早稲田大学大学院理工学研究科

博　士　論　文　概　要

論　文　題　目

Classification of polarized manifolds admitting a low degree cover of projective space among their hyperplane sections

射影空間の低次数被覆空間を超平面切断として含む偏極多様体の分類

申　請　者

網谷　泰治

Yasuharu　AMITANI

数理科学専攻　代数幾何学研究

2006年 12月

偏極多様体とは, 非特異複素射影多様体 X と, その上の ample な直線束 L のなす組 (X, L) のことをいう. 偏極多様体の構造研究においては, 完備線型系 $|L|$ に属する ample な因子 (特に L が very ample であれば, 超平面切断) A の性質が多様体 X に強く反映すると考えられており, A が与えられた性質を持つ偏極多様体 (X, L) の分類問題に関して様々な研究がなされている.
本論文では, まず超平面切断が射影空間の被覆空間となる偏極多様体の分類問題を扱い, 被覆次数が $4, 5$ の場合に分類結果を与える. 次に, ample な因子が Castelnuovo 多様体となる偏極多様体の分類問題を提起し, Castelnuovo 多様体の次数が次元と比較して小さい場合に分類結果を与える.

最初に, 偏極多様体 (X, L) に対して, 次の三つの不変量を定義する. $d(X, L) := L^{n+1}$, $\Delta(X, L) := n + 1 + d(X, L) - h^0(X, L)$, $g(X, L) := 1 + \frac{1}{2}(K_X + nL)L^n$, ただし K_X を X の標準直線束とし, $\dim X = n + 1$ とする. これら不変量は, それぞれ (X, L) の次数, Δ-種数, 断面種数と呼ばれる.

次に, 各章の概要について述べる.

第 1 章と第 2 章で考察する問題の起源は, 19 世紀末のイタリア学派による射影曲面の構造研究に遡る. 端緒は G. Castelnuovo による, 超楕円曲線 (すなわち $\mathbb{P}^1$ の 2 次被覆) を超平面切断として含む射影曲面の分類問題の研究である. 1980 年代後半にその分類結果が F. Serrano, A. J. Sommese-A. Van de Ven によって修正された後, M. L. Fania, Serrano により, $\mathbb{P}^1$ の 3 次被覆の場合が研究された. 1992 年に, A. Lanteri-M. Palleschi-Sommese (以下, LPS と略す) によって上述の分類問題が被覆次数と多様体の次元に関して, 以下の様に一般化された.

問題 1 有限被覆射 $\pi : A \to \mathbb{P}^n$ を持つ A を非特異超平面切断として含む偏極多様体 (X, L) を分類せよ.

ここで, 被覆射 π の次数 d が A の次元 n より真に小さい場合には, X の位相的構造が $\mathbb{P}^n$ からの制約を受け, X の Picard 群の構造が非常に単純となることが知られている. 実際, R. Lazarsfeld の定理によれば, A の Picard 群は $\mathrm{Pic}(A) \cong \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ であり, さらに Lefschetz 型定理より $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[\mathcal{H}]$ となることが分かる ($\mathcal{H}$ は ample な生成元). そこで第一段階の研究として, 問題 1 を $n > d$ となる仮定の下で考察する.
この仮定の下で, これまで得られている (X, L) の分類結果のうち, 完全と言えるものは, 被覆次数が 3 以下の場合の LPS による分類のみである. その手法は, 偏極多様体 $(X, \mathcal{H})$ を考え, その次数, Δ-種数, 断面種数の取り得る値の範囲を調べ, そして, 既知の分類結果を適用することにより (X, L) の構造を特定する方法である. 1994 年に Lanteri はこの手法を用いて $d = 4, 5$ の場合に分類を与えてはいるものの, それは未解決の部分を含んでおり, 満足の行く分類とは言えない. 第 1 章と第 2 章の研究目的は, $d = 4, 5$ の場合に, 問題 1 に対する完全な解答を与えることである.
第 1 章では, $d = 5$ の場合に (X, L) の分類を行う. このためには, LPS による手法を用いるだけでは不十分である. なぜなら, その手法を用いた際, 可能性として $\Delta(X, \mathcal{H}) = d(X, \mathcal{H}) = 1$ かつ $g(X, \mathcal{H}) = 6$ となる偏極多様体 $(X, \mathcal{H})$ を調べることが必要となるが, この不変量を持つ $(X, \mathcal{H})$ の分類は全く知られていないからである. そこで本章では, この不変量を持つ偏極多様体 $(X, \mathcal{H})$ を特定するため, 付随する次数付き環 $R := \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^0(X, i\mathcal{H})$ を考え, R の生成元とその間の関係式を Riemann-Roch の定理やコホモロジーの消滅定理等を用いて決定する. さらに, 満たすべき (X, L) の直線束の very ample 性を示すにあたり, A. Laface による手法を改良して適用することで, 最終的に次の分類定理が得られる.

定理 2 (X, L) を偏極多様体とし, $\dim X = n+1 \geq 7$ とする. 次の (I) と (II) は同値である.

(I) 5 次被覆射 $\pi : A \to \mathbb{P}^n$ を持つ非特異超平面切断 $A \in |L|$ が存在する.

(II) (X, L) は次の (i)–(v) のいずれかと同型 :

(i) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(5))$;

(ii) $(H_5, \mathcal{O}_{H_5}(1))$, ここで $H_5 \subset \mathbb{P}^{n+2}$ は 5 次超曲面 ;

(iii) $(Y_1, 5\mathcal{L})$, ここで $(Y_1, \mathcal{L})$ は次数 1 の del Pezzo 多様体 ;

(iv) $(V_{10}, \mathcal{O}_{V_{10}}(5))$, ここで $V_{10} \subset \mathbb{P}(5, 2, 1^{n+1})$ は重み付き 10 次超曲面 ;

(v) $(W_{20}, \mathcal{O}_{W_{20}}(5))$, ここで $W_{20} \subset \mathbb{P}(5, 4, 1^{n+1})$ は重み付き 20 次超曲面. □

LPS による分類結果では (i)–(iii) に相等する偏極多様体が既に現れているが, (iv) と (v) は $d = 5$ の場合になって初めて現れる. さらに, (i)–(v) の例が実際に存在することも確かめられる.

第 2 章では, $d = 4$ の場合を扱う. $h^0(A, \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)) > n + 1$ となる場合には, 被覆射 π はその完備線型系 $|\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)|$ で定義される $\mathbb{P}^{n+t}$ への射 q と適当な射影 p の合成に分解される (ただし $t \geq 1$).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q"] \arrow[dr, bend right, "\pi"'] & q(A) \subset \mathbb{P}^{n+t} \arrow[d, "p"] \\ & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

被覆次数が素数の場合には, A と $q(A)$ が双有理同値となるが, 合成数の場合には, それら多様体は双有理同値になるとは限らない. そのため, 被覆次数が合成数である場合の (X, L) の分類は, 素数の場合のそれと比べて, より複雑な解析を必要とする. $d = 4$ の場合に (X, L) の分類を行う際, 藤田隆夫により構築された Δ-種数や断面種数による偏極多様体の一般分類理論等を用いる一方, 分類の知られていない $\Delta(X, \mathcal{H}) = d(X, \mathcal{H}) = 2$ かつ $g(X, \mathcal{H}) = 3$ となる偏極多様体 $(X, \mathcal{H})$ を考察する. 本章では, この不変量を持つ $(X, \mathcal{H})$ のうち $L \cong 2\mathcal{H}$ となるものの非存在性を Double-Point Formula 等を用いて示すことで, 次の分類定理が得られる.

定理 3 (X, L) を偏極多様体とし, $\dim X = n+1 \geq 6$ とする. 次の (I) と (II) は同値である.

(I) 4 次被覆射 $\pi : A \to \mathbb{P}^n$ を持つ非特異超平面切断 $A \in |L|$ が存在する.

(II) (X, L) は次の (i)–(vii) のいずれかと同型 :

(i) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(4))$; (ii) $(H_4, \mathcal{O}_{H_4}(1))$; (iii) $(Y_1, 4\mathcal{L})$;

(iv) $(W_{12}, \mathcal{O}_{W_{12}}(4))$, ここで $W_{12} \subset \mathbb{P}(4, 3, 1^{n+1})$ は重み付き 12 次超曲面 ;

(v) $(H_2, \mathcal{O}_{H_2}(2))$;

(vi) $(H_{2,2}, \mathcal{O}_{H_{2,2}}(1))$, ここで $H_{2,2} \subset \mathbb{P}^{n+3}$ は 2 次超曲面二つの完全交叉多様体 ;

(vii) $(Y_2, 2\mathcal{L})$, ここで $(Y_2, \mathcal{L})$ は次数 2 の del Pezzo 多様体. □

前述の定理 2 と比較すると, 定理 3 には新たな場合として, (v)–(vii) が現れ, そしてそれらの例が実際に存在することが分かる. また, (vii) では, A と $q(A)$ が双有理同値とならない場合が起こる.

第 3 章は, ample な因子が Castelnuovo 多様体となる偏極多様体の構造に関するものである. 1990 年に藤田は, 直線束 L が very ample となる偏極多様体 (X, L) に対して, その断面種数の上限を Δ-種数と次数を用いて明示的に与えた. さらに, Castelnuovo による極大種数曲線の研究にちなみ, 断面種数が極大となる (X, L) を Castelnuovo 多様体と呼んだ (以下, C 多様体と略す).

C 多様体の構造自体の研究は藤田によってなされているものの, C 多様体が偏極多様体に ample な因子として含まれるか否かという観点からの研究は知られていない. このことを踏まえて, 以下の問題を提起する.

問題 4 ある直線束 $\mathcal{H}$ により $(A, \mathcal{H})$ が C 多様体となる A を ample な因子として含む偏極多様体 (X, L) を分類せよ.

(X, L) が C 多様体であれば $(A, L|_A)$ も C 多様体になること, そしてその場合には $L|_A \cong \mathcal{H}$ であることは直ちに分かる. 本章では, C 多様体 $(A, \mathcal{H})$ の次数 $d(A, \mathcal{H})$ が次元 n より真に小さい場合に, 問題 4 に対する解答を与える. そこでは, $L|_A \not\cong \mathcal{H}$ となる (X, L), したがって C 多様体とはならない (X, L) が実際に現れ, その構造が完全に決定される.

定理 5 X を非特異複素射影多様体とし, $\dim X = n + 1$ とする. また, $n > d \geq 1$ とする. このとき, 次の (I)–(III) は同値である.

(I) ample な直線束 L と非特異因子 $A \in |L|$ が存在し, ある $\mathcal{H} \in \mathrm{Pic}(A)$ により $(A, \mathcal{H})$ が次数 d の C 多様体となる.

(II) very ample な直線束 L と非特異超平面切断 $A \in |L|$ が存在し, ある $\mathcal{H} \in \mathrm{Pic}(A)$ により $(A, \mathcal{H})$ が次数 d の C 多様体となる.

(III) (X, L) は次の (i)–(iii) のいずれかと同型 :

- (i) $(W_d, \mathcal{O}_W(\ell))$, ここで $W_d \subset \mathbb{P}(\ell, 1^{n+2})$ は重み付き d 次超曲面かつ $\ell \mid d$;
- (ii) $(W_{2,d/2}, \mathcal{O}_W(\ell))$, ここで $W_{2,d/2} \subset \mathbb{P}(\ell, 1^{n+3})$ は $(2, d/2)$ 型の重み付き完全交叉多様体, $d \geq 4$, そして $\ell = 2$ または $\ell \mid d/2$;
- (iii) $(W_{2,2,2}, \mathcal{O}_W(\ell))$, ここで $W_{2,2,2} \subset \mathbb{P}(\ell, 1^{n+4})$ は $(2, 2, 2)$ 型の重み付き完全交叉多様体, $d = 8$, そして $\ell = 1$ または 2.

さらに (i)–(iii) において, $L|_A \cong \mathcal{H} \iff \ell = 1$. □

(i)–(iii) の例は実際に存在することが確かめられる. この定理から導かれる結論として, 「重み付き完全交叉ではない低次数 C 多様体を ample な因子として含む多様体 X は存在しないということ」および「低次数 C 多様体を ample な因子として含む偏極多様体は, 重み付き完全交叉に限られること」が得られる. また, この定理を導く際, 藤田による C 多様体の基本構造定理や, 偏極多様体の一般分類理論等を活用する一方, それまで構造が知られていなかった $d(A, \mathcal{H}) > 2\Delta(A, \mathcal{H})$ となる C 多様体 $(A, \mathcal{H})$ について, 仮定 $\dim A = n > d = d(A, \mathcal{H})$ の下, その分類を与える. 実際, それら C 多様体 $(A, \mathcal{H})$ が余指数 2 以下の Fano 多様体となることを導くことで, Fano 多様体の既知の分類理論を用いることが可能となり, 仮定 $n > d$ を用いて $(A, \mathcal{H})$ を 4 種に分類する.

研　究　業　績

種　類　別	題名,　　発表・発行掲載誌名,　　発表年月,　　連名者 (申請者含む)
論文	Yasuharu Amitani, *Projective manifolds with hyperplane sections being five-sheeted covers of projective space*, J. Math. Soc. Japan., Vol. **58**, No. 4 (2006), pp. 1119-1131.
論文	Yasuharu Amitani, *Projective manifolds with hyperplane sections being four-sheeted covers of projective space*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math.Sci., Vol. **82** (2006), pp. 8-13.
総説	網谷 泰治, *Classification of projective manifolds containing four-sheeted covers of projective space as very ample divisors*, 京都大学数理解析研究所講究録 No. 1490, 2006 年 5 月, pp. 11–25.
総説	網谷 泰治, *Projective manifolds with hyperplane sections being five-sheeted covers of projective space*, 2005 代数幾何学シンポジューム 記録, 於 兵庫県立城崎大会議館, pp. 19–28.
総説	網谷 泰治, *On projective manifolds with hyperplane sections being five-sheeted covers of projective space*, 代数幾何と位相幾何の周辺, 2004 年 11 月 29 日〜 12 月 2 日, 於 早稲田大学理工学部, pp. 202–207.
講演	*Polarized manifolds containing Castelnuovo varieties as very ample divisors*, シンポジューム「代数曲線論」, 神奈川大学, 2006 年 12 月.
講演	*An introdution to classification theory of manifolds with special hyperplane sections*, 都留ワークショップ, 都留文科大学, 2006 年 9 月.
講演	*Projective manifolds admitting a four-sheeted cover of* $\mathbb{P}^n$ *among their hyperplane sections*, 日本数学会 代数学分科会, 大阪市立大学, 2006 年 9 月.

研　究　業　績

種　類　別	題名,　　発表・発行掲載誌名,　　発表年月,　　連名者 (申請者含む)
講演	*On manifolds containing Castelnuovo varieties as very ample divisors*, The Eighth Meeting of the Brazilian Group in Commutative Algebra and Algebraic Geometry (ALGA-2006), Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Brazil, 2006 年 7 月.
講演	*Projective manifolds with four-sheeted covers of $\mathbb{P}^n$ as hyperplane sections*, 代数幾何と位相幾何の周辺, 京都大学数理解析研究所, 2006 年 1 月.
講演	*Projective manifolds with hyperplane sections being five-sheeted covers of projective space*, 城崎代数幾何シンポジューム, 兵庫県立大会議館, 2005 年 10 月.
講演	*Projective manifolds with hyperplane sections being five-sheeted covers of projective space*, 日本数学会 代数学分科会, 岡山大学, 2005 年 9 月.
講演	*Projective manifolds with hyperplane sections being five-sheeted covers of* $\mathbb{P}^n$, The American Mathematical Society, Summer Research Institute on Algebraic Geometry, University of Washington, Seattle, USA, 2005 年 8 月.
講演	*On projective manifolds with hyperplane sections being five-sheeted covers of* $\mathbb{P}^n$, 代数幾何ミニワークショップ・仙台 2005, 東北大学, 2005 年 1 月.
講演	*On projective manifolds with hyperplane sections being five-sheeted covers of* $\mathbb{P}^n$, シンポジューム・代数幾何と位相幾何の周辺, 早稲田大学, 2004 年 12 月.
その他 (論文)	Yasuharu Amitani, *On the structure of polarized manifolds containing Castelnuovo varieties as very ample divisors*, (プレプリント).

研　究　業　績

種　類　別	題名,　　発表・発行掲載誌名,　　発表年月,　　連名者 (申請者含む)
その他 (セミナー)	豊富な因子がCastelnuovo 多様体となる偏極多様体の構造について, 代数幾何講演会, 埼玉大学, 2006 年 11 月.
その他 (セミナー)	Castelnuovo 多様体を非常に豊富な因子として含む偏極多様体の分類, 数理科学セミナー, 高知大学, 2006 年 11 月.
その他 (セミナー)	*Classification of polarized manifolds containing low degree covers of* $\mathbb{CP}^n$ *as hyperplane sections*, トポロジー・幾何セミナー, 広島大学, 2005 年 12 月.
その他 (セミナー)	*Projective manifolds containing* 5*-sheeted covers of projective space as hyperplane sections*, 複素幾何セミナー, 首都大学東京, 2005 年 11 月.
その他 (セミナー)	*Projective manifolds with hyperplane sections being four-sheeted covers of* $\mathbb{P}^n$, 特異点セミナー, 日本大学, 2005 年 11 月.
その他 (セミナー)	*Projective manifolds with hyperplane sections being five-sheeted covers of projective space*, 特異点セミナー, 日本大学, 2005 年 4 月.
その他 (セミナー)	*On projective manifolds with hyperplane sections being five-sheeted covers of projective space*, 代数幾何・複素幾何セミナー, 大阪大学, 2005 年 1 月.