

# 初等関数の微分公式の証明を眺める

成瀬政光

もちろん自由とはいえ、論理にはしばられます。  
しかし論理に忠実でありさえすれば、その他のもの  
—習慣とか伝統とかいうものに対して  
つまらぬ顧慮をはらう必要はないというのです。  
高木貞治『数学の自由性』(p.16)

## 1 はじめに

本稿では初等関数の微分公式の証明についての考察である。本稿でいう初等関数とは、三角関数 ( $\sin x, \cos x, \tan x$ )、指数関数 ( $a^x$  :  $a$  は実数,  $a > 0, a \neq 1$ )、対数関数 ( $\log_a x$  :  $a$  は先と同様) を対象とする。高校数学において、これらの関数の微分は「数学 III」において学習することになっている (本学院では 2 年次の数学 II)。本單元における一般的な流れは、これらの関数の微分公式を証明し、その使い方・計算法を習熟することである。それを終わると、微分法を用いた応用 (接線の求め方, 増減表を用いたグラフの描写, 物理現象などへの応用) がある。

さて数学では一般にスマートさが求められる学問である。ある命題を証明する場合には、論理的に正しいだけではなく、考え方が「最短距離」である方がより良いとされる。また命題間のつながりについても、必要最低限の定義で議論が多く進行する方がよりスマートとされるだろう。このことは高校数学での議論においても、同様な考え方で捉えられるといえる。一方で高校数学では証明はスマートに済ませ、証明された公式を用いること、応用することの学習に時間が多く割かれる傾向にある。つまり、証明について深入りすることはあまりないように思える。受験対策などの実際的なことを考えれば、時間的にも無理があり、証明にまで深入りすることは実際的ではなく、必ずしも「教育的である」とは捉えられていないのかもしれない。使うことが主眼におかれ、効率性が強く求められているのだろう。だが、数学教育は効率性だけが取り上げられるべきなのだろうか。証明まで検証することによって、その証明が「なぜスマートであるのか?」、なぜその証明が効率的であるのか、という議論をすることも教育的な要素として必要であると我々は考えた。

そこで我々は本稿において、第一に初等関数の微分公式の証明は教科書に載っている方法だけではなく、さまざまな順序で証明できることを述べる。第二に、その証明を概観し、なぜ「スマート」であるのかなど証明の構造について議論をする。本稿において述べる証明は、数学に慣れ親しんだ

人から見れば、スマートではなく無駄が多い、ただ単に面倒な計算をしているだけと感ずることもあるだろう。我々もそれを承知の上で、これらの証明が教材としての役割があるか検討するために、あえて触れていることを再度述べておく。

## 2 学習指導要領における扱い

本節では学習指導要領（以下、指導要領）で述べられている「数学 III」において、初等関数の微分はどのように扱われるのかを確認する。

まず指導要領によれば、「数学 III」の目標は「平面上の曲線と複素数平面、極限、微分法及び積分法についての理解を深め、知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し表現する能力を伸ばすとともに、それらに積極的に活用する態度を育てる」[3, p.36] とある。ここで述べられている目標を見れば、公式を用いること、活用することが求められていることがわかる。ここでヴィットマンら[6]が述べた、数学における構造指向と応用指向の2つの側面に分けられる、という概念を持ち出せば、指導要領で述べている目標は応用指向に偏っているといえる。一方で指導要領における数学科の目標では「数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め」[3, p.16] とある。つまり応用指向のように、物理などへ応用するという側面だけではなく、体系的な理解を促す構造指向の側面も求められているといえる。そこで我々は構造指向の側面から見た教材を検討するために、初等関数の微分公式の証明に注目した。

次に指導要領における初等関数の微分の扱いを概観する。三角関数の導関数については、 $\sin x$  の導関数を  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdots (*)$  を用いて証明することが述べられている[3, p.42]。この記述を見ると等式 (\*) によって、三角関数の導関数の証明については  $\sin x$  の微分から証明することが前提となっているといえる。

指数・対数関数の微分については、自然対数の底  $e$  を導入することを前提とし、「対数関数の導関数を定義にしたがって求めることができる」[3, p.42] と述べている。また「数学 III」では、逆関数の微分も扱うことになっているので、「指数関数が対数の逆関数であることから、対数関数を基にして指数関数の導関数を求めることもできる」[3, p.42] とある。この記述から、対数関数の導関数から指数関数の導関数を求めるということが大きな流れであることが示唆されている。

次節以降では、文科省の検定教科書などを参照し、実際に初等関数の証明がどのように行われているのかを確認する。その上で、それ以外の証明法はあるのかを検討する。

## 3 三角関数の微分

### 3.1 これまでの指導法

文科省の検定教科書（5社8冊<sup>\*1</sup>）や矢野ら[5, pp.48–49]によれば、三角関数  $\sin x, \cos x, \tan x$

<sup>\*1</sup>5社8冊の教科書とは、啓林館「数学Ⅲ」(306)、啓林館「詳説数学Ⅲ」(305)、実教出版「数学Ⅲ」(303)、東京書籍「数学Ⅲ」(301)、第一学習社「新編数学Ⅲ」(313)、第一学習社「数学Ⅲ」(312)、数研出版「高等学校数学Ⅲ」(309)、数研出版「数学Ⅲ」(308)である。

の微分公式をそれぞれ証明する際に「 $\sin x, \cos x, \tan x$ 」の順に行っており、証明は次の通りに行っている。

(1)  $(\sin x)' = \cos x$  を示す。極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  を学習することが前提としている。その上で、 $(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x$  と導くことができる。ここで  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  の系である、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$  であることを用いていることに注意する。

(2)  $(\cos x)' = -\sin x$  を示す。 $(\cos x)' = \left\{ -\sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right\}'$  である。ここで、合成関数の微分から  $(\cos x)' = -\cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left( x + \frac{\pi}{2} \right)' = -\cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x$  である。以上の方法は文科省の検定教科書に多く見られる。矢野ら[5]では、三角関数の相互関係  $\cos x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$  を用いて証明している。当然ながらこのことは、両者の方法において証明の流れに本質的な違いを生むわけではない。

(3)  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$  を示す。 $(\tan x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$  である。分子を計算する際に、商の微分公式と三角関数の相互関係  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  であることを用いている。

以上の手順における証明を本稿では「これまでの指導法」と呼ぶことにする。「これまでの指導法」において用いられている公式は、すべて見た目の上でもあまり難解な計算ではなく、「スマート」であるといえるだろう。

だが、これまで生徒らは3つの三角関数  $\sin x, \cos x, \tan x$  にはさまざまな相互関係があることを学習し、ある1つの三角関数から、他の2つの三角関数の値を求めるなど、相互関係を用いた議論を多く経験している。その関連でいえば、微分公式の証明についても相互関係やつながりを考えることができるはずである。つまり「 $\sin x, \cos x, \tan x$ 」の順番に微分公式を証明をしなくとも、別の順番<sup>\*2</sup>でも証明が可能であることを確認したり、それぞれの証明について、類似点・相違点・本質的な部分を検討したり、そこから「これまでの指導法」が「なぜスマートであるのか」を検討したりすることが教材になりうるだろうと我々は考えた。

ここで、3つの三角関数の微分公式については、当然導関数の定義によってそれぞれ計算することもできることに注意しておく。だが我々は微分公式の結果を求めるだけではなく、あくまでも証明を見ることによって、相互関係について議論したいため、このような議論をしている、ということ再度述べておく。

## 3.2 さまざまな順番で証明する

### 3.2.1 $\cos x, \sin x, \tan x$ の順番

(1)  $(\cos x)' = -\sin x$  を示す。導関数の定義によって、 $(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$

<sup>\*2</sup>証明の順番は  ${}_3P_3$  で6通りある。

$\cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = -\sin x$  となる。(2)  $(\sin x)' = \cos x$  を示す。(1) と合成関数の微分を用いて、 $(\sin x)' = \left\{ \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right\}' = -\sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \cdot (-1) = \cos x$  である。(3)  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$  については、3.1 節で述べた方法とまったく同様に、(1), (2) で示したことと、商の微分公式を用いればよい。

以上、(1) から (3) まで見ると、用いている式や三角関数の相互関係の式も 3.1 節において述べた「これまでの指導法」とまったく同じである。そのため本質的に同じ証明である、と考えてよいだろう。それは、 $\sin x, \cos x$  は相互関係の中でもかなり「結びつきが強い」<sup>\*3</sup> 関数であるということに由来しているといえよう。

### 3.2.2 $\tan x$ の証明が 2 番目となる順番

「 $\cos x, \tan x, \sin x$ 」と「 $\sin x, \tan x, \cos x$ 」の 2 通りがある。前者のみ詳細を述べる。

(1)  $(\cos x)' = -\sin x$  について、これは、3.2.1 節において述べたので繰り返さない。(2)  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$  を示す。証明においては「三角関数の微分の結果は、 $(\cos x)' = -\sin x$  という結果しか使えない」という点に特に留意する必要がある。三角関数の相互関係  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  に注目し、この両辺を微分する。左辺は  $2 \tan x \cdot (\tan x)'$  となる。ここで  $(\tan x)'$  の結果については未知であるので、 $(\tan x)'$  はそのままの形にしておくことがポイントである。また微分公式  $(x^n)' = nx^{n-1}$  が、 $n$  が整数の場合でも成り立つことを確認しておく必要があるが、 $(x^n)' = nx^{n-1}$  ( $n$ : 整数)<sup>\*4</sup> の公式を学習したのちに三角関数の微分を学習する[3, p.41]、という順序で学習することになっているため、指導上の問題点はない。右辺は (1) の結果と合成関数の微分によって、 $-\frac{2}{\cos^3 x} \cdot (-\sin x) = \frac{2}{\cos^2 x} \cdot \tan x$  となる。ここで  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  という相互関係を用いていることに注意する。つまり、

$$2 \tan x \cdot (\tan x)' = \frac{2}{\cos^2 x} \cdot \tan x$$

という恒等式となる。これを  $(\tan x)'$  について解くと、 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$  という結果が得られる。

また (2) については、これ以外の方法として、 $\tan^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$  として、両辺を微分する方法がある。右辺の微分については先に述べた、商の微分公式、合成関数の微分公式を用いることで導くことができる。だが一方で、 $\tan x = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos x}$  として変形し、両辺微分する方法も考えられるだろう。この方法では証明自体をすることができが、暗に  $(\sin x)' = \cos x$  を証明してしまっているため、これを「 $\cos x, \tan x, \sin x$ 」の順で証明しているとは言い難い。

(3)  $(\sin x)' = \cos x$  を示す。相互関係  $\sin x = \tan x \cos x$  の式について、両辺を微分する。(1), (2) の事実と積の微分公式から証明することができる。3.1 節で述べたこれまでの指導法との違い

<sup>\*3</sup>この結びつきの強さの 1 つとして例えば「余関数」という概念がある。一般に「 $x$  と  $y$  が互いに余角であるとき、常に  $f(x) = g(y)$  が成り立つような 2 つの三角関数  $f(x), g(x)$ 」を三角余関数という[1, p.165]。余関数の最も有名な例は、 $\sin x$  と  $\cos x$  であり、他には  $\tan x$  と  $\cot x (= 1/\tan x)$ 、 $\sec x (= 1/\cos x)$  と  $\csc x (= 1/\sin x)$  がある。余関数どうしの微分の結果について、おもしろい性質があり、これを発見することもおもしろい教材の 1 つになりうるが、本稿では述べない。

<sup>\*4</sup>商の微分公式を学習する際に証明される公式である。

は、用いた微分公式が商と積の違いではあるが、用いている相互関係は同じである。

この証明について特筆すべき点は、(2)の段階で、三角関数の相互関係式から両辺を微分し、その恒等式から求めたいものを導く、という作業が出てきた点である。こうした式変形については、のちに学習する「対数微分法」でも同様の方法で導関数を求めることがあるため高校生にとっても十分理解できるものである、と考えてよい。

次に後者の証明は、 $(\tan x)'$  を求める段において、三角関数の相互関係  $1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$  を用いることのみが違いであり、方針については前者と同様である。

### 3.2.3 $\tan x$ の証明が 1 番目となる順番

「 $\tan x, \cos x, \sin x$ 」と「 $\tan x, \sin x, \cos x$ 」の 2 通りがある。前者のみ詳細を述べる。

(1)  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$  を示す。導関数の定義によって、 $(\tan x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h - \tan^2 x \tan h}{h(1 - \tan x \tan h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h}{h} \cdot \frac{1 - \tan^2 x}{1 - \tan x \tan h} = \frac{1}{\cos^2 x}$  となる。ここで、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$  の系である  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h}{h} = 1$  を補題として用いていることに注意しておく。(2)  $(\cos x)' = -\sin x$  を示す。3.2.2 節と同様に、三角関係の相互関係  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  の両辺を微分することによって求める。左辺は (1) から  $2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$  となる。右辺は  $-\frac{2}{\cos^3 x} \cdot (\cos x)'$  となる。ここで 3.2.2 節と同様に、 $(\cos x)'$  の結果については未知であるため、 $(\cos x)'$  はそのままの形にしておく必要がある。以上から、恒等式

$$2 \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{2}{\cos^3 x} \cdot (\cos x)'$$

が得られる。これを  $(\cos x)'$  について解くと、 $(\cos x)' = -\sin x$  となる。

(3)  $(\sin x)' = \cos x$  を示す。これは 3.2.2 節で述べた (3) の証明と同様である。

次に後者の証明であるが、3.2.2 節同様に、 $\sin x$  の微分を求める際に、三角関数の相互関係  $1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$  を用いることのみが違いであり、方針については前者と同様である。

## 3.3 まとめ

以上から 3 つの三角関数の微分公式について、どのような順番でも証明できることがわかった。いずれの順番においても、三角関数の性質、相互関係の式を微分することによって公式を導く。しかし、 $\tan x$  を含む相互関係では、2 乗の分数式を含み、合成関数の微分や  $(\cos x)'$  などとしたまま計算するなど、計算が煩雑になる。こうした煩雑な計算を避けることが「スマート」であると評価され、そのため  $\tan x$  の微分については、最後に証明することに落ち着いた、と想像がつく。

## 4 指数・対数関数の微分

本節では、 $a$  を  $a > 0$  かつ  $a \neq 1$  となる実数かつ、 $e$  を Napier 数とする。

#### 4.1 これまでの指導法

文科省の検定教科書（3.1節で述べた5社8冊）はほとんどが「 $\log_a x$ ,  $\log x$ ,  $a^x$ ,  $e^x$ 」の順で証明している。その証明は次の通りである。

(1)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$  を示す。まず Napier 数の定義  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$  を確認した上で、導関数の定義によって、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{tx}} = \frac{1}{x \log a}$  となる。最後の等式では底変換の公式を用いていることに注意する。

(2)  $(\log x)' = \frac{1}{x}$  を示す。これは (1) において  $a = e$  とすればよい。

(3)  $(a^x)' = a^x \log a$  を示す。 $y = a^x$  とし、両辺に対数を取り微分する（対数微分法という）。つまり、 $\log y = x \log a$  の両辺を微分し、 $\frac{y'}{y} = \log a$  となる。ここで左辺において、 $(\log x)' = \frac{1}{x}$  の事実と合成関数の微分を用いていることに注意する。この等式を  $y'$  について解くと、 $y' = a^x \log a$  となり示せた。

(4)  $(e^x)' = e^x$  を示す。これは (3) において、 $a = e$  とすればよい。

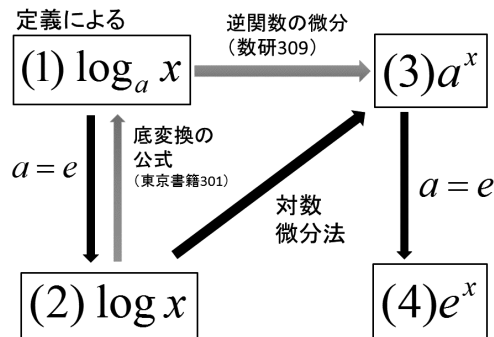


図1 4つの指数・対数関数の微分公式に関するこれまでの指導の流れ

この証明の順序関係を図1に示した。この図では、矢印の向きは「始点の微分公式の結果を用いて、終点にある関数の微分公式証明をしている」ことを表現している。矢印の付近には、キーとなる証明法を記している。

これまでに述べた手順以外で証明している検定教科書は2つあり、東京書籍（301）では、(2), (1), (4), (3)の順番で示している。(2)を導関数の定義によって証明し、(2)から底変換の公式  $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$  を用いて(1)を証明している。また文科省の検定教科書ではないが、矢野ら[5]は、(2), (1), (4), (3)の順番で証明しており、(2)を導関数の定義によって証明し、(1)を(2)の事実と底変換の公式で示す。次に(4)の証明は(1)の事実と逆関数の微分によって示し、(3)の証明は対数微分法で示している。さらに数研出版（309）では、(1)から(2)を示し、(2)の事実を用いず(1)の事実から(3)、その後に(4)を証明しており、順番が「一筆書き」となっていない。つまり、(3)は(1)の結果と逆関数の微分によって示している。



このように4つの指数・対数関数について、微分公式の証明は三角関数よりは多少ヴァリエーションがあるといえる。一方で2節で触れたように、指導要領では逆関数の微分公式を学習することになっている。だが、逆関数の関係にある指数・対数関数の微分に対して積極的に利用しているものはごくわずかである。「数学 III」では逆関数という関数の性質を学習し、その後すぐに逆関数の微分公式も学習しているにも関わらず、証明にそれが用いられていない理由があるはずである。もしそうでなければ、逆関数の微分公式を学習した意味は損なわれるといえるだろう。

そこで我々は4つの指数・対数関数について、それぞれの微分公式をつなぐ道筋をすべて検討し<sup>\*5</sup>、なぜ(1)から(4)の順で証明される理由について検討する。

## 4.2 さまざまな順番で証明する

ここでは4.1節において触れていない関数どうしの証明について述べる。証明の方法によって分類し、述べる。4.1節と同様に、4つの関数の公式について(1)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$ , (2)  $(\log x)' = \frac{1}{x}$ , (3)  $(a^x)' = a^x \log a$ , (4)  $(e^x)' = e^x$  という番号をそれぞれ用いて述べる。

また指数・対数関数の微分公式については「直前に示されたことのみを用いる」という縛りをつける。前小節において述べた「一筆書き」の順番で証明させることで、より公式間の「つながり」を意識して考えることができるだろう。

### 4.2.1 対数微分法

(2)  $\log x$  から (3)  $a^x$  の証明において、対数微分法を用いることはすでに4.1節において述べた。この証明方法は、対数関数から指数関数への証明であればどの組み合わせでも適用できる。つまり、(1)  $\log_a x$  から (3)  $a^x$ , (1)  $\log_a x$  から (4)  $e^x$ , (2)  $\log x$  から (4)  $e^x$ , どの組み合わせでも対数微分法が適用できる。

例えば、(1)  $\log_a x$  から (4)  $e^x$  について示す。  $y = e^x$  とし、両辺に  $a$  を底とする対数をとって  $\log_a y = \log_a e^x = x \log_a e$  となる。この両辺を微分すれば、

$$\frac{y'}{y \log a} = \log_a e$$

となる。ここで左辺の微分について、 $(\log_a x)' = 1/x \log a$  の事実と合成関数の微分を用いていることに注意する。これを  $y'$  について解けば、 $y' = y \log a \cdot \log_a e = y$  である。つまり、 $(e^x)' = e^x$  であることが示せた。

### 4.2.2 「底変換の公式」

(2)  $\log x$  から (1)  $\log_a x$  の証明において、底変換の公式を用いることは4.1節において確認した。(4)  $e^x$  から (3)  $a^x$  については、対数の定義  $X^a = Y^{a \log_Y X}$  を用いることで証明できる。つまり  $a^x = e^{x \log a}$  と変形し、両辺微分すると、 $(a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$  となり証明できる。ここで合成関数の微分を用いることに注意する。

<sup>\*5</sup>4つの関数の微分公式を証明する順番は全部で  $4P_4 = 24$  通りある。

ここで等式  $X^a = Y^{a \log_Y X}$  は対数の定義である。しかし変形によって、底が変換されていると見れば、「底変換」されたと見てよい。そこで本稿において我々は、この変形も「底変換の公式」とまとめて呼ぶことにする。

#### 4.2.3 逆関数の微分を用いる

(1)  $\log_a x$  から (3)  $a^x$  の証明において、逆関数の微分を用いることはすでに 4.1 節において述べた。当然、(2)  $\log x$  から (4)  $e^x$  に向けた証明、これらの逆順である (3)  $a^x$  から (1)  $\log_a x$ 、および (4)  $e^x$  から (2)  $\log x$  に向けた証明も、逆関数の微分を用いることで証明できる。

また 4.2.1 節において、対数微分法によって証明した、(1)  $\log_a x$  から (4)  $e^x$ 、および (2)  $\log x$  から (3)  $a^x$  についても、底変換の公式と逆関数の微分によって証明できる。(1) から (4) を示す。 $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = \log x = \frac{\log_a x}{\log_a e}$  (底変換の公式) とする。このとき、 $f(x)$  と  $g(x)$  は逆関数の関係である。逆関数の微分公式  $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$  を用いると、 $\left(\frac{\log_a x}{\log_a e}\right)' = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}$  である\*6。よって、 $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log e}$  となり、証明することができた。同様に、(2)  $\log x$  から (3)  $a^x$  についても証明することができる。

先に証明した  $f(x)$  と  $g(x)$  の関係を入れ替えれば、当然逆順である (4)  $e^x$  から (1)  $\log_a x$ 、および (3)  $a^x$  から (2)  $\log x$  についても同様に証明できる。

#### 4.3 まとめ

これまで示した 4 つの指数・対数関数に関する微分公式の証明を図 2 において関係を整理する。この図 2 より、4 つの指数・対数関数の微分公式について、どの順番でも証明できることがわかる。この関係について特筆すべき点は 2 点である。

1 点目は、指数関数から対数関数への証明、またその逆も逆関数の微分公式で往来できることで

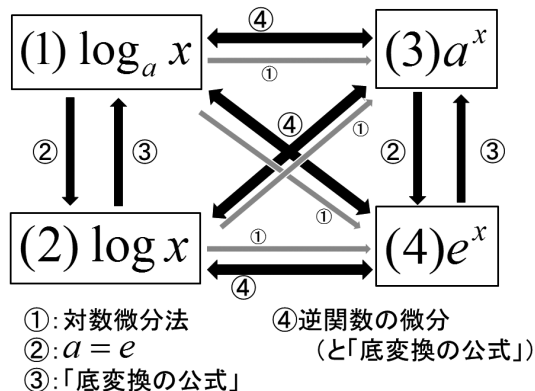


図 2 4 つの指数・対数関数の微分公式の証明のまとめ

\*6  $\exp(x) = e^x$  である。



ある。ダイレクトに逆関数のものもあれば、底が異なれば底変換の公式によって変形してから、逆関数として扱えばよい。この流れは当然といえば当然であり、2つの公式によってすべてがまとめられるという点が「スマート」であるといえるだろう。

2点目は、対数微分法の有効性である。対数関数から指数関数への証明について、すべて証明できることがわかった。この強力なほどの有効性は、「直前に示されたことのみを用いる」という縛りを設けなければ、4.1節で述べた数研出版(309)の証明と似たように、(1)から(2)、(1)から(3)、(1)から(4)と、(1)の結果のみを用いて他のすべての公式を証明できるほどである。さらにこれらの証明に限らず、さまざまな関数について対数微分法が有効である。実際に文科省検定教科書では、対数微分法を用いて計算することを意図した例題や練習問題が多い。こうした意味では、指数が複雑なものも計算できるという点で守備範囲が広い「スマート」な方法であるといえるかもしれない。しかし逆関数の微分についても、適用できる守備範囲が異なるだけであり、一般的であるという事情は同じである。つまり、適用できる関数の守備範囲の広さという意味での「スマートさ」という観点では、対数微分法ばかりが用いられ、逆関数の微分公式が積極的に用いられない、という理由付けにはなっていない。そのため、指数関数と対数関数という逆関数の絶好の機会があるにも関わらず、逆関数の微分を証明で用いていない教科書については、公式を利用するための絶好の機会を逃している、といえるだろう。

また1点目で述べたように、指数・対数関数の証明について、逆関数の微分と底変換の公式によって往来が可能であることを示した。往来ということであれば、指数関数から対数関数への証明において対数微分法と対応するものがあるのではないかと考えるのが自然であろう。例えば「指数微分法」、つまり  $y = f(x)$  について、両辺を指数に乗せて微分する（つまり  $a^y = a^{f(x)}$  や  $e^y = e^{f(x)}$  とし、両辺を微分する）ことによって証明できそうである。しかし例えば、(4)  $e^x$  から (1)  $\log_a x$  の証明をすることを考える。  $y = \log_a x$  とし、両辺を  $e$  の指数に乗せ、微分をすれば、  $y'e^y = (x^{1/\log a})' = \frac{x^{\log a - 1}}{\log a}$  となる。ここで、 $\alpha$  が実数としたときに  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  が成り立つことを認めていることに注意すべきである。実はこの事実を証明するには (2)  $(\log x)' = 1/x$  の結果を用いている。そのため、循環論法に陥る場合があることに注意する必要がある。

いずれにおいても、関数としての橋渡し、つまり逆関数であることと底変換されることがそのまま微分の証明につながっているということがわかる。

#### 4.4 Napier 数の定義に関する補足

本稿では証明の順序について述べてきたが、Napier 数を  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$  と定義することによって証明を進めてきた。この定義は対数関数を導関数の定義によって微分することから登場したものである。そうであるにも関わらず、この定義を用いて指数関数の微分公式から証明することに、不自然さが残るともいえる。そこで指数関数を導関数の定義によって証明することを考えれば、Napier 数  $e$  の定義を「 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$  となる実数  $a$  とする」として議論することもできる。この定義に

よって指数・対数関数の微分公式がどのような順番でも証明できるのか、を考えることも議論の1つになるだろう。

## 5 おわりに

当然のことながら、数学に登場する命題は演繹的につながっている。一方で例えば、大学レベルの「微分積分」というタイトルのテキストを手にとってみても、定義の仕方や命題の並び方など、さまざまなパターンのものが存在する。このことは、数学の議論は論理的につながっていれば、いかようにも順番を入れ替えて議論できうることを示している。これは「数学の自由性」の一つといえよう\*7。議論では「スマートさ」が求められるものの、一方でこうした違いを楽しむ、つまり「数学の自由性」を楽しむことも数学教育には必要であると我々は考える。このような体験を高校のうちから経験させることは、生徒らの学びを深くすることであり、大学で数学を学ぶ上でのスキルの1つになると言ってもよいだろう。

近年では学習指導要領改訂の方向性でも述べられているように、高校数学において「深い学び」を促す学習が求められている。「深い学び」とは何か、という議論の詳細は別の機会に譲るが、我々はヴィットマンら[6]のいう構造指向と応用指向の側面を意識した活動バランスよく配置され、それを意識した活動を展開することが必要であると考えている[2]。高木の言葉を借りれば「彼理は、万人が数学者になるものであるかのごとき数学教育は排斥すべしと言う。それはもっともである。(中略)。彼理の主意はよくわかるが、彼理のように言うと、万人が技手になるかの如き数学教育もやはり迷惑であろう。」[4, p.39]\*8ということである。本稿において述べた議論は、ヴィットマンら[6]のいう構造指向の側面に焦点を当て、「命題間のつながり」を意識している。例えば、指数・対数関数の微分公式の証明については、順序のバリエーションの多さから、自分で示したい順番を設定することができる。つまり自分だけの間を持ち、自分なりの答えが探せる活動であるともいえるだろう。こうして「数学の自由性」に力を借りて、自分だけの間を持ち、自分なりの答えが探すが、生徒の「深い学び」につながるであろう、と我々は考える。我々はこうした活動に関する提案を今後も提出し続けたい。

## 附記

3節において述べた三角関数の微分公式の証明に関する活動を2016年度2年次必修科目「数学II」において、A, B組理系選択45名の生徒に対して授業実践を行った(実践報告は成瀬[2]を参照のこと)。我々はそこでの実践から有意義な示唆を得た。この場を借りて感謝する。

\*7本稿冒頭に高木の文章を引用した。そこで述べられた「数学の自由性」とはCantorが無限論を打ち立てた際のエピソードについて語られており、本稿との文脈とは多少異なる。しかし我々は教科書の証明を「習慣とか伝統」に対応させて考え、「数学の自由性」を拡大解釈して引用した。

\*8彼理とはJohn Perry(1850-1920)のことである。20世紀初頭における数学教育改造運動の提唱者として知られている。

<参考文献>

- [1] 一松信ら監訳『数学辞典』, 朝倉書店, 1993.
- [2] 成瀬政光「高校数学での深い学びモデルの実践と研究」, 『日本数学教育学会第49回秋期研究大会発表集録』, pp.497-500, 2016.
- [3] 文部科学省『高等学校指導要領解説 数学編』, 2009.
- [4] 高木貞治「彼理憤慨」, 『数学の自由性』, 筑摩書房, 2010.
- [5] 矢野健太郎, 石原繁『微分積分改訂版』, 裳華房, 2002.
- [6] ヴァイトマンら『PISAを乗り越えて 算数・数学授業改善から教育改革へ』, 東洋館出版, 2004.