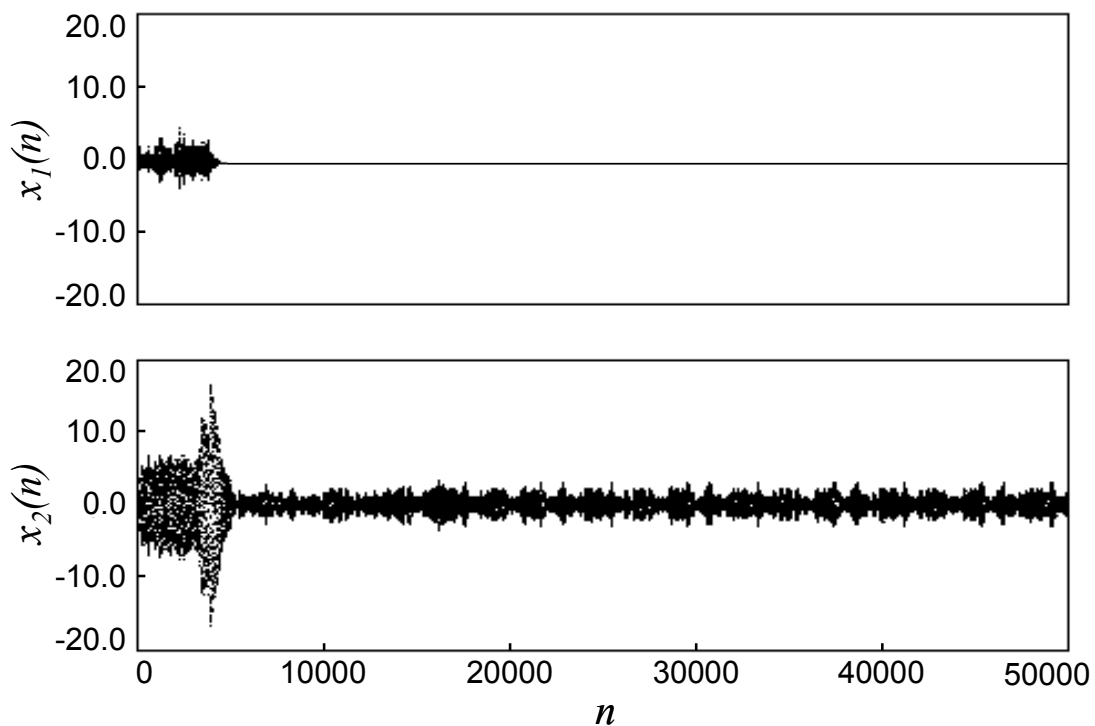


(b) Bifurcation Diagram of  $y_i(n)$

Fig.3.17 Simulation Result ( $\omega_0=1.0, \tau=0.8, \beta=0.5$ )



(c) Time Evolution of  $x_i(n)$  ( $b=3.2$ )



(d) Time Evolution of  $x_i(n)$  ( $b=3.7$ )

Fig.3.17 Simulation Result ( $\omega_0=1.0, \tau=0.8, \beta=0.5$ )



### 3.4 まとめ

本章では、カオス的な外力によって駆動する1つの調和振動子と、カオス的な力で結合された2つの調和振動子の系について考察した。ここでは、分岐パラメータを調和振動子の位置によって変調することにより、調和振動子自身がカオス的な力の力学的性質を決定することができる新しいフィードバック機構を組み込んだ。この結果、共振現象やうなり現象を伴うカオス的な振動が観測され、その他にも周期的、準周期的、間欠性カオス的な振動といったように様々な振動が現れた。

1つの調和振動子の場合、線形系であれば、調和振動子の周期が外力の周期と近い値をとるとき共振が起こる。しかし、本章で見られたカオス的な振動をした共振現象は、線形系のものとは異なる全く新しい現象と言える。

また、2つの調和振動子では、振幅が交互に大きくなったり小さくなったりするタイプ、一方の振幅は大きくもう一方の振幅は小さくなるタイプ、一方がカオス的な振動をしてもう一方がある値に収束するタイプの3タイプの振動が見られ、中には共振とうなりが同時に起きているものもあった。線形的に結合された2つの調和振動子は、それぞれ2つの単振動を合成した振動をし、その振幅は交互に大きくなったり小さくなったりする。しかし、ここで現れた振動は、カオス的な挙動を示し、さらに共振を伴ううなり現象で、線形系では存在しない全く新しいものである。

以上のように、様々な振舞いをする調和振動子をニューラルネットワークのニューロンとして用いれば、連想記憶問題において記憶させたパターンを想起したり、1つのパターンだけではなく他のパターンへ移行することが可能になると考えられる。さらに、調和振動子では周期を容易に設定することができるため、周期を2とすれば、記憶させたパターンとその反転パターンを交互に想起し、効率の良いパフォーマンスが実現するのではないかと期待できる。