早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 審 査 報 告 書 (案)

論　文　題　目

Classification of polarized manifolds admitting a low degree cover of projective space among their hyperplane sections

射影空間の低次数被覆空間を超平面切断として含む
偏極多様体の分類

申　請　者

網谷 泰治
Yasuharu AMITANI

数理科学専攻 代数幾何学研究

2007 年 2 月

偏極多様体 (X,L) の代数幾何的研究では一般に, ample な因子 $A \in |L|$ の性質が多様体 X のそれに強く反映すると考えられており, A が与えられた性質を持つ偏極多様体 (X,L) の分類問題に関して様々な研究がなされている. ここで, 偏極多様体 (X,L) とは compact 複素多様体 X とその上の ample 直線束 L の組であり, $|L|$ は L により定まる完備線形系 (すなわち L の大域切断の零点集合として定まる有効因子のなす集合) を表す. L が very ample ならば因子 $A \in |L|$ は (X,L) の超平面切断と呼ばれる: 実際, L の大域切断を用いて X を射影空間 $\mathbb{P}^N$ へ埋め込んだ際, A は $\mathbb{P}^N$ のある超平面 H と X の交わり $X \cap H$ に他ならない.

本論文において申請者は, 超平面切断が射影空間の (分岐) 被覆空間となる偏極多様体について, 被覆次数が 4,5 の場合に詳細な分類結果を与えている. また, ample 因子が Castelnuovo 多様体となる偏極多様体の分類問題を提起し, Castelnuovo 多様体の次数が低い場合に結果を与えている. 本論文は全 3 章で構成されており, 第 1, 2 章で前者を, 第 3 章で後者を扱っている. 以下, 各章の研究概要を記しその評価を述べる.

第 1, 2 章において申請者は, 次の問題を考察している:

問題 1 (A. Lanteri-M. Palleschi-A. Sommese) 有限被覆射 $\pi : A \to \mathbb{P}^n$ を持つ A を非特異超平面切断として含む偏極多様体を分類せよ.

この問題の起源は 19 世紀末のイタリア学派による射影曲面の構造研究に遡る: 端緒は G. Castelnuovo による超楕円曲線 (すなわち $\mathbb{P}^1$ の 2 次被覆となる代数曲線) を超平面切断として含む射影曲面の分類問題の研究である. 1980 年代後半にその分類結果が F. Serrano, Sommese-A. Van de Ven によって修正された後, M. L. Fania, Serrano により $\mathbb{P}^1$ の 3 次被覆の場合が研究された. 1992 年には Lanteri-Palleschi-Sommese (以下, LPS と略す) により, 一般次元への拡張として問題 1 が提起され, 被覆次数 $d = 2,3$ の場合に対する (X,L) の分類が与えられた. $d = 4,5$ の場合に対しては 1994 年に, Lanteri による分類の試みはあるが, LPS の手法でカバーできない部分が未解決の形で残されていた. ここで LPS の手法とは, X と $\mathscr{H}|_A = \pi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1)$ となる X 上の直線束 $\mathscr{H}$ からなる偏極多様体 $(X,\mathscr{H})$ について, その次数 $d(X,\mathscr{H})$, Δ-種数 $\Delta(X,\mathscr{H})$, 断面種数 $g(X,\mathscr{H})$ の取り得る値を調べ, 既知の分類結果を適用することにより (X,L) の構造を特定するというものである. ただし, $d(X,L) := (L^{n+1})_X$, $\Delta(X,L) := n+1+d(X,L)-h^0(X,L)$, $g(X,L) := 1+\frac{1}{2}((K_X+nL).L^n)_X$ である (K_X は X の標準直線束, $\dim X = n+1$ とする). $d \leq 3$ に対する問題 1 は LPS の手法により解決されたが, $d \geq 4$ の場合は, $(X,\mathscr{H})$ に対する上記不変量の取り得る値が既知の分類結果の適用範囲を超えてしまい, 実際, 上述の Lanteri の試みではその部分が未解決のまま残されていた.

第 1 章において申請者は, $d = 5$ の場合に (X,L) の分類を行い, それまで未解決だった部分を明らかにして次の結果を得ている:

定理 1 偏極多様体 (X,L) に対して, $\dim X = n+1 \geq 7$ ならば, 次の (I) と (II) は同値:

(I) 5 次被覆射 $\pi : A \to \mathbb{P}^n$ を持つ非特異超平面切断 $A \in |L|$ が存在する.

(II) (X,L) は次の (i)–(v) のいずれかと同型:

- (i) $(\mathbb{P}^{n+1}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}}(5))$; (ii) $(H_5, \mathscr{O}_{H_5}(1))$, ここで $H_5 \subset \mathbb{P}^{n+2}$ は 5 次超曲面;
- (iii) $(Y_1, 5\mathscr{L})$, ここで $(Y_1,\mathscr{L})$ は次数 1 の del Pezzo 多様体;
- (iv) $(W_{10}, \mathscr{O}_{W_{10}}(5))$, ここで $W_{10} \subset \mathbb{P}(5,2,1^{n+1})$ は重み付き 10 次超曲面;
- (v) $(W_{20}, \mathscr{O}_{W_{20}}(5))$, ここで $W_{20} \subset \mathbb{P}(5,4,1^{n+1})$ は重み付き 20 次超曲面. □

LPS による $d = 2,3$ の場合の分類結果と比較すると, 新たに 2 種の偏極多様体 (iv), (v) が現れることがわかる. さらにそれらの例が実際に存在することも確かめられている.

$d=5$ に対する問題 1 解決のネックのひとつを具体的に述べると, それは従来, 分類の知られていなかった $\Delta(X,\mathscr{H})=d(X,\mathscr{H})=1$ かつ $g(X,\mathscr{H})=6$ となる偏極多様体 $(X,\mathscr{H})$ の構造を特定する点にある. これに対し申請者は, 偏極多様体に付随して定義される次数付き環

$$R(X,\mathscr{H})=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\Gamma(X,i\mathscr{H})$$

の環論的性質に着目した. そして問題となる場合について, 生成元の次数など $R(X,\mathscr{H})$ の構造を Riemann-Roch の定理等を用いて解析することにより, $R(X,\mathscr{H})$ が Cohen-Macaulay 環となることを証明している. これによりコホモロジーの消滅定理を用いることが可能となり, 結果, (X,L) は (v) の形の重み付き超曲面となることを導き出している. また, 得られた直線束 L の very ample 性を示すために, A. Laface による手法の改良を行っている. この結果, 申請者は $d=5$ に対する問題 1 を必要十分の形で解決することに成功している.

第 2 章では $d=4$ の場合を扱い, 次の分類定理を得ている:

定理 2 偏極多様体 (X,L) に対して, $\dim X=n+1\geq 6$ ならば, 次の (I) と (II) は同値:

(I) 4 次被覆射 $\pi : A\to\mathbb{P}^n$ を持つ非特異超平面切断 $A\in|L|$ が存在する.

(II) (X,L) は次の (i)–(vii) のいずれかと同型:

- (i) $(\mathbb{P}^{n+1},\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(4))$; (ii) $(H_4,\mathscr{O}_{H_4}(1))$; (iii) $(Y_1,4\mathscr{L})$;
- (iv) $(W_{12},\mathscr{O}_{W_{12}}(4))$, ここで $W_{12}\subset\mathbb{P}(4,3,1^{n+1})$ は重み付き 12 次超曲面;
- (v) $(H_2,\mathscr{O}_{H_2}(2))$;
- (vi) $(H_{2,2},\mathscr{O}_{H_{2,2}}(1))$, ここで $H_{2,2}\subset\mathbb{P}^{n+3}$ は (2,2) 型完全交叉多様体;
- (vii) $(Y_2,2\mathfrak{L})$, ここで $(Y_2,\mathfrak{L})$ は次数 2 の del Pezzo 多様体. □

先の定理 1 と比較すると, 新たに 3 種の偏極多様体 (v)–(vii) が現れることがわかる. そしてそれらの例が実際に存在することが確かめられている.

この次数 $d=4$ の場合の分類では, d が合成数であることにより新たな困難が生じている. それは, 被覆射 $\pi : A\to\mathbb{P}^n$ を完備線型系 $|\pi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1)|$ により定義される射影空間 $\mathbb{P}^{n+t}(t\geq 0)$ への射 q と適当な射影 p の合成に分解した際, d が素数の場合に成立した A と $q(A)$ との双有理同値性が必ずしも成り立たない点にある:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q"] \arrow[dr, bend right, "\pi"'] & q(A)\subset\mathbb{P}^{n+t} \arrow[d, "p"] \\ & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

実際, 定理 2 (vii) では, A と $q(A)$ が双有理同値とならない場合が起きる.

これに対して申請者は, 偏極多様体の一般分類理論等を用いる一方, 第 1 章とは異なる手法により定理 2 を導いている: 分類を試みる際に鍵となるのは, $\Delta(X,\mathscr{H})=d(X,\mathscr{H})=2, g(X,\mathscr{H})=3$ かつ $L\cong 2\mathscr{H}$ となる偏極多様体 $(X,\mathscr{H})$ が存在しないことを示す点である. しかし, これらの不変量を持つ $(X,\mathscr{H})$ の分類は知られていない. そこで申請者は, Double-Point Formula 等を用いて解析することにより, L の very ample 性に矛盾する結論を導き, 結果 $(X,\mathscr{H})$ の非存在性を示している.

第 3 章では申請者は, ample 因子 $A\in|L|$ が Castelnuovo 多様体となる偏極多様体 (X,L) の分類問題を扱っている. 1990 年, 藤田隆夫は, 直線束 $\mathscr{H}$ が very ample となる偏極多様体 $(A,\mathscr{H})$ に対して, その断面種数 $g(A,\mathscr{H})$ の上限を Δ-種数 $\Delta(A,\mathscr{H})$ と次数 $d(A,\mathscr{H})$ を用いて明示的に与えた. さらに, Castelnuovo による極大種数曲線の研究にちなみ, 断面種数が極大となる $(A,\mathscr{H})$ を Castelnuovo 多様体と呼んだ.

問題 1 に対する研究を通じて申請者は, ample 因子 A が与えられた性質を持つ偏極多様体の分類問題では, A が Castelnuovo 多様体となる場合を考察することが重要であると気付いた. これが本研究の動機となっている. 申請者は第 3 章においてまず, 次の問題を提起している:

問題 2 (網谷泰治) ある直線束 $\mathscr{H}$ により $(A,\mathscr{H})$ が Castelnuovo 多様体となる A を ample 因子として含む偏極多様体を分類せよ.

Castelnuovo 多様体の構造自体の研究は藤田によってなされていたが, ample 因子が Castelnuovo 多様体となるか否かという視点からの研究はそれまでなされていなかった. よってこれは申請者独自の新しい視点といえよう. さらに申請者は, 次の結果を得ている:

定理 3 偏極多様体 (X,L) と $\dim X-1=n>d\geq 1$ となる整数 d に対して, 次の (I)–(III) は同値:

(I) ある $\mathscr{H}\in \mathrm{Pic}(A)$ により $(A,\mathscr{H})$ が次数 d の Castelnuovo 多様体となる非特異因子 $A\in|L|$ が存在する;

(II) L は *very ample* であり, かつ, ある $\mathscr{H}\in \mathrm{Pic}(A)$ により $(A,\mathscr{H})$ が次数 d の Castelnuovo 多様体となる非特異因子 $A\in|L|$ が存在する;

(III) (X,L) は次の (i)–(iii) のいずれかと同型:

- (i) $(W_d,\mathscr{O}_W(\ell))$, ここで $W_d\subset\mathbb{P}(\ell,1^{n+2})$ は重み付き d 次超曲面かつ $\ell\mid d$;
- (ii) $(W_{2,d/2},\mathscr{O}_W(\ell))$, ここで $W_{2,d/2}\subset\mathbb{P}(\ell,1^{n+3})$ は $(2,d/2)$ 型の重み付き完全交叉多様体, $d\geq 4$, そして $\ell=2$ または $\ell\mid d/2$;
- (iii) $(W_{2,2,2},\mathscr{O}_W(\ell))$, ここで $W_{2,2,2}\subset\mathbb{P}(\ell,1^{n+4})$ は $(2,2,2)$ 型重み付き完全交叉多様体, $d=8$, そして $\ell=1$ または 2.

さらに (i)–(iii) において, $L|_A\cong\mathscr{H}\iff\ell=1$. □

(X,L) が Castelnuovo 多様体ならば $(A,L|_A)$ も Castelnuovo 多様体になること, そしてその場合には $L|_A\cong\mathscr{H}$ であることは直ちにわかるので, 定理 3 から, Castelnuovo 多様体とはならない (X,L) が現れることがわかる. 実際, $\ell\neq 1$ となる (i)–(iii) の例が存在することが確かめられている.

この定理の結論として,「低次数 Castelnuovo 多様体を ample 因子として含む偏極多様体は重み付き完全交叉に限られる」が導かれる.『重み付き完全交叉多様体の特徴付け』という問題意識からするとこれは重要な結論といえる.

定理 3 の証明において特筆すべき点のひとつは, それまで構造が知られていなかった $d(A,\mathscr{H})>2\Delta(A,\mathscr{H})$ となる Castelnuovo 多様体 $(A,\mathscr{H})$ について, 仮定 $\dim A=n>d=d(A,\mathscr{H})$ の下その分類を与えていることである. 申請者はそのために, それら Castelnuovo 多様体が余指数 2 以下の Fano 多様体となるという結論を導いている. そのことにより, Fano 多様体の分類理論が適用可能となり, 申請者は問題となる Castelnuovo 多様体の分類に成功している.

以上述べた通り, $d=4,5$ に対する問題 1 解決において申請者が導入したいくつかの手法には, 問題 1 に対する従来の研究においては見られなかった新しいアイディアが含まれており, 申請者の研究のオリジナリティーの高さが示されている. また, Castelnuovo 多様体が ample 因子として偏極多様体に含まれるか否かという新たな視点からの研究には申請者の高い独創性が認められ, さらに, 問題 2 解決においては申請者のもつ豊富な専門知識と高い技量が発揮されている. 申請者の研究がもたらした新たな手法, そして, 新たな方向性は, 今後の偏極多様体の分類理論の発展に大きく貢献するものと思われる. よって, 本論文は博士 (理学) の学位論文としてふさわしいものと認める.

2007 年 2 月

審査員

(主査)	早稲田大学教授	理学博士 (早稲田大学)	楫　　元
(副査)	東京工業大学教授	理学博士 (東京大学)	藤田　隆夫
	早稲田大学教授	理学博士 (早稲田大学)	近藤　庄一
	早稲田大学教授	理学博士 (早稲田大学)	前田　英敏