

WIAS Discussion Paper No.2012-001

計算の効率性に着目した
周回トリップチェーンのための空間相互作用モデル

**Spatial Interaction Model for Circular Trip-Chaining Behavior
Focusing on the Calculation Efficiency**

August 6, 2012

本間裕大（早稲田大学高等研究所）

Yudai HONMA
Waseda Institute for Advanced Study, Waseda University



1-6-1 Nishiwaseda, Shinjuku-ku, Tokyo 169-8050, Japan
Tel: 03-5286-2460 ; Fax: 03-5286-2470

計算の効率性に着目した 周回トリップチェーンのための空間相互作用モデル^{*1}

抄 録

本研究は、空間相互作用モデルの本源とも言うべきエントロピー最大化モデルに対して、連鎖的なトリップという観点から一般化を行うものである。複数回のトリップによって構成される“周回トリップチェーン”のための空間相互作用モデルを提案する。このような周回トリップチェーンの分布交通量を推定するための一手法として、本研究では、エントロピー最大化概念・非集計行動モデルに基づく新たなモデルを提案する。また、提案した周回トリップチェーンのための空間相互作用モデルの、効率的な計算法についても議論する。また、これらの数学的展開を通し、周回トリップチェーンのためのエントロピーモデル、マルコフモデル、そして非集計行動モデルの繋がりも明らかとなる。この一連の議論は、本研究で提案するエントロピーモデルの理論的な位置付けを明確にするのみならず、従来から用いられてきたマルコフモデルや非集計行動モデルに対する新たな知見も与える。マルコフモデルを周回行動へ適用する際に、その理論的根拠が脆弱であることが、たびたび指摘されている。また、非集計行動モデルでは、周回移動という自由度の高い行動を取り扱う結果、選択肢集合が膨大となることが問題となっている。これらの課題に対し、本研究における議論を通して、幾つかの仮定の下では互いの問題点をうまく回避できることが明らかとなる。

JEL classification: L91, L97

Keywords: 空間相互作用モデル, 周回トリップチェーン, エントロピーモデル, 非集計行動モデル, マルコフモデル

Corresponding author. Tel.: +81-3-5286-2146

E-mail address: yudai@aoni.waseda.jp

*1

本研究は、科学技術人材育成費補助金(テニユアトラック普及・定着事業)『早稲田高等研究所テニユア・トラックプログラム』(課題番号:A07167200)の補助を受けました。

1 はじめに

人やものの流れは，我々の日常を振り返るまでも無く，都市を成立させるための根幹に関わるものである．試しに具体的な例をいくつか挙げてみても，通勤や通学の流れ，商品の流通，郵便，各種の情報流等々枚挙に暇が無い．それゆえに，上記のような空間を隔てて生じる流れ（流動）を，簡便な数学式によって記述する試みは古くから行われてきた．

このような“空間相互作用”に関する一連の研究において，決定的に重要な役割を果たしたモデルの一つに Wilson のエントロピーモデル [19, 20] が挙げられる．Wilson は，“最も実現しやすい状態”を前提とするエントロピー最大化概念に依拠した空間相互作用モデルを提案し，物理学とのアナロジーで用いられていた重力モデルに対して理論的根拠を与えた．その後，エントロピーモデルは先験確率の考慮や，制約条件の一般化など幅広い展開を見せることになる [13]．現在では，この他にも膨大な量の空間相互作用モデルが提案・分析されているが，その多くは，エントロピーモデルの誕生を契機としていると言っても過言ではないだろう．

本研究は，この空間相互作用モデルの本源とも言うべきエントロピー最大化モデルに対して，連鎖的なトリップという観点から一般化を行うものである．具体的には，“発生から集中”という通常想定される単一のトリップのみならず，複数回のトリップによって構成される“周回トリップチェーン”のための空間相互作用モデルを提案する．本研究のモデルは，例えば「会社から自宅への帰宅の途中で店舗に立ち寄るトリップチェーン」や「複数の観光地を連続的に訪問する周回トリップチェーン」といった，よくある交通行動の数学的記述を可能とする．

周回トリップチェーンのためのモデルは，交通行動分析の分野で精力的に研究されており，我が国では佐佐木 [15] が草分け的存在である．初期のトリップチェーン分析にはマルコフ連鎖モデルが適用されることが多く [5]，時間軸の導入 [9]，過去従属型のマルコフモデル [6] など，様々な発展形がある．一方，非マルコフ系のモデルも開発されてきており，ランダム効用理論に基づくモデル [3]，大規模なシミュレーションによる分析 [4] などが行われている．

このような周回トリップチェーンの分布交通量を推定するための一手法として，本研究では，まずエントロピー最大化概念に基づく新たなモデルを提案する．周回トリップチェーンを明示的に考慮したエントロピーモデルは，過去にも幾つか提案されているが [10, 14, 17]，取り扱うトリップが限定的である点に課題

が残る．本研究のモデルによって，周回トリップチェーン行動に対し，統計力学的概念に基づく新たな説明原理が与えられることになる．また，古典的なエントロピーモデルと同様，制約条件の有無によって，周回トリップチェーンのための無制約型，発生制約型，集中制約型，そして二重制約型モデルが全て整備されることになる．本研究で示す二重制約型モデルのように，目的ゾーン同士での行き来を考慮した観測量の制約を課した上で，モデルを記述している既存研究は見当たらない．これは，任意回の訪問が混在することによる数学的対処，同一ゾーン集合内での観測量の計算，さらには調整係数の導出が煩雑であるためと思われる．これらの問題に対し，本研究では，調整係数の再帰的定義と先験確率の考慮によって，明解なる定式化が可能であることを示した．

また，提案した周回トリップチェーンのための空間相互作用モデルの，効率的な計算法についても議論する．具体的には，先験確率と移動コストの設定がある条件を満たすとき，各ゾーンの調整係数，都市内における総移動コストの導出が，逆行列計算に帰着されることを示す．これは，周回トリップチェーンのマルコフ性に着目したものであり，Akamatsu [1] による経路選択モデルのマルコフ分解のアイデアを援用したものとなっている．また，これらの数学的展開を通し，周回トリップチェーンのためのエントロピーモデル，マルコフモデル，そして非集計行動モデルの繋がりも明らかとなる．この一連の議論は，本研究で提案するエントロピーモデルの理論的な位置付けを明確にするのみならず，従来から用いられてきたマルコフモデルや非集計行動モデルに対する新たな知見も与える．マルコフモデルを周回行動へ適用する際に，その理論的根拠が脆弱であることが，たびたび指摘されている [8]．また，非集計行動モデルでは，周回移動という自由度の高い行動を取り扱う結果，選択肢集合が膨大となることが問題となっている [7]．これらの課題に対し，本研究における議論を通して，幾つかの仮定の下では互いの問題点をうまく回避できることが明らかとなる．

論文の構成は以下の通りである．第2章では，エントロピー最大化の概念に基づき周回トリップチェーンを推定するための新たな手法を提案する．周回トリップチェーンは，多くの場合，一日という時間単位内で完結するものであり，人々の移動行動の集計単位として，最も標準的なものであると考えられる．以下では，古典的なエントロピーモデルを周回トリップチェーンを取り扱えるよう拡張し，その分布交通量を推定するための枠組みを示す．また，非集計ロジットモデルとの等価性についても議論する (第3章)．第4章では，周回トリップチェーンのための二重制約型エントロピーモデルにおけるパラメータ A_i, B_j, γ がある

条件の下では，極めて効率的に計算できることを示す*2．第 2.4 章では，調整係数の関係式を直接用いた逐次計算法について説明をした．これは，どのような先験確率を想定しても，パラメータを決定できる反面，計算時間が長大になるという問題点を持っている．この問題点を回避するため，以下では計算における仮定を述べた後， A_i, B_j ，そして都市全体での総移動コストの効率的な計算法について説明する．また，周回トリップチェーンのためのエントロピーモデルとマルコフモデル，さらには非集計行動モデルとの関係についても議論を行う（第 5 章）．

2 定式化

2.1 周回トリップチェーンの定義

具体的な議論に入る前に，まず周回トリップチェーンについて幾つかの定義を行う．本研究では，(i) ある発生ゾーンを出発し，(ii) いくつかの目的ゾーンを連続的に訪問した後，(iii) 元の発生ゾーンへと戻る一連の移動行動を，周回トリップチェーンと定義する．このとき，発生ゾーンから目的ゾーンへのトリップを出発トリップ，目的ゾーンから次の目的ゾーンへのトリップを周遊トリップ，目的ゾーンから元の発生ゾーンへのトリップを帰宅トリップと，それぞれ呼ぶことにする．すなわち，ある 1 つの周回トリップチェーンは，1 回の出発トリップ，(訪問した目的ゾーンの総数 -1) 回の周遊トリップ，そして 1 回の帰宅トリップから成る．

古典的な空間相互作用モデルでは，発生ゾーン i から目的ゾーン j へのトリップを ij と記述し，そのようなトリップを行う人数を t_{ij} と表現していた．これに倣い，本研究でも発生ゾーンの添字として i ，目的ゾーンの添字として j を導入する．その上で，

$$\begin{aligned} \text{発生ゾーン } i &\rightarrow \text{目的ゾーン } j_1 \rightarrow \text{目的ゾーン } j_2 \rightarrow \cdots \\ &\rightarrow \text{目的ゾーン } j_\Lambda \rightarrow \text{発生ゾーン } i \end{aligned}$$

なる周回トリップチェーンを $i[j_1, j_2, \dots, j_\Lambda]$ と表し，そのような移動行動を行う人数を $t_{i[j_1, j_2, \dots, j_\Lambda]}$ で表現する．ここで Λ は，訪問した目的ゾーンの総数（以後，総訪問ゾーン数と呼ぶ）であり，周回トリップチェーンによって Λ の値は異

*2 集中制約型モデルの場合もほぼ同様の議論が可能である．

なることに注意されたい．また簡略化のため，以後の定式化の際には，

$$j \stackrel{\text{def}}{=} [j_1, j_2, \dots, j_\Lambda] \quad (1)$$

と定義し，周回トリップチェーンを t_{ij} と記述することもある．すなわち j は Λ 次元ベクトルであり，言うなれば，複数目的ゾーンの“訪問の仕方”を記述したものである．図1に周回トリップチェーンの一例を示す．

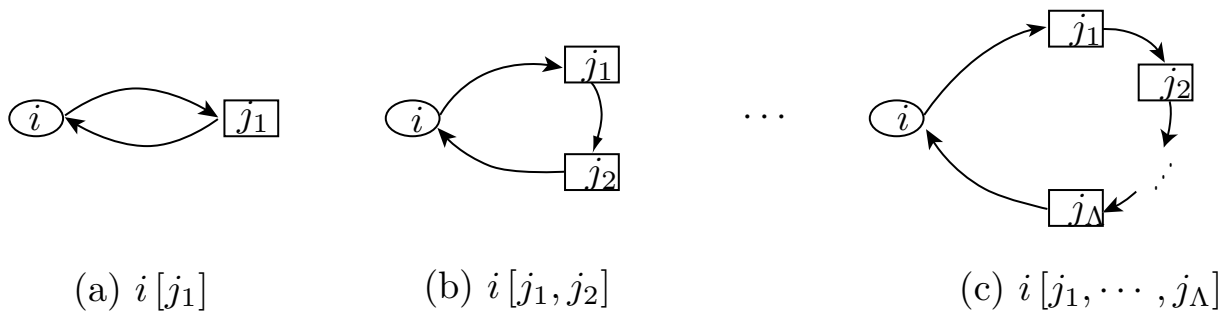


図1 周回トリップチェーンの一例

2.2 二重制約型モデル

I 個の発生ゾーン $i (i = 1, 2, \dots, I)$ と， J 個の目的ゾーン $j (j = 1, 2, \dots, J)$ を導入する．ここで想定する移動は，発生ゾーンを出発し，いくつかの目的ゾーンを訪問した後に，元の発生ゾーンへと戻る周回トリップチェーンである．便宜上，一回の周回トリップチェーンで訪問できる目的ゾーン数は最大でも L ヶ所とする．ここで

$$\begin{aligned} & \text{発生ゾーン } i \rightarrow \text{目的ゾーン } j_1 \rightarrow \dots \rightarrow \\ & \text{目的ゾーン } j_l \rightarrow \dots \rightarrow \text{目的ゾーン } j_\Lambda \rightarrow \text{発生ゾーン } i \end{aligned}$$

なる経路に沿った周回トリップチェーンを t_{ij} と記述することにし，そのような周回トリップチェーンを行う人数を t_{ij} で表現する．ただし， $j = [j_1, j_2, \dots, j_\Lambda]$ の Λ 次元ベクトルであり $\Lambda \leq L$ を満たす．定義から明らかなように， j は目的ゾーンの訪問の仕方を表したものに他ならない．

発生ゾーン i からの周回トリップチェーン数を O_i ，目的ゾーン j への訪問者数

を D_j とし, t_{ij} について以下の発生・集中制約条件を仮定する:

$$O_i = \sum_{j \in \Phi} t_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, I), \quad (2)$$

$$D_j = \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{\{j \in \Phi | j_l = j\}} t_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, J). \quad (3)$$

ここで

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} [\text{旅行者が取り得る選択肢 } j \text{ の集合}] \quad (4)$$

である.

(2), (3) について説明する. まず発生制約条件であるが, これは全ての訪問の仕方について足し合わせれば良い. これを表現しているのが (2) の $\sum_{j \in \Phi}$ であり, これによって発生ゾーン i からのトリップチェーン数が過不足なく求められる. 一方, 集中制約条件 (3) の場合, 若干煩雑な計算を行う必要がある. すなわち, 目的ゾーン j への訪問者数を導出するためには

$$\begin{aligned} & \text{「1ヶ所目の訪問先として目的ゾーン } j \text{ を選択した人数」} \\ & + \text{「2ヶ所目の訪問先として目的ゾーン } j \text{ を選択した人数」} \\ & + \dots + \text{「} L \text{ヶ所目の訪問先として目的ゾーン } j \text{ を選択した人数」} \end{aligned}$$

を計算する必要がある. いま l ヶ所目の訪問先として目的ゾーン j を選択したならば, $j_l = j$ が成立しているはずである. したがって,

$$\text{「} l \text{ヶ所目の訪問先として目的ゾーン } j \text{ を選択した人数」} = \sum_{i=1}^I \sum_{\{j \in \Phi | j_l = j\}} t_{ij}$$

で計算される. これを $l = 1$ から $l = L$ まで足し上げれば, 目的ゾーン j への総訪問者数が導かれる. 以上のことを記述したものが (3) に他ならない.

次に都市全体での総移動コストに関する制約を考える. 本研究では, 周回トリップチェーン ij の1トリップチェーン当りコストを c_{ij} で与え, t_{ij} は以下の総コスト制約も満たすものと仮定する:

$$C = \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} t_{ij} c_{ij}. \quad (5)$$

(5) において, $\sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi}$ はあらゆる発生ゾーンと訪問の仕方について足し合わせていることに他ならず, これによって考え得る周回トリップチェーンを全て網羅している.

周回トリップチェーンのためのエントロピーモデルを構築するにあたり, ある分布交通量 $\{t_{ij}\}$ が出現する確率 $w(\{t_{ij}\})$ を導出したい. そのための準備として, まず周回トリップチェーン ij の先験確率を p_{ij} と定義する. ただし,

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} p_{ij} = 1 \quad (6)$$

とする. 周回トリップチェーン・モデルの目的関数は, 直行トリップ・モデルの目的関数を, 全ての周回トリップチェーンについて掛け合わせるように記述し直すことで定義できる. これは $\prod_{i=1}^I \prod_{j \in \Phi}$ なる演算に他ならないので, つまるところ分布交通量 $\{t_{ij}\}$ の出現確率 $w(\{t_{ij}\})$ は

$$w(\{t_{ij}\}) = \frac{T!}{I \prod_{i=1}^I \prod_{j \in \Phi} t_{ij}!} \prod_{i=1}^I \prod_{j \in \Phi} (p_{ij})^{t_{ij}} \quad (7)$$

で表されることになる. なお, T は都市全体での総トリップチェーン数であり, これは次式の通り:

$$T = \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} t_{ij} \left(= \sum_{i=1}^I O_i < \sum_{j=1}^J D_j \right). \quad (8)$$

この総トリップチェーン数 T と発生・集中量の関係については, 少し説明を加える必要がある. 古典的な空間相互作用モデルでは, 一般に, 発生ゾーン, 目的ゾーン, (さらには立ち寄りゾーン) それぞれに関する制約条件を足し挙げたものが総トリップチェーン数 T と一致していた. これに対して, (8) では集中量 D_j を足し合わせたものが総トリップチェーン数を上回っている. これは, 本研究の周回トリップチェーンでは一回のトリップチェーンで複数ヶ所の目的ゾーンを訪問することが考慮されているために他ならない.

まずは，周回トリップチェーンのための二重（発生・集中）制約型エントロピーモデルを導出しよう．そこで，目的関数 (7) を発生・集中制約条件 (2)，(3)，および総コスト制約 (5) の下で最大化することを試みる．ここで，見通しを良くするため，直行トリップのためのエントロピーモデルと同様，(7) の対数を取ったもの $\ln w(\{t_{ij}\})$ を計算すると，これはスターリングの近似公式を用いて

$$\begin{aligned} \ln w(\{t_{ij}\}) &= \ln T! - \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} t_{ij}! + \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} (t_{ij} \ln p_{ij}) \\ &\doteq \ln T! - \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} (t_{ij} \ln t_{ij} - t_{ij}) + \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} (t_{ij} \ln p_{ij}) \quad (9) \end{aligned}$$

となる．よって，最適化問題のためのラグランジュ関数は以下のように記述されることになる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{t_{ij}\}; \lambda, \mu, \gamma) &= \ln T! - \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} (t_{ij} \ln t_{ij} - t_{ij}) + \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} (t_{ij} \ln p_{ij}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left(O_i - \sum_{j \in \Phi} t_{ij} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^J \mu_j \left(D_j - \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{\{j \in \Phi | j_l = j\}} t_{ij} \right) \\ &\quad + \gamma \left(C - \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} t_{ij} c_{ij} \right). \quad (10) \end{aligned}$$

これにより，極値のための条件は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{ij}} = 0 \quad (11)$$

と (2)，(3) ならびに (5) となる．それぞれの t_{ij} について，制約条件に登場する回数は，発生制約条件で 1 回，集中制約条件で Λ 回，そして総移動コスト制約条件で 1 回の計 $\Lambda + 2$ 回である．したがって，ラグランジュ関数 \mathcal{L} を t_{ij} で微分し

たものは

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{ij}} = -\ln t_{ij} + \ln p_{ij} - \lambda_i - \mu_{j_1} - \cdots - \mu_{j_\Lambda} - \gamma c_{ij} \quad (12)$$

となる。(11), (12) を t_{ij} について解くと, 以下の解が得られる:

$$t_{ij} = p_{ij} \exp[-\lambda_i - \mu_{j_1} - \cdots - \mu_{j_\Lambda} - \gamma c_{ij}]. \quad (13)$$

これを発生制約条件 (2) に代入・変形すると

$$O_i = \exp[-\lambda_i] \sum_{j \in \Phi} p_{ij} \exp[-\mu_{j_1} - \cdots - \mu_{j_\Lambda} - \gamma c_{ij}]. \quad (14)$$

また, 集中制約条件 (3) については

$$D_j = \exp[-\mu_j] \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{\{j \in \Phi | j_l = j\}} p_{ij} \exp[-\lambda_i - \mu_{j_1} - \cdots - \mu_{j_{l-1}} - \mu_{j_{l+1}} - \cdots - \mu_{j_\Lambda} - \gamma c_{ij}] \quad (15)$$

となる. すなわち発生・集中制約条件ともに, 当該ゾーンのラグランジュ乗数に関する共通因数で (14), (15) の如く統合できることが分かる. したがって便宜上

$$A_i = \frac{\exp[-\lambda_i]}{O_i}, \quad (16)$$

$$B_j = \frac{\exp[-\mu_j]}{D_j} \quad (17)$$

と置くと, 求める解は次式のように記述される:

$$t_{ij} = A_i O_i \left(\prod_{l=1}^{\Lambda} B_{j_l} D_{j_l} \right) p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}]. \quad (18)$$

さらに (18) を (14), (15) に代入すると, 調整係数 A_i, B_j に関する以下の式を

得る：

$$A_i = \left\{ \sum_{j \in \Phi} \left(\prod_{l=1}^{\Lambda} B_{jl} D_{jl} \right) p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}] \right\}^{-1}, \quad (19)$$

$$B_j = \left\{ \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{\{j \in \Phi | j_l = j\}} A_i O_i \left(\prod_{\substack{l^*=1 \\ l^* \neq l}}^{\Lambda} B_{j_{l^*}} D_{j_{l^*}} \right) p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}] \right\}^{-1}. \quad (20)$$

これが本研究で提案する，周回トリップチェーンのための二重制約型エントロピーモデルである．

2.3 発生制約型モデル

古典的なエントロピーモデルと同様，本研究で提案する周回トリップチェーンのためのエントロピーモデルでも，発生・集中制約条件の有無による類型を考えることができる．本節では，発生量が判明している場合（発生制約型）のエントロピーモデルを導出する．

周回トリップチェーンのための発生制約型エントロピーモデルを導出する．具体的には，目的関数 (7) を発生制約条件 (2)，および総コスト制約 (5) の下で最大化することを試みる．やはり，対数を取った目的関数 $\ln w(\{t_{ij}\})$ を最大化するものとし，ラグランジュ関数を記述すると，これは次の通り：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{t_{ij}\}; \lambda, \gamma) = & \ln T! - \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} (t_{ij} \ln t_{ij} - t_{ij}) + \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} (t_{ij} \ln p_{ij}) \\ & + \sum_{i=1}^I \lambda_i \left(O_i - \sum_{j \in \Phi} t_{ij} \right) \\ & + \gamma \left(C - \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} t_{ij} c_{ij} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

したがって，極値のための条件は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_{ij}} = -\ln t_{ij} + \ln p_{ij} - \lambda_i - \gamma c_{ij} = 0 \quad (22)$$

と (2) ならびに (5) となる．第 2.2 節と同様に，これらを t_{ij} について解くと，最終的に以下の解を得る：

$$t_{ij} = A_i O_i p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}], \quad (23)$$

$$A_i = \left\{ \sum_{j \in \Phi} p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}] \right\}^{-1}. \quad (24)$$

これが周回トリップチェーンのための発生制約型エントロピーモデルである．

2.4 逐次計算によるパラメータ決定法

さて，上述のモデルを用いて t_{ij} を具体的に決定するためには，調整係数 A_i ， B_j の値を求める必要がある．ここで，二重制約モデル (第 2.2 節) の調整係数に注目してみると，決定されるべき調整係数 (例えば B_j) が，それ自身 (B_j) あるいはもう一方の調整係数 (A_i) によって定義されていることが分かる*3．したがって，これらの調整係数の値を導出するためには，それらの関係式を漸化式と見做した上で，繰り返し計算を行う必要がある．このパラメータ決定のアルゴリズムを，ここでは二重制約モデルを例に取りながら説明しよう．

まず準備のために (18) を (5) に代入した以下の関数を考える：

$$f(\gamma) = \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} A_i O_i \left(\prod_{l=1}^{\Lambda} B_{j_l} D_{j_l} \right) p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}] c_{ij} - C = 0. \quad (25)$$

この総移動コストの関係式と，調整係数 (19)，(20) のそれを連立させた反復計算によって， A_i ， B_j ， γ という $I + J + 1$ 個のパラメータを決定するアルゴリズムを構築することが，ここでの目的である．そのために，本論文が提案する反復法の手順は以下の通り：

i) 初期値を $\gamma = \gamma^0$ ， $B_j = B_j^0$ ($j = 1, 2, \dots, J$)， $\xi = 0$ とする．

ii) $A_i^{\xi+1} = \left[\sum_{j \in \Phi} \left\{ \left(\prod_{l=1}^{\Lambda} B_{j_l}^{\xi} D_{j_l} \right) p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}] \right\} \right]^{-1}$
 ($i = 1, 2, \dots, I$) を算出する (\leftarrow (19) による)．

*3 発生制約モデル (第 2.3 節) の場合は，調整係数 A_i を外生変数のみから決定できることに注意されたい

$$B_j^{\xi+1} = \left\{ \sum_{i=1}^I \sum_{\{j \in \Phi | j_l = j\}} A_i^{\xi+1} O_i \left(\prod_{\substack{l^*=1 \\ l^* \neq l}}^{\Lambda} B_{j_{l^*}}^{\xi} D_{j_{l^*}} \right) p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}] \right\}^{-1}$$

($j = 1, 2, \dots, J$) を算出する (\leftarrow (20) による) .

iii) $A_i^{\xi+1} \doteq A_i^{\xi}$ ($i = 1, 2, \dots, I$) かつ $B_j^{\xi+1} \doteq B_j^{\xi}$ ($j = 1, 2, \dots, J$) ならば iv) に行く . そうでなければ $\xi = \xi + 1$ と置いて ii) に行く .

iv) $x^0 = \gamma^{\xi}$ とし , カウンタを $\kappa = 0$ とする . 十分小さな正数 ε に対し Newton-Raphson 法

$$x^{\kappa+1} = x^{\kappa} - f(x^{\kappa}) / f'(x^{\kappa})$$

を実行して , $|x^{\kappa'+1} - x^{\kappa'}| < \varepsilon$ となった時点で停止 . $\gamma^{\xi+1} = x^{\kappa'+1}$ とする .

v) $\gamma^{\xi+1} = \gamma^{\xi}$ ならば終了 . そうでなければ $\xi = \xi + 1$ と置いて ii) に行く .

以上を収束するまで反復する . なお , 上記 iv) における導関数 $f'(x)$ は以下の通りである :

$$f'(x) = - \sum_{i=1}^I \sum_{j \in \Phi} A_i O_i \left(\prod_{l=1}^{\Lambda} B_{j_l} D_{j_l} \right) p_{ij} \exp[-x c_{ij}] c_{ij}^2. \quad (26)$$

3 非集計ロジットモデルとの等価性

本研究における理論部分の最後として , 周回トリップチェーンのためのエントロピーモデルを非集計ロジットモデルを用いて導出することを試みる . これによって , 周回トリップチェーンについてもエントロピーモデルの理論的根拠が , 個人行動原理の面からも示されることになる .

3.1 定式化

ゾーン i に居住する旅行者が , $j = [j_1, j_2, \dots, j_{\Lambda}]$ と連続的に目的ゾーンを訪問する周回トリップチェーン ij を実行することを考える . 各ゾーン i の旅行者は , j の選択肢集合 Φ の中から , 各自の効用を最大化する周回トリップチェーン ij を選択するものと仮定する .

いま，ゾーン i に居住する旅行者が j なる目的ゾーンの連続的訪問を行ったときの効用 $U_{j|i}$ を

$$U_{j|i} = V_{j|i} + \varepsilon \quad (27)$$

で与える．ここで， $V_{j|i}$ は効用の確定項であり，また， ε はスケールパラメータ η のガンベル分布に従う確率変数である．このように仮定すると，(27) は非集計ロジットモデルにおける効用の定義そのものになるので，ゾーン i の旅行者が周回トリップチェーン ij を選択する確率 $P_{j|i}$ は

$$P_{j|i} = \frac{\exp[\eta V_{j|i}]}{\sum_{j \in \Phi} \exp[\eta V_{j|i}]} \quad (28)$$

となる．したがってゾーン i における総旅行者数を O_i とすると，周回トリップチェーン ij を行う旅行者数 t_{ij} は

$$t_{ij} = O_i \cdot P_{j|i} = O_i \frac{\exp[\eta V_{j|i}]}{\sum_{j \in \Phi} \exp[\eta V_{j|i}]} \quad (29)$$

で計算することができる．

3.2 発生制約型モデルの導出

ここで効用の確定項 $V_{j|i}$ の具体的な関数形として

$$V_{j|i} = V'_{j|i} - bc_{ij} \quad (30)$$

を仮定する．(30) は，効用を移動コスト c_{ij} に関する項と，それ以外の要因で決定される項 $V'_{j|i}$ の2つに分解したものである．なお本研究では，直行トリップの移動コスト c_{ij} に比例して効用が減少するものとする．

(30) を (29) に代入すると

$$t_{ij} = O_i \frac{\exp[\eta V'_{j|i}] \exp[-\gamma c_{ij}]}{\sum_{j \in \Phi} \exp[\eta V'_{j|i}] \exp[-\gamma c_{ij}]} \quad (31)$$

を得る ($\gamma = b\eta$) . ここで

$$A_i = \left\{ \sum_{j \in \Phi} \exp \left[\eta V'_{j|i} \right] \exp \left[-\gamma c_{ij} \right] \right\}^{-1} \quad (32)$$

と置くと , t_{ij} は以下の簡潔な形で書き直せる :

$$t_{ij} = A_i O_i \exp \left[\eta V'_{j|i} \right] \exp \left[-\gamma c_{ij} \right]. \quad (33)$$

$\exp \left[\eta V'_{j|i} \right]$ を先験確率に相当するものと見做せば , (33) は周回トリップチェーンのための発生制約型エントロピーモデル (23) そのものである . 具体的には , p_{ij} と $\exp \left[\eta V'_{j|i} \right]$ について

$$p_{ij} \propto \exp \left[\eta V'_{j|i} \right] \quad (34)$$

なる関係が成立すれば良い . すなわち , 周回トリップチェーンのためのエントロピーモデルも , 期待効用理論に基づく人間科学的な側面から支持されることが明らかとなる .

さらに効用の確定項 $V'_{j|i}$ の具体的な関数形として

$$V'_{ij} = a \ln S_{j_1} + a \ln S_{j_2} + \cdots + a \ln S_{j_\Lambda} - \Lambda h + \ln \delta_{ij} \quad (35)$$

を仮定してみる . (35) の意味付けは次の通りである . まず , 訪問したゾーンそれぞれについて , 効用の増加がもたらされるはずである . (35) ではこれを , ゾーン j の魅力度を S_j とした上で , その対数の線形和で与えた . 以上は直行トリップにおけるハフモデルの場合と同様のアイデアである . これに加えて , 周回トリップチェーンの際は以下のことについても考慮することが有効と考える . まず , 機会費用による効用の減少である . 基本的に , 訪問したゾーン数が増えるほど魅力度の加算によって効用は増加するわけであるから , これだけでは永遠に訪問を続けるような選択肢が選択される可能性がある . 常識的に考えて , このようなことは起きないはずである . これは , ゾーンの魅力と , 訪問によって失う機会費用のトレードオフを旅行者は考慮しているからに他ならない . そこで (35) では , 一回のゾーン訪問で失う機会費用を h とし , 目的ゾーンの訪問に応じて , $-\Lambda h$ と効用が線形で減少するものと仮定した . 最後に $\ln \delta_{ij}$ について説明する . どんなに魅

力のある周回トリップチェーンであっても，そのトリップチェーンが個人によって認識されていないならば選択されることはない．そこで δ_{ij} を用いて認識の可否を表現したい．ここで δ_{ij} は 0-1 変数であることに注意すると， $\ln \delta_{ij}$ は

$$\ln \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (\text{周回トリップチェーン } ij \text{ が認識されているとき}) \\ -\infty & (\text{周回トリップチェーン } ij \text{ が認識されていないとき}) \end{cases} \quad (36)$$

となる．これを効用に加算すれば，認識されていない経路については，その効用が $-\infty$ となり，選択されないことになる．

(35) を (29) に代入すると

$$t_{ij} = \delta_{ij} A_i O_i \left(\prod_{l=1}^{\Lambda} S_{j_l}^{\alpha} \eta' \right) \exp[-\gamma c_{ij}] \quad (37)$$

を得る ($\alpha = a\eta$, $\gamma = b\eta$, $\eta' = \exp[-\eta h]$) . これは，周回トリップチェーンのための発生制約型エントロピーモデル (23) において先験確率を

$$p_{ij} \propto \delta_{ij} \left(\prod_{l=1}^{\Lambda} S_{j_l}^{\alpha} \eta' \right) \quad (38)$$

と仮定した場合と等価なものである．

3.3 二重制約モデルの導出

古典的空間相互作用モデルでは，非集計行動モデルと，二重制約型エントロピーモデルの等価性について議論がなされている [2] . この議論を一般化することによって，本研究の周回トリップチェーンにおいても，非集計行動モデルと二重制約型エントロピーモデルの等価性を示すことが可能である．

いま目的ゾーン j における総訪問者数が D_j であると判明したとしよう．このとき， S_j と D_j について以下の関係が成立しなければならない：

$$\begin{aligned} D_j &= \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{\{j \in \Phi | j_l = j\}} t_{ij} \\ &= S_j^{\alpha} \eta' \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{\{j \in \Phi | j_l = j\}} \delta_{ij} A_i O_i \left(\prod_{\substack{l^*=1 \\ l^* \neq l}}^{\Lambda} S_{j_{l^*}}^{\alpha} \eta' \right) \exp[-\gamma c_{ij}] \end{aligned} \quad (39)$$

したがって

$$B_j = \left\{ \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{\{j \in \Phi | j_l = j\}} \delta_{ij} A_i O_i \left(\prod_{\substack{l^*=1 \\ l^* \neq l}}^{\Lambda} S_{j_{l^*}}^{\alpha} \eta' \right) \exp [-\gamma c_{ij}] \right\}^{-1} \quad (40)$$

と置くと

$$S_j^{\alpha} \eta' = B_j D_j \quad (41)$$

となる．これらの結果を (32) , (33) , (40) に代入すると

$$t_{ij} = \delta_{ij} A_i O_i \left(\prod_{l=1}^{\Lambda} B_j D_j \right) \exp [-\gamma c_{ij}], \quad (42)$$

$$A_i = \left\{ \sum_{j \in \Phi} \delta_{ij} \left(\prod_{l=1}^{\Lambda} B_j D_j \right) \exp [-\gamma c_{ij}] \right\}^{-1}, \quad (43)$$

$$B_j = \left\{ \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{\{j \in \Phi | j_l = j\}} \delta_{ij} A_i O_i \left(\prod_{\substack{l^*=1 \\ l^* \neq l}}^{\Lambda} B_{j_{l^*}} D_{j_{l^*}} \right) \exp [-\gamma c_{ij}] \right\}^{-1} \quad (44)$$

を得る．すなわち

$$p_{ij} \propto \delta_{ij} \quad (45)$$

と見做せば , (42) ~ (44) は周回トリップのための二重制約型エントロピー・モデルと等価になる．

4 パラメータの効率的な計算法

本章では , 周回トリップチェーンのための二重制約型エントロピーモデルのパラメータ , A_i , B_j , γ を効率的に計算する方法を説明する．

4.1 計算における仮定

まず，本研究の計算法を適用するために必要な条件について述べる．具体的には，総訪問ゾーン数 L ，周回トリップチェーン ij の先験確率 p_{ij} ，そして移動コスト c_{ij} が満たすべき条件について説明する．

4.1.1 外生変数の設定

まず，総訪問ゾーン数の上限 L についてであるが，本研究では以下 $L \rightarrow \infty$ なる仮定をする．このようにすると，永遠に周遊移動を続けるトリップチェーンが発生することを危惧されるかもしれないが，先験確率について後述の仮定を置くと，

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} p_{ij} = 0 \quad (46)$$

が成立するため，この問題は回避される．

次に，周回トリップチェーン ij の先験確率 p_{ij} の仮定をする．そのための準備として，

$$p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} [\text{発生ゾーン } i \text{ から目的ゾーン } j \text{ への遷移確率}], \quad (47)$$

$$p_{jj^*} \stackrel{\text{def}}{=} [\text{目的ゾーン } j \text{ から目的ゾーン } j^* \text{ への遷移確率}], \quad (48)$$

$$p_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} [\text{目的ゾーン } j \text{ から発生ゾーン } i \text{ への遷移確率}] \quad (49)$$

なる遷移確率をそれぞれ定義する．ただし p_{ij} ， p_{jj^*} ， p_{ji} はその上で，各周回トリップチェーン ij の先験確率 p_{ij} が

$$p_{ij} = p_{ij_1} \times \prod_{l=1}^{\Lambda-1} p_{j_l j_{l+1}} \times p_{j_\Lambda i} \quad (50)$$

と各トリップごとの積で表されるものと仮定する．以上のアイディアは，先験確率 p_{ij} を設定するに当り，マルコフ性を仮定したことに他ならない．

最後に，周回トリップチェーン ij の 1 トリップチェーン当り移動コスト c_{ij} の

仮定をする．やはり，各トリップごとの移動コストとして，

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} [\text{発生ゾーン } i \text{ から目的ゾーン } j \text{ への移動コスト}], \quad (51)$$

$$c_{jj^*} \stackrel{\text{def}}{=} [\text{目的ゾーン } j \text{ から目的ゾーン } j^* \text{ への移動コスト}], \quad (52)$$

$$c_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} [\text{目的ゾーン } j \text{ から発生ゾーン } i \text{ への移動コスト}] \quad (53)$$

なるものを定義し，以下の議論では周回トリップチェーンの移動コスト c_{ij} が

$$c_{ij} = c_{ij_1} + \sum_{l=1}^{\Lambda-1} c_{j_l j_{l+1}} + c_{j_\Lambda i} \quad (54)$$

とゾーン間移動コストの和で与えられるものとする．

4.2 トリップチェーンの分解

以上の如く先験確率 p_{ij} と移動コスト c_{ij} を設定すると， $p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}]$ が

$$\begin{aligned} p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}] &= \underbrace{p_{ij_1} \exp[-\gamma c_{ij_1}]}_{i \rightarrow j_1} \times \underbrace{p_{j_1 j_2} \exp[-\gamma c_{j_1 j_2}]}_{j_1 \rightarrow j_2} \\ &\quad \times \cdots \times \underbrace{p_{j_{\Lambda-1} j_\Lambda} \exp[-\gamma c_{j_{\Lambda-1} j_\Lambda}]}_{j_{\Lambda-1} \rightarrow j_\Lambda} \times \underbrace{p_{j_\Lambda i} \exp[-\gamma c_{j_\Lambda i}]}_{j_\Lambda \rightarrow i} \end{aligned} \quad (55)$$

と各トリップごとの掛け算に分解することが可能となる．ここで， $p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}]$ が，トリップチェーン数 t_{ij} ならびに調整係数 A_i, B_j 全てに登場していたことに注意すると，(55) のように分解されることによって， t_{ij}, A_i, B_j は全て，(i) ゾーンに関する因数と，(ii) 各トリップに関する因数のみで記述できるのである．この性質が，パラメータの導出において，重要な役割を果たすことになる．なお，以下の議論では便宜上

$$C_{**} \stackrel{\text{def}}{=} p_{**} \exp[-\gamma c_{**}] \quad (56)$$

と簡略化して記述することにする．すなわち，(55) は

$$p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}] = C_{ij_1} \times C_{j_1 j_2} \times \cdots \times C_{j_{\Lambda-1} j_\Lambda} \times C_{j_\Lambda i} \quad (57)$$

と書き直される．

4.3 A_i の効率的な計算

最初に, A_i の定義式 (19) を効率的に計算する方法について説明する. まず

$$\sum_{j \in \Phi} i_j = \sum_{j_1=1}^J i_{[j_1]} + \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J i_{[j_1, j_2]} + \cdots \quad (58)$$

であることに注意して, A_i^{-1} を書き下すと

$$\begin{aligned} A_i^{-1} &= \sum_{j \in \Phi} \left(\prod_{l=1}^{\Lambda} B_{j_l} D_{j_l} \right) p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}] \\ &= \sum_{j_1=1}^J \underbrace{B_{j_1} D_{j_1} C_{ij_1} C_{j_1 i}}_{i_{[j_1]}} \\ &\quad + \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J \underbrace{B_{j_1} D_{j_1} B_{j_2} D_{j_2} C_{ij_1} C_{j_1 j_2} C_{j_2 i}}_{i_{[j_1 j_2]}} \\ &\quad + \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J \sum_{j_3=1}^J \underbrace{B_{j_1} D_{j_1} B_{j_2} D_{j_2} B_{j_3} D_{j_3} C_{ij_1} C_{j_1 j_2} C_{j_2 j_3} C_{j_3 i}}_{i_{[j_1 j_2 j_3]}} \\ &\quad + \cdots \end{aligned} \quad (59)$$

となる. これを効率的に計算するため

$$Y_{ji}^0 = C_{ji}, \quad (60)$$

$$Y_{ji}^{n+1} = \sum_{j^*=1}^J B_{j^*} D_{j^*} C_{j j^*} Y_{j^* i}^n \quad (61)$$

なる数列 $\{Y_{ji}^n\}$ を定義する. ここで

$$Y_{ji}^n \stackrel{\text{def}}{=} [j \text{ から } n \text{ 回のゾーン訪問後, } i \text{ へ帰宅する移動に関する } C_{**} \text{ と } n \text{ 個の訪問先における調整係数部分 } B_j D_j \text{ をあらゆる } n \text{ 回の訪問の組合せについて足し合わせたもの}] \quad (62)$$

である．ここで (61) より

$$\begin{pmatrix} Y_{1i}^{n+1} \\ Y_{2i}^{n+1} \\ \vdots \\ Y_{Ji}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 D_1 C_{11} & B_2 D_2 C_{12} & \cdots & B_J D_J C_{1J} \\ B_1 D_1 C_{21} & B_2 D_2 C_{22} & \cdots & B_J D_J C_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1 D_1 C_{J1} & B_2 D_2 C_{J2} & \cdots & B_J D_J C_{JJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1i}^n \\ Y_{2i}^n \\ \vdots \\ Y_{Ji}^n \end{pmatrix} \quad (63)$$

と書き表せることに注意すると

$$G_Y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} B_1 D_1 C_{11} & B_2 D_2 C_{12} & \cdots & B_J D_J C_{1J} \\ B_1 D_1 C_{21} & B_2 D_2 C_{22} & \cdots & B_J D_J C_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1 D_1 C_{J1} & B_2 D_2 C_{J2} & \cdots & B_J D_J C_{JJ} \end{pmatrix} \quad (64)$$

を用いて

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{1i}^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} Y_{2i}^n \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^{\infty} Y_{Ji}^n \end{pmatrix} = (I - G_Y)^{-1} \begin{pmatrix} Y_{1i}^0 \\ Y_{2i}^0 \\ \vdots \\ Y_{Ji}^0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

が導かれる．一方，(59) は

$$\begin{aligned} A_i^{-1} &= \sum_{j=1}^J B_j D_j C_{ij} \underbrace{C_{ji}}_{Y_{ji}^0} \\ &+ \sum_{j=1}^J B_j D_j C_{ij} \underbrace{\sum_{j_2=1}^J B_{j_2} D_{j_2} C_{jj_2} C_{j_2i}}_{Y_{ji}^1} \\ &+ \sum_{j=1}^J B_j D_j C_{ij} \underbrace{\sum_{j_2=1}^J \sum_{j_3=1}^J B_{j_2} D_{j_2} B_{j_3} D_{j_3} C_{jj_2} C_{j_2j_3} C_{j_3i}}_{Y_{ji}^2} \\ &+ \cdots \\ &= \sum_{j=1}^J B_j D_j C_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}^n \end{aligned} \quad (66)$$

と変形できる．したがって， A_i は (65) を (66) に代入することによって計算できることになる．

4.4 B_j の効率的な計算

次に B_j の定義式 (20) の効率的な計算法を説明する．やはり

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\{j \in \Phi | j_l = j\}} ij &= i[j] + \sum_{j_2=1}^J i[j, j_2] + \sum_{j_1=1}^J i[j_1, j] \\
 &+ \sum_{j_2=1}^J \sum_{j_3=1}^J i[j, j_2, j_3] + \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_3=1}^J i[j_1, j, j_3] \\
 &+ \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J i[j_1, j_2, j] + \cdots
 \end{aligned} \tag{67}$$

であることに注意して, B_j^{-1} を書き下すと,

$$\begin{aligned}
 B_j^{-1} &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^I \sum_{\{j \in \Phi | j_l = j\}} A_i O_i \left(\prod_{\substack{l^*=1 \\ l^* \neq l}}^{\Lambda} B_{j_{l^*}} D_{k_{l^*}} \right) p_{ij} \exp[-\gamma c_{ij}] \\
 &= \sum_{i=1}^I \underbrace{A_i O_i C_{ij} C_{ji}}_{i[j]} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^I \sum_{j_2=1}^J \underbrace{A_i O_i B_{j_2} D_{j_2} C_{ij} C_{jj_2} C_{j_2i}}_{i[jj_2]} + \sum_{i=1}^I \sum_{j_1=1}^J \underbrace{A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} C_{ij_1} C_{j_1j} C_{ji}}_{i[j_1j]} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^I \sum_{j_2=1}^J \sum_{j_3=1}^J \underbrace{A_i O_i B_{j_2} D_{j_2} B_{j_3} D_{j_3} C_{ij} C_{jj_2} C_{j_2j_3} C_{j_3i}}_{i[jj_2j_3]} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^I \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_3=1}^J \underbrace{A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} B_{j_3} D_{j_3} C_{ij_1} C_{j_1j} C_{jj_3} C_{j_3i}}_{i[j_1jj_3]} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^I \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J \underbrace{A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} B_{j_2} D_{j_2} C_{ij_1} C_{j_1j_2} C_{j_2j} C_{ji}}_{i[j_1j_2j]} \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned} \tag{68}$$

を得る. これを効率的に計算するため先ほどの $\{Y_{ji}^n\}$ に加え

$$X_{ij}^0 = A_i O_i C_{ij}, \tag{69}$$

$$X_{ij}^{n+1} = \frac{\rho}{J} \sum_{j^*=1}^J X_{ij^*}^n B_{j^*} D_{j^*} C_{j^*j} \tag{70}$$

なる数列 $\{X_{ij}^n\}$ を定義する. これは

$$\begin{aligned}
 X_{ij}^n \stackrel{\text{def}}{=} & [i \text{ から } n \text{ 回のゾーン訪問後, } j \text{ へ訪問する移動に関する} \\
 & C_{**} \text{ と発生ゾーンの調整係数部分 } A_i O_i, \\
 & \text{さらに } n \text{ 個の訪問先における調整係数部分 } B_j D_j \text{ を} \\
 & \text{あらゆる } n \text{ 回の訪問の組合せについて足し合わせたもの}]
 \end{aligned} \tag{71}$$

である．ここで (70) より

$$\begin{pmatrix} X_{i1}^{n+1} \\ X_{i2}^{n+1} \\ \vdots \\ X_{iJ}^{n+1} \end{pmatrix}^T = \frac{\rho}{J} \begin{pmatrix} X_{i1}^n \\ X_{i2}^n \\ \vdots \\ X_{iJ}^n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B_1 D_1 C_{11} & B_1 D_1 C_{12} & \cdots & B_1 D_1 C_{1J} \\ B_2 D_2 C_{21} & B_2 D_2 C_{22} & \cdots & B_2 D_2 C_{2J} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_J D_J C_{J1} & B_J D_J C_{J2} & \cdots & B_J D_J C_{JJ} \end{pmatrix} \quad (72)$$

と書き表せることに注意すると，前章と同様の議論より

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} X_{i1}^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} X_{i2}^n \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^{\infty} X_{iJ}^n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} X_{i1}^0 \\ X_{i2}^0 \\ \vdots \\ X_{iJ}^0 \end{pmatrix}^T (I - G_X)^{-1} \quad (73)$$

が導かれる．ただし

$$G_X = \frac{\rho}{J} \begin{pmatrix} B_1 D_1 C_{11} & B_1 D_1 C_{12} & \cdots & B_1 D_1 C_{1J} \\ B_2 D_2 C_{21} & B_2 D_2 C_{22} & \cdots & B_2 D_2 C_{2J} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ B_J D_J C_{J1} & B_J D_J C_{J2} & \cdots & B_J D_J C_{JJ} \end{pmatrix} \quad (74)$$

と置いた．さらに (68) は

$$\begin{aligned}
 B_j^{-1} &= \sum_{i=1}^I \underbrace{(A_i O_i C_{ij})}_{X_{ij}^0} \underbrace{(C_{ji})}_{Y_{ji}^0} \\
 &+ \sum_{i=1}^I \underbrace{(A_i O_i C_{ij})}_{X_{ij}^0} \underbrace{\left(\sum_{j_2=1}^J B_{j_2} D_{j_2} C_{jj_2} C_{j_2 i} \right)}_{Y_{ji}^1} \\
 &+ \sum_{i=1}^I \underbrace{\left(\sum_{j_1=1}^J A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} C_{ij_1} C_{j_1 j} \right)}_{X_{ij}^1} \underbrace{(C_{ji})}_{Y_{ji}^0} \\
 &+ \sum_{i=1}^I \underbrace{(A_i O_i C_{ij})}_{X_{ij}^0} \underbrace{\left(\sum_{j_2=1}^J \sum_{j_3=1}^J B_{j_2} D_{j_2} B_{j_3} D_{j_3} C_{jj_2} C_{j_2 j_3} C_{j_3 i} \right)}_{Y_{ij}^2} \\
 &+ \sum_{i=1}^I \underbrace{\left(\sum_{j_1=1}^J A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} C_{ij_1} C_{j_1 j} \right)}_{X_{ij}^1} \underbrace{\left(\sum_{j_3=1}^J B_{j_3} D_{j_3} C_{jj_3} C_{j_3 i} \right)}_{Y_{ji}^1} \\
 &+ \sum_{i=1}^I \underbrace{\left(\sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} B_{j_2} D_{j_2} C_{ij_1} C_{j_1 j_2} C_{j_2 j} \right)}_{X_{ij}^2} \underbrace{(C_{ji})}_{Y_{ji}^0} \\
 &+ \sum_{i=1}^I X_{ij}^0 Y_{ji}^3 + \sum_{i=1}^I X_{ij}^1 Y_{ji}^2 + \sum_{i=1}^I X_{ij}^2 Y_{ji}^1 + \sum_{i=1}^I X_{ij}^3 Y_{ji}^0 + \dots \\
 &= \sum_{i=1}^I \left(\sum_{n=0}^{\infty} X_{ij}^n \times \sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}^n \right) \tag{75}
 \end{aligned}$$

と書き直せる．よって (65), (73) を (75) に代入すれば, B_j^{-1} が求められることになる．

4.5 C の効率的な計算

最後に都市内での総移動コストに関するパラメータ γ の導出について説明する。ただし, γ 自体は定義式があるわけではないので, ここではある距離抵抗係数 γ が与えられたときの総移動コストの推定値 $\hat{C}(\gamma)$ の計算方法について述べる。

そのための準備として, まず距離抵抗係数が γ で与えられたときの

$$T_{ij}^{OD}(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} [\text{発生ゾーン } i \text{ から目的ゾーン } j \text{ へ出発移動した人数}], \quad (76)$$

$$T_{jj^*}^{DD}(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} [\text{目的ゾーン } j \text{ から目的ゾーン } j^* \text{ へ周遊移動した人数}], \quad (77)$$

$$T_{ji}^{DO}(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} [\text{目的ゾーン } j \text{ から発生ゾーン } i \text{ へ帰宅移動した人数}] \quad (78)$$

の3つをそれぞれ導出する。

$i \rightarrow j$ へのお発移動者数 $T_{ij}^{OD}(\gamma)$ を導出する。これは前述した数列 $\{Y_{ji}^n\}$ を

用いることによって以下の通りに計算される：

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^{OD}(\gamma) &= t_{i[j]} + \sum_{j_2=1}^J t_{i[jj_2]} + \sum_{j_2=1}^J \sum_{j_3=1}^J t_{i[jj_2j_3]} + \cdots \\
 &= \underbrace{A_i O_i B_j D_j C_{ij} C_{ji}}_{t_{i[j]}} \\
 &\quad + \sum_{j_2=1}^J \underbrace{A_i O_i B_j D_j B_{j_2} D_{j_2} C_{ij} C_{jj_2} C_{j_2i}}_{t_{i[jj_2]}} \\
 &\quad + \sum_{j_2=1}^J \sum_{j_3=1}^J \underbrace{A_i O_i B_j D_j B_{j_2} D_{j_2} B_{j_3} D_{j_3} C_{ij} C_{jj_2} C_{j_2j_3} C_{j_3i}}_{t_{i[jj_2j_3]}} \\
 &\quad + \cdots \\
 &= A_i O_i B_j D_j C_{ij} \underbrace{C_{ji}}_{Y_{ji}^0} \\
 &\quad + A_i O_i B_j D_j C_{ij} \underbrace{\sum_{j_2=1}^J B_{j_2} D_{j_2} C_{jj_2} C_{j_2i}}_{Y_{ji}^1} \\
 &\quad + A_i O_i B_j D_j C_{ij} \underbrace{\sum_{j_2=1}^J \sum_{j_3=1}^J B_{j_2} D_{j_2} B_{j_3} D_{j_3} C_{jj_2} C_{j_2j_3} C_{j_3i}}_{Y_{ji}^2} \\
 &\quad + \cdots \\
 &= A_i O_i B_j D_j C_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}^n. \tag{79}
 \end{aligned}$$

次に $j \rightarrow j^*$ への周遊移動者数 $T_{jj^*}^{DD}(\gamma)$ を導出する．これも数列 $\{X_{ij}^n\}$ ，

$\{Y_{ji}^n\}$ を用いることによって以下の通りに計算される :

$$\begin{aligned}
 T_{jj^*}^{DD}(\gamma) &= \sum_{i=1}^I t_{i[jj^*]} \\
 &+ \sum_{i=1}^I \sum_{j_3=1}^J t_{i[jj^*j_3]} + \sum_{i=1}^I \sum_{j_1=1}^J t_{i[j_1jj^*]} \\
 &+ \sum_{i=1}^I \sum_{j_3=1}^J \sum_{j_4=1}^J t_{i[jj^*j_3j_4]} + \sum_{i=1}^I \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_4=1}^J t_{i[j_1jj^*j_4]} \\
 &+ \sum_{i=1}^I \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J t_{i[j_1j_2jj^*]} + \cdots \\
 &= \sum_{i=1}^I \left\{ \underbrace{(A_i O_i C_{ij})}_{X_{ij}^0} (B_j D_j B_{j^*} D_{j^*} C_{jj^*}) \underbrace{(C_{j^*i})}_{Y_{j^*i}^0} \right\} \\
 &+ \sum_{i=1}^I \left\{ \underbrace{(A_i O_i C_{ij})}_{X_{ij}^0} (B_j D_j B_{j^*} D_{j^*} C_{jj^*}) \underbrace{\left(\sum_{j_3=1}^J B_{j_3} D_{j_3} C_{j^*j_3} C_{j_3i} \right)}_{Y_{j^*i}^1} \right\} \\
 &+ \sum_{i=1}^I \left\{ \underbrace{\left(\sum_{j_1=1}^J A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} C_{ij_1} C_{j_1j} \right)}_{X_{ij}^1} (B_j D_j B_{j^*} D_{j^*} C_{jj^*}) \underbrace{(C_{j^*i})}_{Y_{j^*i}^0} \right\} \\
 &+ \cdots \\
 &= \sum_{i=1}^I \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} X_{ij}^n \times (B_j D_j B_{j^*} D_{j^*} C_{jj^*}) \times \sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}^n \right\}. \tag{80}
 \end{aligned}$$

最後に $j \rightarrow i$ への帰宅移動者数 $T_{ji}^{DO}(\gamma)$ であるが、これは次の通り：

$$\begin{aligned}
 T_{ji}^{DO}(\gamma) &= t_{i[j]} + \sum_{j_1=1}^J t_{i[j_1j]} + \sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J t_{i[j_1j_2j]} + \cdots \\
 &= \underbrace{(A_i O_i C_{ij})}_{X_{ij}^0} (B_j D_j C_{ji}) \\
 &\quad + \underbrace{\left(\sum_{j_1=1}^J A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} C_{ij_1} C_{j_1j} \right)}_{X_{ij}^1} (B_j D_j C_{ji}) \\
 &\quad + \underbrace{\left(\sum_{j_1=1}^J \sum_{j_2=1}^J A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} B_{j_2} D_{j_2} C_{ij_1} C_{j_1j_2} C_{j_2j} \right)}_{X_{ij}^2} (B_j D_j C_{ji}) \\
 &\quad + \cdots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} X_{ij}^n B_j D_j C_{ji}. \tag{81}
 \end{aligned}$$

このようにして求めた $T_{ij}^{OD}(\gamma)$, $T_{jj^*}^{DD}(\gamma)$, $T_{ji}^{DO}(\gamma)$ それぞれについてゾーン間移動コスト (51), (52), (53) を掛け合わせれば、都市全体での総コストの推定値 $\hat{C}(\gamma)$ が以下の通りに求められる：

$$\hat{C}(\gamma) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J T_{ij}^{OD}(\gamma) c_{ij} + \sum_{j=1}^J \sum_{j^*=1}^J T_{jj^*}^{DD}(\gamma) c_{jj^*} + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I T_{ji}^{DO}(\gamma) c_{ji}. \tag{82}$$

4.6 逆行列を用いたパラメータ決定法

第 4.3 節～第 4.5 節の議論によって、効率的に調整係数 A_i , B_j , そして総移動コストの推定値 $\hat{C}(\gamma)$ が計算できることが分かった。これらを用いれば、実際にパラメータを求めるための反復計算を行う際、定義式を直接用いるよりも、高速に計算することができる。ただしこの場合、第 2.4 節 iv) で距離抵抗係数 γ を推

定する際に用いていた Newton-Raphson 法を，適用することができない．これは (26) に相当する，総コスト制約条件を微分したものが，各トリップごとに分解できないためである*4．そのため，(82) を用いて距離抵抗係数 γ を推定するには，導関数を用いないアルゴリズムを適用する必要がある．

その一例として，ここでは黄金分割法を用いた反復法の手順を示す：

i) 初期値を $\gamma = \gamma^0$, $B_j = B_j^0$ ($j = 1, 2, \dots, J$) , $\xi = 0$ とする．

ii) B_j^ξ を用いて $\sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}^n$ ($i = 1, 2, \dots, I$. $j = 1, 2, \dots, J$) を算出する
(\leftarrow (65) による) .

$$A_i^{\xi+1} = \left\{ \sum_{j=1}^J B_j^\xi D_j^\xi C_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}^n \right\}^{-1}$$

($i = 1, 2, \dots, I$) を算出する (\leftarrow (66) による) .

$A_i^{\xi+1}$, B_j^ξ を用いて $\sum_{n=0}^{\infty} X_{ij}^n$ ($i = 1, 2, \dots, I$. $j = 1, 2, \dots, J$) を算出する
(\leftarrow (73) による) .

$$B_j^{\xi+1} = \left\{ \sum_{i=1}^I \left(\sum_{n=0}^{\infty} X_{ij}^n \times \sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}^n \right) \right\}^{-1}$$

($j = 1, 2, \dots, J$) を算出する (\leftarrow (75) による) .

iii) $A_i^{\xi+1} \doteq A_i^\xi$ ($i = 1, 2, \dots, I$) かつ $B_j^{\xi+1} \doteq B_j^\xi$ ($j = 1, 2, \dots, J$) ならば iv) に行く．そうでなければ $\xi = \xi + 1$ と置いて ii) に行く．

iv) $x^0 = \gamma^\xi$ とし，カウンタを $\kappa = 0$ とする．十分小さな正数 ε に対し黄金分割法を実行して，

$$|f(x^\kappa)| < \varepsilon$$

となった時点で停止． $\gamma^{\xi+1} = x^{\kappa'+1}$ とする．

v) $\gamma^{\xi+1} = \gamma^\xi$ ならば終了．そうでなければ $\xi = \xi + 1$ と置いて ii) に行く．

以上を収束するまで反復する．なお，上記 iv) における関数 $f(x)$ は以下の通りで

*4 具体的には c_{ij}^2 をトリップ単位に分解することができない．

ある：

$$f(x) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J T_{ij}^{OD}(x) c_{ij} + \sum_{j=1}^J \sum_{j^*=1}^J T_{jj^*}^{DD}(x) c_{jj^*} + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I T_{ji}^{DO}(x) c_{ji} - C. \quad (83)$$

5 等価なマルコフモデル

前節では，周回トリップチェーンのためのパラメータを決定する効率的な計算法について議論した．そこでは， A_i あるいは B_j といった調整係数が逆行列計算に帰着されることを示したが，この議論の背景には，先験確率にマルコフ性を仮定したことが挙げられる．このことから分かる通り，第 4.1 節の仮定の下では，周回トリップチェーンのためのエントロピーモデルと，マルコフモデルが互いに強い繋がりを持つ．そこで本節では，周回トリップチェーンのための二重制約型エントロピーモデル，発生制約型エントロピーモデル，さらには，非集計行動モデルとマルコフモデルの関係について考察する．

5.1 二重制約型モデルと等価なマルコフ過程

まずは，周回トリップチェーンのための二重制約型エントロピーモデルとマルコフモデルの関係性について議論する．具体的には，第 4.1 節の仮定の下，周回トリップチェーンのための二重制約型エントロピーモデルによって推定される分布交通量が，マルコフモデルによっても記述し得ることを示す．そのための準備として，以下では

- (i) k ケ所目までの訪問先として $[j_1, \dots, j_k]$ を訪れた旅行者のうち， $k+1$ ケ所目に j を訪問する旅行者の割合
- (ii) k ケ所目までの訪問先として $[j_1, \dots, j_k]$ を訪れた旅行者のうち， $k+1$ ケ所目を訪問することなく帰宅する旅行者の割合

の 2 つを，それぞれ計算する．

まず，ゾーン i を出発し， k ケ所目までの訪問先として $[j_1, \dots, j_k]$ を訪れた旅行者（トリップチェーン数）のうち， $k+1$ ケ所目に j を訪問する旅行者の割合

$r \{j_{k+1} = j | i[j_1, \dots, j_k]\}$ を導出する . すなわち

$$r \{j_{k+1} = j | i[j_1, \dots, j_k]\}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{k+1 \text{ヶ所目の訪問先までの移動経路が } i[j_1, \dots, j_k, j] \text{ である旅行者数 (の推定値)}}{k \text{ヶ所目の訪問先までの移動経路が } i[j_1, \dots, j_k] \text{ である旅行者数 (の推定値)}} \quad (84)$$

を求めたい . ここで ,

$[k \text{ヶ所目までの経路が } i[j_1, \dots, j_k] \text{ である旅行者数 (の推定値)}]$

$$\begin{aligned} &= t_{i[j_1, \dots, j_k]} + \sum_{j_{k+1}=1}^J t_{i[j_1, \dots, j_k, j_{k+1}]} + \sum_{j_{k+1}=1}^J \sum_{j_{k+2}=1}^J t_{i[j_1, \dots, j_k, j_{k+1}, j_{k+2}]} + \dots \\ &= A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} \dots B_{j_k} D_{j_k} C_{i j_1} \dots C_{j_{k-1} j_k} \\ &\quad \left(\underbrace{C_{j_k i}}_{Y_{j_k i}^0} + \underbrace{\sum_{j_{k+1}=1}^J B_{j_{k+1}} D_{j_{k+1}} C_{j_k j_{k+1}} C_{j_{k+1} i}}_{Y_{j_k i}^1} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\sum_{j_{k+1}=1}^J \sum_{j_{k+2}=1}^J B_{j_{k+1}} D_{j_{k+1}} B_{j_{k+2}} D_{j_{k+2}} C_{j_k j_{k+1}} C_{j_{k+1} j_{k+2}} C_{j_{k+2} i}}_{Y_{j_k i}^2} + \dots \right) \\ &= A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} \dots B_{j_k} D_{j_k} C_{i j_1} \dots C_{j_{k-1} j_k} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{j_k i}^n, \quad (85) \end{aligned}$$

同様に

$[k+1 \text{ヶ所目までの経路が } i[j_1, \dots, j_k j] \text{ である旅行者数 (の推定値)}]$

$$= A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} \dots B_{j_k} D_{j_k} B_j D_j C_{i j_1} \dots C_{j_{k-1} j_k} C_{j_k j} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{j i}^n \quad (86)$$

である．したがって $r \{j_{k+1} = j | i[j_1, \dots, j_k]\}$ は, (85), (86) を (84) に代入することによって求められ

$$\begin{aligned}
 & r \{j_{k+1} = j | i[j_1, \dots, j_k]\} \\
 &= \frac{A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} \cdots B_{j_k} D_{j_k} B_j D_j C_{ij_1} \cdots C_{j_{k-1}j_k} C_{j_k j} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}^n}{A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} \cdots B_{j_k} D_{j_k} C_{ij_1} \cdots C_{j_{k-1}j_k} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{j_k i}^n} \\
 &= B_j D_j C_{j_k j} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}^n}{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{j_k i}^n} \tag{87}
 \end{aligned}$$

となる．

次に, ゾーン i を出発し, k ケ所目までの訪問先として $[j_1, \dots, j_k]$ を訪れた旅行者のうち, $k + 1$ ケ所目を訪問することなく帰宅する旅行者の割合 $r \{ \text{帰宅} | i[j_1, \dots, j_k] \}$ を導出する．すなわち,

$$\begin{aligned}
 & r \{ \text{帰宅} | i[j_1, \dots, j_k] \} \\
 & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t_{i[j_1, \dots, j_k]}}{k \text{ ケ所目の訪問先までの移動経路が } i[j_1, \dots, j_k] \text{ である旅行者数 (の推定値)}} \tag{88}
 \end{aligned}$$

である．これは (85) より

$$\begin{aligned}
 r \{ \text{帰宅} | i[j_1, \dots, j_k] \} &= \frac{A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} \cdots B_{j_k} D_{j_k} C_{ij_1} \cdots C_{j_{k-1}j_k} C_{j_k i}}{A_i O_i B_{j_1} D_{j_1} \cdots B_{j_k} D_{j_k} C_{ij_1} \cdots C_{j_{k-1}j_k} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{j_k i}^n} \\
 &= \frac{C_{j_k i}}{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{j_k i}^n} \tag{89}
 \end{aligned}$$

となる．(87), (89) から分かるように, 第 4.1 節の仮定の下では, t_{ij} が各トリップごとの因数に分解される結果, あるゾーン j_k に到着する前にどのような経路を辿ったかという情報に依存することなく, すなわち過去に従属することなく, 次に行うトリップの割合が決定できることが分かる．これは, 移動行動をマルコフモデルを用いて記述できることを意味している．したがって, (87), (89) を用いて推移確率行列を定義すれば, エントロピーモデルで推定される分布交通量が, マルコフモデルを用いても記述できることになる．

そこで以上の議論を基に，エントロピーモデルによって推定された分布交通量を，吸収マルコフ過程として記述することを試みる．ここで注意しなければならないのは，(87)，(89)の具体的な値が i によって異なるため，発生ゾーンごとにマルコフ過程を記述することである．

いま，状態空間 \mathcal{G} として $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_H, \mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_J\}$ を考える．ここで， \mathcal{G}_H はある旅行者が(移動行動を終え)帰宅している状態^{*5}， \mathcal{G}_j はある旅行者がゾーン j を訪れている状態である．さらに， \mathcal{G}_H は吸収状態， $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_J$ は過渡状態とする．その上で，ゾーン i を出発する総旅行者数 O_i のうち， n ステップ目で状態 \mathcal{G}_* にいる人数を $\pi_*^i(n)$ と表現することにし

$$\pi^i(n) = [\pi_H^i(n), \pi_1^i(n), \dots, \pi_J^i(n)] \quad (90)$$

なるベクトルを定義する．すなわち， $\pi_j^i(n)$ はゾーン i を出発した旅行者のうち n ケ所目の訪問先としてゾーン j にいる人数， $\pi_H^i(n)$ はゾーン i を出発した旅行者のうち n ケ所未満しか訪問せず既に帰宅している人数である．定義から明らかのように，任意の n について

$$\pi_H^i(n) + \sum_{j=1}^J \pi_j^i(n) = O_i \quad (91)$$

が成り立つことに注意されたい．

さて，ここでマルコフ過程の初期状態，すなわち $\pi^i(1)$ を計算しておこう．まず $\pi_H^i(1)$ であるが，これは明らかに

$$\begin{aligned} \pi_H^i(1) &= [1 \text{ ステップ目で帰宅している人数}] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (92)$$

である．また， $\pi_j^i(1)$ については

$$\begin{aligned} \pi_j^i(1) &= [\text{ゾーン } i \text{ を出発し，最初の訪問先が } j \text{ である旅行者数 (の推定値)}] \\ &= T_{ij}^{OD}(\gamma) \\ &= A_i O_i B_j D_j C_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}^n \end{aligned} \quad (93)$$

*5 添字 H は Home の頭文字を取っている．

と計算できる．すなわち初期状態 $\pi^i(1)$ は

$$\pi^i(1) = \left[\underbrace{0}_{\pi_H^i(1)}, \underbrace{A_i O_1 B_1 D_1 C_{i1} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{1i}^n, \dots, A_i O_J B_J D_J C_{iJ} \sum_{n=0}^{\infty} Y_{Ji}^n}_{\pi_1^i(1)} \right]. \quad (94)$$

次に，各状態間の推移確率行列 P_i を記述したい*6．これについては，(87)，(89) を用いて

$$P_i = \begin{array}{c} \text{H} \\ \text{1} \\ \vdots \\ \text{J} \end{array} \left[\begin{array}{cccc} \text{H} & \text{1} & \dots & \text{J} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{C_{1i}}{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{1i}^n} \\ \vdots \\ \frac{C_{Ji}}{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{Ji}^n} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ B_1 D_1 C_{11} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{1i}^n}{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{1i}^n} \\ \vdots \\ B_1 D_1 C_{J1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{1i}^n}{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{Ji}^n} \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \ddots \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ B_J D_J C_{1J} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{Ji}^n}{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{1i}^n} \\ \vdots \\ B_J D_J C_{JJ} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{Ji}^n}{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{Ji}^n} \end{array} \end{array} \right] \quad (95)$$

と置けば良い．ここで P_i は推移確率行列であるので，各行和は 1 となる：

$$\frac{C_{ji}}{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}^n} + \sum_{j^*=1}^J B_{j^*} D_{j^*} C_{jj^*} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{j^*i}^n}{\sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}^n} = 1. \quad (96)$$

以上のようなマルコフ過程によって導出される分布交通量は，周回トリップチェーンのための二重制約型エントロピーモデルによって推定されるそれと，等価となることは明らかである．すなわち，第 4.1 節の仮定の下で記述した周回トリップチェーンのためのエントロピーモデルは，マルコフモデルによっても記述し得ることが判明した．

5.2 同時的意思決定と逐次的意思決定

最後に，(94) と (95) の意味付けについて考える．そのためには，まずマルコフモデルと非集計行動モデルが想定している意思決定過程について考察することが

*6 発生ゾーンごとに推移確率行列が異なるので添字 i が必要である．

有効であろう。

マルコフモデルで周回トリップチェーンを記述する際は、(i) 最初の訪問先の選択確率を初期状態で与え、(ii) 次の訪問先への移動行動を推移確率行列で表現する定式化が一般的である。すなわち、上述(ii)の推移確率行列を繰り返し掛け合わせることによって、ある目的ゾーンから次の目的ゾーンへの移動が順次記述され、連鎖的移動を表現するわけである。このことから明らかなように、マルコフモデルで想定している意思決定過程は逐次的であると言える。つまり、人々は、まず最初の訪問先を決定し、そこへ到着したら次の行動を決定し、到着したらまた次の行動を決定し、という具合に行動することが想定されている。

一方、非集計行動モデルでは、あらゆる周回トリップチェーンの候補(選択肢集合)から、効用関数に応じて、ある一つの周回トリップチェーンを選択することを想定している。この場合、モデルが想定している意思決定過程は同時的であると考えられる。つまり、人々は自宅(起点)を出発する前に、一連の移動行動全てを見据えて決定するのである。

このように、両者はそもそも想定している意思決定過程が異なるわけであるから、結果として得られる分布交通量も、本来は異なるものとなるはずである。にも拘らず、(94)と(95)では、非集計行動モデルと等価なマルコフモデルが提案されている。この点に関しては若干説明を加える必要があるだろう。マルコフモデルを用いた多くの既存研究では、推移確率を設定する際に古典的な空間相互作用モデル(例えばハフモデル)を想定することが多い(例えば[16, 11, 12])。端的に言ってしまうと、(95)における $S_{j^*}^{\alpha} \eta' \exp[-\gamma c_{jj^*}]$ のみを考慮した定式化となっている。対して、本研究における推移確率では、 $\sum_{n=0}^{\infty} Y_{j^*i}''^n$ なる部分が加わったものとなっている(分母の $\sum_{n=0}^{\infty} Y_{ji}''^n$ は行和を1にするための調整項なので、本質的ではない)。つまり、この Y_{ji} を用いた重み付けこそが逐次的意思決定(マルコフモデル)と、同時的意思決定(非集計行動モデル)を等価な構造にしているわけである。逆に言うと、 $\sum_{n=0}^{\infty} Y_{j^*i}''^n$ を推移確率に重み付けしなければ両者のモデルで得られる分布交通量は当然異なったものとなる。

また、非集計行動モデルに対しても“効用関数が各トリップごとの和に分解”されるものと仮定していたことに注意すべきである。この想定によって初めて、人々の移動行動がマルコフ性を有するわけであり、上記の仮定を満たさない場合(例えば、機会費用の損失が訪問ゾーン数に応じて非線形に変化するとき)は、等価なマルコフモデルを構築できない。

このように幾つかの制約の下ではあれ、マルコフモデルと非集計行動モデルの等価性が明らかとなった。この議論によって、両者が持つモデルの問題点を、解

消することが可能となる．マルコフモデルでは，(i) 周回トリップチェーンにマルコフモデルを適用する理論的脆弱性と，(ii) 逐次的意思決定過程の妥当性が，問題点として指摘されていた．本節における議論によって，まず (i) の理論的脆弱性については解消されたと思われる．さらに (ii) についても以下のように解釈することによって，解消できるものとする．そもそも逐次的意思決定過程が周回トリップチェーンに対して適切でないという指摘は，目的ゾーン間の推移が古典的な空間相互作用モデルで記述されていたことが主な原因である．ここでは，移動先のゾーンに関する情報 ($S_{j^*}^{\alpha} \eta' \exp[-\gamma c_{jj^*}]$) のみで記述される結果，連鎖的移動の本質が失われる危険性が指摘されていた．これに対して，本節で提案したモデルでは $\sum_{n=0}^{\infty} Y_{j^*i}''^n$ なる因数が考慮されているわけである．これは，その先のあらゆる移動行動を考慮した重み付けに他ならない．この場合，“先を見据えた意思決定” という連鎖的移動の特長は失われていないことは明らかであろう．すなわち，本節の定式化の下では，マルコフモデルに対して従来指摘されていた問題点を回避できることが判明した．

また，非集計行動モデルの適用において，しばしば問題点として挙げられる選択肢集合の列挙についても，本節の議論は示唆を与え得る．そもそも同時的意思決定を仮定する場合は，あらゆる周回トリップチェーンを考慮するために選択肢が膨大な数となり，その計算が煩雑となるわけであるが，この問題はまさに A_i ， B_j の計算で指摘していたものである．つまり，本研究における仮定の下では，煩雑な計算をすることなく，逆行列計算に帰着できることは明らかである．このように，マルコフモデルと非集計行動モデルの関係が，本研究のエントロピーモデルを介して明らかになったことによって，両者の特長をうまく引き出したモデル化が可能になるものとする．

6 まとめ

本研究は，連鎖的移動を行うトリップチェーンに対し，その分布交通量を推定するための方法論を構成した．具体的には，Wilson らによる古典的なエントロピーモデルを拡張し，周回トリップチェーン，のための空間相互作用モデルを構築した．複数ヶ所の訪問を前提とした各目的ゾーンの集中量が判明しているという制約の下，その分布交通量をエントロピー最大化法のアイディアに基づき追求したものは，本研究が初めてだと思われる．取り扱うトリップチェーンの種類，制約条件の複雑さから，煩雑になりがちな数学的取り扱いを精査することに

よって、見通しの良い定式化が行えたことは、大きな収穫であった。また、周回トリップチェーンのためのエントロピーモデルを効率的に計算する数学的議論も行った。エントロピーモデルでは、一般に発生・集中制約条件を満たすための調整係数を導出する必要があるが、周回トリップチェーンのためのモデルでは、この定義式が極めて煩雑になっている。そのため、定義式をそのまま利用して計算すると、計算量が膨大になる問題があった。この問題を回避するため、本研究では、トリップチェーンの分解性に着目し、ある条件の下では、調整係数が逆行列計算に帰着されることを示した。また、周回トリップチェーンのためのエントロピーモデルとマルコフ連鎖モデル、さらには非集計行動モデルとの理論的關係についても議論した。

本研究の対象は、交通行動に限定されるものではない。連鎖的な構造を持つ流動は、人々の移動のみならず物資や情報流でも数多く見られるものである。例えば、大量の運輸・運送を行う場合には、階層的な輸送システムを設定することが有効であるが [18]、その際に生じる流動は、まさしく中継点同士を結ぶ連鎖的な移動に他ならない。また、ある情報の伝播が起こるとき、ただ一度の伝達で目的が果たされることはむしろ稀であり、何回かの伝達を経た上で、情報が伝えられることは頻りに観察される。これも連鎖的構造をもつ流動の一種と言えるだろう。この他にも、移動を“ある状態から他の状態への推移”と見做せば、連続的に起こる変化^{*7}全般が、本研究の対象になる可能性を秘めている。これは連鎖構造を持つ意思決定とも解釈できるだろう。その意味において、本モデルは現実データに基づく分布交通量の推定に資するだけでなく、連鎖的な意思決定の法則に論拠を置く様々な理論モデル構築の基礎になるものと考えられる。

参考文献

- [1] Akamatsu, T.(1996) : Cyclic Flows, Markov Process and Transportation Stochastic Assignment , *Transportation Research* , 30B , pp.369–386 .
- [2] 青木義次 (2006) : 建築計画・都市計画の数学 , 数理工学社 .
- [3] Bowman, J., M. Ben-Akiva(2001) : Activity Based Disaggregate Travel Demand Model System with Daily Activity Schedules , *Transportation Research* , 35A , pp.1–28 .

^{*7} 例えば、小学校から中学、高校、大学への進学も連続的に起こる変化である。

- [4] 藤井 聡, 大塚祐一郎, 北村隆一, 門間俊幸 (1997) : 時間的空間的制約を考慮した生活行動軌跡を再現するための行動シミュレーションの構築, 土木計画学研究・論文集, 14, pp.643–652 .
- [5] Horton,F.E., Wagner,W.E.(1969) : A Markovian Analysis of Urban Travel Behavior:Pattern Responses by Socioeconomic-Occupational Groups , HRR , 283 , pp.19–29 .
- [6] Kitamura,R.(1984) : Sequential, History-Dependent Approach to Trip-Chaining Behavior , TRR , 944 , pp.13-22 .
- [7] 北村隆一, 森川高行 (2002) : 交通行動の分析とモデリング , 技報堂 .
- [8] 近藤勝直 (1987) : 交通行動分析 , 晃洋書房 .
- [9] 近藤勝直, 上野義弘 (1979) : 時空間におけるトリップチェーンの記述モデル , 土木学会論文報告集 , 287 , pp.55–67 .
- [10] Mazurkiewicz, L.(1985) : A Statistical Model of a Multitrip Spatil-Interaction Pattern , *Environment and Planning A* , 17 , pp.1533–1539 .
- [11] O’Kelly, M. E.(1981) : A Model of the Demand for Retail Facilities, Incorporating Multistop, Multipurpose Trips , *Geographical Analysis* , 13 , pp.134–148 .
- [12] O’Kelly,M.E.(1983) : Multipurpose Shopping Trips and the Size of Retail Facilities, *Annals of the Association of American Geographers* , 73(2) , pp.231–239 .
- [13] Pooler, J.(1994) : An Extended family of spatial interaction models , *Progress in Human Geography* , 18 , pp.17–39 .
- [14] Roy, J. R., Smith, N. C., Xu, B.(2001): Simultaneous Modelling of Multi-Purpose/Multi-Stop Activity Patterns and Quantities Consumed , *Geographical Systems* , 3 , pp.303–324 .
- [15] 佐佐木 綱 (1969) : パーソントリップパターンの1分類法 , 交通工学 , 4-1 , pp.3–9 .
- [16] Sasaki, T.(1971) : Estimation of Person Trip Patterns through Markov Cains , In *Traffic Flow and Transportation* , New York:American Elsevier , pp.119–130 .
- [17] Tomlinson, J., N. Bullock, P.Dickens, P. Steadmand, E. Taylor(1973) : A Model of Students’s Daily Activity Patterns , *Environment and Planning* , 5 , pp.231–266 .
- [18] 渡部大輔 (2006) : 近接性からみたネットワーク形態解析と輸送システム最

適化に関する数理的研究，筑波大学大学院博士課程学位論文．

- [19] Wilson, A. G.(1967) : A Statistical Theory of Spatial Distribution Models , *Transportation Research* , 1 , pp.253–269 .
- [20] Wilson,A.G.(1970) : *Entropy in Urban and Regional Modelling* , Pion, London .